

Felix Weißensteiner

# **Zinskurvenmodelle und die Prognose mithilfe des Nelson-Siegel Modells**

## **Masterarbeit**

zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Master of Science  
der Studienrichtung Betriebswirtschaft  
an der Karl-Franzens-Universität Graz

Betreuer: Fischer, Edwin, O.Univ.-Prof. Mag. Dr.rer.soc.oec.

Institut: Finanzwirtschaft

Graz, 23.10.2017

## **Ehrenwörtliche Erklärung**

Ich erkläre ehrenwörtlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere, als die angegebenen Quellen nicht benutzt und die den Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen, als solche kenntlich gemacht habe. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen inländischen oder ausländischen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht. Die vorliegende Fassung entspricht der eingereichten elektronischen Version.

23.10.2017

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis .....</b>	<b>v</b>
<b>Tabellenverzeichnis .....</b>	<b>v</b>
<b>Symbolverzeichnis.....</b>	<b>vi</b>
<b>1 Einführung.....</b>	<b>1</b>
<b>2 Theoretische Grundlagen.....</b>	<b>3</b>
2.1 Zinssätze .....	4
2.1.1 Kassazinsen.....	4
2.1.2 Terminzinsen .....	6
2.2 Zinsstrukturkurven .....	8
2.3 Formen und Bewegungen der Zinsstrukturkurve.....	10
2.4 Ökonomische Zinstheorien .....	13
2.4.1 Erwartungstheorie.....	13
2.4.2 Liquiditätsprämientheorie .....	15
2.4.3 Marktsegmentierungstheorie.....	17
2.4.4 Preferred Habitat-Theorie .....	18
2.5 Einflüsse auf die Zinsstruktur.....	19
<b>3 Zinskurvenmodelle .....</b>	<b>21</b>
3.1 Stochastische Zinskurvenmodelle .....	23
3.1.1 Short Rate Modelle .....	23
3.1.1.1 Gleichgewichtsmodelle .....	25
3.1.1.2 Arbitragefreie Modelle.....	28
3.1.2 Forward Rate Modelle.....	29
3.1.3 Markt Modelle .....	30
3.2 Statistische Modelle.....	32
3.2.1 Parametrische Verfahren .....	32
3.2.1.1 Nelson-Siegel Modell.....	32
3.2.1.2 Svensson Verfahren .....	35
3.2.2 Nichtparametrische Modelle.....	37
<b>4 Prognose mithilfe des Nelson-Siegel Modells.....</b>	<b>40</b>

---

4.1	Grundlagen des Nelson-Siegel Modells nach Diebold und Rudebusch.	42
4.2	Dynamisierung des Nelson-Siegel Modells .....	45
4.3	Empirische Umsetzung des Nelson-Siegel Modells .....	48
4.3.1	Schätzung des Modells .....	48
4.3.2	Daten .....	49
4.3.3	Umsetzung und Ergebnisse .....	53
4.3.4	Testen der Schätzgüte .....	56
<b>5</b>	<b>Conclusio.....</b>	<b>60</b>
<b>Anhang</b>	<b>.....</b>	<b>63</b>
	R-Code für die Analyse der Daten und die Umsetzung des Nelson Siegel Modells.....	63
	Ergebnisse der Prognose.....	65
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>.....</b>	<b>67</b>

---

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Österreichische Zinsstrukturkurve .....	8
Abbildung 2: Grundformen der Zinsstrukturkurve .....	10
Abbildung 3: Shift-Bewegung der Zinsstrukturkurve .....	11
Abbildung 4: Twist-Bewegung der Zinsstrukturkurve .....	12
Abbildung 5: Curvature-Bewegung der Zinsstrukturkurve .....	12
Abbildung 6: Signifikante deterministische und substitutive Faktoren .....	21
Abbildung 7: Unterteilung der Zinskurvenmodelle .....	22
Abbildung 8: S-förmiger Verlauf der Svenssonkurve im Verhältnis zur Laguerre-Funktion .....	36
Abbildung 9: Faktorladungen der Betafaktoren, mit $\Lambda=0.0609$ .....	44
Abbildung 10: Darstellung der verwendeten Daten .....	50
Abbildung 11: Zinstrukturkurvenapproximation durch das Nelson Siegel Modell in drei ausgewählten Szenarien .....	52
Abbildung 12: Entwicklung der Schätzer der 3 Faktoren über den Beobachtungszeitraum .....	54
Abbildung 13: Prognose der Zinsstrukturkurven für Februar und August 2018 ....	56
Abbildung 14: durchschnittliche absolute Abweichung über die Laufzeiten .....	59

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Deskriptive Statistik der verwendeten Daten .....	53
Tabelle 2: Deskriptive Statistik der Schätzer der 3 Faktoren .....	54
Tabelle 3: Darstellung der Prognoseergebnisse anhand des RMSE und TUK ....	58

---

## Symbolverzeichnis

$P_t(\tau)$	Preis einer Nullkuponanleihe mit Laufzeit $\tau$ , bewertet zum Zeitpunkt $t$
$FV$	Tilgungsbetrag am Ende der Laufzeit einer Anleihe
$y_t(\tau)$	Spot-Rate oder Kassazinssatz für die Laufzeit $\tau$ zum Zeitpunkt $t$
$DF_{t,\tau}$	Diskontfaktor für eine Zahlung zu $\tau$ für den Zeitpunkt $t$
$f_{0,t,T}$	Forward Rate zum Zeitpunkt 0 für die Anlageperiode von $t$ bis $T$
$LP_{i+1}$	Einperiodige Liquiditätsprämie für die Periode $i+1$
$r_t$	Short Rate die zum Zeitpunkt $t$
$m(\cdot)$	Driftterm in stochastischen Zinskurvenmodellen
$s(\cdot)$	Diffusionsterm in stochastischen Zinskurvenmodellen
$\delta(t)$	Splinefunktionswert für den Zeitpunkt $t$
$L(t)$	Funktionswert der Laguerrefunktion zum Zeitpunkt $t$
$\lambda_t$	Zerfallsterm im Nelson Siegel Modell von Diebold und Rudebusch
$l_t$	Niveau der Zinsstrukturkurve zum Zeitpunkt $t$
$s_t$	Steigung der Zinsstrukturkurve zum Zeitpunkt $t$
$c_t$	Krümmung der Zinsstrukturkurve zum Zeitpunkt $t$
$\Lambda$	Parametermatrix im Modell von Diebold und Rudebusch
$\varepsilon_t$	Vektor der stochastischen Fehlerterme im dynamisierten Modell
$\mu$	Vektor der Mittelwerte der drei Faktoren im dynamisierten Modell
$A$	Transitionsmatrix im dynamisierten Modell
$\hat{l}_t$	Geschätzter Wert für $l_t$
$\eta_t$	Stochastischer Fehlerterm der Transitions Gleichung

# 1 Einführung

In den Wirtschaftswissenschaften sind Preise die zentralen Größen, denn diese bestimmen, wie hoch die Rendite eines Investments ausfallen wird. Somit unterscheiden sich profitable und verlustreiche Investments lediglich im Preis des Investments. Auf den Finanzmärkten gibt es eine enorme Vielfalt von Preisen, die als Indikatoren für den aktuellen Stand bzw. für die zukünftige Entwicklung des Wirtschaftslebens verwendet werden. Als der bedeutendste Preis hat sich seit Beginn der Wirtschaftswissenschaften der Zinssatz hervor getan. Mishkin & Eakins (2012) definieren den **Zinssatz genauer als Preis, der für das Ausleihen von Kapital anfällt.**<sup>1</sup> Er hat enormen Einfluss auf die aktuelle Lage von Volkswirtschaften, aber auch auf deren Wachstum.

Neben der makroökonomischen Bedeutung ist der Zinssatz auch der zentrale Preis in der Finanzwelt. Er ist ausschlaggebend für viele Investitionsentscheidungen, Portfoliozusammensetzungen und auch für die Bewertung von Hedging- und Spekulationsinstrumenten.

„Der Zinssatz“ existiert allerdings nicht am Finanzmarkt und ist als solcher auch nicht ablesbar. Bei Zinssätzen existiert eine Vielfalt, die durch verschiedene Laufzeiten, Bonitäten, Liquiditäten und viele weitere Einflussfaktoren bedingt ist. Die Zinsstrukturkurve stellt Zinssätze gleicher Risikoklassen in Abhängigkeit von der Laufzeit dar. Die bedeutendste Zinsstrukturkurve ist die Spotkurve, die als eine kompakte Veranschaulichung der aktuellen Zinslage zu verstehen ist.

Weil jedoch Zinstitel, aus denen man die Zinssätze einer bestimmten Risikoklasse herauslösen kann, nur für diskrete Zeitpunkte existieren, ist die Erstellung einer stetigen Zinsstrukturkurve nicht ganz unproblematisch. Für die Erstellung dieser stetigen Zinsstrukturkurve sind Zinsstrukturkurven-Modelle vonnöten.

Diese besitzen aktuell eine enorme Bedeutung. Das ist auf deren Verwendungszwecke für die Bewertung von Zinstiteln und deren teilweise vorhandene Prognose-

---

<sup>1</sup> Vgl. Mishkin & Eakins (2012), S.42

sefähigkeit zurückzuführen. Vor allem der erste Punkt, die Bewertung von Zinstiteln, ist mit der zunehmenden Bedeutung von Zinsderivaten von enormer Wichtigkeit. So wurden laut der Bank for International Settlements im zweiten Halbjahr des Jahres 2016 Transaktionen mit Zinsderivaten im Wert von 368.356 Mrd. \$ abgeschlossen.<sup>2</sup>

Auch die Prognosefähigkeit ist in der aktuellen Situation von großem Interesse, denn im aktuellen, niedrigen Zinsumfeld ist jedem Investor bewusst, dass die Zentralbank in den nächsten Jahren dazu gezwungen sein wird, das Zinsniveau zu heben, um bei Aufkommen der nächsten Krise gerüstet zu sein. Ein Zinskurven-Modell, das also zur Prognose der zukünftigen Zinssätze in der Lage ist, kann somit für den Erfolg von Investmententscheidungen essenziell sein.

Die Prognosefähigkeit von Zinsstrukturkurven-Modellen wird kontrovers diskutiert. Beispielhaft können hier genannt werden: Mönch (2008) & Evans (2003). Deshalb gilt in der Praxis die Random Walk Prognose, also die Prognose, dass die Zinsstrukturkurve unverändert bleibt, immer noch als die zuverlässigste Prognose. Ein Modell, das laut verschiedener, wissenschaftlicher Arbeiten eine verbesserte Prognosegüte aufweist, ist das Nelson-Siegel Modell. Dabei handelt es sich beim Grundmodell um ein statisches Modell, das die Zinsstrukturkurve mithilfe einer Polynomfunktion darstellt. Da es sich um ein statisches Modell handelt, ist es grundsätzlich nicht zur Prognose tauglich. Allerdings haben zahlreiche Autoren dieses Grundmodell erweitert und es so dynamisiert und auch „arbitragefrei“ gestaltet, dass es zur Prognose verwendet werden kann.

In der vorliegenden Arbeit soll die folgende Forschungsfrage erarbeitet und durch eine empirische Überprüfung beantwortet werden:

- Liefert das dynamische Nelson-Siegel Modell validere Schätzungen als die Random Walk Prognose?

Um diese Frage beantworten zu können, ist es notwendig, die folgenden grundsätzlichen Fragen zu Zinsstrukturkurven und ihren Modellen zu erarbeiten:

---

<sup>2</sup> BIS(2017)



1. Worin besteht die Verwendung von Zinsstrukturkurven?
2. Welche Formen können Zinsstrukturkurven annehmen und wie können diese erklärt werden?
3. Welche Modelle gibt es und welche werden in der Praxis verwendet?
4. Welche Kritik gibt es an den verschiedenen Modellen?

Zur Beantwortung der gestellten Fragen ist die Arbeit wie folgt gegliedert:

Der erste Abschnitt ist den theoretischen Grundlagen gewidmet, die notwendig sind, um die Zinskurvenmodelle zu diskutieren und in weiterer Folge, die empirische Umsetzung der Prognose mithilfe eines ausgewählten Modells, des Nelson-Siegel Modells, zu garantieren. Die theoretischen Grundlagen geben einen Einblick in die Formen und Bewegungen von Zinsstrukturkurven, die Einflüsse auf die Zinsstruktur sowie die verschiedenen ökonomischen Theorien, mit denen die Zinsstruktur erklärt wird.

Der zweite Abschnitt ist dann der Vielfalt an Zinsstrukturmodellen gewidmet.

Im dritten Teil, der den Hauptteil der Arbeit bildet, geht es um die genauere Aufarbeitung des Nelson-Siegel Modells und die Schritte, die notwendig sind, um das Modell zur Prognose verwenden zu können. Danach geht es um die empirische Anwendung auf dem österreichischen Markt.

Der vierte Abschnitt ist die Zusammenfassung der empirischen Ergebnisse. Er gibt auch einen Überblick über die diskutierten Themen.

## **2 Theoretische Grundlagen**

In diesem Abschnitt der Arbeit sollen die theoretischen Grundlagen dargestellt werden, die notwendig sind, um die Diskussion über Zinskurvenmodelle im Detail durchzuführen. In den theoretischen Grundlagen sollen zu Beginn die wesentlichen zentralen theoretischen Instrumente vorgestellt werden, die genutzt werden, um Zinsstrukturkurven zu erstellen. Das sind Spotsätze, Forwardsätze und Diskontfaktoren. Diese sollen vorgestellt werden und die Beziehung untereinander

soll eingeführt werden. Vor diesem Hintergrund wird die Zinsstrukturkurve definiert und deren Erstellung beleuchtet. In einem weiteren Schritt sollen die Formen und die Bewegungen der Zinsstrukturkurve erläutert werden, und wie diese mithilfe der bedeutendsten ökonomischen Zinstheorien erklärt werden können.

## 2.1 Zinssätze

Zinskurven unterscheiden sich in Bezug auf die dargestellten Zinssätze. Um die Modelle besser zu interpretieren, ist es essenziell, die Unterschiede, aber auch die Verbindungen zwischen den verschiedenen Zinssätzen, zu verstehen. Bei den vorgestellten theoretischen Konstrukten handelt es sich um die Kassazinsen, auch Spot Rates genannt, die Terminzinsen auch Forward Rates genannt, und die Diskontfaktoren. Diese Drei und vor allem die Beziehung dieser Parameter untereinander sind unerlässlich, um Zinsstrukturkurvenmodelle zu verstehen.

### 2.1.1 Kassazinsen

Der n-jährige Kassazinssatz beschreibt den Zinssatz, den ein Investment erwirtschaftet, das heute beginnt und n Jahre andauert. Während der Laufzeit erfolgen keine Zinszahlungen. Diese erfolgen am Ende der Laufzeit zusammen mit der Rückzahlung des Kapitals.<sup>3</sup>

Die Besonderheit der Kassazinsen, auch Spot-Rates genannt, ist also, dass sie die Verzinsung für ein unmittelbares Investment ohne zwischenzeitliche Zinszahlung darstellen.<sup>4</sup>

Deshalb liegt auch die Interpretation der Spot-Rates als Rendite einer Nullkuponanleihe zum heutigen Zeitpunkt nahe. Eine Nullkuponanleihe (Zero-Kupon Bond) beschreibt dabei eine Anleiheform, bei der es zu keinen laufenden Kuponzahlun-

---

<sup>3</sup> Vgl. Hull (2015), S.119

<sup>4</sup> Vgl. Branger & Schlag (2006), S. 9-12

gen kommt, sondern diese gesammelt am Ende der Laufzeit mit der Auszahlung der Nominale anfallen.<sup>5</sup>

Die am häufigsten ausgewiesene Zinsstrukturkurve und deshalb auch allgemein als Zinsstrukturkurve bezeichnet, ist die Spotkurve. Diese wird aus den Spot-Rates für die gleiche Risikoklasse, aber für unterschiedliche Laufzeiten, erstellt.<sup>6</sup>

Der Anleihepreis eines Zero-Kupon Bond kann immer auch als Diskontfaktor interpretiert werden. Wird als Nominale des Zero-Kupon Bond 1€ angenommen, so beschreibt der Anleihepreis den Barwert des 1€ oder den Diskontfaktor, mit dem der 1€ multipliziert wird. Als Beziehung von Kassazinssatz und dem Anleihepreis ergibt sich bei diskreter Verzinsung:

$$P_t(\tau) = \frac{FV}{(1 + y_t(\tau))^\tau} = DF_{t,\tau} * FV \quad (2.1)$$

$$y_t(\tau) = \sqrt[\tau]{\frac{FV}{P_t(\tau)}} - 1 = \sqrt[\tau]{\frac{1}{DF_{t,\tau}}} - 1 \quad (2.2)$$

Dabei entspricht  $P_t(\tau)$  dem Preis einer Nullkuponanleihe, FV dem ausbezahlten Endwert und  $y_t$  der Spot-Rate für die Periode  $t$ .<sup>7</sup>

Für die Beschreibung der Zinsstrukturkurve als wesentlicher zu erachten, ist die Betrachtung der Beziehung in stetiger Zeit:

$$P_t(\tau) = e^{-\tau y_t(\tau)} \quad (2.3)$$

Dabei wäre  $P_t(\tau)$  der Zero-Kupon Bondpreis eines bis  $\tau$  laufenden Zero-Kupon Bond, bewertet zum Zeitpunkt  $t$ . Eine andere Interpretation wäre, den Preis als den Diskontfaktor für die Periode von  $t$  bis  $\tau$  zu interpretieren. Und  $y_t(\tau)$  entspricht

---

<sup>5</sup> Vgl. Kruse (2014), S.18-20

<sup>6</sup> Vgl. Kruse (2014), S.18-20

<sup>7</sup> Vgl. Kruse (2014), S.18-20

der kontinuierlichen Spot-Rate für die Periode von  $t$  bis  $\tau$  oder der kontinuierlichen nominellen Rendite eines Zero-Kupon Bond für die Periode.<sup>8</sup>

Die Spotkurve in diskreter Zeit ergibt sich als Log-Transformation der Diskontkurve:<sup>9</sup>

$$y_t(\tau) = -\frac{\log P_t(\tau)}{\tau} \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Terminzinsen

Terminzinsen oder Forward-Rates sind definiert als jährlicher Zinssatz, der für ein Ausleihgeschäft gilt, bei dem Vertragsdatum und Ausleihdatum nicht übereinstimmen.<sup>10</sup>

Die Terminzinsen entsprechen also der Verzinsung, die man heute für ein in der Zukunft beginnendes Investment erzielen kann. Möglichkeiten, sich diese Verzinsung zu sichern, sind Terminkontrakte oder ein Nachbau durch die Kombination von Kassageschäften.<sup>11</sup>

Sind die Spot-Rates bekannt, so kann man aus diesen die Forward-Rates ableiten. Das dabei zugrunde gelegte Prinzip ist das der Arbitragefreiheit. So vergleicht man die Verzinsung eines Investments am Spot Markt von heute ( $t = 0$ ) bis  $T$ . Dieses Investment erzielt eine Verzinsung von  $(1 + y_0(T))^T$ . Unter der Annahme der Arbitragefreiheit muss dieses Investment dem eines  $t$ -jährigen Spotinvestments entsprechen und einem Terminkontrakt für die Periode von  $t$  bis  $T$ . Diese zweite Strategie erzielt die Verzinsung  $(1 + y_0(t))^t(1 + f_{0,t,T})^{T-t}$ . Zusammengefasst ergibt diese Gleichheit:

$$(1 + y_0(T))^T = (1 + y_0(t))^t(1 + f_{0,t,T})^{T-t} \quad (2.5)$$

Formt man die Gleichung nach der Forward-Rate um, so ergibt sich:

---

<sup>8</sup> Vgl. Diebold & Li (2006), S.339-341

<sup>9</sup> Vgl. Diebold & Li (2006), S.339-341

<sup>10</sup> Vgl. Gallati (2011), S.53-55

<sup>11</sup> Vgl. Steiner et al. (2012), S.154

$$\begin{aligned}
 (1 + f_{0,t,T})^{T-t} &= \frac{DF_{0,t}}{DF_{0,T}} \Leftrightarrow f_{0,t,T} = \sqrt[T-t]{\frac{DF_{0,t}}{DF_{0,T}}} - 1 \\
 &= \sqrt[T-t]{\frac{(1 + y_0(T))^T}{(1 + y_t(t))^t}} - 1
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Dabei steht  $f_{0,t,T}$  für den Terminzins, der zu  $t=0$  für die Periode von  $t$  bis  $T$  gilt.<sup>12</sup>

Somit kann man die Spot-Rate als geometrischen Durchschnitt der Forward Rates sehen.<sup>13</sup>

$$(1 + y_0(t))^t = (1 + y_0(1))(1 + f_{0,1,2})(1 + f_{0,2,3}) \dots (1 + f_{0,t-1,t}) \tag{2.7}$$

Für die späteren Analysen ist abermals die Überleitung der diskreten Betrachtung in jene einer stetigen Zeit wichtig. Unter Kenntnis der in Abschnitt 2.1.1 dargestellten Diskontfunktion kann die momentane Forward-Rate Kurve ermittelt werden:

$$f_{0,t}(\tau) = -\frac{P'_t(\tau)}{P_t(\tau)} \tag{2.8}$$

Über diese Gleichung kann nun die Beziehung zwischen der Spotkurve oder der Funktion der Spot-Rates und der Forward Rate Kurve erfolgen. Das Vorgehen entspricht dem in diskreter Zeit, jedoch entspricht das Aufsummieren der Forward-Rates der Bestimmung des Integrals und das Wurzelziehen der Division durch die Zeit.<sup>14</sup>

$$y_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_t(u) du \tag{2.9}$$

Die Interpretation der Spot-Rate als gleichgewichteter Durchschnitt der Forward Rate bleibt hingegen bestehen. Mit der Kenntnis der Spot-Kurve oder der Forward-Kurve lassen sich die Kupon-Anleihepreise als Summe der Barwerte der zukünftigen Kuponzahlungen und der Nominalzahlung bewerten.<sup>15</sup>

<sup>12</sup> Vgl. Kruse (2014), S.20-23

<sup>13</sup> Vgl. Gallati (2011), S.53-55

<sup>14</sup> Vgl. Steiner et al. (2012), S.162

<sup>15</sup> Vgl. Diebold & Li (2006), S.340

## 2.2 Zinsstrukturkurven

Zinsstrukturkurven sind definiert als die Darstellung von Zinssätzen der gleichen Risikoklasse in Abhängigkeit der Laufzeit.<sup>16</sup> Dabei ergeben sich verschiedene Zinsstrukturkurven je nach betrachteter Risikoklasse und zusätzlich auch noch, ob Kassazinssätze oder Terminzinssätze verwendet werden.

Im Allgemeinen spricht man bei der Spotkurve, also der Verwendung der Spotsätze in Abhängigkeit der Laufzeit, von der Zinsstrukturkurve.<sup>17</sup>

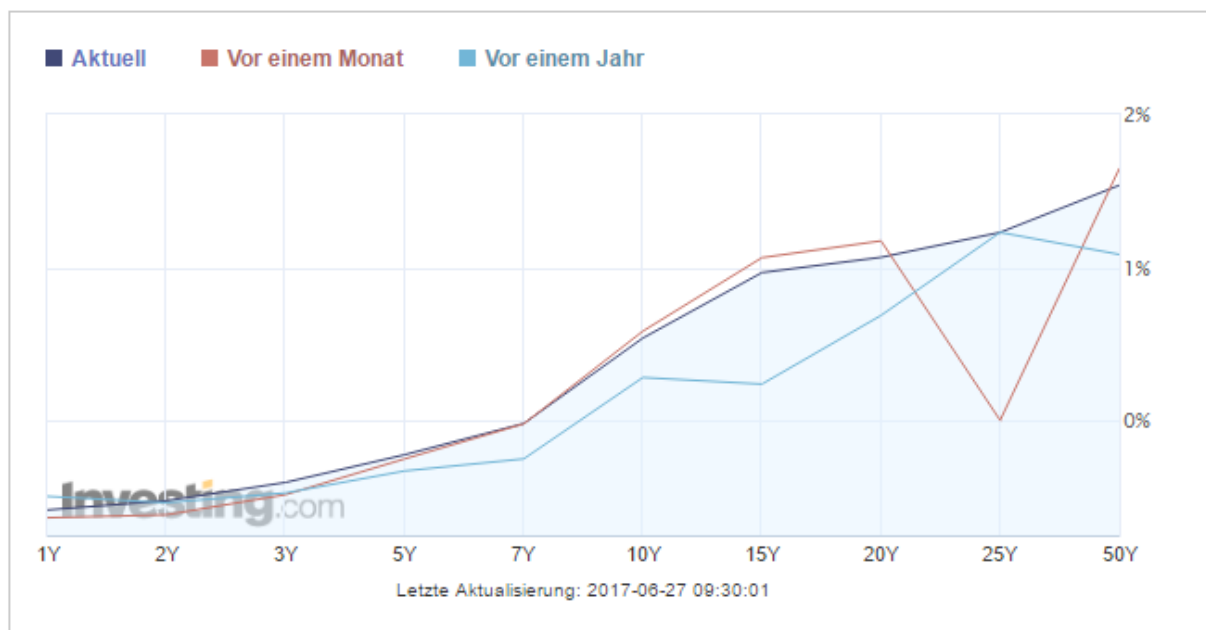


Abbildung 1: Österreichische Zinsstrukturkurve

Quelle <https://de.investing.com/rates-bonds/austria-government-bonds>

In Abbildung 1 ist die österreichische, risikolose Spotkurve zu sehen. Diese wird mithilfe der österreichischen Staatsanleihen erstellt.

Um die Spot Rates aus diesen herauszulösen, wird beim Vorliegen von Nullkuponanleihen deren Rendite ermittelt und verwendet. Sind allerdings keine Nullkuponanleihen verfügbar, greift man auf Kuponanleihen zurück. Um aus diesen die

<sup>16</sup> Vgl. Stoklossa (2010), S. 1

<sup>17</sup> Vgl. Gallati (2011), S.50-55

Kassazinssätze zu ermitteln, werden sukzessive alle Terminzinssätze ermittelt und dann in einem weiteren Schritt die Kassazinssätze.<sup>18</sup>

Der Grund für den Vorzug von Nullkuponanleihen gegenüber Kuponanleihen ergibt sich aus der Nichtexistenz des Kuponeffektes und auch aus dem Wiederveranlagungsrisiko bei Nullkuponanleihen.<sup>19</sup>

Bei der Verwendung der Zinsstrukturkurven zur Bewertung von Zinsprodukten - darunter fallen Zinsderivate, aber auch gewöhnliche Anleihen - ist die Struktur des risikolosen Zinssatzes ein zentrales Element.

Zum Erstellen dieser verwendet man für Laufzeiten bis zu 12 Monaten Geldmarktzinssätze, wie zum Beispiel den LIBOR. Um den risikolosen Zins für einen Zeitraum über 12 Monate zu erhalten, wird die Zinsstrukturkurve erweitert. Eine bewährte Methode ist die Verwendung von Eurodollar Futures. Dadurch kann man die Spotkurve auf einen Zeitraum von bis zu 5 Jahre erweitern. Darüber hinaus greift man dann auf Swaprates zurück, um die Kurve zu erweitern. Diese Kurve wird auch Swap-Spot-Rate-Strukturkurve genannt.<sup>20</sup>

---

<sup>18</sup> Vgl. Ortmann (2017), S.

<sup>19</sup> Vgl. Gallati (2011), S.50-55

<sup>20</sup> Vgl. Hull (2015), S.207

## 2.3 Formen und Bewegungen der Zinsstrukturkurve

Es haben sich bei der Betrachtung der Zinsstrukturkurve vier Grundformen ergeben, die in Abbildung 2 dargestellt werden.

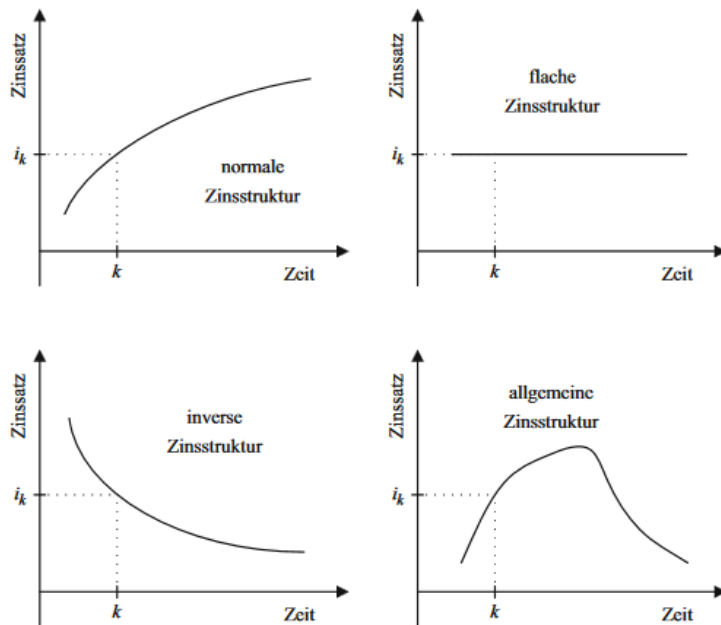


Abbildung 2: Grundformen der Zinsstrukturkurve

Quelle: Ortmann (2017), S.180

Die Kurve links oben in der Abbildung 2 stellt das Szenario einer steigenden Zinsstruktur dar. Dabei steigen die Kassazinssätze mit zunehmender Laufzeit an. Dieses Szenario wird auch als normale Zinsstrukturkurve beschrieben und ist die am häufigsten anzutreffende Form.

Das Szenario rechts daneben beschreibt eine flache Zinsstruktur. Der Zinssatz ist dabei unabhängig von der Laufzeit.

Das Szenario links unten zeigt einen fallenden Zinssatz bei zunehmender Laufzeit. Dieses Szenario wird auch als inverse Zinsstruktur bezeichnet. Eine inverse Zinsstruktur ist vor allem dann anzutreffen, wenn der Markt durch die Angst vor steigenden Zinsen geprägt ist, und Investoren deshalb in kurzfristigere Papiere investieren.



Die Kurve rechts unten beschreibt eine Buckel-Kurve. Der Zinssatz steigt dabei bis zu einem gewissen Laufzeitsegment, fällt dann aber. Als Erklärung für diese Form gilt die Illiquidität von bestimmten Laufzeitsegmenten.<sup>21</sup>

In der Realität entsprechen allerdings Zinsstrukturkurven nicht genau den in Abbildung 2 dargestellten Formen. Zur Veranschaulichung kann die in der Abbildung 1 dargestellte österreichische Zinsstrukturkurve verwendet werden. Es ist dabei zu erkennen, dass die grundlegende Form der aktuellen Kurve zwar normal ist, jedoch nicht dem abstrakten theoretischen Bild entspricht.

Außerdem sind Zinsstrukturkurven auch nicht über die Zeit stabil, sondern bewegen sich. Die drei häufigsten Bewegungen stellen dabei Shift, Twist und Curvature dar.

Shift bezeichnet dabei eine Parallelverschiebung der Zinsstrukturkurve. Dabei kommt es zu einem einheitlichen Anstieg oder Sinken über die gesamte Kurve, dargestellt in Abbildung 3.<sup>22</sup>

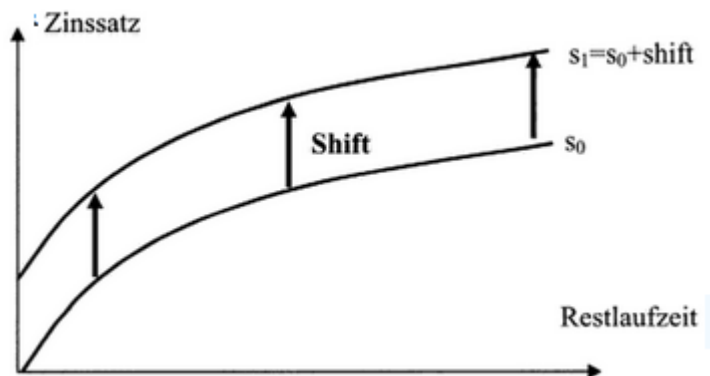


Abbildung 3: Shift-Bewegung der Zinsstrukturkurve

Quelle: Fischer (2010), S.220

Unter einem Twist versteht man die Drehung der Zinsstrukturkurve um einen bestimmten Punkt der Kurve. Dabei kann es entweder zu einer steileren oder flacheren Kurve kommen, dargestellt in Abbildung 4.<sup>23</sup>

<sup>21</sup> Vgl. Gallati (2011), S.51-53

<sup>22</sup> Vgl. Fischer (2010), S.220-225

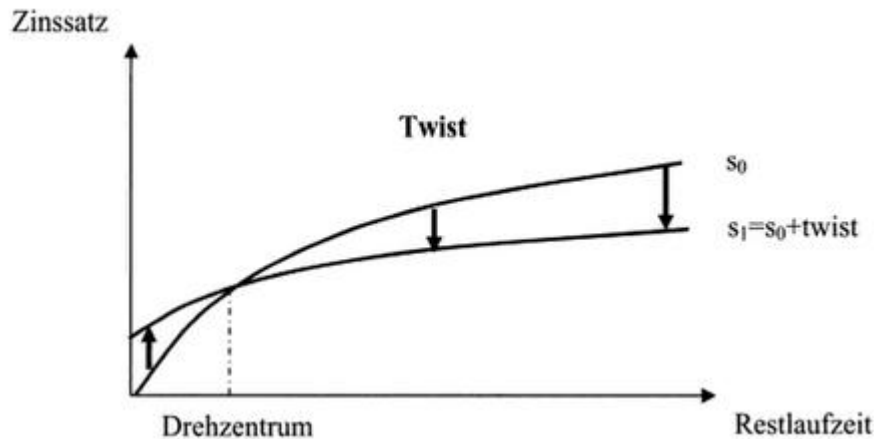


Abbildung 4: Twist-Bewegung der Zinsstrukturkurve

Quelle: Fischer (2010), S.220

Die Curvature-Bewegung ist in Abbildung 5 zu sehen. Dabei kommt es zu einer Veränderung der Krümmung.<sup>24</sup>

In der reinen Form sind diese Bewegungen in der Praxis nicht anzutreffen, meist treten Formen dieser Bewegungen simultan auf.<sup>25</sup>

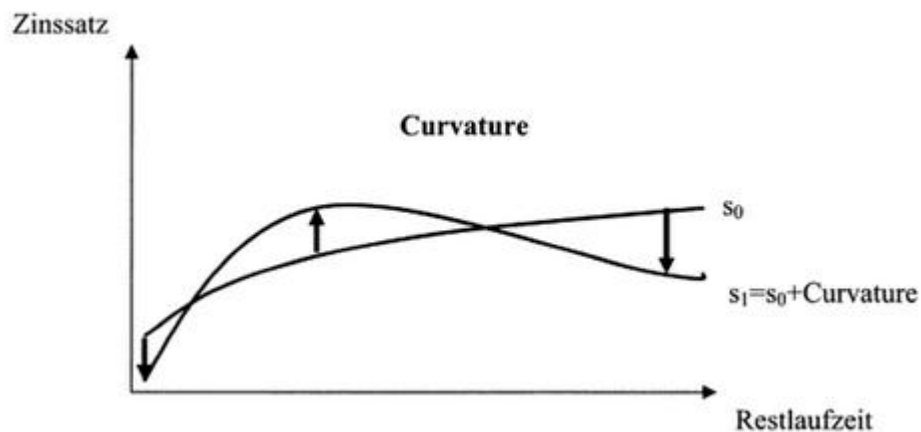


Abbildung 5: Curvature-Bewegung der Zinsstrukturkurve

Quelle: Fischer (2010), S.220

<sup>23</sup> Vgl. Fischer (2010), S.220-225

<sup>24</sup> Vgl. Fischer (2010), S.220-225

<sup>25</sup> Vgl. Fischer (2010), S.220-225

## 2.4 Ökonomische Zinstheorien

### 2.4.1 Erwartungstheorie

Diese Theorie gilt als das Fundament der Erklärungsansätze der Zinsstruktur und geht auf Irving Fisher zurück.<sup>26</sup> Heutzutage unterscheiden wir verschiedene Ausgestaltungen der Erwartungshypothese. So unterscheiden wir die reine Erwartungshypothese in ihrer einperiodigen Form von der n-periodigen Form, aber auch die reine Erwartungstheorie von der verzerrten Form. In der von Fisher (1986) erarbeiteten einperiodigen Variante in klassischer Form werden die Marktteilnehmer als rational und renditemaximierend angenommen und der Bondmarkt als frictionslos. Das heißt, Transaktionskosten und Steuern werden unbeachtet gelassen.

<sup>27</sup>

Außerdem wird die Annahme der vollkommenen Informationseffizienz getroffen. Das bedeutet, dass die Marktteilnehmer über alle entscheidungsrelevanten Informationen des Marktes und auch über die zukünftigen Zinssätze verfügen.<sup>28</sup>

Die zentrale Annahme ist aber die Risikoneutralität der Investoren. Diese besagt, dass Investoren in Bezug auf Anleihen keine Präferenz bezüglich der Restlaufzeit besitzen und sie somit Anleihen mit verschiedenen Restlaufzeiten als vollkommene Substitute werten. Somit sind Investoren indifferent zwischen einer Anlagestrategie in eine bis T laufende Anleihe und T- sukzessiven einperiodigen Anleihen.<sup>29</sup>

Das Modell lässt sich wie folgt in einer mathematischen Gleichung darstellen:

$$E[y_i(i+1)] = f_{s,i,i+1} \quad i = 1, \dots, T-1 \quad (2.10)$$

$y_i(i+1)$  beschreibt die einperiodige Spot Rate für die Periode  $i+1$ .  $f_{s,i,i+1}$ . Sie beschreibt die Forwardrate aus der Zinsstrukturkurve zum Zeitpunkt  $s$ , abgeleitet für die Periode von  $i$  bis  $i+1$ . In Worten ausgedrückt, entspricht die erwartete zukünftige

<sup>26</sup> Fisher (1986)

<sup>27</sup> Vgl. Albrecht & Maurer (2016), S.579f

<sup>28</sup> Vgl. Anderegge (2007), S.128-130

<sup>29</sup> Vgl. Albrecht & Maurer (2016), S.579f

ge Spot Rate dem Forwardsatz, der aus der heutigen Zinsstrukturkurve abgeleitet werden kann.<sup>30</sup>

In der Erwartungshypothese wird also versucht, die Beziehung zwischen erwarteten kurzfristigen Zinsen in der Zukunft und den langfristigen Zinssätzen zu beschreiben. Als unverzerzte Schätzer für die zukünftigen Zinssätze ergeben sich somit die aktuellen implizierten Terminzinssätze.<sup>31</sup>

Dadurch lässt sich der Vergleich der oben erwähnten Investitionsstrategien wie folgt darstellen:

$$(1 + y_t(T))^T = (1 + y_t(t + 1)) * (1 + E[y_{t+1}(t + 2)]) * \dots * (1 + E[y_{T-1}(T)]) \quad (2.11)$$

Die linke Seite der Gleichung beschreibt ein Investment in eine T Perioden laufende Anleihe. Die rechte Seite beschreibt das Investment in T einperiodigen Anleihen. Für die erste Periode kennen wir die Spot Rate. Für die zukünftigen einperiodigen Spot Rates werden die Erwartungen verwendet und diese entsprechen den Forwardsätzen. Die Renditen dieser beiden Investitionen müssen einander entsprechen. So werden diese von Arbitrageuren ausgenutzt. Liegt der Forwardsatz zum Beispiel über den Markterwartungen, so würden Investoren sich den Forwardsatz sichern und erwarten, zum niedrigeren, erwarteten Zins einen Kredit aufzunehmen. Beim Eintreten der Erwartungen würde so ein Arbitragegewinn entstehen. Damit diese Strategie zur Anwendung kommt, müssen Investoren nach ihren Erwartungen handeln.<sup>32</sup>

Die reine Erwartungstheorie liefert auch Erklärungen, wie die Grundtypen der Zinsstruktur zustande kommen können. So liegt die normale Zinsstruktur vor, wenn steigende zukünftige Zinssätze erwartet werden. Hingegen liegt die inverse Zinsstruktur vor, wenn zukünftig fallende Zinssätze erwartet werden. Die gekrümmte Zinsstruktur liegt vor, wenn zuerst steigende Zinssätze erwartet werden, sich aber dann die Erwartung hin zu fallenden zukünftigen Zinssätzen dreht.

<sup>30</sup> Vgl. Albrecht & Maurer (2016), S.580

<sup>31</sup> Vgl. Uhrig-Homburg (2002), S.17-19

<sup>32</sup> Vgl. Albrecht & Maurer (2016), S.580

Die n-periodige Version der Erwartungstheorie wird im Folgenden dargestellt:

$$(1 + y_t(T))^T = (1 + y_t(t + 1)) * E([1 + y_{t+1}(t + 2)] * \dots * [1 + y_{T-1}(T)]) \quad (2.12)$$

Es ist klar ersichtlich, dass beide Versionen der Erwartungstheorie nicht zeitgleich gelten können.<sup>33</sup>

Die grundsätzliche Aussage der traditionellen Erwartungshypothese ist also, dass der langfristige Zins dem Durchschnitt der erwarteten künftigen Zinssätze entspricht. Anders gesagt: Der langfristige Zins bestimmt die kurzfristigen Zinssätze.<sup>34</sup>

### 2.4.2 Liquiditätsprämientheorie

Die Liquiditätsprämientheorie geht auf John Hicks<sup>35</sup> zurück und erklärt den normalen Verlauf der Zinsstrukturkurve durch das Bestehen von Liquiditätsprämien. Für Hicks entspricht der Zinssatz dem Maß der imperfekten Liquidität oder auch *monyness* genannt. Seine Theorie ist also als ein Hybrid der Erwartungstheorie und der Liquiditätspräferenztheorie von Keynes zu sehen. Die Theorie von Hicks weicht von der Annahme vollkommener Märkte ab und unterstellt, dass keine ausreichende Liquidität besteht.<sup>36</sup>

Die Theorie von Keynes beschreibt die Auswahl der Portfolios von Individuen als einem Tradeoff zwischen Liquidität und Rendite. Als Liquidität versteht man dabei, wie leicht es ist, das Asset in Geld, das Gut der höchsten Liquidität, umzutauschen. Investoren wollen für das Halten von Produkten geringerer Liquidität eine höhere Rendite.<sup>37</sup>

Für Hicks ergibt sich, dass Anleihen mit längeren Restlaufzeiten klarerweise längere Kapitalbindungsdauer besitzen und dadurch ein größeres Risiko bei einer

---

<sup>33</sup> Vgl. Albrecht & Maurer (2016), S.580f

<sup>34</sup> Vgl. Stoklossa (2010), S.35-40

<sup>35</sup> Hicks (1939)

<sup>36</sup> Vgl. Stoklossa (2010), S.35-40

<sup>37</sup> Vgl. Stoklossa (2010), S.35-40

notwendig werdenden vorzeitigen Liquidierung entsteht. Außerdem bewirken unerwartete Zinsänderungen unter Umständen Kursverluste. Dieser Effekt ist umso ausgeprägter, je länger die Restlaufzeit der Anleihe ist. Deshalb kann davon ausgegangen werden, dass Investoren die als risikoavers einzustufen sind, kurzfristig laufende Anleihen präferieren.<sup>38</sup>

Um Anleihen mit längeren Laufzeiten zu halten und sich damit dem zusätzlichen Risiko auszusetzen, fordern Investoren nun eine Liquiditätsprämie  $LP$ . Diese muss mit längerer Restlaufzeit steigen. Dadurch ergibt sich aus Gleichung (1) für  $i \geq 0$ :

$$E[y_i(i + 1)] + LP_{i+1} = f_{s,i,i+1} \quad (2.13)$$

Dabei ist  $LP_{i+1}$  eine einperiodige Liquiditätsprämie für die Periode  $i+1$ . Zusätzlich muss die Liquiditätsprämie für Periode 1 größer sein als für Periode 0, aber kleiner als die der Periode 2 usw. aus der Gleichung lässt sich erkennen, dass der erwartete zukünftige einperiodige Zinssatz dem um die Liquiditätsprämie verminderten abgeleiteten Terminzinssatz entspricht.<sup>39</sup>

Nach Hicks beinhaltet die Liquiditätsprämie nicht nur eine Kompensation für den Verzicht auf Liquidität, sondern auch eine Kompensation für Ausfallsrisiko, Einkommensrisiko und auch Kapitalrisiko. Einkommens- und Kapitalrisiko bestehen nur dann nicht, wenn die Laufzeit des Assets dem gewünschten Anlagehorizont entspricht.

Hicks beschreibt weiterhin, dass Kreditnehmer hingegen längerfristige Kredite bevorzugen, denn bei diesen ist die Zinsbelastung über einen längeren Zeitraum bekannt. Zusammen mit der Präferenz für Assets mit hoher Liquidität zeigt sich so eine konstitutionelle Schwäche auf der langen Seite des Kreditmarktes. Denn somit ergibt sich eine Übernachfrage nach längeren Laufzeiten. Dieses Phänomen verstärkt die Argumentation, dass für längerfristige Papiere eine höhere Liquiditätsprämie gezahlt werden muss.

---

<sup>38</sup> Vgl. Albrecht & Maurer (2016), S.580f

<sup>39</sup> Vgl. Albrecht & Maurer (2016), S.580f

Stoklossa (2010) zeigt eine ökonometrische Analyse der Theorie von Hicks und kommt zu den folgenden Ergebnissen:

Im Wesentlichen kann diese Theorie bestätigt werden. Auch ist die Annahme valide, dass sich die Zinsunterschiede zwischen langen und kurzen Laufzeiten durch Liquiditätspräferenzen ergeben. Allerdings lässt sich empirisch nicht die von Hicks prophezeite monoton steigende Zinsstrukturkurve, sondern eine Zinsstrukturkurve mit degressiver Steigung beobachten. Als Erklärung kann die Theorie gelten, dass einige Investoren lange Laufzeiten präferieren, da diese höhere Zinszahlungen versprechen.<sup>40</sup>

### **2.4.3 Marktsegmentierungstheorie**

In dieser Theorie von John M. Culbertson<sup>41</sup> werden Investoren als extrem risiko-avers angenommen. Sie entscheiden sich also bei gleichem Erwartungswert für die risikoärmere Option und werden als gleichgültig gegenüber Renditeunterschieden angenommen. Investoren können lediglich ihr Ertragsrisiko eliminieren, wenn die Restlaufzeit ihres Investments der ihrer Ausgaben entspricht.<sup>42</sup>

Für die Marktteilnehmer ergibt sich also ein Risiko, wenn die Laufzeit des Investments nicht dem gewünschten Anlagehorizont entspricht. Denn ist die Laufzeit kürzer als der gewünschte Anlagehorizont, dann ist der Marktteilnehmer dem Wiederveranlagungsrisiko ausgesetzt. Das bedeutet, der Marktteilnehmer weiß nicht, zu welchem Zins er das Investment wiederveranlagen kann. Der zweite Fall, also wenn der Anlagehorizont kürzer als die Laufzeit ist, führt zu Preisänderungs- bzw. Kursänderungsrisiko. Das bedeutet, der Investor muss das Investment vor dem Laufzeitende verkaufen und der Preis bzw. Kurs, zu dem er verkauft, ist ungewiss.<sup>43</sup>

---

<sup>40</sup> Vgl. Stoklossa (2010), S.35-40

<sup>41</sup> Culbertson (1957)

<sup>42</sup> Vgl. Albrecht & Maurer (2016), S.580f

<sup>43</sup> Vgl. Moritz (2012), S.143-144

Der Markt zerfällt so in Partialmärkte, denn Anleihen mit unterschiedlichen Laufzeiten sind nicht substituierbar. Für jeden dieser Partialmärkte kommt es unabhängig zur Einstellung eines Gleichgewichts.

Die Gestalt der Zinsstrukturkurve wird maßgeblich davon bestimmt, wie sehr die Laufzeitpräferenz auf der Angebots- und Nachfrage abweicht. Zu den Investoren, die aufgrund eines möglichen Risikos einer längeren Kapitalbindung bei vorzeitiger Liquidation eine Präferenz für kurze Laufzeitsegmente aufweisen, kommen Langfristinvestoren, die einem Wiederanlagerisiko nach Ablauf eines Kurzfristinvestments ausgesetzt sind. Darüber hinaus betreiben institutionelle Investoren wie Banken und Versicherungen Asset/Liability Management - Erstere mit eher kurzfristigem Horizont, Letztere mit einem langfristigen Horizont. So wie die Investoren versuchen, ihr Risiko zu minimieren, sind auch die Emittenten bestrebt, genügend Planungs- und Kalkulationssicherheit zu erreichen. In Abhängigkeit von den zu finanzierenden Investitionsobjekten bildet sich auch eine Präferenz für spezielle Laufzeitsegmente heraus. Die Höhe der Zinssätze reflektieren somit die Knappheitsverhältnisse, die sich in den einzelnen Fristen durch Angebot und Nachfrage ergeben.<sup>44</sup>

#### **2.4.4 Preferred Habitat-Theorie**

Die Preferred Habitat-Theorie von Modigliani und Sutch<sup>45</sup> nimmt genauso wie die Marktsegmentierungstheorie an, dass Anleger unterschiedliche Präferenzen für bestimmte Laufzeitsegmente besitzen. Allerdings erweitert man den Modellrahmen und nimmt an, dass Investoren bereit sind, das Laufzeitsegment zu wechseln, wenn eine Prämie geboten wird, die ihr mögliches Ertragsrisiko und ihre Transaktionskosten, die durch die Umschichtung entstehen, gedeckt werden. Durch diese Substituierbarkeit wird ein Zerfall des Gesamtmarktes in Teilsegmente verhindert.<sup>46</sup>

---

<sup>44</sup> Vgl. Albrecht & Maurer (2016), S.580ff

<sup>45</sup> Modigliani, F. und R. Sutch (1966)

<sup>46</sup> Vgl. Albrecht & Maurer (2016), S.580ff



Als Differenz zwischen Angebot und Nachfrage ergibt sich für jedes Laufzeitsegment eine eigene Risikoprämie. Diese Risikoprämien sind jedoch nicht mehr zwingend positiv, sondern können auch negative Werte annehmen. Die Argumentation dahinter ist, dass Investoren neben dem Liquiditätsrisiko auch anderen Risiken ausgesetzt sind. Im Saldo können durch diese Effekte also auch negative Werte für die Liquiditätsprämie entstehen.<sup>47</sup>

## 2.5 Einflüsse auf die Zinsstruktur

Die Zinsstruktur ändert sich ständig und die jeweils ausgewiesenen Kurven haben deshalb nur für eine begrenzte Zeit Bedeutung. In diesem Abschnitt wird erklärt, welche Einflussfaktoren wesentlich für die Zinsstruktur sind. Diese Arbeit orientiert sich dabei an Stoklossa (2010), der den Einfluss von zwanzig Faktoren auf die unterschiedlichen Fristen der Zinsstrukturkurve testet.

Die Abbildung 6 fasst die Ergebnisse der getesteten Faktoren zusammen. Bei den getesteten Faktoren handelt es sich um Faktoren, die in den verschiedenen Theorien der einflussreichsten Ökonomen als wesentliche Einflussgrößen definiert werden. Beispielsweise der von Ohlin erwähnte Einfluss der Ersparnisse auf die Zinsstrukturkurve.

In der Folge sollen die Faktoren, die einen signifikanten Einfluss auf die Zinsstruktur haben, genauer vorgestellt werden:

1. Kapitalintensität: Dieser Faktor soll die nur schwer zu quantifizierenden Innovationen darstellen. Diese werden von Schumpeter als zentrale Einflussgröße verwendet. Stoklossa verwendet als Definition für die Kapitalintensität den Kapitalstock pro Arbeit. Die Berechnung der Kapitalintensität "erfolgt als Quotient aus dem nominalen Bruttoinlandsprodukt und der Anzahl an Beschäftigten."<sup>48</sup>
2. Mean Reversion: Die Verwendung des Mean Reversion Effekts als Einflussgröße auf die Zinsstruktur geht auf Irving Fisher zurück. Dieser erläu-

---

<sup>47</sup> Vgl. Albrecht & Maurer (2016), S.580ff

<sup>48</sup> Stoklossa (2010), S.60

tert folgenden Effekt: "Zwischen den Zinssätzen auf kurzfristige und denen auf langfristige Anleihen besteht ein ständiges Schwanken, das heißt, wenn der kurzfristige Zins bedeutend über dem langfristigen liegt, besteht für ihn die Wahrscheinlichkeit zu fallen, oder wenn er bedeutend unter dem langfristigen liegt, die Wahrscheinlichkeit zu steigen."<sup>49</sup> Im Kapitel der stochastischen Zinsstrukturmodelle wird noch näher auf den Mean Reversion Effekt eingegangen.

3. Inflationsgap: Darunter versteht man den Unterschied der aktuellen Inflationsrate zur Zielinflationsrate, die von der EZB auf 2% festgesetzt ist.

Die weiteren Faktoren, die einen signifikanten Einfluss auf die Zinsstrukturkurve aufweisen, sind die Zinserwartung, die Beschäftigungsrate, das Wirtschaftswachstum und die Inflation.

Für die einzelnen Segmente kann auch noch separat gezeigt werden, welche Faktoren den größten Einfluss haben. So haben auf die Zinssätze bis 3 Monate das Wirtschaftswachstum, die Geldmenge M3 und die Zinserwartungen den stärksten Einfluss. Blickt man hingegen auf das lange Ende, also auf die 5-Jahres-Zinssätze, dann sind die Faktoren mit dem stärksten Einfluss der Mean Reversion Effekt, der allerdings einen inversen Effekt hat, genauso wie die Rohstoffpreise und die Gewinnerwartungen, die hingegen einen positiven Einfluss haben. Die obigen Aussagen lassen sich zusammengefasst in der Abbildung 6 betrachten.

Darin werden sowohl die deterministischen, also die Zinsstruktur bestimmenden Faktoren, und die substitutiven, also die Substitutionsprozesse der Zinsstruktur aufgelistet.

Als signifikant zu werten sind dabei die Faktoren, die einen Koeffizienten größer als 0,23 besitzen.

---

<sup>49</sup> Fisher (1907), S.175

Variable (Factors)	Authors	Maturity	1D	1M	3M	6M	1Y	2Y	5Y	10Y	TS	FR	CB
1 Growth, dGDP	Boehm, Fisher, Hayek	1		<u>0.78</u>	<u>0.74</u>	<u>0.62</u>	<u>0.40</u>	<u>0.24</u>	0.15	0.12	<u>0.24</u>	-0.18	<u>0.36</u>
2 Liquidity Allotment	Wicksell	2				-0.16							
3 i Expectatn. (Lead 1)	Fisher, Meiselman	0	0.46	<u>0.51</u>	<u>0.47</u>	0.35	0.17				0.12		<u>0.12</u>
4 Price Expc & dP	Fisher, Friedman	1											<u>0.09</u>
5 Commodity Price	Gibson	4						<u>-0.47</u>	-0.45	-0.32		0.27	
6 Capital Intensity	Schumpeter	2					<u>0.35</u>	<u>0.29</u>	<u>0.18</u>				
7 Gross Captl. Frmtn.	Schumpeter, Hayek	2					0.40	0.34	0.19				
8 ESIN	Schumpeter	0					<u>0.45</u>	<u>0.36</u>	<u>0.28</u>			-0.25	
9 Credits, Loans	Hayek, Ohlin, Brunner	0				<u>0.33</u>	<u>0.27</u>	<u>0.21</u>	<u>0.17</u>	<u>0.15</u>			
10 Savings Gross	Ohlin, (Fisher)	0										-0.47	
11 Money Stock, M1	Brunner-Meltzer	-2					<u>0.14</u>	<u>0.14</u>	0.11				
12 LM3	Keynes	0					<u>-0.24</u>	<u>-0.23</u>	<u>-0.21</u>	<u>-0.23</u>			
13 IS	Keynes	-2					<u>0.33</u>	<u>0.20</u>			0.22		0.16
14 Employment	Keynes	0					<u>0.26</u>	<u>0.24</u>	<u>0.27</u>	<u>0.28</u>		-0.26	
15 Y-Gap	Taylor	2					<u>0.44</u>	<u>0.41</u>	<u>0.28</u>	<u>0.19</u>		0.14	
16 dP-Gap	Taylor	-2								<u>-0.15</u>		<u>0.16</u>	
17 Money Stock, M3	Friedman	2	<u>0.59</u>	<u>0.58</u>	<u>0.57</u>	<u>0.55</u>	<u>0.41</u>	<u>0.24</u>	0.12		-0.23		
18 EUROSTOXX 50	Friedman	0					<u>0.30</u>	<u>0.32</u>	<u>0.22</u>	<u>0.11</u>		-0.13	
19 Interest Parity	Interest Rate Parity	0					<u>0.12</u>	<u>0.15</u>					
20 Mean Reversion	Arbitrage Theory	-1	-0.16	-0.14	-0.15	-0.21	-0.28	-0.35	-0.35	-0.39		-0.44	-0.28
21 Substitn.	i (long) = i (short)	Lag											
1D	Substitution Effects	0		<u>0.91</u>	<u>0.80</u>	0.67	0.40	0.18	0.07	0.06			
1M		0			<u>0.95</u>	<u>0.81</u>	0.52	0.27	0.14	0.11			
3M		0				<u>0.92</u>	0.66	0.39	0.23	0.18			
6M		0					0.88	0.64	0.43	0.33			
1Y		0						0.91	0.71	0.53			
2Y		0							0.91	0.70			
5Y		0								0.90			
Granger Causality: = independent variable = dependent variable (interest rate) = no Granger = mutual Minus-Zeichen vor korrigiertem Bestimmtheitsmaß = negativer Korrelationskoeffizient													
Zinssätze:		i1D = Zins 1 Tag, i1M = Zins 1 Monat, (...), i10Y = Zins 10 Jahre											
		TS = Zins-Spread der Zinsstruktur, FR = EURO-BUND-Future, ECB = Leitzinssatz EZB											

Abbildung 6: Signifikante deterministische und substitutive Faktoren

Quelle: Stoklossa (2010), S. 191.

Des Weiteren zeigt Stoklossa die stochastischen Prozesse, die Effekte auf die Entwicklung der Zinsstruktur haben. Vor allem das kurze Ende der Zinsstruktur ist sehr volatil und daher auch stark durch kurzfristige Schocks beeinflussbar.<sup>50</sup>

### 3 Zinskurvenmodelle

Dieser Abschnitt wird genutzt, um die verschiedenen Modelle vorzustellen, die verwendet werden können, um Zinsstrukturkurven zu erstellen. Wie bereits im Abschnitt 2.2 erläutert, werden am Markt verfügbare Nullkupon- oder Kuponanleihen verwendet, um die Zinsstruktur für diskrete Zeitpunkte zu bestimmen. Allerdings wird immer eine stetige Zinsstrukturkurve ausgewiesen, denn diese liefert ein vollständigeres Bild und wird für die Bewertung bestimmter Zinsprodukte benötigt. Um nun stetige Zinsstrukturkurven zu erstellen, gibt es eine Vielzahl von Modellen, an die ganz spezifische Anforderungen gestellt werden. Einerseits muss das Modell in der Lage sein, die historische Entwicklung hinreichend gut zu erklären, zum anderen muss das jeweilige Zinsstrukturkurvenmodell auch in der Lage sein, die ver-

<sup>50</sup> Vgl. Stoklossa (2010), S.190-200

schiedenen in Abschnitt 2 erwähnten Formen und deren Übergänge ineinander darzustellen.<sup>51</sup> Ahlgrim et al. fassen die in der Empirie erkannten Eigenschaften zusammen, die ein geeignetes Zinsstrukturkurvenmodell aufweisen sollte:

- Zinssätze sollen einem Mean Reversion Prozess folgen.
- Langfristige Zinssätze sollen eine geringere Volatilität als die kurzfristigen Zinssätze aufweisen.
- Die Korrelation der Zinssätze sollte über die verschiedenen Laufzeiten immer positiv sein, wobei die Korrelation umso höher sein sollte, je geringer die Laufzeitunterschiede sind.
- Eine Proportionalität von Höhe und Volatilität der Zinssätze.<sup>52</sup>

In dieser Arbeit wird die Unterteilung der Modellklassen in Anlehnung an (Kowalski 2011) vorgenommen.

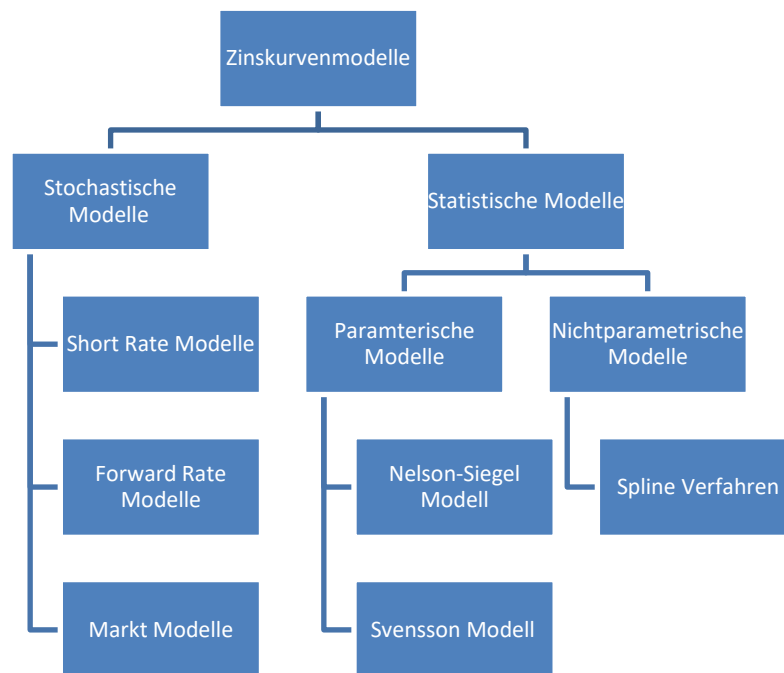


Abbildung 7: Unterteilung der Zinskurvenmodelle

Quelle: Anlehnung an Kowalski (2011), S.17

Wir unterscheiden also zwei grobe Klassen von Zinskurvenmodellen. Die erste Modellklasse sind die stochastischen Zinskurvenmodelle und die zweite Klasse die statistischen Modelle.

<sup>51</sup> Vgl. Mayer (2009), S.1ff

<sup>52</sup> Vgl. Ahlgrim et al. (1999), S.10

### 3.1 Stochastische Zinskurvenmodelle

In den stochastischen Zinskurvenmodellen geht man davon aus, dass sich die Zinsstrukturkurve anhand des Wissens von einer geringen Anzahl (im Allgemeinen 1-3) von Faktoren abschätzen lässt. Für die Faktoren, die zur Bestimmung der Zinsstrukturkurve notwendig sind, wird angenommen, dass diese sich durch einen stochastischen Prozess darstellen lassen.<sup>53</sup>

Mithilfe eines solchen Zinskurvenmodells wird nun versucht, Aussagen darüber zu treffen, wie und mit welcher Wahrscheinlichkeit sich die Zinssätze zu bestimmten Fristen bewegen.<sup>54</sup>

Diese Erkenntnisse werden vor allem zur Bewertung von Zinsderivaten verwendet.<sup>55</sup>

Die Einteilung der stochastischen Zinskurvenmodelle orientiert sich vor allem daran, welcher Faktor den Modellen zugrunde gelegt wird. So haben sich Modelle entwickelt, welche die Short Rate als Faktor nehmen, aber auch andere Modellklassen, die die Forwardintensität oder am Markt ablesbare Zinssätze verwenden.

#### 3.1.1 Short Rate Modelle

Um besser zu verstehen, was Short Rate Modelle ausmacht, wird zuerst die Definition der Short Rate oder vom momentanen kurzfristigen Zinssatz vorgenommen.

$$r = \lim_{h \rightarrow 0} y_t(t + h) \quad (3.1)$$

Es handelt sich also um den zum Zeitpunkt  $t$  geltenden Zinssatz für einen infinitesimal kurzen Zeitraum. Diese Größe ist klarerweise eine theoretische, die nicht am Markt zu beobachten ist.<sup>56 57</sup>

<sup>53</sup> Vgl. Spremann (2007), S.161f

<sup>54</sup> Vgl. Spremann (2007), S.161f

<sup>55</sup> Vgl. Spremann (2007), S.161f

<sup>56</sup> Vgl. Hull (2015), S. 860

<sup>57</sup> Vgl. Albrecht & Maurer (2016), S.620

Bei den Short Rate Modellen wird der momentane kurzfristige Zinssatz oder auch Short Rate und dessen Verhalten modelliert. In diesen Modellen beinhaltet der kurzfristige Zinssatz jegliche Informationen über die Zinsstruktur des Modells. Darauf aufbauend kann für jeden beliebigen Zeitpunkt eine Arbitrage-freie Zinsstrukturkurve abgeleitet werden.<sup>5859</sup>

Diese Modelle setzen für den Prozess der Short Rate eine risikoneutrale Welt voraus. In dieser erwirtschaftet man im Intervall  $[t, t + \Delta t]$  im Mittel  $r_t \Delta t$  an Zinsen.<sup>60</sup>

Im Detail bedeutet das, dass zur Erstellung der Zinsstrukturkurve zu jedem beliebigen Zeitpunkt lediglich der Wert der Short Rate zu diesem Zeitpunkt sowie der risikoneutrale Prozess, dem die Short Rate folgt, bekannt sein muss. Sobald der Prozess für die Short Rate bestimmt ist, kann auch die anfängliche Zinsstruktur und ihre Entwicklung über die Zeit dargestellt werden. Zusammengefasst werden die Modelle in einer stochastischen Differenzialgleichung, die für einen allgemeinen Prozess, dem  $r$  folgt, wie folgt aussehen kann:

$$dr = m(r, t)dt + s(r, t)dz \quad (3.2)$$

Dabei ist  $r$  die Short Rate,  $m(r, t)$  der Driftterm und  $s(r, t)$  der Diffusionsterm.<sup>61</sup>

Wie dieser Prozess ausgestaltet ist, ist modellspezifisch. So fassen (Albrecht und Maurer 2016) die Vorgehensweise von Short Rate Modellen wie folgt zusammen: „Spezifiziere einen stochastischen Prozess, i.d.R. ein Diffusionsprozess, für die Entwicklung der Zinsintensität und bestimme unter Eliminierung von Arbitragemöglichkeiten die Zerobondpreise“.<sup>62</sup>

---

<sup>58</sup> Vgl. Hull (2015), S. 860

<sup>59</sup> Vgl. Mayer (2009), S.1ff

<sup>60</sup> Vgl. Ortman (2017), S.208-218

<sup>61</sup> Vgl. Hull (2015), S. 860f

<sup>62</sup> Albrecht & Maurer (2016), S.619

Angemerkt soll dazu werden, dass Zinsintensität ein Synonym für die Short Rate ist, und die Bestimmung der Zerobondpreise, wie in Abschnitt 2.2, der Bestimmung der Zinsstrukturkurve entspricht.

Auch innerhalb der Klasse der Short Rate Modelle lässt sich eine Kategorisierung einführen. So unterscheidet man neben der Art des Diffusionsprozesses, der unterstellt wird, auch zwischen den Modellklassen: Gleichgewichtsmodelle und arbitragefreie Modelle.

### **3.1.1.1 Gleichgewichtsmodelle**

Bei Gleichgewichtsmodellen beginnt man mit ökonomisch fundierten Annahmen und versucht, diese möglichst treffend durch einen Prozess für den kurzfristigen Zinssatz zu approximieren. Da diese Modelle vor allem zum Einsatz bei der Bewertung von Anleihen kommen, aber auch von Zinsderivaten, beobachtet man die Entwicklung der Preise dieser Finanztitel in Abhängigkeit der Entwicklung der Short Rate nach dem angenommenen Prozess.<sup>63</sup>

Die Gleichgewichtsmodelle unterscheiden sich darin, wie viele Faktoren als Unsicherheitsquellen modelliert werden. In dieser Arbeit wird lediglich auf die Einfaktormodelle eingegangen. In aller Regel wird dabei für den risikoneutraleren Prozess ein Ito-Prozess angenommen, der folgende Form aufweist:

$$dr = m(r)dt + s(r)dz \quad (3.3)$$

In ihr gibt  $m$  die momentane Drift, also die Richtung der Entwicklung des momentanen Zinssatzes an, und  $s(r)$  beschreibt die momentane Standardabweichung, die Höhe der zufälligen Schwankungen. Verglichen mit der allgemeinen Form, der Short Rate Modelle kann, leicht erkannt werden, dass sich jeweils der Drift-, aber auch der Diffusionsterm, als zeitunabhängig darstellen. In dem dargestellten Einfaktormodell ist es offensichtlich, dass sich alle Zinssätze in dieselbe Richtung ändern; allerdings determiniert es nicht um welchen Betrag. Das bedeutet, die Zinssätze für unterschiedliche Fristen können sich mitunter unterschiedlich stark be-

---

<sup>63</sup> Vgl. Hull (2015), S. 860f

wegen. Die Form der Zinsstruktur über die Zeit ist also nicht als konstant anzusehen. Damit ist ein Einfaktormodell nicht so restriktiv, wie es zunächst erscheint.<sup>64</sup>

Ein Nachteil von Gleichgewichtsmodellen ist, dass die aktuelle Zinsstruktur kein Modellparameter ist, sondern nur durch geeignete Kalibrierung des Modells anhand der zur Verfügung stehenden Parameter erzeugt wird.<sup>65</sup>

Die zwei bekanntesten Einfaktor-Gleichgewichtsmodelle sind die Modelle von Vasicek (1977) und von Cox-Ingersoll-Ross (1985). Diese sollen nun in der Folge kurz vorgestellt werden.

Als Nachteil der Short Rate Modelle ist zu erwähnen, dass deren Parameter aus dem Kapitalmarkt heraus kalibriert werden müssen. Das kann in bestimmten Fällen dazu führen, dass es zum Beispiel bei der Bewertung von Nullkuponanleihen mit unterschiedlichen, jedoch unendlich vielen Laufzeiten zu unendlich vielen Differentialgleichungen kommt, und somit die eindeutige Identifizierung der Parameter unmöglich ist.<sup>66</sup>

Einfaktormodelle weisen zusätzlich den Nachteil auf, dass per Annahme die Zinssätze lediglich von einem Risikofaktor, der Short Rate, abhängig sind. So können also nur Risiken modelliert werden, die gleichermaßen auf die Zinssätze unterschiedlicher Laufzeiten wirken.<sup>67</sup>

Zur Veranschaulichung der Funktionsweise von Short Rate Gleichgewichtsmodellen soll an dieser Stelle das Vasicek Modell dienen. Das Modell wurde von dem tschechischen Mathematiker Oldrich Vasicek im Jahre 1977 publiziert.<sup>68</sup>

Vasicek trifft in seinem Modell zwei zentrale Annahmen:

1.) Die Short Rate ist eine stochastische Größe, sie ändert sich also laufend und zwar zufällig.

---

<sup>64</sup> Vgl. Hull (2015), S. 860f

<sup>65</sup> Vgl. Ortmann (2017), S.208-218

<sup>66</sup> Vgl.: Rudolf (2013), S. 54f

<sup>67</sup> Vgl.: Rudolf (2013), S. 95f

<sup>68</sup> Vasicek (1977)



2.) Die Short Rate folgt einem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess oder einem Mean Reversion Prozess. Konkret bedeutet das, die erwartete Zinsänderung ist abhängig vom derzeitigen Zinsniveau. Dieser Prozess beschreibt, dass die Short Rate dazu tendiert, sich zu ihrem langfristigen Mittel zu bewegen.<sup>69</sup>

Es ergibt sich für die Änderung der Short Rate die folgende Gleichung:

$$dr(t) = a(\mu - r(t)) dt + \sigma dz \quad (3.4)$$

Dabei beschreibt  $\mu$  den langfristigen Mittelwert, zu dem die Short Rate langfristig tendiert. Das geschieht mit Rückkehrgeschwindigkeit  $a$ .

Der Term  $a(\mu - r(t)) dt$  gibt zwei wichtige Erkenntnisse für die Veränderung der Short Rate ( $dr(t)$ ) frei:

Einerseits ist die Zinsbewegung proportional zur Länge des Zeitintervalls,  $dt$  - je länger die Zeitspanne, desto größer ist die zu erwartende Zinsänderung.

Andererseits ist die Zinsbewegung auch proportional zum Abstand, den die Short Rate vom langfristigen Mittelwert hat.<sup>70</sup>

So ergibt sich ein positiver Driftterm, wenn die Short-Rate unter dem langfristigen Mittelwert liegt. Dieser ist umso größer, je größer die Differenz  $(\mu - r(t))$  ist und umso größer  $a$  ist. Liegt die Short Rate über dem langfristigen Mittelwert, so ist genau das Gegenteil zu beobachten.<sup>71</sup>

Der Term  $\sigma dz$  zeigt, dass sich die Zinsbewegung nicht deterministisch, sondern als zufällig beschreiben lässt. Die Bewegung kann weiterhin genauer beschrieben werden, weil sie die Standardabweichung  $\sigma$  besitzt. Der Term  $dz$  beschreibt, eine normal verteilte stochastische Größe mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz  $dt$ , also der Streuung  $\sqrt{dt}$ .<sup>72</sup>

<sup>69</sup> Vgl. Spremann (2007), S.160-170

<sup>70</sup> Vgl. Spremann (2007), S.160-170

<sup>71</sup> Vgl. Ortman (2017), S.208-218

<sup>72</sup> Vgl. Spremann (2007), S.160-170

Zusammengefasst bewegt sich die Short Rate in einem Zeitintervall von  $dt$ , also proportional zu  $a(m - r)dt$ ; überlagert wird das durch  $\sigma dz$ . Diese Zufallsbewegung besitzt den Erwartungswert 0 und die Standardabweichung  $\sigma\sqrt{dt}$ .<sup>73</sup>

Beim Vasicek Modell ist es nicht unbedingt der Fall, dass die aktuell beobachtete Zinsstruktur mit der modellierten, erwarteten Zinsstruktur im Modell zum Zeitpunkt  $t=0$  übereinstimmt.

Die Schwachpunkte des Vasicek-Modells sind:

1. Der risikolose Zinssatz kann negative Werte annehmen. Man geht hingegen in der Praxis davon aus, dass niemand dazu gezwungen werden kann, sein Geld zu negativen Zinsen zu veranlagern. Allerdings hat man in den letzten Jahren zunehmend negative Zinssätze für Staatsanleihen gesehen. Das heißt, dieser Punkt ist als Schwachpunkt zu relativieren.
2. Die Varianz des risikolosen Zinssatzes hängt nur von der Zeit, nicht aber vom Niveau der Short Rate ab. Empirisch gilt es hingegen als erwiesen, dass die Varianz der Short Rate mit steigendem Wert von  $r(t)$  ebenfalls größer wird.<sup>74</sup>

### 3.1.1.2 Arbitragefreie Modelle

Arbitrage Modelle beruhen auf dem Prinzip der Arbitragefreiheit und nehmen die aktuelle Zinsstruktur als Ausgangspunkt für die Modellierung der zukünftigen Zinssätze.<sup>75</sup>

Damit ergibt sich der wichtige Unterschied zwischen Gleichgewichtsmodellen und Arbitragefreien Modellen als, „in einem Gleichgewichtsmodell ist die aktuelle Zinsstruktur ein Modelloutput. In einem No-Arbitrage Modell dagegen ist die aktuelle Zinsstruktur ein Modell-Input.“<sup>76</sup>

<sup>73</sup> Vgl. Hull (2015), S.863

<sup>74</sup> Vgl. Ortman (2017), S.208-218

<sup>75</sup> Vgl. Spremann (2007), S.160-170

<sup>76</sup> Vgl. Hull (2015), S.869

Dadurch ziehen vor allem Praktiker die arbitragfreien Modelle den Gleichgewichtsmodellen vor, denn für die Bewertung von Zinsderivaten ist es unerlässlich, von der heutigen Zinsstrukturkurve auszugehen, um den Preis folgerichtig zu bestimmen.<sup>77</sup>

Sichtbar wird der Unterschied der Modelle bei einem Blick auf die Driftrate der Short Rate, denn deren Höhe hängt nun von der Zeit ab. Das folgt, weil der durchschnittliche Pfad des Verlaufs der Short Rate durch die anfängliche Form der Zinsstrukturkurve bestimmt wird.<sup>78</sup>

Zum Beispiel: Sinkt die anfängliche Zinsstrukturkurve zwischen zwei Punkten, so besitzt die Short Rate für diese Zeitspanne eine positive Drift. Die Überführung von vielen Gleichgewichtsmodellen in arbitragefreie Modelle ist durch das zeitabhängige Ausgestalten des Driftterms möglich.<sup>79</sup>

### **3.1.2 Forward Rate Modelle**

Forward Rate Modelle modellieren die Forwardintensität und darauf aufbauend die Zinsstrukturkurve.<sup>80</sup>

Der Unterschied dieser Modelle zu den bisher vorgestellten Short Rate Modellen besteht darin, dass man die Entwicklung der Forward Rates mithilfe eines stochastischen Prozesses für die verschiedenen Laufzeiten analysiert. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Forward Rates den zukünftigen Spot Rates entsprechen.<sup>81</sup>

Das zentrale Modell geht auf die Autoren David Heath, Bob Jarrow und Andy Morton und ihren im Jahre 1990 veröffentlichten Artikel zurück.<sup>82</sup> Sie stellen darin die

---

<sup>77</sup> Vgl. Hull (2015), S.869

<sup>78</sup> Vgl. Hull (2015), S.869

<sup>79</sup> Vgl. Hull (2015), S.869

<sup>80</sup> Vgl. Mayer (2009), S.1

<sup>81</sup> Vgl. Ostwald (2010), S.6

<sup>82</sup> Heath et al. (1990)

No-Arbitragebedingungen vor, die ein Modell einer Zinsstruktur beschreiben muss.<sup>83</sup> Um ihr Modell arbitragefrei auszugestalten, beschränken die Autoren die Dynamik der Forwardrates mit einer Driftrestriktion. Diese wird so umgesetzt, dass ein direkter Zusammenhang zwischen Drift und Volatilität der Forward Rates gegeben ist.<sup>84</sup>

Das Modell benötigt als Inputvariable auch lediglich die anfängliche Zinsstruktur und die Volatilitätsfunktion, der die Terminzinssätze folgen. Das dadurch entstehende Modell ist in der Lage, Zinsderivate präferenzfrei zu bewerten.<sup>85</sup>

Bei Forward Rate Modellen ist es möglich, durch das Einbeziehen einer beliebigen Anzahl von stochastischen Variablen eine realistische Darstellung der Zinsstruktur zu schaffen.

Als Nachteil ergibt sich, dass die dem Modell zugrunde gelegte Forwardintensität nicht am Markt zu beobachten ist.<sup>86</sup>

### **3.1.3 Markt Modelle**

Markt Modelle sind als eine Erweiterung der Forward Rate Modelle zu sehen. Sie knüpfen an dem Nachteil der Forward Rate Modelle an, und zwar, dass die stetigen Forward Rates nicht am Markt zu beobachten sind. Stattdessen werden dem Modell die tatsächlich am Markt beobachtbaren diskreten Zinssätze zugrunde gelegt.

Es haben sich dabei zwei Ströme dieser Modellklasse hervor getan: erstens LIBOR-Markt-Modelle und andererseits Swap-Markt-Modelle. Namensgeber dieser Modelle ist, welcher am Markt beobachtbarer Zinssatz dem Modell zugrunde gelegt wird, LIBOR-Sätze oder die Swapsätze.<sup>87</sup>

---

<sup>83</sup> Vgl. Hull (2015), S.900f

<sup>84</sup> Vgl. Ostwald (2010), S.6

<sup>85</sup> Vgl. Stoklossa (2010), S.186

<sup>86</sup> Vgl. Stoklossa (2010), S. 186

<sup>87</sup> Vgl. Stoklossa (2010), S.186f

Diese zwei Modelle stellen auch die in der Praxis am häufigsten verwendeten Modelle dar. Die Beliebtheit ist darauf zurückzuführen, dass sich Bewertungsgleichungen ergeben, die der Bewertungsgleichung des Black and Scholes Modells entsprechen. Auch die Kalibrierung an die aktuelle Kurve stellt kein Problem dar, weil die impliziten Black-Volatilitäten herangezogen werden.<sup>88</sup>

Das LIBOR-Markt-Modell wurde erstmals in den Arbeiten von Brace, Gatarek und Musiela (1997) sowie Miltersen, Sandmann und Sondermann (1997) publiziert. Ein Unterschied zu dem Modell von Heath Jarrow und Morton besteht darin, dass die Verzinsung vierteljährlich erfolgt, anstatt wie im HJM-Modell kontinuierlich. Die vierteljährliche Verzinsungsperiode wurde gewählt, weil diese den Konventionen für Caps und Floors entspricht.<sup>89</sup>

Swap Rate Modelle gehen auf Jamshidian (1997) zurück. Als Unterschied zu den LIBOR Markt Modellen ergibt sich lediglich die Annahme, welche Zinssätze einem lognormalverteilten Prozess folgen. Im Swap-Markt-Modell sind das die Forward Swap Rates, im LIBOR-Markt-Modell hingegen sind das die Forward LIBOR Sätze. Es ergeben sich daraus für die als lognormalverteilten Zinssätze Bewertungsgleichung, die der des Black and Scholes entsprechen.

Als Nachteil dieser Modelle ergibt sich, dass sich in dem Swap Markt Modell keine Bewertungsgleichung für die LIBOR Sätze ableiten lässt.<sup>90</sup>

---

<sup>88</sup> Vgl. Stoklossa (2010), S.186f

<sup>89</sup> Vgl. Hull (2015), S. 903-914

<sup>90</sup> Vgl. De Jong et al. (2000), S. 8.

## 3.2 Statistische Modelle

### 3.2.1 Parametrische Verfahren

Parametrische Verfahren geben explizit die Funktion in Form einer sogenannten „single-piece function“ vor. Die Form der Funktion wird dabei abhängig gemacht von der Restlaufzeit, aber auch von  $k$  Parametern, die gewählt werden, um die Approximation möglichst gut auszugestalten. Dabei ergibt sich als Nachteil der Verfahren die geringe Flexibilität. Durch die Wahl einer vorgegebenen Funktion ist die Flexibilität eingeschränkt.

Der Erfolg dieses Modell ist eng verknüpft mit der Auswahl der Funktion, die unterstellt wird. Eine zentrale Anforderung an den Funktionstypus ist dabei, dass dieser die in Abschnitt 2.2 aufgezählte Zinsstrukturkurvenformen darstellen kann. Die Funktionswahl sollte zudem ökonomisch fundiert sein.

Als Vorteil für die parametrischen Modelle ergibt sich deshalb die einerseits leichte Anwendung dieser Verfahren und auf der anderen Seite die gute Interpretierbarkeit der einzelnen Parameter.

Parametrische Modelle erfreuen sich besonders im Europäischen Raum großer Beliebtheit. Als die zwei wesentlichsten parametrischen Modelle gelten das Nelson-Siegel Modell und die Erweiterung dieses Modells, das Svensson Modell.

#### 3.2.1.1 Nelson-Siegel Modell

Das Modell von Nelson und Siegel stammt aus dem Jahre 1987.<sup>91</sup> Es handelt sich dabei um ein Modell mit geringer Parametrisierung, das aber statistisch und ökonomisch akkurate Ergebnisse liefert. Es stützt sich auf die Erkenntnis von Nelson, dass Zinssätze sich gut als Differentialgleichungen zweiter Ordnung modellieren lassen.<sup>92</sup>

---

<sup>91</sup> Nelson & Siegel (1987)

<sup>92</sup> Vgl. Steiner et al. (2012), S.162

Deshalb unterstellt es als Approximationsfunktion eine Laguerre Differentialgleichung.

$$t * L''(t) + (1 - t) * L'(t) + nL(t) = 0 \quad (3.5)$$

Dabei ist  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $t \in \mathbb{R}$ .

Die Wahl dieser Approximationsfunktion ist darauf zurückzuführen, dass die Laguerre Funktionen die Lösung einer Differentialgleichung darstellen. Außerdem ist dieser Funktionstypus dazu in der Lage, den Großteil der gewünschten Zinsstrukturkurvenverläufe darzustellen.<sup>93 94</sup>

Da die Spot Rates durch Differentialgleichungen gegeben sind, entsprechen die Lösungen den Terminzinsen. Die Terminzinsfunktion wird also mit der Laguerre Funktion ersten Grades dargestellt, die um eine zusätzliche Konstante  $\tau_1$  erweitert wurde.<sup>95</sup>

$$f(t) = b_0 + b_1 * \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) + b_2 * \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) \frac{t}{\tau_1} \quad (3.6)$$

Dabei gilt  $b_0, b_1, b_2, \tau_1 > 0$ .

Der Parameter  $\frac{1}{\tau_1}$  ist von besonderer Bedeutung. Dieser stellt die Rate der exponentiellen Abnahme der anderen Modellparameter dar.<sup>96</sup>

Um zu den Spot Rates zu gelangen, integriert man die Terminzinsfunktion bezüglich der Zeit. Dieser Vorgang kommt einer Summation im diskreten Fall gleich. Das Wurzelziehen in diskreter Zeit wird in stetiger Zeit ersetzt durch die Division durch  $t$ .<sup>97</sup>

$$r(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(t') dt' = \frac{1}{t} \int_0^t b_0 + b_1 * \exp\left(\frac{-t'}{\tau_1}\right) + b_2 * \exp\left(\frac{-t'}{\tau_1}\right) \frac{t'}{\tau_1} dt' \quad (3.7)$$

<sup>93</sup> Vgl. Kowalski (2011), S.19-22

<sup>94</sup> Vgl. Steiner et al. (2012), S.162

<sup>95</sup> Vgl. Kowalski (2011), S.19-22

<sup>96</sup> Vgl. Kowalski (2011), S. 19-22

<sup>97</sup> Vgl. Steiner et al. (2012), S.162

$$r(t) = b_0 + b_1 * \frac{1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right)}{t/\tau_1} + b_2 * \left( \frac{1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right)}{t/\tau_1} - \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) \right) \quad (3.8)$$

Die Parameter  $b_0, b_1, b_2$  müssen aus dem Markt geschätzt werden.<sup>98</sup> Die Diskontfunktion, die zum Ausgleich der Datenpunkte verwendet wird, ergibt sich als:

$$d(t) = \exp(-t * r(t)) \quad (3.9)$$

Die Diskontfunktion ist ebenfalls in der Lage, einen Großteil der gewünschten Verlaufsformen darzustellen, wozu normale, inverse und solche mit einem Extremum zählen.<sup>99</sup> Um die Einfachheit bei der Interpretation der Parameter sichtbar zu machen, werden die Grenzwerte betrachtet.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = b_0 + \lim_{t \rightarrow \infty} & \left( b_1 * \frac{1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right)}{t/\tau_1} + b_2 \right. \\ & \left. * \left( \frac{1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right)}{t/\tau_1} - \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) \right) \right) = b_0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Da der Grenzwert der Funktion, wenn die Laufzeit gegen Unendlich geht,  $b_0$  ist, liegt die Interpretation von  $b_0$  als das langfristige Zinsniveau nahe.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} r(t) = b_0 + \lim_{t \rightarrow 0} & \left( \frac{\tau_1 b_1 (1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right))}{t} \right. \\ & \left. + \frac{\tau_1 b_2 (1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right))}{t} - b_2 \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) \right) = b_0 + b_1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Durch die Anwendung der Regel von L'Hospital ergibt sich als Grenzwert  $b_0 + b_1$ . Es ist offensichtlich, dass  $b_1$  den Unterschied zwischen dem langfristigen und dem kurzfristigen Zinsniveau angibt. Und die Summe  $b_0 + b_1$  ergibt die Short Rate.

Bei einem genauen Blick auf die Spot-Rate-Funktion wird auch ersichtlich, dass die Parameter  $b_0, b_1, b_2$  das Niveau, die Steigung und die Krümmung der Funktion beschreiben. Die Parameter  $b_2, \tau_1$  haben außerdem Einfluss auf die Erzeugung

<sup>98</sup> Vgl. Kowalski (2011), S. 19-22

<sup>99</sup> Vgl. Steiner et al. (2012), S.163



eines Buckels,  $b_2$  bestimmt die Höhe und die Richtung des Buckels und  $\tau_1$  die Länge.

Als Vorteil des Modells ergibt sich also die Möglichkeit, alle grundlegenden Formen der Zinsstruktur darzustellen, und das mit nur wenigen und einfach zu interpretierenden Parametern.

Als Nachteil hingegen ist die beschränkte Flexibilität aufgrund der Wahl einer „single-piece“ Funktion zu sehen. Sichtbar wird dieser Nachteil vor allem in Phasen hoher Marktunsicherheit, da in diesen Zeiten die Zinsstrukturkurve häufig wesentlich komplexere Formen als die bekannten Grundtypen annimmt. Vor allem S-förmige Verläufe sind dann anzutreffen, und diese können nur durch Funktionen dargestellt werden, die mehrere Extremwerte ausbilden können. Dies ist mit dem Nelson-Siegel Modell jedoch nicht möglich.<sup>100</sup>

### 3.2.1.2 Svensson Verfahren

Das Modell von Svensson stellt eine Erweiterung zu dem Modell von Nelson und Siegel dar und stammt aus dem Jahre 1994.<sup>101</sup> Svensson führt darin zwei neue Parameter ein, durch die eine Erzeugung eines zweiten Extremums möglich ist. Die Erweiterung ist also als eine Erhöhung der Flexibilität, aber auch als eine Verbesserung der Approximationsgüte, vor allem in Zeiten, wenn die Zinsstrukturkurve durch einen S-förmigen Verlauf gekennzeichnet ist.

Durch die zusätzlichen zwei Faktoren kommt es zu einer Darstellung eines Konvexitätseffekts. Damit wird die Anleihenbewertung für lange Laufzeiten verbessert.<sup>102</sup>

Als Funktion für Terminzinsen ergibt sich im Svensson Modell:

$$f(t) = b_0 + b_1 * \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) + b_2 * \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) \frac{t}{\tau_1} + b_3 * \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right) \frac{t}{\tau_2} \quad (3.12)$$

<sup>100</sup> Steiner et al. (2012), S.163f

<sup>101</sup> Svensson (1994)

<sup>102</sup> Vgl. Steiner et al. (2012), S.164-166

Für den zusätzlich eingeführten Parameter gilt  $\tau_2 > 0$ . Für die Spot Rates, die abermals durch die Integration der Forwardratefunktion ermittelt werden, ergibt sich:

$$r(t) = b_0 + b_1 \frac{1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right)}{\frac{t}{\tau_1}} + b_2 \left( \frac{1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right)}{\frac{t}{\tau_1}} - \exp\left(\frac{-t}{\tau_1}\right) \right) + b_3 \left( \frac{1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right)}{t/\tau_2} - \exp\left(\frac{-t}{\tau_2}\right) \right) \quad (3.13)$$

Die Grenzwerteigenschaften bleiben in dem Modell von Svensson unverändert, und damit auch die gefolgerten Interpretationen der Parameter. Die Abbildung stellt den Vergleich des Nelson/Siegel Modells und des Svensson Modells dar. Es wird sichtbar, dass das Svensson Modell in der Lage ist, einen S-förmigen Kurvenverlauf darzustellen.

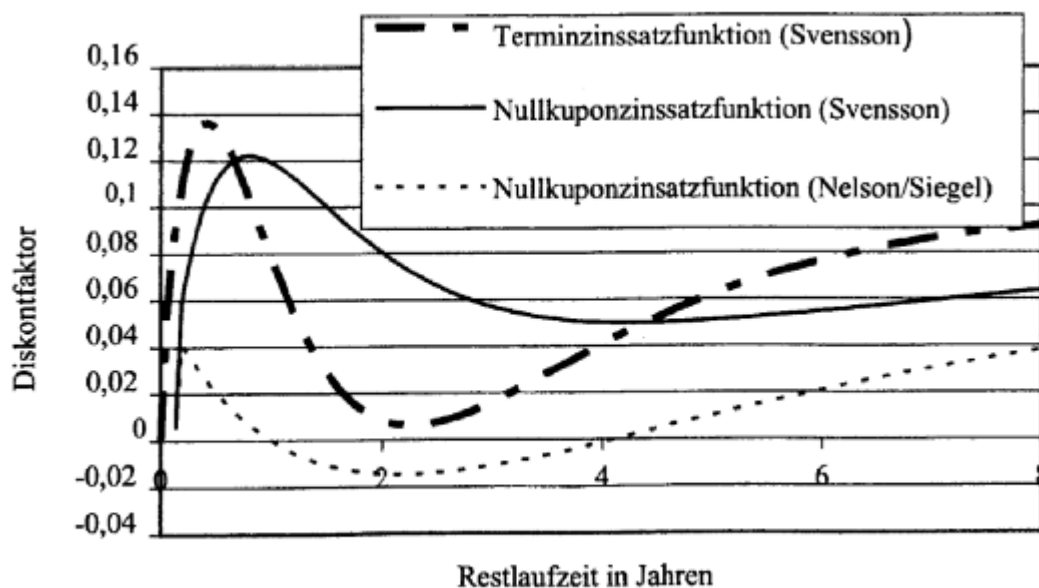


Abbildung 8: S-förmiger Verlauf der Svenssonkurve im Verhältnis zur Laguerre-Funktion

Quelle: (Steiner, Bruns und Stöckl 2012), S.165

In der Abbildung werden die Parameter mit  $b_0 = 0.1$ ,  $\beta_1 = -0.06$ ,  $b_2 = -0.3$ ,  $b_3 = 0.4$ ,  $\tau_1 = 1.5$ ,  $\tau_2 = 0.5$  gewählt. Das langfristige Zinsniveau ist also 10%. Das momentane Zinsniveau liegt bei 4%.<sup>103</sup>

### 3.2.2 Nichtparametrische Modelle

Der wesentliche Unterschied der nichtparametrischen Modelle zu den parametrischen Modellen liegt in den Annahmen, die dem Funktionstypus zugrunde gelegt werden. Bei den nichtparametrischen Modellen werden dabei keine expliziten Annahmen über den Verlauf getroffen. Dabei ergibt sich eine erhöhte Flexibilität gegenüber den parametrischen Modellen, und damit kommt es auch zu einer Verbesserung der Approximationsgüte.

Als Nachteil hingegen ergibt sich die fehlende Glätte der Funktion.

Die nichtparametrischen Modelle, die auch als Spline Modelle bekannt sind, werden in der Praxis vor allem von den Zentralbanken der englischsprachigen Welt bevorzugt. Die größten Zentralbanken sind die der USA, von Japan und Kanada, aber auch von Großbritannien.<sup>104</sup>

Spline Funktionen sind dabei abschnittsweise definierte Polynome, die sich in der Wahl des Grades unterscheiden. Die Unterteilung in Intervalle verhindert, im Gegensatz zu den parametrischen Modellen, zu starke Oszillationen.<sup>105</sup>

Die theoretische Grundlage für die Verwendung der Spline Funktionen liegen im Approximationssatz von Weierstraß und Stone. Darin beweisen Weierstraß und Stone, dass für jede stetige und differenzierbare Funktion ein Polynom bestimmt werden kann, welches dieses beliebig genau in einem geschlossenen Intervall approximiert.<sup>106</sup>

Der erste Schritt bei der Umsetzung der Spline Verfahren ist die Unterteilung der gesamten Laufzeit in  $n$  Teilintervalle. Daraus ergeben sich  $n+1$  Knotenpunkte und

<sup>103</sup> Vgl. Steiner et al. (2012), S.165

<sup>104</sup> Vgl. Kowalski (2011), S.21-24

<sup>105</sup> Vgl. Schwarz & Klöckler (2009), S.8

<sup>106</sup> Vgl. Zimmerer & Hertlein (2007), S.106

für jedes dieser Teilintervalle wird ein Polynom vom Grad  $k$  bestimmt. Die Splinefunktion des Grades  $n$  ist dann definiert als die Summe der gewichteten Polynome.<sup>107</sup>

Um die Spline Funktion zur Darstellung der Zinsstrukturkurve verwenden zu können, muss diese an den Knotenpunkten stetig sein, also keine Sprünge aufweisen. Zum anderen muss sie  $k-1$ -mal differenzierbar sein.<sup>108</sup>

Daraus ergibt sich, dass eine stückweise lineare Regression nicht durchgeführt werden kann, da das zwar zu einer stetigen Funktion führt, allerdings aber nicht zu stetigen Ableitungen.

Als explizites Beispiel soll an dieser Stelle das Kubische Spline Verfahren vorgestellt werden. Dieses verwendet eine Splinefunktion dritten Grades und geht auf die Arbeit von McCulloch aus dem Jahre 1975 zurück. Dabei handelt es sich um eine Erweiterung seines eigenen Modells, das quadratische Splines verwendet. Durch die kubischen Splines lässt sich vor allem der Vorteil erkennen, dass die Forward-Kurve einen wesentlich glatteren Verlauf aufweist.<sup>109</sup>

Zur Umsetzung des Modells werden  $N$  am Markt beobachtbare Anleihen mit unterschiedlichen Restlaufzeiten zur Schätzung verwendet. Das gesamte Laufzeitintervall wird dann in  $n$  Teilintervalle unterteilt, die  $n+1$  Knotenpunkte aufweisen. Bei der Wahl der Anzahl der Knotenpunkte ist eine umso stärkere Oszillation bei längeren Laufzeiten zu erkennen, je mehr Knotenpunkte gewählt werden.<sup>110</sup>

Für die Anzahl an Knotenpunkten ( $l$ ) gibt es einen Vorschlag von McCulloch:

$$l = \text{INT}(\sqrt{N}) - 1 \quad (3.14)$$

<sup>107</sup> Vgl. Steiner et al. (2012), S.166

<sup>108</sup> Vgl. Schiffel (2009), S.119f

<sup>109</sup> McCulloch (1975), S.828

<sup>110</sup> Vgl. Kowalski (2011), S.25

Wenn die Anzahl der Knotenpunkte vorgenommen wurde, dann gilt es noch zu bestimmen, wo diese gesetzt werden. Dabei versucht man, möglichst gleichviele Anleihen pro Teilintervall zu schaffen.

Die Knotenpunkte,  $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$ , wobei gilt  $t_1 = 0$  und  $t_{n+1} = t_k$ , können wie folgt bestimmt werden:

$$t_i = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ t_H + \psi(t_{H+1} - t_H), & 2 \leq i \leq n \\ t_k, & i = l \end{cases} \quad (3.15)$$

Dabei ist  $H = INT \left\{ \frac{(i-1)N}{n} \right\}$  und  $\psi = \frac{(i-1)N}{n} - H$ .<sup>111</sup>

Für die Unterteilung in Intervalle gibt es auch wesentlich weniger umfangreiche Ausführungen. So verzichten Nawalkha und Soto<sup>112</sup> auf die Gleichverteilung der Anleihen. Stattdessen führen sie lediglich drei Intervalle ein - kurze, mittlere und lange Frist.

Nachdem die Knotenpunkte festgelegt wurden, kommt es zur Bestimmung der Diskontfunktion. Dazu wird ein kubisches Polynom für das jeweilige Teilintervall festgelegt.

$$\delta(t) = 1 + \sum_{i=1}^t \beta_i f_i(t) \quad (3.16)$$

Dabei repräsentiert  $f_i(t)$  jeweils ein kubisches Polynom und  $\beta_i$  den zu schätzenden Parameter. Der Diskontfaktor muss für den Zeitpunkt null gleich 1 sein, womit gilt  $f_i(0) = 0$ . Um die Glätte der Zinsstrukturkurve zu garantieren, müssen die Polynomfunktionen an den Intervallgrenzen einen einheitlichen Wert aufweisen und auch eine einheitliche erste und zweite Ableitung bei  $T_i$  haben.

McCulloch definiert die geltenden Polynome wie folgt und unterscheidet dabei, dass für den Fall  $i < n+2$  gilt:

<sup>111</sup> McCulloch (1975), S.828

<sup>112</sup> Nawalkha & Soto (2009), S.24

$$f_i = 0 \quad \text{für } t < t_{i-1} \quad (3.17)$$

$$f_i = \frac{(t - t_{i-1})^3}{6(t - t_{i-1})} \quad \text{für } t_{i-1} \leq t < t_i \quad (3.18)$$

$$f_i = \frac{(t_i - t_{i-1})^2}{6} + \frac{(t_i - t_{i-1})(t - t_i)}{2} + \frac{(t - t_i)^2}{2} - \frac{(t - t_{i-1})^3}{6(t - t_{i-1})} \quad (3.19)$$

$$\text{für } t_i \leq t < t_{i+1}$$

$$f_i = (t_{i+1} - t_{i-1}) \left( \frac{2t_{i+1} - t_i - t_{i-1}}{6} + \frac{t - t_{i+1}}{2} \right) \quad \text{für } t > t_{i+1} \quad (3.20)$$

Für den Fall  $i = n+2$  gilt  $f_i = t$

Das Ziel der Approximation ist es, die Parameter  $\beta_i$  dermaßen zu schätzen, dass die Abweichungen der durch das Modell errechneten Preise von den tatsächlichen minimiert werden. Das lässt sich mithilfe der Linearen kleinste Quadrate Methode umsetzen. Machbar ist das nur, da die Diskontfunktion linear ist.<sup>113</sup>

Nachteile oder Kritiken am Modell der kubischen Splines befassen sich einerseits mit der Sensitivität der Diskontfunktion bezogen auf die Lage und Anzahl der Knotenpunkte und andererseits mit dem untypischen Kurvenverlauf am langen Ende der Kurve.<sup>114</sup>

## 4 Prognose mithilfe des Nelson-Siegel Modells

Dieser Abschnitt ist der Anwendung des Nelson Siegel Modells gewidmet. Das heißt, dass einerseits gezeigt werden soll, wie die Zinsstrukturkurve aus vorliegenden Zinsdaten mithilfe des Nelson-Siegel Modells approximiert wird, und außerdem soll auch eine Prognose der zukünftigen Spotkurve anhand des Nelson-Siegel Modells vorgenommen werden.

Die zugrunde gelegten Daten für die Umsetzung werden der Federal Reserve Homepage entnommen, die täglich die Zinsdaten für den US-amerikanischen Raum veröffentlicht.

---

<sup>113</sup> Vgl. McCulloch (1975) S.829

<sup>114</sup> McCulloch (1975), S.30

Für jeden analysierten Datumspunkt wird dann eine Schätzung der Zinsstrukturkurve mithilfe des Nelson Siegel Modells angenommen. Auf Grundlage dieser Daten wird eine Zinsstrukturkurve für die nächste Periode geschätzt.

Um jedoch das Modell zur Prognose zu verwenden, sind einige Zwischenschritte notwendig. Das Nelson-Siegel Modell ist ein statisches Modell. Um es als Prognoseinstrument zu verwenden, muss es dynamisiert werden.

Bei den Modifikationen, die am Grundmodell vorgenommen werden, orientiert sich die Arbeit an Diebold & Rudebusch (2013), das der Zinsstrukturkurven Modellierung und deren Prognose gewidmet ist und eine Dynamisierung des Modells zeigt. Außerdem haben sie sich auch mit der Schwachstelle des Nelson-Siegel Modells, dabei handelt es sich um die Nichtarbitragefreiheit des Modells, beschäftigt und eine Möglichkeit gefunden, diese zu beheben.

Allerdings befasst sich diese Arbeit nicht mit einer arbitragefreien Ausgestaltung des Modells. Der Grund hierfür ist, dass die Arbitragefreiheit eine theoretische Notwendigkeit ist, die aber die Prognosefähigkeit deutlich verschlechtert. Außerdem wird auch die Schätzung der Modellparameter durch das Auftreten von mehreren Likelihood-Maxima deutlich schwieriger. Aber der wohl wichtigste Grund ist, dass bei der Einbeziehung lediglich arbitragefreier Daten, das Modell im Großteil der Fälle auch arbitragefreien Output zur Folge hat.<sup>115</sup>

Im ersten Schritt erfolgt die Beschäftigung mit dem Vorschlag des Modells von Diebold und Rudebusch, welches gewisse Änderungen gegenüber dem Grundmodell aufweist, wie zum Beispiel die abweichende Interpretation der Betafaktoren, denn diese werden als Level oder Niveau, Steigung und Krümmung interpretiert.

---

<sup>115</sup> Vgl. Diebold & Rudebusch (2013), S.67-80

## 4.1 Grundlagen des Nelson-Siegel Modells nach Diebold und Rudebusch

Diebold und Rudebusch definieren die Forwardfunktion abweichend von Nelson und Siegel, wobei die Abweichungen nur als sehr gering zu beschreiben sind:<sup>116</sup>

$$f(\tau) = \beta_1 + \beta_2 e^{-\lambda\tau} + \beta_3 \lambda \tau e^{-\lambda\tau} \quad (4.1)$$

Diese entspricht der originalen Funktion von Nelson und Siegel, wenn  $\beta_1 = b_0$ ,  $\beta_2 = b_2 + b_3$ ,  $\beta_3 = b_3$ . Der Grund für diese abweichende Definition ist, dass die Beta-Faktoren dadurch eine einfache Interpretation haben und die Überleitung in ein 3 Faktorenmodell einfacher gelingt

Anstatt des im Modell von Nelson und Siegel verwendeten Terms  $\frac{-t}{\tau_1}$ , verwenden Diebold und Rudebusch  $\lambda$ . Das bietet den Vorteil, dass der Parameter Lambda als Ganzes eine sehr wichtige Interpretation freigibt, auf die bei der Analyse der Faktorladungen noch genauer eingegangen wird.

Verwendet man die in Abschnitt 1 vorgestellte Beziehung zwischen der Forwardfunktion und der Zinsstrukturkurve, so ergibt sich für die Zinsstrukturkurve:

$$y(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + \beta_3 \left( \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right) \quad (4.2)$$

Für diese Funktionsformen bleiben die Interpretationen der Faktoren dieselben. Zusätzlich ergeben sich auch für die Diskontfunktion empirisch sehr ansprechenden Eigenschaften. So ist der Diskontfaktor für den Zeitpunkt null gleich eins und der Diskontfaktor für eine unendliche Laufzeit konvergiert gegen null. Vor allem die zweite Eigenschaft sollte auf jeden Fall gegeben sein, was allerdings von einer Reihe von Modellen nicht erfüllt wird.

Betrachtet man den Grenzwert der Zinsstrukturkurve, wenn  $\tau$  gegen null geht, also die Short Rate, dann gleicht diese  $\beta_1$ .

<sup>116</sup> Vgl. Diebold & Rudebusch (2013), S.1-66



Der Funktionstypus wird durch alternative Definition nicht geändert. So handelt es sich auch in dieser Form des Nelson-Siegel Modells bei der Definition der Forward Rate Kurve um eine Laguerre Funktion, die um eine Konstante erweitert wurde. Laguerre Funktionen sind Polynome, die mit einem exponentiellen Zerfallsterm multipliziert werden, und die sehr gerne für die mathematische Approximation in dem Bereich von  $[0, \infty)$  verwendet werden. Dieser Bereich entspricht dem für die Modellierung der Zinsstrukturkurve interessanten Bereich.

Der exponentielle Zerfallsterm wird in diesem Fall durch  $\lambda_t$  dargestellt. Kleine Werte für Lambda führen zu einer geringeren Abnahme und sind besser dazu in der Lage, die Kurve im langfristigen Bereich zu beschreiben. Große Werte für Lambda beschleunigen die Abnahme und sind besser dazu in der Lage, das kurze Ende zu beschreiben.  $\lambda_t$  bestimmt auch maßgeblich, wann  $\beta_{3t}$  sein Maximum erreicht.

Vor diesem Hintergrund betrachten wir nun die Faktorladung der drei Faktoren. Unter Faktorladung versteht man den Beitrag, den jeder einzelne Faktor zu dem Funktionswert liefert. Vereinfacht bedeutet das, dass die Terme, die mit den drei Faktoren multipliziert werden, in Abhängigkeit von  $\tau$  geplottet werden.

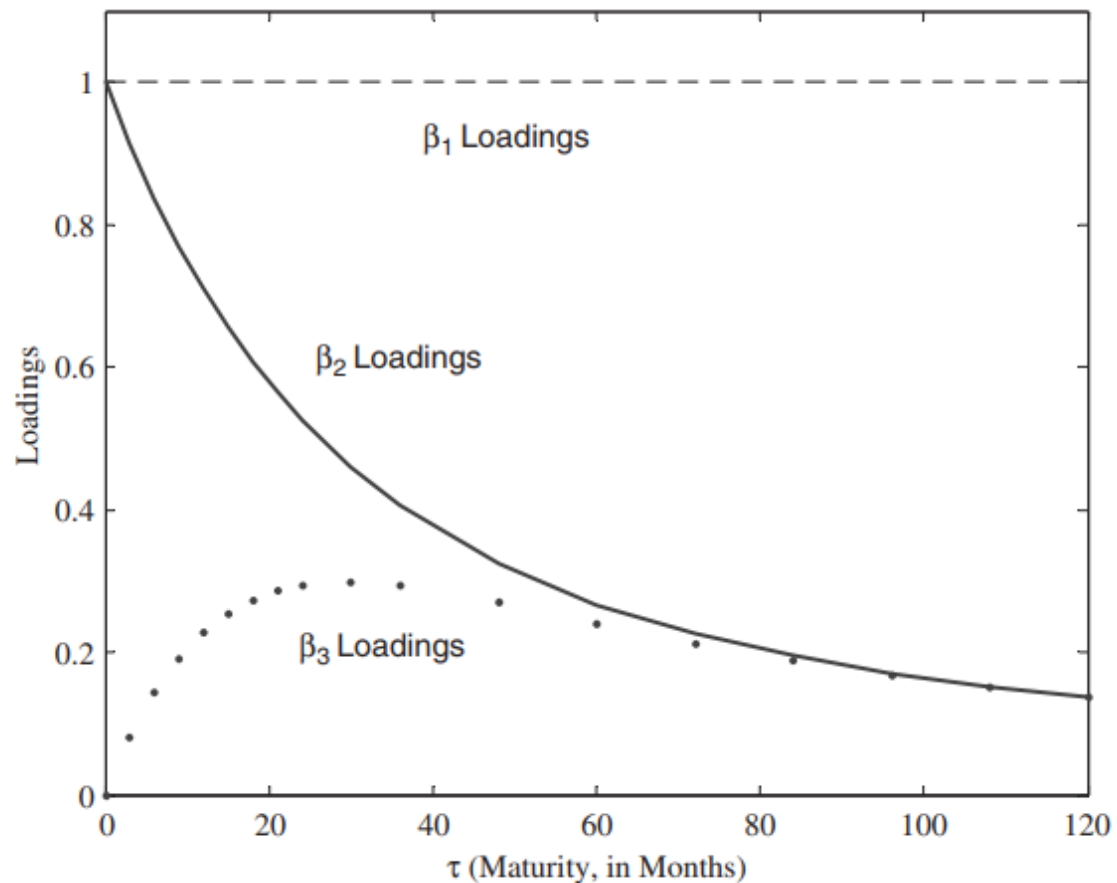


Abbildung 9: Faktorladungen der Betafaktoren, mit  $\Lambda=0.0609$

Quelle: Diebold & Li (2006), S.342

Genau das wird in Abbildung 9 umgesetzt. Es lässt sich erkennen, wie groß der Einfluss des zugehörigen Betafaktors bei den verschiedenen Laufzeiten von  $\tau$  ist.

Für  $\beta_1$  ergibt sich wenig überraschend, dass der Faktoreinfluss über die gesamten Laufzeiten 1 beträgt. Der Faktor  $\beta_1$  wird aufgrund des relativ zu den anderen Faktoren beinahe alleinigen Einflusses auf die Zinssätze der langen Laufzeiten als langfristiger Faktor interpretiert. Das wird bestärkt durch das Faktum, dass  $\beta_1$  den Grenzwert darstellt, wenn die Laufzeit gegen Unendlich läuft. Da der Einfluss über das gesamte Laufzeitspektrum gleich hoch ist, wird außerdem auch  $\beta_1$  als das Niveau oder Level der Zinsstrukturkurve interpretiert.

Interessanter ist die Betrachtung der zwei weiteren Faktoren.  $\beta_2$  ist eine monoton fallende Funktion, die bei 1 startet und schnell gegen Null geht. Das bedeutet, dass  $\beta_2$  den stärksten Einfluss besitzt auf die Zinssätze mit kurzen Laufzeiten und

daher als kurzfristiger Faktor interpretiert wird. Betrachtet man eine Änderung des Faktors  $\beta_2$ , so wirkt sich diese Änderung logischerweise stärker auf die kurzen Laufzeiten aus als auf die Zinssätze am langen Ende. Folglich beschreibt  $\beta_2$  die Steigung der Zinsstrukturkurve.

Die Faktorladung von  $\beta_3$  steigt in der kurzen Frist. Nach der Ausbildung eines Maximums konvergiert diese wieder gegen Null. Dieser Faktor kann also als mittelfristig interpretiert werden. Außerdem kann  $\beta_3$  als die Krümmung der Zinsstrukturkurve interpretiert werden. Der Grund dafür ist, dass eine Änderung von  $\beta_3$  einen geringen Einfluss auf das kurze sowie das lange Ende besitzt, allerdings aber das mittlere Laufzeitsegment stärker betrifft. Das entspricht einer Erhöhung der Krümmung der Kurve.

Wie bereits erwähnt, ist die Laufzeit, bei der  $\beta_3$  sein Maximum erreicht, stark davon abhängig, wie hoch Lambda ist. Diebold und Li wählen für  $\lambda_t$  den Wert 0.0609, denn dieser Wert maximiert die Krümmung bei 30 Monaten. Dies gilt als eine empirisch fundierte Annahme.

Die drei Faktoren nehmen also jeweils nur einen maßgeblichen Einfluss auf eine bestimmte Frist. Neben dieser Erkenntnis wird vor allem die Interpretation der Faktoren als Niveau, Steigung und Krümmung noch von enormer Wichtigkeit sein.

## 4.2 Dynamisierung des Nelson-Siegel Modells

Für die Anwendung des Modells muss die bisher vorgestellte Version des statischen Modells dynamisiert werden. Dazu orientiert sich dieses Kapitel an Diebold & Rudebusch (2013).<sup>117</sup>

Um einen besseren Einblick zu erhalten, hilft die Betrachtung des Modells von zwei verschiedenen Perspektiven.

---

<sup>117</sup> Vgl.: (Diebold und Rudebusch 2013), S.34-66

Erstens die Betrachtung bei Fixierung eines Zeitpunkt  $t$ . Es zeigt sich die Zinsstrukturkurve in Abhängigkeit der Laufzeit:

$$y(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + \beta_3 \left( \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right) \quad (4.3)$$

Dabei handelt es sich um eine Querschnittsbetrachtung, in der  $y(\tau)$  sich aus den Variablen  $(1, \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right), \left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau}\right))$  und den Parametern  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  zusammensetzt.

Die zweite Perspektive ist die Betrachtung der Zeitreihe eines Zinssatzes. Das heißt, man fixiert ein  $\tau$ . Es ergibt sich dann:

$$y_t = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} \right) + \beta_{3t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} - e^{-\lambda_t\tau} \right) \quad (4.4)$$

Dabei handelt es sich wiederum um eine Zeitreihenbetrachtung, bei der sich  $y_t$  aus den Variablen  $(\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t})$  und den Parametern  $(1, \left(\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau}\right), \left(\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} - e^{-\lambda_t\tau}\right))$  ergibt.

Fügt man diese zwei Perspektiven zusammen, um die Zinssätze für alle Laufzeiten zu allen Zeitpunkten zu modellieren, so ergibt sich die folgende Funktion.

$$y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} \right) + \beta_{3t} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} - e^{-\lambda_t\tau} \right) \quad (4.5)$$

Das so erstellte dynamische Nelson-Siegel Modell ist ein Vorzeigebeispiel für dynamische Faktormodelle, in denen eine Reihe von sehr hochdimensionalen Variablen durch geringer dimensionale Faktoren dargestellt werden. Die hochdimensionalen Faktoren werden in diesem Fall durch die Zinsstrukturkurve dargestellt. Den geringer dimensionalen Faktoren entsprechen dabei die drei Betafaktoren. Für die Anwendung des dynamischen Modells sind die Veränderungen der Faktoren über die Zeit von enormer Bedeutung. Der erste Schritt für diese Betrachtung ist die Umschreibung der Spotkurvenfunktion als:

$$y_t = l_t + s_t \left( \frac{1 - e^{-\lambda \tau}}{\lambda \tau} \right) + c_t \left( \frac{1 - e^{-\lambda \tau}}{\lambda \tau} - e^{-\lambda \tau} \right) \quad (4.6)$$

Dabei steht  $l_t$  für das Level oder Niveau der Zinsstrukturkurve und entspricht  $\beta_{1t}$ . Steigung sowie Krümmung der Zinsstrukturkurve sind  $s_t$  und  $c_t$ , diese entsprechen  $\beta_{2t}$  und  $\beta_{3t}$ .

Der nächste Schritt ist das Aufstellen der Maßfunktion, in der die stochastischen Abweichungen eingeführt werden. Diese entsprechen den Abweichungen zwischen den durch das Modell erhaltenen Zinssätzen und den empirisch beobachteten Zinssätzen.

$$y_t = \Lambda f_t + \varepsilon_t \quad (4.7)$$

Mit den Variablen  $y_t = \begin{pmatrix} y_t(\tau_1) \\ y_t(\tau_2) \\ \vdots \\ y_t(\tau_N) \end{pmatrix}$ ,  $f_t = \begin{pmatrix} l_t \\ s_t \\ c_t \end{pmatrix}$ ,  $\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t(\tau_1) \\ \varepsilon_t(\tau_2) \\ \vdots \\ \varepsilon_t(\tau_N) \end{pmatrix}$  und der Parametermatrix

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1 - e^{-\lambda \tau_1}}{\lambda \tau_1} & \frac{1 - e^{-\lambda \tau_1}}{\lambda \tau_1} - e^{-\lambda \tau_1} \\ 1 & \frac{1 - e^{-\lambda \tau_2}}{\lambda \tau_2} & \frac{1 - e^{-\lambda \tau_2}}{\lambda \tau_2} - e^{-\lambda \tau_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1 - e^{-\lambda \tau_N}}{\lambda \tau_N} & \frac{1 - e^{-\lambda \tau_N}}{\lambda \tau_N} - e^{-\lambda \tau_N} \end{pmatrix}$$

Für  $t = 1, \dots, T$ .

Die stochastischen Fehlerterme  $\varepsilon_t$  werden dabei als idiosynkratisch angenommen. Das bedeutet, die Fehlerterme der einzelnen Zeitpunkte sind voneinander unabhängig.

Der Spotsatz  $y_t(\tau)$  ergibt sich aus den Werten des Levels, der Steigung und Krümmung sowie dem Fehlerterm zum jeweiligen Zeitpunkt  $t$ .

Die zentrale Annahme für die Dynamisierung des Modells wird in der Transitions-gleichung dargestellt:

$$(f_t - \mu) = A(f_{t-1} - \mu) + \eta_t \quad (4.8)$$

$$\text{Mit } f_t = \begin{pmatrix} l_t \\ s_t \\ c_t \end{pmatrix}, \eta_t = \begin{pmatrix} \eta_t^l \\ \eta_t^s \\ \eta_t^c \end{pmatrix} \text{ und } \mu = \begin{pmatrix} \mu^l \\ \mu^s \\ \mu^c \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Dabei beschreibt  $\mu$  den Mittelwert der Faktoren und  $A$  die Faktordynamiken.

Die Transitions Gleichung beschreibt den Prozess, dem die drei Faktoren folgen, als Autoregressiven Prozess. Auf die genauere Bedeutung dieser Annahme wird im Abschnitt 4.4 eingegangen.

Um das Modell zu vervollständigen, machen Diebold und Rudebusch die Standardannahmen, dass Fehlerterme der Maßgleichung und der Transition voneinander und dem Ausgangszustand unabhängig sind.

## 4.3 Empirische Umsetzung des Nelson-Siegel Modells

### 4.3.1 Schätzung des Modells

Es ist eine Vielzahl von Methoden zulässig und möglich, um das vorliegende Modell zu schätzen, indem Diebold & Rudebusch (2013) zeigen, dass die zweistufige OLS-Schätzung die am effizientesten umsetzbare Methode ist. Das Verfahren lässt zu, die drei Faktoren Level, Steigung und Krümmung sehr präzise zu jedem Zeitpunkt  $t$  zu schätzen. Dies ist vor allem der großen Variation der Querschnittdaten zu verdanken.<sup>118</sup>

Das zweistufige OLS-Verfahren zur Schätzung des Nelson-Siegel Modells geht auf Diebold & Li (2006) zurück.

Dabei wird  $\lambda$  nicht als zu schätzender Parameter verstanden, sondern kalibriert. Wie bereits erläutert, wird der Wert für Lambda laufzeit- und zeitpunkts-

---

<sup>118</sup> Vgl. Diebold & Rudebusch (2013), S.46-54

unabhängig auf 0.0609 festgesetzt. Das hat zur Folge, dass die zu schätzende Gleichung nun in den Parametern linear ist und dementsprechend die lineare kleinsten Quadrate Methode verwendet werden kann, um zu jedem Zeitpunkt die Zinsstrukturkurve zu approximieren.

Das Ergebnis des ersten Schrittes ist eine dreidimensionale Zeitreihe der geschätzten Faktoren  $\{\hat{l}_t \ \hat{s}_t \ \hat{c}_t\}_{t=1}^T$  und eine N-dimensionale Reihe der  $\{\hat{\varepsilon}_t(\tau_1) \ \hat{\varepsilon}_t(\tau_2) \ \hat{\varepsilon}_t(\tau_3)\}_{t=1}^T$ .

Im zweiten Schritt wird das dynamische Modell zu den geschätzten Faktoren  $\{\hat{l}_t \ \hat{s}_t \ \hat{c}_t\}_{t=1}^T$  gefittet. Dazu wird das autoregressive Vector Modell, das bereits der Gleichung (4.8) folgt.

Das Ergebnis des zweiten Schritts ist ein Schätzer für die Transitionsmatrix und auch für die Fehlerterme der Gleichung.

Im dritten Schritt kann die geschätzte Transitionsmatrix verwendet werden, um die Zinsstrukturkurve in der Zukunft zu prognostizieren. Die erhaltenen Prognosen werden dann mit den Vorhersagen der Random Walk Hypothese, also einer sich nicht veränderten Zinsstrukturkurve anhand von bestimmten Kennzahlen, verglichen.

#### 4.3.2 Daten

Als Modellrahmen wurde der US-amerikanische Markt gewählt. Der Grund für die Auswahl liegt darin, dass für den US-amerikanischen Markt sehr unterschiedliche Ergebnisse für Schätzungen nach dem Diebold Rudebusch Modell vorliegen, und so einen interessanten Vergleich der Ergebnisse zulässt.

Die verwendeten Daten entsprechen den der Federal Reserve veröffentlichten Zinsdaten. Diese stehen zum Downloaden unter der folgenden Homepage <https://www.federalreserve.gov/datadownload/> zur Verfügung.

Als Zeitspanne wurden die Daten vom Jänner 1994 bis zum August 2016 gewählt. Als Startdatum wurde der Jänner 1994 verwendet, da für die Zeiträume davor keine dauerhaften Daten zu den 20-jährigen Zinssätzen vorliegen. Als Ende für die Schätzung der Modellparameter wurde der August 2016 gewählt, um die Ein-Jahres-Vorhersagen des Modells „out of the sample“ testen zu können.

Bei den verwendeten Zinssätzen handelt es sich um monatliche Zinssätze für die Laufzeiten 3 Monate, 6 Monate, 1 Jahr, 2 Jahre, 3 Jahre, 5 Jahre, 7 Jahre, 10 Jahre sowie 20 Jahre.

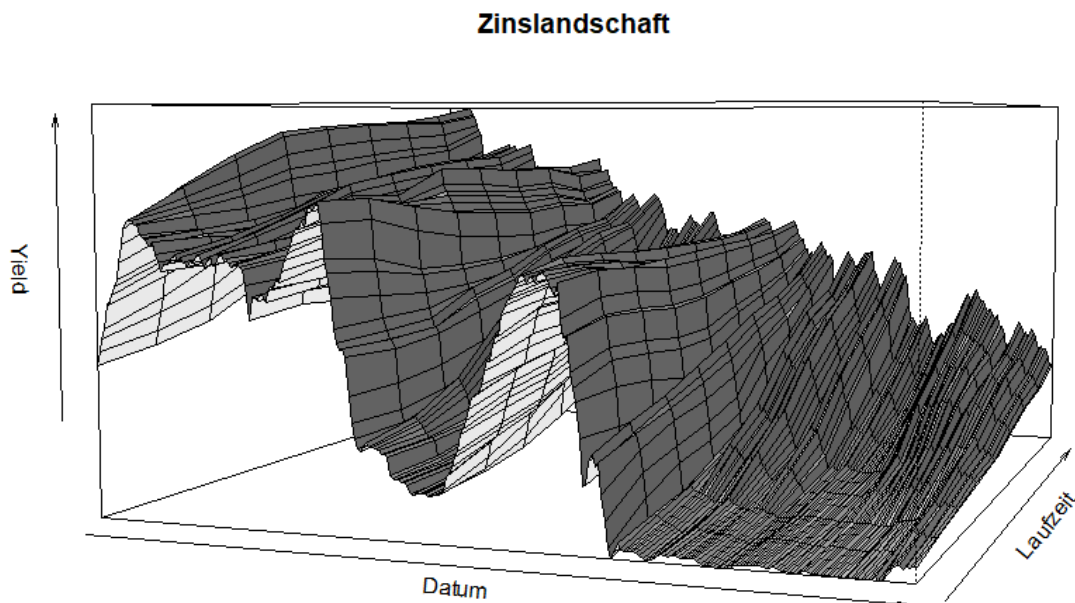


Abbildung 10: Darstellung der verwendeten Daten

Quelle: Eigene Darstellung

Einen Überblick über die verwendeten Daten verschafft die Abbildung 10. Dabei stellt die Y-Achse die Zinshöhe dar. Auf der X bzw. Z Achse wird die Entwicklung über die Beobachtungsperiode sowie die Zinsstrukturkurve zum jeweiligen Datum aufgetragen. Es lässt sich also einfach für jeden Datumspunkt die zugehörige Zinsstrukturkurve betrachten.



Auf der Datumsachse kann man den Verlauf der Zinsstrukturkurve vom Jänner 1994 bis zum August 2016 nachvollziehen. Es fällt sofort auf, dass das Zinsniveau über die Beobachtungsperiode deutlich gesunken ist. Über den betrachteten Zeithorizont lassen sich auch gewisse Phasen erkennen. So ist das erste Viertel von einem starken Anstieg sowie einem Rückgang gezeichnet. Vergleicht man die Zinsniveaus am Ende und Anfang, so könnte man es als konstant beschreiben. Erst nach dem ersten Viertel kam es zu einem starken Verfall des Zinsniveaus. In diesem Zeitraum sind auch flache beziehungsweise fallende Zinsstrukturkurven zu sehen. Gefolgt wurde dieser Verfall von einem starken Anstieg und dann einem abermals sehr starken Verfall des Zinsniveaus.

Ein sehr homogenes Bild ist zu sehen, wenn man die Zinstrukturkurven in der nahen Vergangenheit, also am rechten Ende, betrachtet. Es zeigt sich, dass das Niveau sehr niedrig ist, aber alle Zinsstrukturkurven sehr steil sind.

Über die gesamte Beobachtungsperiode lassen sich also alle möglichen Zinsstrukturkurvenformen, die im zweiten Abschnitt besprochen werden, beobachten. Beispielfhaft werden hierfür drei durch das Diebold und Rudebusch Modell approximierte Zinsstrukturkurven gezeigt. Die erste Abbildung zeigt eine Buckel-Zinsstrukturkurve, die also durch das Modell darstellbar ist. Die weiteren Abbildungen zeigen jeweils eine inverse sowie eine normale Zinsstrukturkurve, ebenfalls dargestellt durch das Modell.

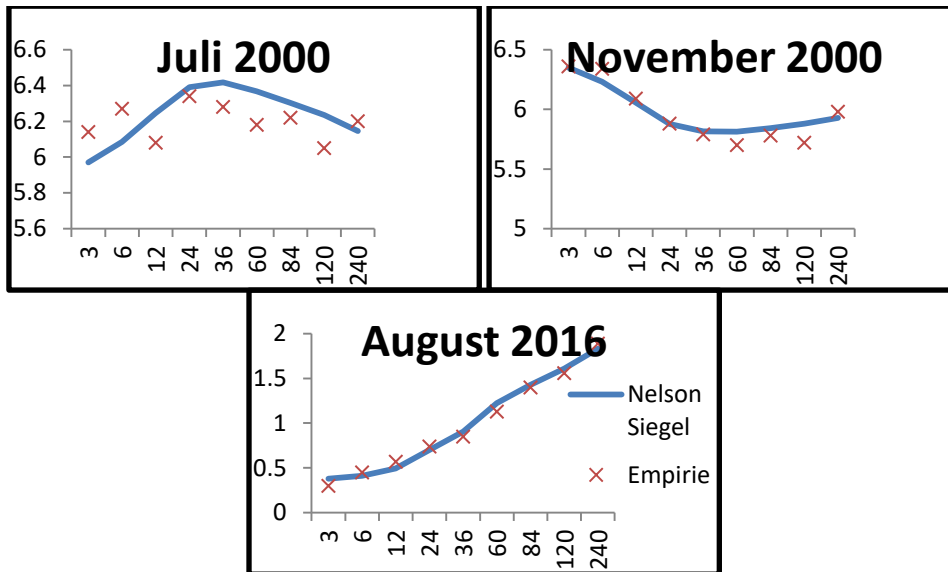


Abbildung 11: Zinstrukturkurvenapproximation durch das Nelson-Siegel Modell in drei ausgewählten Szenarien

Quelle: Eigene Darstellung

Weitere Informationen bringt ein Blick auf die deskriptive Statistik der Zinssätze nach Laufzeit. Dabei zeigt sich, wie schon bei der Abbildung 11, dass die Zinstrukturkurve im Durchschnitt normal war. Das kann durch die größeren Mittelwerte für längere Laufzeiten erkannt werden.

Außerdem ist auch zu sehen, dass die kurzfristigen Zinssätze doch wesentlich volatiler sind als die Zinssätze am langen Ende der Kurve. Der Bereich, in dem sich die Zinssätze in den einzelnen Fristen über die Beobachtungsperiode befunden haben, ist zudem enorm breit. Das wird deutlich, wenn man zum Beispiel auf das Minimum und Maximum des Zinssatzes für eine 3-monatige Laufzeit betrachtet. So hat dieser sich zwischen 0.01% und 6.36% befunden.

Laufzeit	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
3M	2.5703309	2.258044962	0.01	6.36
6M	2.7071691	2.301568309	0.04	6.51
1Y	2.8342279	2.29822524	0.1	7.14
2Y	3.1155147	2.267689078	0.21	7.59
3Y	3.3328309	2.170248783	0.33	7.71
5Y	3.7356985	1.954797172	0.62	7.78
7Y	4.0623897	1.799187544	0.98	7.83
10Y	4.3206985	1.616193614	1.5	7.96
20Y	4.8766176	1.510663558	1.82	8.2

Tabelle 1: Deskriptive Statistik der verwendeten Daten

### 4.3.3 Umsetzung und Ergebnisse

Nach der Analyse der verwendeten Daten kommt es nun zur schrittweisen Umsetzung des Modells.

Den Anfang macht dabei die Definition der Funktionen, die den Einfluss der drei Faktoren auf den jeweiligen Zinssatz beschreiben, wobei lediglich zwei davon die zu berechnende Funktionen sind und es sich bei der Faktorladung für das Niveau um die Funktion  $y=1$  handelt.

Im zweiten Schritt kommt es dann zur Anwendung der kleinsten linearen Quadrate Methode. Im Genaueren wird für jeden Datumspunkt eine Zinsstrukturkurve nach OLS approximiert. Anders ausgedrückt erhält man Schätzer für die drei Faktoren für alle Beobachtungszeitpunkte.

Für die Ermittlung der OLS-Schätzer der drei Faktoren wird die folgende geschlossene Formel verwendet:

$$\hat{f}_t = (\Lambda^T \Lambda)^{-1} \Lambda^T y_t \quad (4.9)$$

Die Formel kann ermittelt werden, indem man die Summe des quadrierten Residuenters  $\varepsilon_t^2$  minimiert und dann nach den Schätzern umformt. Diese so erhalte-

nen Schätzer sind als optimal zu beschreiben, wenn die Gauss Markov Bedingungen gelten. In der Arbeit wird davon ausgegangen, dass diese erfüllt sind. Das stützt sich auf die erbrachte Beweisführung in Diebold & Rudebusch (2013).<sup>119</sup>

Die so ermittelten Schätzer für die drei Faktoren, also Level, Steigung und Krümmung der Zinsstrukturkurve, lassen sich in Abhängigkeit der Laufzeit zusammengefasst in der nachfolgenden Abbildung zeigen.

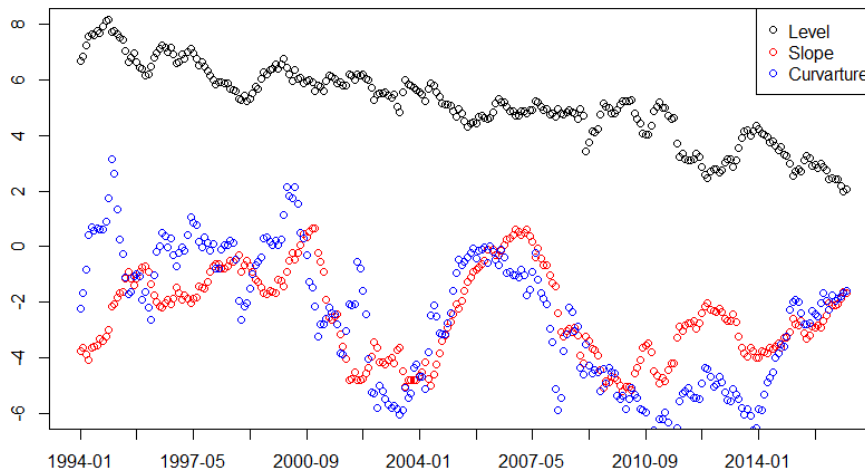


Abbildung 12: Entwicklung der Schätzer der 3 Faktoren über den Beobachtungszeitraum

Quelle: Eigene Darstellung

Aus Abbildung 11 lässt sich erkennen, dass Steigung und Krümmung sich sehr ähnlich bewegen und das in den schon vorhin erwähnten Zyklen. Beim Level hingegen lässt sich leicht erkennen, dass es einen fallenden Trend folgt.

	Mittelwert	Standardabweichung	Minimum	Maximum
<b>Level</b>	5.113	1.375158	2	8.184
<b>Slope</b>	-2.4756	1.571833	-5.193	0.6724
<b>Curvature</b>	-2.5551	2.388112	-7.1263	3.1537

Tabelle 2: Deskriptive Statistik der Schätzer der 3 Faktoren

Mit einem kurzen Blick auf die deskriptive Statistik der geschätzten Parameter ergeben sich die folgenden interessanten Erkenntnisse:

<sup>119</sup> Vgl. Diebold & Rudebusch (2013), S.44-46

- Sowohl die Steigung als auch die Krümmung waren im Durchschnitt negativ. Das bedeutet, für den Beobachtungszeitraum lag eine durchschnittliche inverse Zinsstrukturkurve vor.
- Der volatilste Parameter war die Krümmung der Zinsstrukturkurve.

Mit den Ergebnissen der ersten Schätzung kann nun die zweite Schätzung vorgenommen werden. Dabei handelt es sich um eine Zeitreihenanalyse.

Um diese durchführen zu können, werden zu Beginn die Annahmen getroffen, dass die Parameter einem autoregressiven Prozess folgen. Genauer gesagt, spricht man von einem Vektor-autoregressiven Prozess der ersten Dimension (VAR(1)). Die Erweiterung um den Begriff Vektor verdeutlicht nur, dass drei Parameter über den Zeitverlauf betrachtet werden. Mit dem Begriff der ersten Dimension beschreibt man, über wie viele Perioden der Einfluss der derzeitigen Parameterwerte erhalten bleibt. In dem von Diebold und Rudebusch angenommen Fall hat der derzeitige Wert nur einen Einfluss auf die unmittelbar nachfolgende Periode.<sup>120</sup>

Die zu schätzende Gleichung ist die Transitionsgleichung (4.8).

Alle für die Schätzung notwendigen Faktoren, der Vektor der Mittelwerte sowie die Parameter der Periode sowie der Vorperiode, sind trivial zu ermitteln. Für die Schätzung eines AR(p) Prozesses gibt es mehrere Möglichkeiten. Neben der OLS Methode, die in dieser Arbeit verwendet wird, kann ein AR(p) Prozess auch mithilfe der Maximum Likelihood Methode, Burg Methode oder die Yule Walker Methode erfolgen.<sup>121</sup>

Das Ergebnis der Schätzung sind Schätzer für die Transitionsmatrix A:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -0.2438 & -0.3305 & 0.6611 \\ 0.9772 & 0.1514 & 0.0671 \\ 0.2526 & 1.1522 & 0.27474 \end{pmatrix}$$

---

<sup>120</sup> Vgl. Diebold & Rudebusch (2013), S.44-46

<sup>121</sup> Vgl. Diebold & Rudebusch (2013), S.46-54

Mithilfe dieser Schätzer kann nun eine Vorhersage getätigt werden. Für die Vorhersage setzt man die Schätzer für die Transitionsmatrix ein und formt nach  $f_t$  um und kann so die Prognosen für die nachfolgenden Perioden sukzessive ermitteln.

Beim Verwenden aller Daten bis zum August 2017 kann so eine Prognose der Zinsstrukturkurve für die tatsächliche Zukunft vorgenommen werden. Für die Transitionsmatrix ergeben sich leicht veränderte Schätzer und für die zukünftige Zinsstrukturkurven in 6 Monaten sowie in 12 Monaten ergeben sich die folgenden Formen und Höhen:

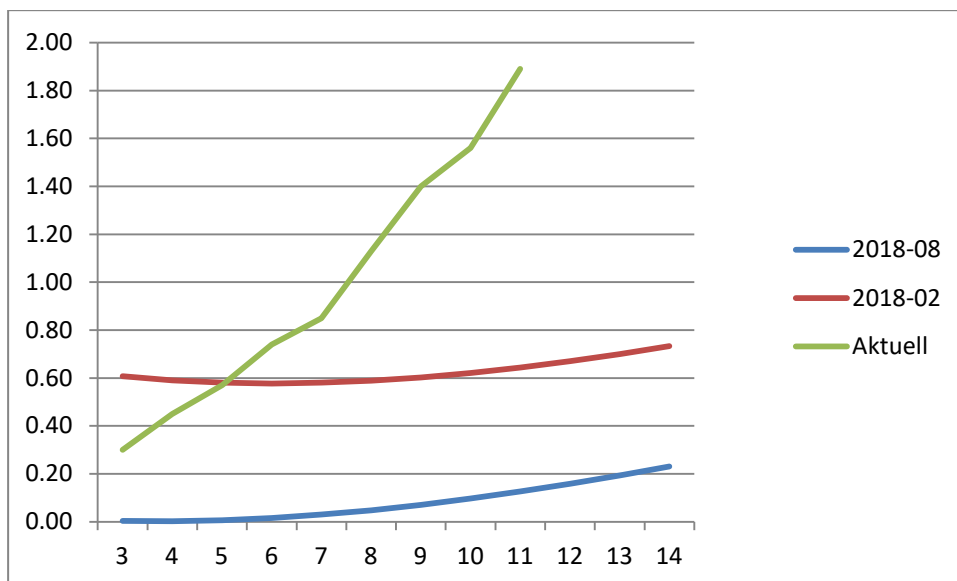


Abbildung 13: Prognose der Zinsstrukturkurven für Februar und August 2018

Quellen: Eigene Darstellung

Diese Prognosen lassen sich allerdings nicht bewerten, da keine tatsächlichen Daten für die Prognoseperiode vorliegen. Deshalb wird, um die Prognosequalität zu analysieren, wieder auf die erwähnte Einteilung der Daten zurückgegangen. Die Schätzperiode geht bis August 2016 und die „out of the sample“ Testperiode ist von September 2016 bis August 2017.

#### 4.3.4 Testen der Schätzgüte

Um eine Aussage darüber treffen zu können, wie gut die Prognosen des Modells ausgefallen sind, werden die Ergebnisse der durchgeführten Prognose mit den Ergebnissen der Random Walk Prognose verglichen. Die Random Walk Prognose

ist dabei keine wirkliche Prognosemethode, sondern nimmt an, dass sich die Zinsstrukturkurve nicht verändert. Als Prognose der Random Walk Methode ergibt sich somit für jede Periode die Zinsstrukturkurve vom August 2016.

Der nächste Schritt ist die Ermittlung geeigneter Maße für die Darstellung der Prognosegüte. Der Abschnitt orientiert sich an Radowski (2006):

Die Funktionsweise von Prognosemaßen unterstellt eine Kostenfunktion für Prognosefehler und leitet auf deren Minimierung, je nach Unterstellung der Form der Kostenfunktion, eine Maßgröße ab.<sup>122</sup> In der Folge werden zwei Prognosemaße, die sehr großen Anklang finden, verwendet, das sind der Root Mean Square Error, oder auch RMSE abgekürzt, und die mittlere absolute Abweichung, oder MAE.

"Der RMSE ist die Wurzel des mittleren quadratischen Prognosefehlers".<sup>123</sup> In mathematischer Form bedeutet das:

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(\hat{y}_t - y_t)^2}{n}} = \sqrt{E(\hat{y}_t - y_t)^2} \quad (4.10)$$

Entsprechen die Prognosen den empirisch eingetroffenen Werten, so ergibt sich ein RMSE von null. Je größer der Prognosefehler, also die Abweichung der empirischen Werte von den prognostizierten, desto größer wird der Wert für RMSE. Hervorzuheben ist, dass durch die Quadrierung der Prognosefehler, große Abweichungen überproportional gewichtet werden. Das beschreibt auch die Schwachstelle der Kenngröße.

In dieser Arbeit werden die RMSE Werte der Prognose durch das Diebold und Rudebusch Modell und der Random Walk Hypothese für Vorhersagen von einem Monat bis zu einem Jahr verglichen:

---

<sup>122</sup> Vgl. Feindt & Kerzel (2015), S.40

<sup>123</sup> Radowski (2006), S.10

Prognoseperiode	RMSE		MAE	
	Diebold und Rudebusch	Random Walk	Diebold und Rudebusch	Random Walk
1 Monat	2.64	0.06	2.43	0.05
2 Monat	3.12	0.15	3.11	0.13
3 Monat	0.32	0.41	0.26	0.37
4 Monat	1.63	0.67	1.53	0.60
5 Monat	2.51	0.63	2.50	0.57
6 Monat	0.58	0.62	0.52	0.56
7 Monat	1.33	0.73	1.23	0.70
8 Monat	2.28	0.62	2.27	0.61
9 Monat	0.78	0.66	0.77	0.66
10 Monat	1.34	0.64	1.20	0.64
11 Monat	2.02	0.72	1.99	0.71
12 Monat	1.04	0.66	1.03	0.65

Tabelle 3: Darstellung der Prognoseergebnisse anhand des RMSE und TUK

Es zeigt sich, dass die Random Walk Prognose lediglich in zwei Prognoseperioden ein schlechteres Ergebnis erzielt. Dieses schlechtere Ergebnis erzielt die Random Walk Hypothese bei der Vorhersage der Zinsstrukturkurve nach drei und nach sechs Monaten.

Das zweite Prognosemaß, das wir verwenden, um die Ergebnisse der Prognosen zu vergleichen, ist der MAE. Dieser setzt an dem Schwachpunkt des RMSE an und ist weniger sensitiv gegenüber großen Abweichungen.<sup>124</sup>

$$MAE = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\hat{y}_t - y_t}{n} \right| \quad (4.11)$$

In der Tabelle 3 lässt sich aber auch für diese Kenngröße das gleiche Ergebnis erkennen. Das heißt, das Ergebnis der ersten Kenngröße ist nicht durch Ausreißer dominiert worden.

<sup>124</sup> Vgl. Feindt & Kerzel (2015), S. 42f



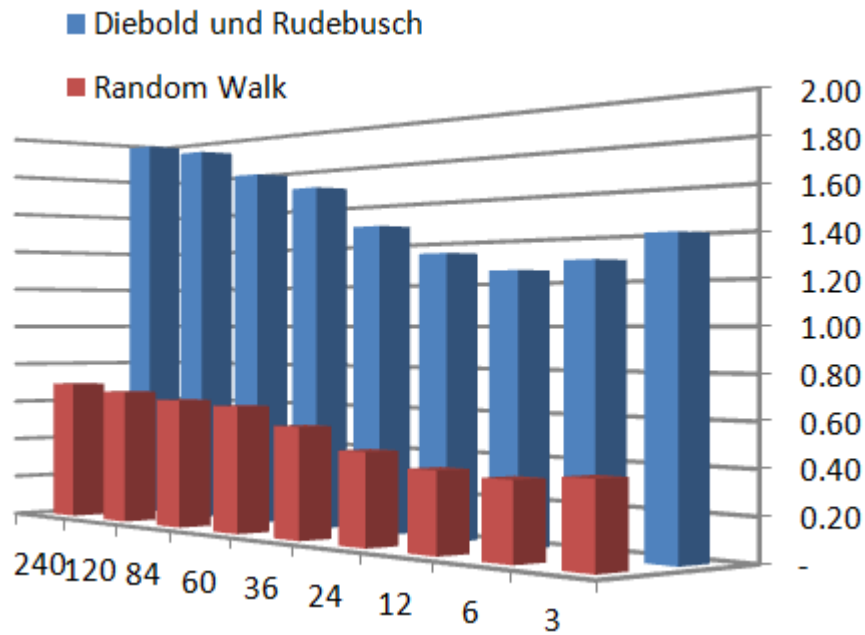


Abbildung 14: durchschnittliche absolute Abweichung über die Laufzeiten

Quelle: Eigen Darstellung

Die Abbildung 13 zeigt die durchschnittlichen absoluten Abweichungen, zusammengefasst über die zwölf Prognoseperioden für die einzelnen Laufzeiten. Wie bereits bei der Betrachtung der zwei Prognosemaße zeigt sich auch hier die Dominanz der Random Walk Prognose.

## 5 Conclusio

Die vorliegende Arbeit gibt einen umfassenden Einblick in die verschiedenen Klassen der Zinsstrukturkurvenmodelle und deren Verwendung. Diese fallen sehr unterschiedlich aus und so auch der Anspruch an die unterschiedlichen Modelle. Im Zentrum der Arbeit steht die Modellklasse der parametrischen Modelle. Deren Verwendung besteht vor allem in der Approximierung der aktuellen Zinsstrukturkurve und wird dazu von den Zentralbanken nahezu aller großer Wirtschaftsnationen verwendet.

Das Modell, das den Grundstein für die Klasse der parametrischen Modelle gelegt hat, ist das Nelson-Siegel Modell und dieses ist auch das Modell im Fokus dieser Arbeit. Diesem Modell liegen die Beobachtungen zugrunde, dass Zinssätze sich gut durch bestimmte Differenzialgleichungen beschreiben lassen. Dieser Gedanke, verbunden mit der Idee, ein Zinsstrukturkurvenmodell mit geringer Parametrisierung zu schaffen, führte zur Schaffung des Nelson-Siegel Modells. Die große Popularität des Modells ist neben der geringen Parametrisierung darauf zurückzuführen, dass sich die verwendeten Parameter sehr gut interpretieren lassen.

Um das Modell in der vorliegenden Arbeit in aller Tiefe zu diskutieren, wurden zuerst die grundlegenden Begriffe und Beziehungen der drei essenziellen Funktionen genauestens beschrieben. Auf diesem Fundament werden die zentralen Anforderungen an die Zinskurvenmodelle erläutert. Um die parametrischen Modelle besser einordnen zu können, wird anschließend ein Überblick über die verschiedenen Modellklassen gegeben und zur Veranschaulichung aus jedem dieser Klassen ein Modell im Detail besprochen.

Bei dem im Fokus stehenden Nelson-Siegel Modell handelt es sich um ein statisches Modell, das nachgewiesenerweise sehr gute Ergebnisse bei der Approximierung der Zinsstrukturkurve liefert. Deshalb wird dieses Modell hier so ausgestaltet, dass es auch zur Prognose geeignet ist, um auch dort zu sehen, ob ansprechende Ergebnisse erzielt werden können. Dabei folgt diese Arbeit dem Modell von Diebold und Rudebusch, die das Nelson-Siegel Modell als ein Faktormodell der drei Faktoren Niveau, Steigung und Krümmung der Zinsstrukturkurve defi-

niert. Außerdem dynamisieren Diebold und Rudebusch das Modell, indem sie annehmen, dass die Faktoren einem Vektor autoregressiven Prozess der ersten Ordnung folgen.

Auf dieser theoretischen Basis wird eine Anwendung des Modells vollzogen. Als Daten werden dabei die in den USA geltenden Zinssätze für unterschiedliche Laufzeiten in der Periode von Jänner 1994 bis August 2016 genommen.

Die "out of the sample" Prognoseergebnisse des Modells wurden anschließend mit den Ergebnissen des Random Walk Modells verglichen. Es zeigt sich, dass das Modell in der „out of sample“ Überprüfung schlechtere Prognosen, als das Random Walk Modell erzielt. Das wiederum deckt sich mit zahlreichen anderen empirischen Überprüfungen, zum Beispiel der von Mönch (2008), die gezeigt haben, dass das Modell der Random Walk Prognose unterlegen ist. Die Ergebnisse widersprechen jedoch anderen Arbeiten, wie der von Alper et al.(2007) oder Diebold und Li(2006).

Einen sehr starken Einfluss auf die Güte der Prognose hat natürlich die gewählte Beobachtungsperiode. So ist die in dieser Arbeit gewählte Beobachtungsperiode, verglichen mit der getesteten "out of the sample" Periode relativ volatil. Deshalb weisen die Prognosen des Modells auch eine sehr starke Volatilität auf. Da allerdings der „out of sample“ Zeitraum nur eine sehr geringe Volatilität aufweist, kommt es in einigen Perioden doch zu sehr verzerrten Schätzungen. Die Prognosen der Random Walk Hypothese unterstellen keinerlei Änderungen und sind für den getesteten Zeitraum als durchaus optimal zu erachten.

Eine mögliche Erweiterung des Modells, die die Prognosefähigkeit verbessert, könnte vollzogen werden, indem ein Test durchgeführt wird, ob ein VAR(1) wirklich den bestmöglichen Fit ergibt, oder ob nicht doch auch weitere Ordnungen mit einbezogen werden sollten.

Abschließend lässt sich sagen, dass das Nelson-Siegel Modell aufgrund der geringen Parametrisierung ein sehr einfach zu interpretierendes Modell ist, das glatte Zinsstrukturkurven liefert und dessen Umsetzung als durchaus einfach zu erachten ist. Es liefert bei geringem Schwierigkeitsgrad der Umsetzung durchaus an-

sprechende Prognosen, die allerdings in den Fällen der vorliegenden Arbeit keine Bestätigung finden.

## Anhang

### R-Code für die Analyse der Daten und die Umsetzung des Nelson Siegel Modells

```

yields=read.table(file.choose(),header=FALSE,sep=",")
colnames(yields)=c("Date","3M","6M","1Y","2Y","3Y","5Y","7Y","10Y","20Y")
View(yields)

#faktorladung2 Lambda=0.0609
f2=function(tau=0){(1-exp(-tau*0.0609))/(tau*0.0609)}
#faktorladung3
f3=function(tau=1){((1-exp(-tau*0.0609))/(tau*0.0609))-exp(-tau*0.0609)}
#bestimmen Matrix X oder dreieck symabol(großes alpha)
x=as.matrix(cbind(int=1,f2(c(3,6,12,24,36,60,72,120,240)),f3(c(3,6,12,24,36,60,72,
120,240))))

OLS_1= data.frame(1,2,3)

for(i in 1:length(yields$Date)){
  y=as.numeric(t(yields[i,2:10]))
  i=diag(1,nrow=nrow(x),ncol=ncol(x))
  n=length(y)
  p=ncol(x)-1

  #OLS umsetzen
  xy=t(x)%*%y
  xxi=solve(t(x)%*%x)
  h=x%*%xxi%*%t(x)
  i=diag(1,nrow=n,ncol=n)
  b=as.vector(xxi%*%xy)
  names(b)=c("Beta1","Beta2","Beta3")

```

```
yhat=as.vector(x%%b)
res=y-yhat
sst=sum((y-mean(y))^2)
sse=t(res)%*%res
ssm=sst-sse
df.e=(n-p-1)
```

```
#dataframe aufstellen
OLS_1=rbind(OLS_1,b)}
```

```
#Namen ändern und erste Zeile entfernen
names(OLS_1)=c("Beta1","Beta2","Beta3")
OLS_1=OLS_1[-1,]
```

```
#3D-grafik der yields
yields_draw=yields[,-1]
yields_draw=as.matrix(yields_draw)
persp(yields_draw)
persp(yields_draw, theta=20, phi=5, expand=0.5, shade = 0.5, xlab = "Datum",
ylab= "Laufzeit", zlab="Yield", d=2.2, main="Zinslandschaft", r=0.9, box=TRUE)
```

```
#plot Beta1,2,3 zeitabhängig
plot(OLS_1$Beta1, ylim = c(-6,8), xaxt="n", xlab="", ylab="")
points(OLS_1$Beta2, col="red")
points(OLS_1$Beta3, col="blue")
```

```
axis(1,at=seq(1,272, by=20), labels = yields$Date[seq(1,272,20)])
legend("topright",      legend      =      c("Level","Slope",      "Curvature"),
col=c("black","red","blue"), pch=1)
```

```
#function ft für zweites OLS
ft=function(t=0){OLS_1[t,]}
```

```

#function ft-1
ft_1=function(t=0){OLS_1[t-1,]}

#mean vector
my=c(mean(OLS_1$Beta1),mean(OLS_1$Beta2),mean(OLS_1$Beta3))

#definition terme
zt=function(t=0){ft(t)-my}
zt_1=function(t=0){ft_1(t)-my}

x=zt(1:nrow(OLS_1))
ar(x, aic=FALSE, order.max = 1, method= "ols")

#newdata importieren
new_data=read.table(file.choose(),header=FALSE,sep=",")
new_data=new_data[,-1]

```

### Ergebnisse der Prognose

	3	6	12	24	36	60	84	120	240
2016-09	1.25	1.51	2.01	2.84	3.47	4.32	4.81	5.23	5.74
2016-10	3.98	3.77	3.54	3.51	3.73	4.26	4.67	5.05	5.54
2016-11	1.07	1.06	1.08	1.23	1.43	1.79	2.03	2.24	2.51
2016-12	1.20	1.42	1.83	2.54	3.10	3.85	4.29	4.67	5.13
2017-01	3.49	3.36	3.25	3.36	3.64	4.21	4.63	5.01	5.49
2017-02	1.55	1.51	1.50	1.64	1.85	2.24	2.51	2.76	3.06
2017-03	1.26	1.43	1.77	2.37	2.87	3.55	3.96	4.31	4.74
2017-04	3.09	3.02	3.00	3.20	3.52	4.12	4.53	4.91	5.38
2017-05	1.86	1.81	1.80	1.95	2.18	2.60	2.90	3.16	3.50
2017-	1.37	1.51	1.78	2.30	2.74	3.37	3.76	4.09	4.50

06									
2017-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
07	2.91	2.94	2.91	2.64	2.30	1.70	1.29	0.92	0.46
2017-									
08	2.05	2.01	2.00	2.17	2.42	2.87	3.19	3.47	3.83



## Literaturverzeichnis

- Ahlgrim, K. C., S. P., D'Arcy und R. W. Gorvett (1999): Parameterizing Interest rate Models, in: *CAS Dynamic Financial Analysis Call Paper Program*, 1-50.
- Albrecht, P. und R. Maurer (2016): *Investment- und Risikomanagement: Modelle, Methoden, Anwendungen*, Schäffer-Poeschel, Stuttgart.
- Alper, C.E., K. Kazimov und A. Akdemir (2007): Forecasting the Term Structure of Interest Rates for Turkey: A Factor Analysis Approach, in: *Applied Financial Economics*, Vol. 17, 77–85.
- Anderegg, R. (2007): *Grundzüge der Geldtheorie und Geldpolitik*, Oldenbourg Verlag, München.
- BIS, *Bank of International Settlements*, 15. September 2017, <http://stats.bis.org/statx/srs/table/d7>.
- Branger, N. und C. Schlag (2006): *Zinsderivate: Modelle Bewertungen*, Springer Verlag, Heidelberg.
- Cox, J.C., J.E. Ingersoll und S.A. Ross (1985): A Theory of the Term Structure of Interest Rates, in: *Econometrica*, Vol 53, S. 385–407.
- Culbertson, J. M. (1957): The Term Structure of Interest Rates; in: *Quarterly Journal of Economics*, Vol. LXXI No 4, S. 485-517.
- de Jong, F., J. Driessen und A. Pelsser (2000): Libor and Swap Markt Models for the Pricing of Interest Rate Derivatives, in: *CentER Discussion Paper*, Vol.35, S. 1-45.
- Diebold, F. X. und G. D. Rudebusch (2013): *Yield Curve Modeling and Forecasting; the dynamic Nelson Siegel approach*, Princenton University Press, New Jersey.
- Diebold, F. X. und C. Li (2006): Forecasting the term structure of government bond yields, in: *Journal of Econometrics*, Vol. 130, S. 337-364.
- Evans, M. K. (2003), *Practical Business Forecasting*, Blackwell Publishers, Oxford.

Feindt, M. und U. Kerzel (2015): *Prognosen bewerten; Statistische Grundlagen und Praktische Tipps*, Springer Gabler, Heidelberg.

Fischer, B. (2010): *Performanceanalyse in der Praxis*, Oldenbourg, Muenchen.

Fisher, I. (1986): Appreciation and Interest, in: *American Economic Association*, Volume 11,4.

Gallati, R. R. (2011): *Verzinsliche Wertpapiere; Bewertung und Strategien*, Gabler Verlag, Wiesbaden.

Heath, D., Jarrow, R. und Morton, A. (1990). Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation. in: *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 25, S. 419-440.

Hicks, J. R. (1939): *An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory*, Clarandon Press, Oxford.

Hull, J. C. (2015): *Optionen, Futures und andere Derivate*, Pearson Deutschland, Hallbergmoos.

Jamshidian, F.:(1997): LIBOR and Swap Market Models and Measures, In: *Finance and Stochastics*. Band 1, S. 293–330

Kowalski, S. (2011): *Zinssstrukturmodelle: ein empirischer Vergleich*, Diplomica Verlag, Hamburg.

Kruse, S. (2014): *Aktien-, Zins-und Waehrungsderivate; Maerkte, Einsatzmoeglichkeiten, Bewertung und Risikoanalyse*, Springer Gabler, Wiesbaden.

Mayer, C. (2009): *Die Entwicklung der Zinsstrukturkurve; Eine Analyse homogener affiner Mehrfaktormodelle auf Basis des Kalman-Filters*, Gabler Verlag, Wiesbaden.

McCulloch, H. J. (1975): The Tax-Adjusted Yield Curve, in: *Journal of Finance*, Vol. 30, S. 811-830.

Mishkin, F. S. und S. G. Eakins (2012), *Financial Markets and Institutions*, Pearson Education, Essex.

- Modigliani, F. und R. Sutch (1966): Innovations and Interest Rate Policy, In: *American Economic Review*, Vol. 56, 1966, S. 178-197.
- Moritz, K. (2012): *Geldtheorie und Geldpolitik*, Franz Vahlen Verlag, München.
- Mönch, E. (2008): Forecasting the Yield Curve in a Data-Rich Environment: A No-Arbitrage Factor-Augmented VAR Approach, in: *Journal of Econometrics* , 146, 26–43.
- Nawalkha, S. K. und G. M. Soto (2009): Term Structure Estimation, In: *Practical Guide Series in Fixed Income*, 2009.
- Nelson, C.R., Siegel, A.F. (1987). Parsimonious modeling of yields curves, in: *Journal of Business*, Vol. 60(4), S. 473-489.
- Ortmann, K. M. (2017): *Praktische Finanzmathematik: Zinsrechnung - Zinsanleihen - Zinsmodelle*, Springer Fachmedien, Wiesbaden.
- Ostwald, A. (2010): *Das HJM-Modell und das LIBOR Markt Modell zur Beschreibung von Zinsstrukturkurven*, Diplomarbeit Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Münster.
- Radowski, D. (2002): Wie treffsicher sind Prognosen?, in: *ZEW Konjunkturreport*, März, S. 10-12.
- Rudolf, M. (2013): *Zinsstrukturmodelle*, Springer Verlag, Berlin.
- Schwarz, H. R., und N. Klöckler (2009): *Numerische Mathematik*, Vieweg+Teubner, Wiesbaden.
- Schiffel, S. (2009): *Implizite Ausfallwahrscheinlichkeit von Unternehmensanleihen: Eine empirische Analyse in unterschiedlichen Währungen auf Basis von Zinsstrukturkurven*, Gabler Research, Wiesbaden.
- Spremann, K. (2007): *Zinsen, Anleihen, Kredite*, Oldenbourg Verlag, Wien.
- Steiner, M., C. Bruns, und S. Stöckl (2012): *Wertpapiermanagement: professionelle Wertpapieranalyse und Portfoliostrukturierung*, Schäffer-Poeschel, Stuttgart.
- Stoklossa, H. (2010): *Die Zinsstrukturtheorie: Eine Analyse der Faktoren, Arbitrage und Volatilität für das Euro-Währungsgebiet*, Gabler Verlag, Wiesbaden.

- Svensson, L. O. (1994): *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates. Sweden 1992–1994*, Cambridge MA, Cambridge.
- Uhrig-Homburg, M. (2002): Die Erwartungstheorie der Zinsstruktur und Zinsswaps, in: *Karlsruher Transfer*, S. 17-19.
- Vasicek, O. (1977): An equilibrium characterization of the term structure, in: *Journal of Finance Economics*, Vol. 5 (2), S. 177–188.
- Zimmerer, T. und F. Hertlein. (2007): Schätzung von Renditestrukturkurven für Euroland-Staatsanleihen: Gibt es teure und billige Bonds?, in: *Finanz-Betrieb*, S. 98-108.
- Brace, A., D. Gatarek und M. Musiela (1997): The Market Model of Interest Rate Dynamics, In: *Mathematical Finance*, Band 7, S. 127–147.