
Θεωρία Υπολογισμού

Δεύτερο σετ ασκήσεων

Σταυρόπουλος Αλέξανδρος Ανδρεας
2019030109

Διδάσκων:
Μιχαήλ Λαγουδάκης



ΗΜΜΥ
Πολυτεχνείο Κρήτης
Εαρινό εξάμηνο 2022-2023

Πίνακας Περιεχομένων

1	Γραμματικές Χωρίς Συμφραζόμενα	1
1.1	$L_1 = \{1^n 0^m 1^k : m > n + k\}$	1
1.2	$L_2 = \{w \in a, b^* : \text{το πλήθος των } \beta \text{ είναι } 3k + 2, \text{ όπου } k \text{ το πλήθος των } a\}$	1
2	Γραμματικές Χωρίς Συμφραζόμενα	2
2.1	$L_1 = \{uw : u \in a, c^*, w \in a^* b^* a^* \text{ και } 2 u = w \}$	2
2.2	$L_2 = \{w \in a, b^* : \eta \ w \text{ περιέχει ακριβώς } 2 \text{ περισσότερα } a \text{ από το τριπλάσιο πλήθος των } \beta\}$	2
3	Μη ντετερμινισμός και κανονικότητα αυτομάτων	3
3.1	Ερώτημα α	3
3.2	Ερώτημα β	5
4	Κανονικές γλώσσες	8
4.1	Ερώτημα α	8
4.2	Ερώτημα β	8
4.3	Ερώτημα γ	8
5	Ελαχιστοποίηση καταστάσεων	9
5.1	Ερώτημα α	9
5.2	Ερώτημα β	13
5.3	Ερώτημα γ	13

1 Γραμματικές Χωρίς Συμφραζόμενα

1.1 $L_1 = \{1^n 0^m 1^k : m > n + k\}$

$$\begin{aligned} G &= (V, \Sigma, R, S) \\ V &= \{0, 1, S, S_1, S_2\} \\ \Sigma &= \{0, 1\} \\ R &= \{S \rightarrow S_1 0 S_2, \\ &\quad S_1 \rightarrow 1 S_1 0 \\ &\quad S_1 \rightarrow S_1 0 \\ &\quad S_1 \rightarrow e \\ &\quad S_2 \rightarrow 0 S_2 1 \\ &\quad S_2 \rightarrow 0 S_2 \\ &\quad S_2 \rightarrow e\} \end{aligned}$$

1.2 $L_2 = \{w \in a, b^* : \text{το πλήθος των } \beta \text{ είναι } 3k + 2, \text{ όπου } k \text{ το πλήθος των } a\}$

$$\begin{aligned} G &= (V, \Sigma, R, S) \\ V &= \{a, b, S, S_1\} \\ \Sigma &= \{a, b\} \\ R &= \{S \rightarrow S_1 b S_1 b S_1 \\ &\quad S_1 \rightarrow a S_1 b b b S_1 \\ &\quad S_1 \rightarrow b a S_1 b b S_1 \\ &\quad S_1 \rightarrow b b a S_1 b S_1 \\ &\quad S_1 \rightarrow b b b a S_1 \\ &\quad S_1 \rightarrow e\} \end{aligned}$$

2 Γραμματικές Χωρίς Συμφραζόμενα

2.1 $L_1 = \{uw : u \in a, c^*, w \in a^*b^*a^* \text{ και } 2|u| = |w|\}$

$$M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$$

$$K = \{s, q, d, f\}$$

$$\Sigma = \{a, b, c\}$$

$$\Gamma = \{0, 1\}$$

$$F = \{f\}$$

$$\Delta = \{\Delta_1 : ((s, e, e), (q, 0))$$

$$\Delta_2 : ((q, a, e), (q, 11))$$

$$\Delta_3 : ((q, b, e), (q, 11))$$

$$\Delta_4 : ((q, a, 1), (d, e))$$

$$\Delta_5 : ((q, b, 1), (d, e))$$

$$\Delta_6 : ((d, a, 1), (d, e))$$

$$\Delta_7 : ((d, b, 1), (d, e))$$

$$\Delta_8 : ((d, e, 0), (f, e))$$

2.2 $L_2 = \{w \in a, b^* : \text{η w περιέχει ακριβώς 2 περισσότερα a από το τριπλάσιο πλήθος β}\}$

3 Μη ντετερμινισμός και κανονικότητα αυτομάτων

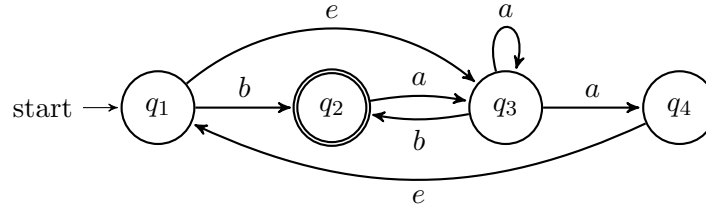


Figure 1: Μη ντετερμινιστικό αυτόματο M

3.1 α) Κατασκευάστε αναλυτικά ένα ισοδύναμο ντετερμινιστικό αυτόματο M'

Για την κατασκευή του ισοδύναμου ντετερμινιστικού αυτόματου, αρχικά είναι απαραίτητο να υπολογιστούν τα E κάθε κατάστασης. Στο E μίας κατάστασης τοποθετούνται όλες οι καταστάσεις προς τις οποίες υπάρχει κενή μετάβαση, ενώ είναι προφανές πως πάντα θα περιέχεται η ίδια η κατάσταση που εξετάζεται.

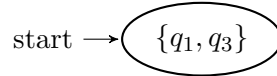
$$E(q_1) = \{q_1, q_3\}$$

$$E(q_2) = \{q_2\}$$

$$E(q_3) = \{q_3\}$$

$$E(q_4) = \{q_1, q_4\}$$

Έχοντας κατασκευάσει τα E , κατασκευάζεται η νέα αρχική κατάσταση η οποία ισούται με το E της προηγούμενης αρχικής κατάστασης, δηλαδή της q_1 :

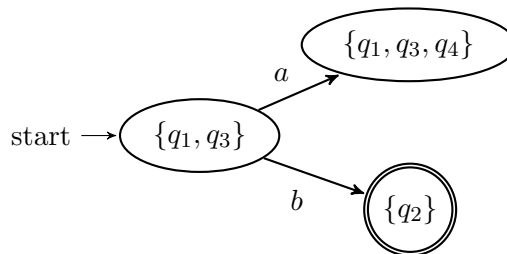


Στην συνέχεια, εξετάζονται όλες οι πιθανές μεταβάσεις από την αρχική κατάσταση:

$$\left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{a} X \\ q_3 \xrightarrow{a} E(q_3) \cup E(q_4) \end{array} \right\} \text{Άρα η μετάβαση } a \text{ οδηγεί στο } E(q_3) \cup E(q_4)$$

$$\left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{b} E(q_2) \\ q_3 \xrightarrow{b} E(q_2) \end{array} \right\} \text{Άρα η μετάβαση } b \text{ οδηγεί στο } E(q_2) \quad (1)$$

οπότε, το σχήμα μετασχηματίζεται ως εξής:

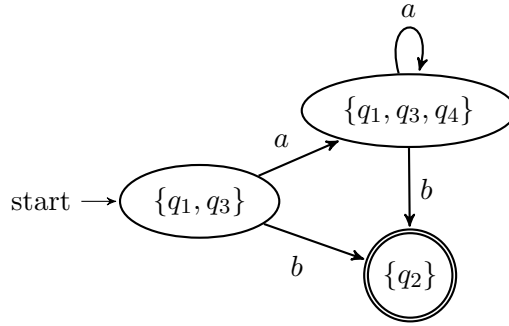


Ομοίως, εξετάζονται όλες οι πιθανές μεταβάσεις από την κατάσταση $\{q_1, q_3, q_4\}$

$$\left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{a} X \\ q_3 \xrightarrow{a} E(q_3) \cup E(q_4) \\ q_4 \xrightarrow{a} X \end{array} \right\} \text{'Αρα η μετάβαση } a \text{ οδηγεί στο } E(q_3) \cup E(q_4)$$

$$\left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{b} E(q_2) \\ q_3 \xrightarrow{b} E(q_2) \\ q_4 \xrightarrow{b} X \end{array} \right\} \text{'Αρα η μετάβαση } b \text{ οδηγεί στο } E(q_2)$$

οπότε, το σχήμα μετασχηματίζεται ως εξής:

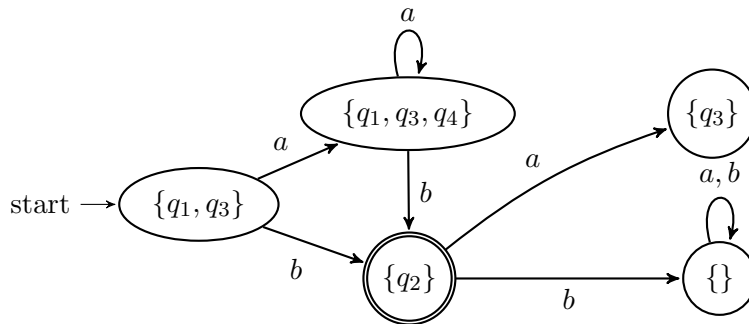


Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την κατάσταση $\{q_2\}$

$$q_2 \xrightarrow{a} E(q_3) \left\} \text{'Αρα η μετάβαση } a \text{ οδηγεί στο } E(q_3)$$

$$q_2 \xrightarrow{b} X \left\} \text{'Αρα η μετάβαση } b \text{ οδηγεί σε καταβόθρα}$$

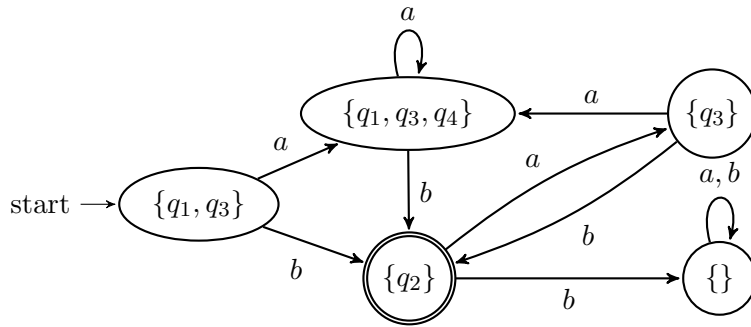
Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την κατάσταση $\{q_3\}$



$$q_3 \xrightarrow{a} E(q_3) \cup E(q_4) \left\} \text{'Αρα η μετάβαση } a \text{ οδηγεί στο } E(q_3) \cup E(q_4)$$

$$q_3 \xrightarrow{b} E(q_2) \left\} \text{'Αρα η μετάβαση } b \text{ οδηγεί στο } E(q_2)$$

οπότε το τελικό σχήμα προκύπτει ως εξής:

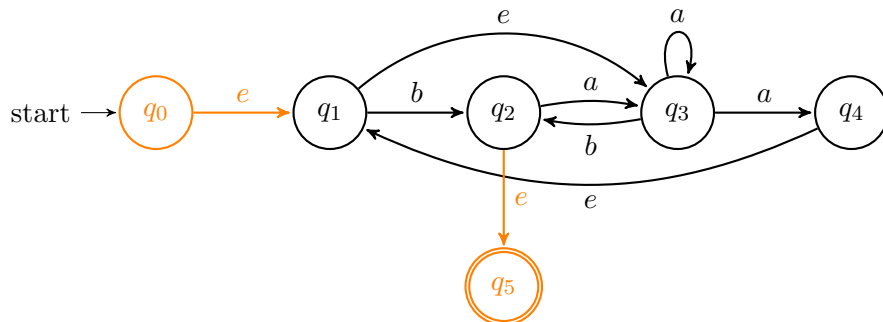


Τελική κατάσταση θεωρείται μόνο η κατάσταση που περιέχει την κατάσταση q_2

3.2 β) Κατασκευάστε αναλυτικά την κανονική έκφραση για την $L(M??)$ με σειρά απαλοιφής q_4, q_2, q_1, q_3 .

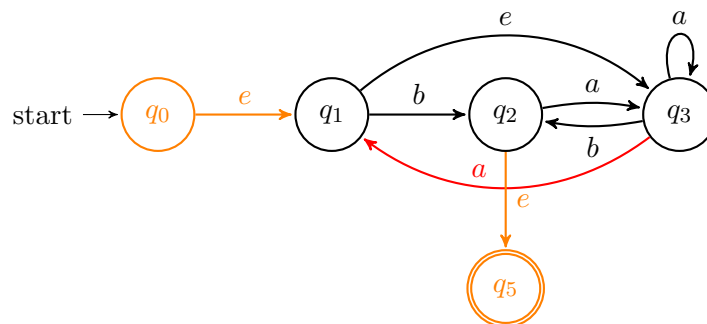
Για την απαλοιφή μίας κατάστασης, είναι απαραίτητο να αντικατασταθούν όλες οι μεταβάσεις που αξιοποιούν την εκάστοτε κατάσταση, είτε δημιουργώντας νέες είτε ανανεώνοντας τις ήδη υπάρχουσες.

Για την μετατροπή του μη ντετερμινιστικού αυτόματου (figure 1) απαιτείται η εισαγωγή 2 επιπλέον καταστάσεων οι οποίες αντικαθιστούν την υπάρχουσα αρχική και την υπάρχουσα τελική κατάσταση. Μεταξύ των νέων και των παλιών καταστάσεων δημιουργείται κενή μετάβαση.



Απαλοιφή της κατάστασης q_4

Είναι απαραίτητο να αντικατασταθούν οι εξής μεταβάσεις: η μετάβαση $q_3 \xrightarrow{q_4} q_1$. Η αντικατάσταση γίνεται με δημιουργία νέας μετάβασης από την κατάσταση q_3 στην κατάσταση q_1 όταν το (σύμβολο???) είναι a :



Απαλοιφή της κατάστασης q_2

Είναι απαραίτητο να αντικατασταθούν οι εξής μεταβάσεις:

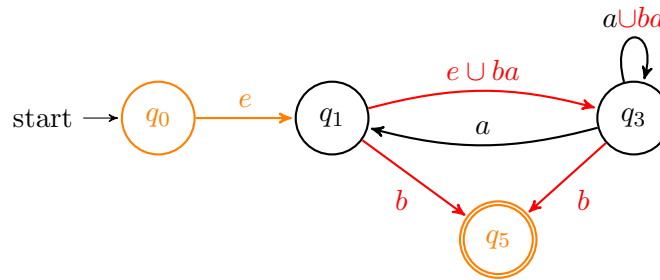
$$q_1 \xrightarrow{q_2} q_3 \Rightarrow ba$$

$$q_1 \xrightarrow{q_2} q_5 \Rightarrow b$$

$$q_3 \xrightarrow{q_2} q_3 \Rightarrow ba$$

$$q_3 \xrightarrow{q_2} q_5 \Rightarrow b$$

Η πρώτη μετάβαση προστίθεται στην ήδη υπάρχουσα κενή μετάβαση που υπήρχε μεταξύ της κατάστασης q_1 και της q_3 ενώ η δεύτερη μετάβαση δημιουργείται καθώς δεν προϋπάρχει μετάβαση. Αντίστοιχα, η τρίτη μετάβαση προστίθεται στο ήδη υπάρχον self loop της κατάστασης q_3 ενώ για την τέταρτη μετάβαση δημιουργεί και πάλι νέα.



Απαλοιφή της κατάστασης q_1

Ομοίως, είναι απαραίτητο να αντικατασταθούν οι εξής μεταβάσεις:

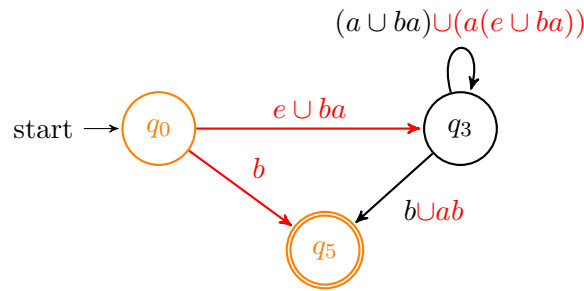
$$q_0 \xrightarrow{q_1} q_3 \Rightarrow ba$$

$$q_0 \xrightarrow{q_1} q_5 \Rightarrow b$$

$$q_3 \xrightarrow{q_1} q_3 \Rightarrow a(e \cup ba)$$

$$q_3 \xrightarrow{q_1} q_4 \Rightarrow ab$$

Για την πρώτη μετάβαση δημιουργείται νέα μετάβαση μεταξύ της q_0 και q_3 ενώ νέα μετάβαση δημιουργείται και για την δεύτερη μετάβαση μεταξύ της q_0 και q_5 . Αντίστοιχα, η τρίτη μετάβαση προστίθεται στο ήδη υπάρχον self loop της κατάστασης q_3 ενώ το ίδιο γίνεται και για την τέταρτη μετάβαση.

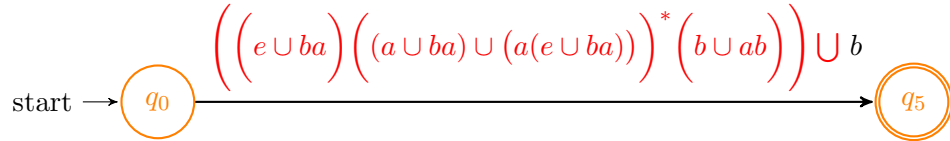


Απαλοιφή της κατάστασης q_3

Τέλος, είναι απαραίτητο να αντικατασταθεί η μετάβαση $q_0 \xrightarrow{q_3} q_4$. Η αντικατάσταση γίνεται προσθέτοντας την εξής έκφραση στην ήδη υπάρχουσα μετάβαση μεταξύ q_0 και q_5 :

$$\left(e \cup ba \right) \left((a \cup ba) \cup (a(e \cup ba)) \right)^* \left(b \cup ab \right) \quad (2)$$

Στην παραπάνω έκφραση ο πρώτος όρος προέρχεται από την μετάβαση μεταξύ της q_0 και q_3 , ο δεύτερος αποτελεί το self loop στην q_3 , για αυτό και χρησιμοποιήθηκε αστερίσχος και ο τρίτος όρος προέρχεται από την μετάβαση μεταξύ της q_3 και q_5 .



Έτσι, η τελική κανονική έκφραση είναι η εξής : $\left((e \cup ba) \left((a \cup ba) \cup (a(e \cup ba)) \right)^* b \cup ab \right) \cup b$

4 Κανονικές γλώσσες

4.1 α) Η τομή μιας κανονικής γλώσσας με μια μη κανονική γλώσσα είναι πάντα κανονική γλώσσα.

Λάθος Ακολουθεί αντιπαράδειγμα:

Έστω μία κανονική γλώσσα $L_1 = \{a^*\}$ και μία μη κανονική γλώσσα $L_2 = \{a^n b^n, n > 0\}$ και έστω ότι η τομή των δύο γλωσσών παράγει μία κανονική γλώσσα:

$$L_1 \cap L_2 = \{a^n, n > 0\}$$

Άτοπο το αποτέλεσμα της τομής δεν είναι κανονικό.

4.2 β) Το συμπλήρωμα μιας πεπερασμένης γλώσσας είναι πάντα κανονική γλώσσα.

Σωστό

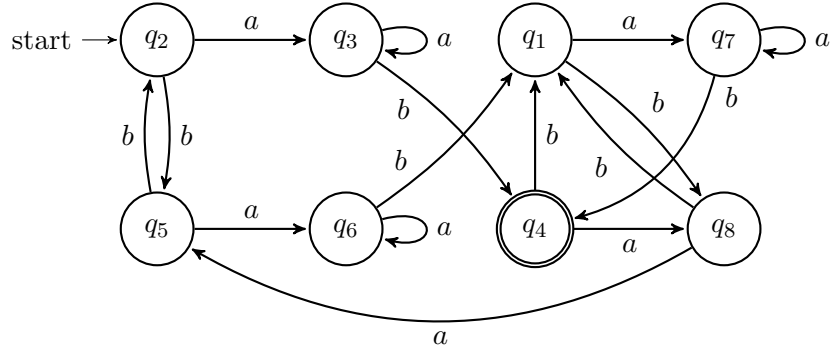
Κάθε πεπερασμένη γλώσσα είναι κανονική και επίσης το συμπλήρωμα μίας κανονικής γλώσσας είναι επίσης κανονική γλώσσα λόγω κλειστότητας της πράξης.

4.3 γ) Κάθε μη κανονική γλώσσα περιέχει μη μετρήσιμο πλήθος συμβολοσειρών.

Λάθος

Κάθε κανονική γλώσσα είναι υποσύνολο του Σ^* το οποίο είναι ένα μετρήσιμο άπειρο σύνολο.

5 Ελαχιστοποίηση καταστάσεων



5.1 α) Κατασκευάστε αναλυτικά το ισοδύναμο πρότυπο αυτόματο

Σχέση Ξ_o) Χωρίζουμε τις τελικές με τις μη τελικές καταστάσεις οπότε προκύπτουν ως εξής:

$$\{q_4\} \{q_1, q_2, q_3, q_5, q_6, q_7, q_8\} \quad (3)$$

Σχέση Ξ_1) Εξετάζεται αν είναι εφικτό να σπάσει μία κλάση σε υποκλάσεις. Προφανώς ελέγχεται μόνο η δεύτερη κλάση εφόσον η πρώτη έχει μόνο ένα μία κατάσταση.

Ο έλεγχος γίνεται εξετάζοντας τις διαδρομές για όλα τα σύμβολα της γλώσσας (a, b) από ένα συγκεκριμένο q με τις αντίστοιχες διαδρομές ενός διαφορετικού q που ανήκει σε μία από τις υποκλάσεις. Στην περίπτωση που καταλήγουν σε κατάσταση της ίδια υποκλάσεις για όλα τα σύμβολα, τότε ανήκουν και στην ίδια υποκλάση αλλιώς το επιλεγμένο q εξετάζεται αν θα τοποθετηθεί σε μία από τις άλλες ήδη υπάρχουσες υποκλάσεις ή θα δημιουργηθεί μία νέα υποκλάση γι αυτό.

Εξετάζεται το q_1 με το q_2

$$\left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{a} q_7 \\ q_2 \xrightarrow{a} q_3 \end{array} \right\} \text{Τίδιο υποσύνολο} \quad \left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{b} q_8 \\ q_2 \xrightarrow{b} q_5 \end{array} \right\} \text{Τίδιο υποσύνολο} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Τίδιο υποσύνολο} \\ \text{Τίδιο υποσύνολο} \end{array} \right\} \text{Άρα τα } q_1, q_2 \text{ ανήκουν στο } \underline{\text{ίδιο}} \text{ υποσύνολο}$$

Εξετάζεται το q_1 με το q_3

$$\left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{a} q_7 \\ q_3 \xrightarrow{a} q_3 \end{array} \right\} \text{Τίδιο υποσύνολο} \quad \left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{b} q_8 \\ q_3 \xrightarrow{b} q_4 \end{array} \right\} \text{Διαφορετικό υποσύνολο} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Τίδιο υποσύνολο} \\ \text{Διαφορετικό υποσύνολο} \end{array} \right\} \text{Άρα τα } q_1, q_3 \text{ ανήκουν σε } \underline{\text{διαφορετικό}} \text{ υποσύνολο}$$

Εξετάζεται το q_1 με το q_5

$$\left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{a} q_7 \\ q_5 \xrightarrow{a} q_6 \end{array} \right\} \text{Τίδιο υποσύνολο} \quad \left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{b} q_8 \\ q_5 \xrightarrow{b} q_2 \end{array} \right\} \text{Τίδιο υποσύνολο} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Τίδιο υποσύνολο} \\ \text{Τίδιο υποσύνολο} \end{array} \right\} \text{Άρα τα } q_1, q_5 \text{ ανήκουν στο } \underline{\text{ίδιο}} \text{ υποσύνολο}$$

Εξετάζεται το q_1 με το q_6

$$\left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{a} q_7 \\ q_6 \xrightarrow{a} q_6 \end{array} \right\} \text{Τίδιο υποσύνολο} \left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{b} q_8 \\ q_6 \xrightarrow{b} q_1 \end{array} \right\} \text{Τίδιο υποσύνολο} \left. \vphantom{\begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{a} q_7 \\ q_6 \xrightarrow{a} q_6 \end{array}} \right\} \text{Άρα τα } q_1, q_6 \text{ ανήκουν στο } \underline{\text{ίδιο}} \text{ υποσύνολο}$$

Εξετάζεται το q_1 με το q_7

$$\left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{a} q_7 \\ q_7 \xrightarrow{a} q_7 \end{array} \right\} \text{Τίδιο υποσύνολο} \left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{b} q_8 \\ q_7 \xrightarrow{b} q_4 \end{array} \right\} \text{Διαφορετικό υποσύνολο} \left. \vphantom{\begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{a} q_7 \\ q_7 \xrightarrow{a} q_7 \end{array}} \right\} \text{Άρα τα } q_1, q_7 \text{ ανήκουν σε } \underline{\text{διαφορετικό}} \text{ υποσύνολο}$$

Εξετάζεται το q_7 με το q_3

$$\left. \begin{array}{l} q_7 \xrightarrow{a} q_7 \\ q_3 \xrightarrow{a} q_3 \end{array} \right\} \text{Τίδιο υποσύνολο} \left. \begin{array}{l} q_7 \xrightarrow{b} q_4 \\ q_3 \xrightarrow{b} q_4 \end{array} \right\} \text{Τίδιο υποσύνολο} \left. \vphantom{\begin{array}{l} q_7 \xrightarrow{a} q_7 \\ q_3 \xrightarrow{a} q_3 \end{array}} \right\} \text{Άρα τα } q_3, q_7 \text{ ανήκουν στο } \underline{\text{ίδιο}} \text{ υποσύνολο}$$

Εξετάζεται το q_1 με το q_8

$$\left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{a} q_7 \\ q_8 \xrightarrow{a} q_5 \end{array} \right\} \text{Τίδιο υποσύνολο} \left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{b} q_8 \\ q_8 \xrightarrow{b} q_1 \end{array} \right\} \text{Τίδιο υποσύνολο} \left. \vphantom{\begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{a} q_7 \\ q_8 \xrightarrow{a} q_5 \end{array}} \right\} \text{Άρα τα } q_1, q_8 \text{ ανήκουν στο } \underline{\text{ίδιο}} \text{ υποσύνολο}$$

Τελικά, τα υποσύνολα είναι τα εξής:

$$\{q_4\} \quad \{q_3, q_7\} \quad \{q_1, q_2, q_5, q_6, q_8\} \quad (4)$$

Σχέση Ξ_2) Ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση, εξετάζονται οι κλάσεις $\{q_3, q_7\}$ και $\{q_1, q_2, q_5, q_6, q_8\}$

Εξετάζεται το q_3 με το q_7

$$\left. \begin{array}{l} q_3 \xrightarrow{a} q_3 \\ q_7 \xrightarrow{a} q_7 \end{array} \right\} \text{Τίδιο υποσύνολο} \left. \begin{array}{l} q_3 \xrightarrow{b} q_4 \\ q_7 \xrightarrow{b} q_4 \end{array} \right\} \text{Τίδιο υποσύνολο} \left. \vphantom{\begin{array}{l} q_3 \xrightarrow{a} q_3 \\ q_7 \xrightarrow{a} q_7 \end{array}} \right\} \text{Άρα τα } q_3, q_7 \text{ ανήκουν στο } \underline{\text{ίδιο}} \text{ υποσύνολο}$$

Εξετάζεται το q_1 με το q_2

$$\left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{a} q_7 \\ q_2 \xrightarrow{a} q_3 \end{array} \right\} \text{Τίδιο υποσύνολο} \left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{b} q_8 \\ q_2 \xrightarrow{b} q_5 \end{array} \right\} \text{Τίδιο υποσύνολο} \left. \vphantom{\begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{a} q_7 \\ q_2 \xrightarrow{a} q_3 \end{array}} \right\} \text{Άρα τα } q_1, q_2 \text{ ανήκουν στο } \underline{\text{ίδιο}} \text{ υποσύνολο}$$

Εξετάζεται το q_1 με το q_5

$$\left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{a} q_7 \\ q_5 \xrightarrow{a} q_6 \end{array} \right\} \text{Διαφορετικό υποσύνολο} \Rightarrow \text{Άρα τα } q_1, q_5 \text{ ανήκουν στο } \underline{\text{διαφορετικό}} \text{ υποσύνολο}$$

Εξετάζεται το q_5 με το q_3

$$\left. \begin{array}{l} q_5 \xrightarrow{a} q_6 \\ q_3 \xrightarrow{a} q_3 \end{array} \right\} \text{Διαφορετικό υποσύνολο} \Rightarrow \text{Άρα τα } q_5, q_3 \text{ ανήκουν στο } \underline{\text{διαφορετικό}} \text{ υποσύνολο}$$

Άρα, δημιουργείται νέο υποσύνολο για το q_5

Εξετάζεται το q_1 με το q_6

$$\left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{a} q_7 \\ q_6 \xrightarrow{a} q_6 \end{array} \right\} \text{Διαφορετικό υποσύνολο} \Rightarrow \text{Άρα τα } q_1, q_6 \text{ ανήκουν στο } \underline{\text{διαφορετικό}} \text{ υποσύνολο}$$

Εξετάζεται το q_6 με το q_3

$$\left. \begin{array}{l} q_6 \xrightarrow{a} q_6 \\ q_3 \xrightarrow{a} q_3 \end{array} \right\} \text{Διαφορετικό υποσύνολο} \Rightarrow \text{Άρα τα } q_6, q_3 \text{ ανήκουν στο } \underline{\text{διαφορετικό}} \text{ υποσύνολο}$$

Εξετάζεται το q_6 με το q_5

$$\left. \begin{array}{l} q_6 \xrightarrow{a} q_6 \\ q_5 \xrightarrow{a} q_6 \end{array} \right\} \text{Τδίο υποσύνολο} \left. \begin{array}{l} q_6 \xrightarrow{b} q_1 \\ q_5 \xrightarrow{b} q_2 \end{array} \right\} \text{Τδίο υποσύνολο} \left. \right\} \text{Άρα τα } q_6, q_5 \text{ ανήκουν στο } \underline{\text{ίδιο}} \text{ υποσύνολο}$$

Εξετάζεται το q_1 με το q_8

$$\left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{a} q_7 \\ q_8 \xrightarrow{a} q_5 \end{array} \right\} \text{Διαφορετικό υποσύνολο} \Rightarrow \text{Άρα τα } q_1, q_8 \text{ ανήκουν στο } \underline{\text{ίδιο}} \text{ υποσύνολο}$$

Εξετάζεται το q_8 με το q_3

$$\left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{a} q_7 \\ q_8 \xrightarrow{a} q_1 \end{array} \right\} \text{Διαφορετικό υποσύνολο} \Rightarrow \text{Άρα τα } q_1, q_8 \text{ ανήκουν στο } \underline{\text{ίδιο}} \text{ υποσύνολο}$$

Εξετάζεται το q_8 με το q_5

$$\left. \begin{array}{l} q_8 \xrightarrow{a} q_1 \\ q_5 \xrightarrow{a} q_6 \end{array} \right\} \text{Τδίο υποσύνολο} \left. \begin{array}{l} q_8 \xrightarrow{b} q_1 \\ q_5 \xrightarrow{b} q_2 \end{array} \right\} \text{Τδίο υποσύνολο} \left. \right\} \text{Άρα τα } q_8, q_5 \text{ ανήκουν στο } \underline{\text{ίδιο}} \text{ υποσύνολο}$$

Τελικά, τα υποσύνολα είναι τα εξής:

$$\{q_4\} \{q_3, q_7\} \{q_1, q_2\} \{q_5, q_6, q_8\} \quad (5)$$

Σχέση Ξ_3) Ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση, εξετάζονται οι κλάσεις $\{q_3, q_7\} \{q_1, q_2\} \{q_5, q_6, q_8\}$

Εξετάζεται το q_1 με το q_2

$$\left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{a} q_7 \\ q_2 \xrightarrow{a} q_3 \end{array} \right\} \text{Τδιο υποσύνολο} \quad \left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{b} q_8 \\ q_2 \xrightarrow{b} q_5 \end{array} \right\} \text{Τδιο υποσύνολο} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{a} q_7 \\ q_2 \xrightarrow{a} q_3 \end{array}} \right\} \text{Άρα τα } q_1, q_2 \text{ ανήκουν στο } \underline{\text{ίδιο}} \text{ υποσύνολο}$$

Εξετάζεται το q_3 με το q_7

$$\left. \begin{array}{l} q_3 \xrightarrow{a} q_3 \\ q_7 \xrightarrow{a} q_7 \end{array} \right\} \text{Τδιο υποσύνολο} \quad \left. \begin{array}{l} q_3 \xrightarrow{b} q_4 \\ q_7 \xrightarrow{b} q_4 \end{array} \right\} \text{Τδιο υποσύνολο} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} q_3 \xrightarrow{a} q_3 \\ q_7 \xrightarrow{a} q_7 \end{array}} \right\} \text{Άρα τα } q_3, q_7 \text{ ανήκουν στο } \underline{\text{ίδιο}} \text{ υποσύνολο}$$

Εξετάζεται το q_5 με το q_6

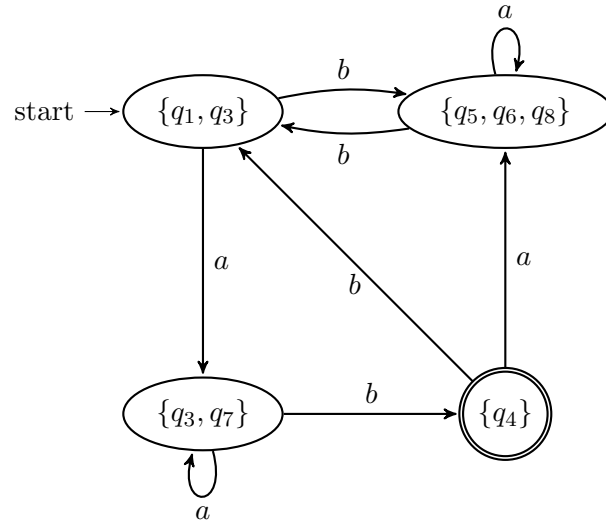
$$\left. \begin{array}{l} q_5 \xrightarrow{a} q_6 \\ q_6 \xrightarrow{a} q_6 \end{array} \right\} \text{Τδιο υποσύνολο} \quad \left. \begin{array}{l} q_5 \xrightarrow{b} q_2 \\ q_6 \xrightarrow{b} q_1 \end{array} \right\} \text{Τδιο υποσύνολο} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} q_5 \xrightarrow{a} q_6 \\ q_6 \xrightarrow{a} q_6 \end{array}} \right\} \text{Άρα τα } q_5, q_6 \text{ ανήκουν στο } \underline{\text{ίδιο}} \text{ υποσύνολο}$$

Εξετάζεται το q_5 με το q_8

$$\left. \begin{array}{l} q_5 \xrightarrow{a} q_6 \\ q_8 \xrightarrow{a} q_5 \end{array} \right\} \text{Τδιο υποσύνολο} \quad \left. \begin{array}{l} q_5 \xrightarrow{b} q_2 \\ q_8 \xrightarrow{b} q_1 \end{array} \right\} \text{Τδιο υποσύνολο} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} q_5 \xrightarrow{a} q_6 \\ q_8 \xrightarrow{a} q_5 \end{array}} \right\} \text{Άρα τα } q_5, q_8 \text{ ανήκουν στο } \underline{\text{ίδιο}} \text{ υποσύνολο}$$

Εφόσον μεταξύ της Ξ_2 και της Ξ_3 δεν μεταβλήθηκε κανένα από τα υποσύνολα, δεν μπορούν να γίνουν άλλες απλοποιήσεις και άρα η ελαχιστοποιημένες καταστάσεις είναι οι εξής:

$$\{q_4\} \{q_3, q_7\} \{q_1, q_2\} \{q_5, q_6, q_8\}$$



5.2 β) Πόσες κλάσεις ισοδυναμίας έχει κάθε μία από τις παρακάτω σχέσεις; ($\sim M \sim M' \approx L(M) \approx L(M')$)

Ο αριθμός της σχέσης $\sim M$ είναι ίσος με τον αριθμό των κλάσεων του αυτομάτου M , δηλαδή ίσος με 8 ενώ ο αριθμός της σχέσης $\sim M'$ είναι ίσος με 4 αντίστοιχα. Οι σχέσεις $\approx L(M) \approx L(M')$ παρουσιάζουν ίδιο αριθμό εφόσον και τα δύο αυτόματα έχουν την ίδια γλώσσα και ως αποτέλεσμα, ισούται με τον αριθμό των κλάσεων του ελαχιστοποιημένου αυτομάτου, δηλαδή 4.

5.3 γ) Περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης $\approx L(M')$ συναρτήσει των κλάσεων της σχέσης $\sim M$.

Δεδομένου του ότι η σχέση $\sim M$ αποτελεί εκλέπτυνση της $\sim M'$ καθώς και πως για τα E ισχύουν οι εξής σχέσεις, σύμφωνα με το υποερώτημα 5.1:

$$\begin{aligned}
 E_{q_4}^{M'} &= E_{q_4}^M \\
 E_{q_1, q_2}^{M'} &= E_{q_1}^M \cup E_{q_2}^M \\
 E_{q_3, q_7}^{M'} &= E_{q_3}^M \cup E_{q_7}^M \\
 E_{q_5, q_6, q_8}^{M'} &= E_{q_5}^M \cup E_{q_6}^M \cup E_{q_8}^M
 \end{aligned}$$

συμπεραίνεται πως οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης $\approx L(M')$ ταυτίζονται με τις $\sim M'$.

Έτσι, οι 4 κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης $\approx L(M')$ προκύπτουν ως εξής:

$$Class_1 = E_{q_4}^M \tag{6}$$

$$Class_2 = E_{q_1}^M \cup E_{q_2}^M \tag{7}$$

$$Class_3 = E_{q_3}^M \cup E_{q_7}^M \tag{8}$$

$$Class_4 = E_{q_5}^M \cup E_{q_6}^M \cup E_{q_8}^M \tag{9}$$

$$\tag{10}$$