
Lesson

Excercise

-

-

Διδάσκων:

-

Υπεύθυνος εργαστηρίου:

-



ΗΜΜΥ

Πολυτεχνείο Κρήτης
Εαρινό εξάμηνο 2022-2023

Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή	1
1 Οι κλάσεις P και NP	2
1.1 Αποδείξτε ότι αν $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{NP}$ και $\overline{L_1} \cup \overline{L_2} \in \mathcal{NP}$, τότε $\overline{L_1 \cap L_2} \in P$	2
1.2 Δείξτε ότι το πρόβλημα 2023-MaxSAT ανήκει στην κλάση \mathcal{NP}	2
2 Πολυωνυμικές Αναγωγές	3
2.1 Έστω το στιγμιότυπο του SAT: $(\overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \overline{x_5})$	3
2.1.1 Βάσει της πολυωνυμικής αναγωγής από SAT στο 4-SAT, δώστε το στιγμιότυπο του 4-SAT στο οποίο ανάγεται το παραπάνω στιγμιότυπο του SAT	3
2.1.2 Με απευθείας αναγωγή από SAT σε IndependentSet, δώστε το στιγμιότυπο (G, K) του IndependentSet στο οποίο θα αναγόταν το αρχικό στιγμιότυπο του SAT	4
2.1.3 Υπάρχει μία λύση λύση για το στιγμιότυπο (G, K) του (β) και την αντίστοιχη ανάθεση τιμών αληθείας στις μεταβλητές x_i που ικανοποιεί το αρχικό στιγμιότυπο SAT;	4
3 Άσκηση Bonus	5
3.1 Αποδείξτε ότι το πρόβλημα 2023-MaxSAT είναι \mathcal{NP} -πλήρες.	5

1 Οι κλάσεις P και NP

1.1 Αποδείξτε ότι αν $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{NP}$ και $\overline{L_1} \cup \overline{L_2} \in \mathcal{NP}$, τότε $\overline{L_1 \cap L_2} \in P$

1.2 Δείξτε ότι το πρόβλημα 2023-MaxSAT ανήκει στην κλάση \mathcal{NP}

Το πρόβλημα MAXSAT είναι πρόβλημα τύπου \mathcal{NP} , όπως είναι γνωστό από την θεωρία. Εφόσον, γίνεται αναφορά στο πρόβλημα 2023-MaxSAT, μπορεί να αποδεχθεί πως και αυτό ανήκει στην κλάση \mathcal{NP} μέσω εφαρμογής της πολυωνυμικής αναγωγής.

Η πολυωνυμική αναγωγή εφαρμόζεται μέσω μίας ντετερμινιστικής μηχανής Turing M η οποία δέχεται στη είσοδό μία λογική πρόταση CNF υπό μορφή συμβολοσειράς η οποία περιέχει ακριβώς 2023 ανά συνθήκη. Η μηχανή αλλάζει τον αριθμό των στοιχείων ανά συνθήκη ώστε να παράξει την αντίστοιχη ισοδύναμη λογική πρόταση και η απόφαση για το πρόβλημα MAXSAT προκύπτει μέσω μηχανής απόφαση. Έτσι, η απόφαση για τον 2023-MAXSAT πρόβλημα προκύπτει σε μη-ντετερμινιστικά πολυωνυμικό χρόνο, δηλαδή το πρόβλημα 2023-MaxSAT ανήκει και αυτό στην κλάση \mathcal{NP}



(a) subcaption 1

(b) subcaption 1

Figure 1: Caption 1

$$a \leq \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \quad (1)$$

2 Πολυωνυμικές Αναγωγές

2.1 Έστω το στιγμιότυπο του SAT: $(\overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \overline{x_5})$

2.1.1 Βάσει της πολυωνυμικής αναγωγής από SAT στο 4-SAT, δώστε το στιγμιότυπο του 4-SAT στο οποίο ανάγεται το παραπάνω στιγμιότυπο του SAT

Για την μετατροπή του SAT στιγμιότυπου σε 4-SAT, απαιτείται κάθε όρος να περιέχει 4 στοιχεία. Οι απαραίτητοι μετασχηματισμοί είναι οι εξής:

$$(\overline{x_2} \vee x_3) \Rightarrow (\overline{x_2} \vee x_3 \vee z_1 \vee z_2) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{z_1} \vee z_2) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee z_1 \vee \overline{z_2}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{z_1} \vee \overline{z_2}) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) &\rightarrow (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee z_3) \wedge (\overline{z_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee z_3) \wedge (\overline{z_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5 \vee z_4) \wedge (\overline{z_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5 \vee \overline{z_4}) \end{aligned} \quad (3)$$

$$(x_2 \vee x_1 \vee \overline{x_5}) \rightarrow (x_2 \vee x_1 \vee \overline{x_5} \vee z_5) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \overline{x_5} \vee \overline{z_5}) \quad (4)$$

οπότε, η τελική ζητούμε έκφραση 4-SAT είναι:

$$\begin{aligned} &(\overline{x_2} \vee x_3 \vee z_1 \vee z_2) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{z_1} \vee z_2) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee z_1 \vee \overline{z_2}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{z_1} \vee \overline{z_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee z_3) \wedge \\ &\wedge (\overline{z_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5 \vee z_4) \wedge (\overline{z_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5 \vee \overline{z_4}) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \overline{x_5} \vee z_5) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \overline{x_5} \vee \overline{z_5}) \end{aligned}$$

- 2.1.2 Με απευθείας αναγωγή από SAT σε IndependentSet, δώστε το στιγμιότυπο (G, K) του IndependentSet στο οποίο θα αναγόταν το αρχικό στιγμιότυπο του SAT
- 2.1.3 Υπάρχει μία λύση λύση για το στιγμιότυπο (G, K) του (β) και την αντίστοιχη ανάθεση τιμών αληθείας στις μεταβλητές x_i που ικανοποιεί το αρχικό στιγμιότυπο SAT;

3 Άσκηση Bonus

3.1 Αποδείξτε ότι το πρόβλημα 2023-MaxSAT είναι \mathcal{NP} -πλήρες.