МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский Авиационный Институт»
(Национальный Исследовательский Университет)

Институт: №8 «Информационные технологии и прикладная
математика»
Кафедра: 806 «Вычислительная математика и программирование»

Курсовая работа
по курсу «Фундаментальная информатика»
I семестр
Задание 3
«Вещественный тип. Приближенные вычисления. Табулирование
функций»

Группа	М8О-101Б-22
Студент	Шляхтуров А. В
Преподаватель	Крылов С. С
Оценка	
Дата	

Москва, 2022

Постановка задачи

Составить программу на Си, которая печатает таблицу значений элементарной функции, вычисленной двумя способами: по формуле Тейлора и с помощью встроенных функций языка программирования. В качестве аргументов таблицы взять точки разбиения отрезка [a, b] на n равных частей (n+1 точка включая концы отрезка), находящихся в рекомендованной области хорошей точности формулы Тейлора. Вычисления по формуле Тейлора проводить по экономной в сложностном смысле схеме с точностью $\varepsilon * 10^k$, где ε - машинное эпсилон аппаратно реализованного вещественного типа для данной ЭВМ, а k – экспериментально подбираемый коэффициент, обеспечивающий приемлемую сходимость. Число итераций должно ограничиваться сверху числом порядка 100. Программа должна сама определять машинное ε и обеспечивать корректные размеры генерируемой таблицы.

Вариант 26:

Ряд Тейлора:

$$-\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$$

Функция:

$$\frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{\pi^2}{3}\right)$$

Промежуток:

$\frac{\pi}{5}$	π

Теоретическая часть

Формула Тейлора — формула разложения функции в бесконечную сумму степенных функций. Формула широко используется в приближённых вычислениях, так как позволяет приводить трансцендентных функций к более простым. Сама она является следствием теоремы Лагранжа о среднем значении дифференцируемой функции. В случае a=0 формула называется рядом Маклорена.

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Машинное эпсилон — числовое значение, меньше которого невозможно задавать относительную точность для любого алгоритма, возвращающего вещественные числа. Абсолютное значение для машинного эпсилон зависит от разрядности сетки применяемой ЭВМ и от разрядности используемых при расчёте чисел. Формально это машинное эпсилон определяют как число, удовлетворяющее равенству $1 + \varepsilon = 1$. Фактически, два отличных от нуля числа являются равными с точки зрения машинной арифметики, если их модуль разности меньше или не превосходит машинное эпсилон.

В языке Си машинные эпсилон определено для следующих типов: float – $1.19 * 10^{-7}$, double – $2.20 * 10^{-16}$, long double – $1.08 * 10^{-19}$.

Описание алгоритма

Рассмотрим алгоритм решения. Сперва нужно найти машинное эпсилон, на котором будет основываться точность вычисления. Это можно сделать просто деля 1 на 2. Далее находим значение функции просто подставляя иксы в формулу – первый способ. И второй способ считаем с помощью ряда Тейлора, прибавляя последующие члены, пока погрешность не станет меньше машинного эпсилона, высчитанного ранее.

Использованные в программе переменные

Название переменной	Тип переменной	Смысл переменной
n	int	То самое число N, на которое нужно разбить отрезок
k	int	То самое число K, используемое для вычисления точности.
eps	float	Машинное эпсилон 4,4408920985006262e-16
func	long double	Значение, вычисленное методом подстановки
ans	long double	Значение, вычисленное с помощью формулы Тейлора
x	double	Подставляемый аргумент
iter	int	Счётчик членов формулы Тейлора
add	double	Добавка к предыдущему члену для получения следующего

Исходный код программы:

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <locale.h>
# define M_PI                   3.14159265358979323846  /* pi */

int main() {
   setlocale(LC_ALL, "Russian");

   int n, iter, num;
   double cnst, ans, func, add, l = M_PI / 5, r = M_PI, x = M_PI / 5;
   long double eps = 1.0l;

   while (2.0l + eps / 2.0l > 2.0l) {
      eps /= 2.0l;
   }

   printf("Машинное эпсилон для типа double = %.16Le\n", eps);

   printf("Введите число n: \n");
   scanf("%d", &n);
   printf("n = %d, \n", n);

   printf("Таблица значений ряда Тейлора и стандартной функции для f(x) = 0.25*(x*x - ((PI * PI)/3\n");
   printf("_____________________________________________________________________\n");
   printf("|   x   |        sum        |       f(x)        |число итераций |\n");
   printf("_____________________________________________________________________\n");

   for (int i = 1; i <= n + 1; i++) {

      add = 1;
      iter = 1;
      func = 0.25 * (x * x - ((M_PI * M_PI) / 3));
      ans = -cos(x);
      while (fabs(add) > eps && iter < 100) {

         cnst = ans;
         iter++;
         add = pow(-1, iter) * cos(iter * x) / pow(iter, 2);
         //printf("%.30lf\n", add);
         ans = cnst + add;
      }

     printf("| %.3f | %.18lf | %.18lf |     %d      |\n", x,ans , func, iter);
     printf("_____________________________________________________________________\n");

      x += (r - l) / n;
   }

   return 0;
    }
```

Входные данные

Единственная строка содержит одно целое число N ($0 \le N \le 100$) – число разбиений отрезка на равные части

Выходные данные

Программа должна вывести значение машинного эпсилон, а затем N+1 строку.

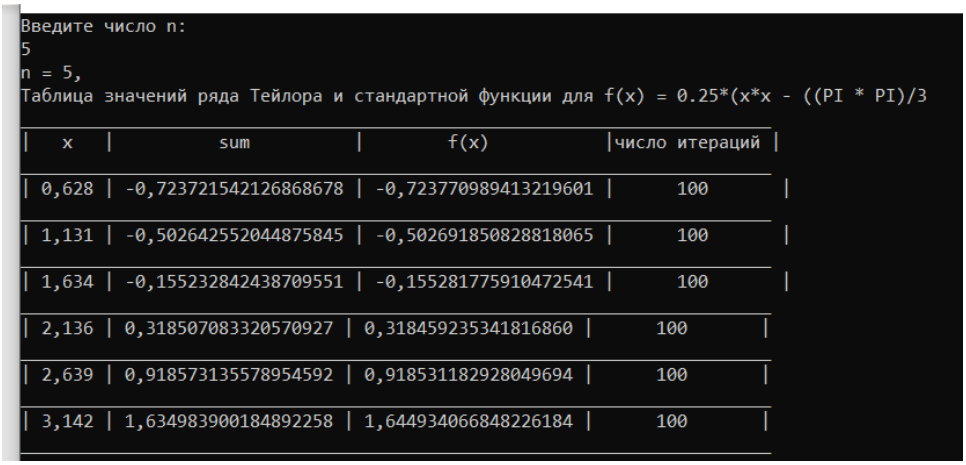
В каждой строке должно быть значение x, для которого вычисляется функция, число A_1 — значение, вычисленное с помощью формулы Тейлора, A_2 – значение, вычисленное с помощью встроенных функций языка, i – количество итерация, требуемых для вычисления.

Протокол исполнения и тесты

Тест №1

Ввод:

5
Вывод:



```
Введите число n:
5
n = 5,
Таблица значений ряда Тейлора и стандартной функции для f(x) = 0.25*(x*x - ((PI * PI)/3
_____________________________________________________________________
|   x   |          sum          |        f(x)           |число итераций |
_____________________________________________________________________
| 0,628 | -0,723721542126868678 | -0,723770989413219601 |      100      |
_____________________________________________________________________
| 1,131 | -0,502642552044875845 | -0,502691850828818065 |      100      |
_____________________________________________________________________
| 1,634 | -0,155232842438709551 | -0,155281775910472541 |      100      |
_____________________________________________________________________
| 2,136 | 0,318507083320570927 | 0,318459235341816860 |      100      |
_____________________________________________________________________
| 2,639 | 0,918573135578954592 | 0,918531182928049694 |      100      |
_____________________________________________________________________
| 3,142 | 1,634983900184892258 | 1,644934066848226184 |      100      |
_____________________________________________________________________
```

Process finished with exit code 0

Тест №2

Ввод:
10

Вывод:

```
Машинное эпсилон для типа double = 4,4408920985006262e-16
Введите число n:
10
n = 10,
Таблица значений ряда Тейлора и стандартной функции для f(x) = 0.25*(x*x - ((PI * PI)/3
_____________________________________________________________________________
|   x   |          sum          |         f(x)          |число итераций |
_____________________________________________________________________________
| 0,628 | -0,723721542126868678 | -0,723770989413219601 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 0,880 | -0,628973397776547705 | -0,629022787162761832 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 1,131 | -0,502642552044875845 | -0,502691850828818065 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 1,382 | -0,344729022343935765 | -0,344778180411388135 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 1,634 | -0,155232842438709551 | -0,155281775910472541 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 1,885 | 0,065845916425724613 | 0,065797362673928994 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 2,136 | 0,318507083320570483 | 0,318459235341816416 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 2,388 | 0,602750159874621994 | 0,602703842093189945 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 2,639 | 0,918573135578953925 | 0,918531182928049250 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 2,890 | 1,265960002970330622 | 1,265941257846394219 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 3,142 | 1,634983900184892258 | 1,644934066848225296 |      100      |
_____________________________________________________________________________
```

Тест №3

Ввод:
100000
Вывод:

```
Машинное эпсилон для типа double = 4,4408920985006262e-16
Введите число n:
1000
n = 1000,
Таблица значений ряда Тейлора и стандартной функции для f(x) = 0.25*(x*x - ((PI * PI)/3
_____________________________________________________________________________
|   x   |          sum          |         f(x)          |число итераций |
_____________________________________________________________________________
| 0,628 | -0,723721542126868678 | -0,723770989413219601 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 0,631 | -0,722936005374963719 | -0,722979841924428324 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 0,633 | -0,722150098206966740 | -0,722185536162228692 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 0,636 | -0,721363289702700805 | -0,721388072126620594 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 0,638 | -0,720574905223145601 | -0,720587449817604253 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 0,641 | -0,719784169118869332 | -0,719783669235179557 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 0,643 | -0,718990253885736563 | -0,718976730379346507 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 0,646 | -0,718192332653109666 | -0,718166633250105102 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 0,648 | -0,717389631675629857 | -0,717353377847455231 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 0,651 | -0,716581479496676610 | -0,716536964171397228 |      100      |
_____________________________________________________________________________
| 0,653 | -0,715767349660053620 | -0,715717392221930759 |      100      |
_____________________________________________________________________________
```

Вывод

В работе описано определение машинного эпсилон, приведены его значения для разных переменных языка Си, описана формула Тейлора и составлен алгоритм реализации вычисления значения функции с заданной точностью для заданного числа точек на отрезке. На основе алгоритма составлена программа на языке Си, проведено её тестирование на различных тестах, составлен протокол исполнения программы. В целом, работа понравилась. Приятно применять знания из других областей для решения какой-либо задачи по программированию.

Список литературы

1. Машинный ноль – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Машинный_ноль
2. Ряд Тейлора – URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Ряд_Тейлора