
Θεωρία Υπολογισμού

Τέταρτο Σετ Ασκήσεων

Σταυρόπουλος Αλέξανδρος Ανδρέας
2019030109

Διδάσκων:
Μιχαήλ Λαγουδάκης



ΗΜΜΥ
Πολυτεχνείο Κρήτης
Εαρινό εξάμηνο 2022-2023

Πίνακας Περιεχομένων

1	Οι κλάσεις P και NP	1
1.1	Αποδείξτε ότι αν $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{NP}$ και $\overline{L_1} \cup \overline{L_2} \in \mathcal{NP}$, τότε $\overline{L_1 \cap L_2} \in P$	1
1.2	Δείξτε ότι το πρόβλημα 2023-MaxSAT ανήκει στην κλάση \mathcal{NP}	1
2	Πολυωνυμικές Αναγωγές	2
2.1	Έστω το στιγμιότυπο του SAT: $(\overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \overline{x_5})$	2
2.1.1	Βάσει της πολυωνυμικής αναγωγής από SAT στο 4-SAT, δώστε το στιγμιότυπο του 4-SAT στο οποίο ανάγεται το παραπάνω στιγμιότυπο του SAT	2
2.1.2	Με απευθείας αναγωγή από SAT σε IndependentSet, δώστε το στιγμιότυπο (G, K) του IndependentSet στο οποίο θα αναγόταν το αρχικό στιγμιότυπο του SAT	2
2.1.3	Υπάρχει μία λύση λύση για το στιγμιότυπο (G, K) του (β) και την αντίστοιχη ανάθεση τιμών αληθείας στις μεταβλητές x_i που ικανοποιεί το αρχικό στιγμιότυπο SAT;	3
3	Άσκηση Bonus	4
3.1	Αποδείξτε ότι το πρόβλημα 2023-MaxSAT είναι \mathcal{NP} -πλήρες.	4

1 Οι κλάσεις P και NP

1.1 Αποδείξτε ότι αν $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{NP}$ και $\overline{L_1} \cup \overline{L_2} \in \mathcal{NP}$, τότε $\overline{L_1 \cap L_2} \in P$

1.2 Δείξτε ότι το πρόβλημα 2023-MaxSAT ανήκει στην κλάση \mathcal{NP}

Το πρόβλημα MAXSAT είναι πρόβλημα τύπου \mathcal{NP} , όπως είναι γνωστό από την θεωρία. Εφόσον, γίνεται αναφορά στο πρόβλημα 2023-MaxSAT, μπορεί να αποδεχθεί πως και αυτό ανήκει στην κλάση \mathcal{NP} μέσω εφαρμογής της πολυωνυμικής αναγωγής.

Η πολυωνυμική αναγωγή εφαρμόζεται μέσω μίας ντετερμινιστικής μηχανής Turing M η οποία δέχεται στη είσοδό μία λογική πρόταση CNF υπό μορφή συμβολοσειράς η οποία περιέχει ακριβώς 2023 ανά συνθήκη. Η μηχανή αλλάζει τον αριθμό των στοιχείων ανά συνθήκη ώστε να παράξει την αντίστοιχη ισοδύναμη λογική πρόταση και η απόφαση για το πρόβλημα MAXSAT προκύπτει μέσω μηχανής απόφαση. Έτσι, η απόφαση για τον 2023-MAXSAT πρόβλημα προκύπτει σε μη-ντετερμινιστικά πολυωνυμικό χρόνο, δηλαδή το πρόβλημα 2023-MaxSAT ανήκει και αυτό στην κλάση \mathcal{NP}

2 Πολυωνυμικές Αναγωγές

2.1 Έστω το στιγμιότυπο του SAT: $(\overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \overline{x_5})$

2.1.1 Βάσει της πολυωνυμικής αναγωγής από SAT στο 4-SAT, δώστε το στιγμιότυπο του 4-SAT στο οποίο ανάγεται το παραπάνω στιγμιότυπο του SAT

Για την μετατροπή του SAT στιγμιότυπου σε 4-SAT, απαιτείται κάθε όρος να περιέχει 4 στοιχεία. Οι απαραίτητοι μετασχηματισμοί είναι οι εξής:

$$(\overline{x_2} \vee x_3) \Rightarrow (\overline{x_2} \vee x_3 \vee z_1 \vee z_2) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{z_1} \vee z_2) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee z_1 \vee \overline{z_2}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{z_1} \vee \overline{z_2}) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) &\rightarrow (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee z_3) \wedge (\overline{z_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee z_3) \wedge (\overline{z_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5 \vee z_4) \wedge (\overline{z_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5 \vee \overline{z_4}) \end{aligned} \quad (2)$$

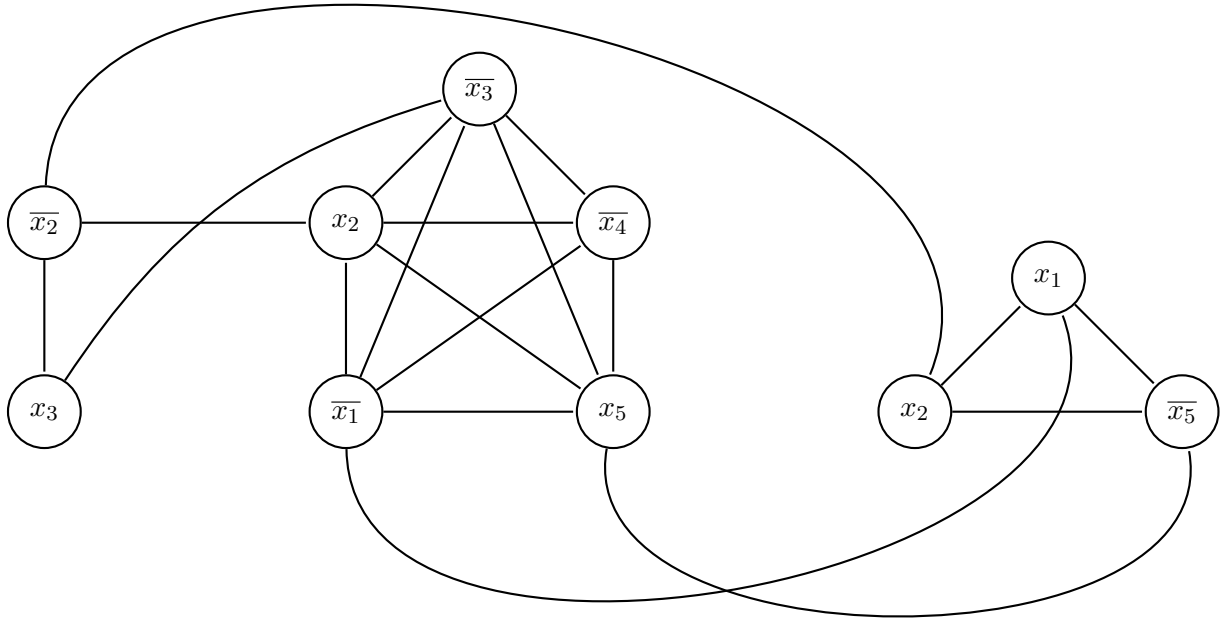
$$(x_2 \vee x_1 \vee \overline{x_5}) \rightarrow (x_2 \vee x_1 \vee \overline{x_5} \vee z_5) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \overline{x_5} \vee \overline{z_5}) \quad (3)$$

οπότε, η τελική ζητούμε έκφραση 4-SAT είναι:

$$\begin{aligned} &(\overline{x_2} \vee x_3 \vee z_1 \vee z_2) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{z_1} \vee z_2) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee z_1 \vee \overline{z_2}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{z_1} \vee \overline{z_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee z_3) \wedge \\ &\wedge (\overline{z_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5 \vee z_4) \wedge (\overline{z_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5 \vee \overline{z_4}) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \overline{x_5} \vee z_5) \wedge (x_2 \vee x_1 \vee \overline{x_5} \vee \overline{z_5}) \end{aligned}$$

2.1.2 Με απευθείας αναγωγή από SAT σε IndependentSet, δώστε το στιγμιότυπο (G, K) του IndependentSet στο οποίο θα αναγόταν το αρχικό στιγμιότυπο του SAT

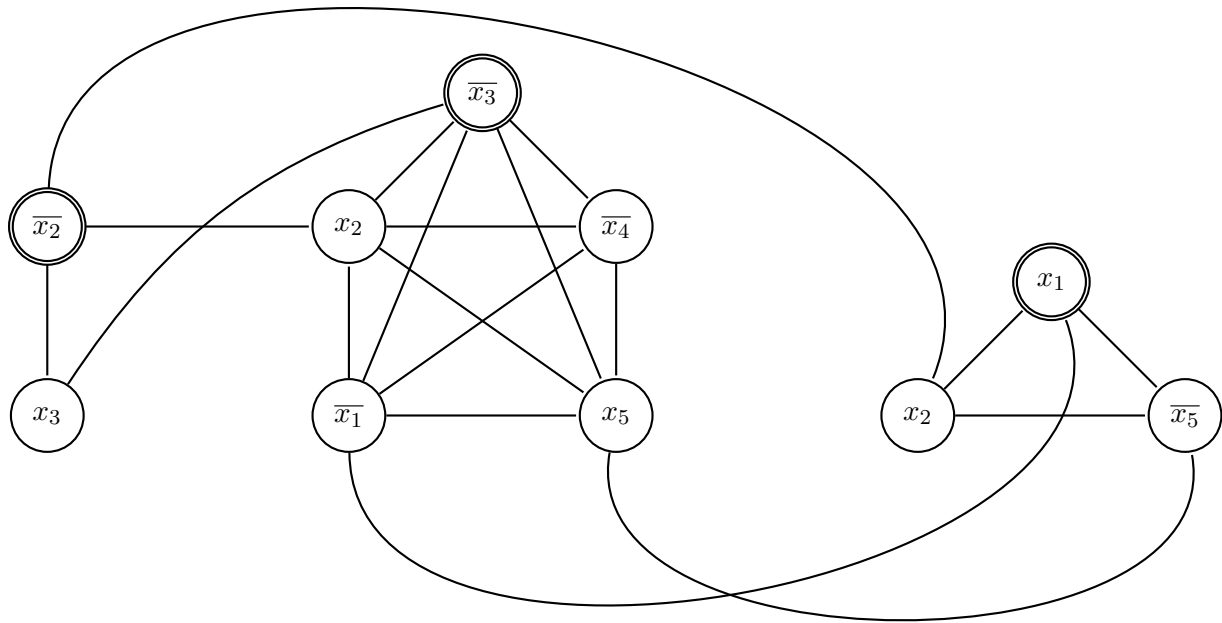
Εφόσον, υπάρχουν 3 συνθήκες στη αρχική έκφραση, το επιθυμητό μέγεθος του ανεξάρτητου συνόλου K ισούται με 3 και ο ζητούμενος γράφος κατασκευάζεται ως εξής:



2.1.3 Υπάρχει μία λύση λύση για το στιγμιότυπο (G, K) του (β) και την αντίστοιχη ανάθεση τιμών αληθείας στις μεταβλητές x_i που ικανοποιεί το αρχικό στιγμιότυπο SAT;

Για την επιλογή μία λύσης του παραπάνω στιγμιότυπου απαιτείται η επιλογή τριών κορυφών. Ενδεικτικά επιλέχθηκαν οι εξής κορυφές

$$x_2 = false, x_4 = false, x_1 = true$$



3 Άσκηση Bonus

3.1 Αποδείξτε ότι το πρόβλημα 2023-MaxSAT είναι NP -πλήρες.

Απαραίτητη προϋπόθεση για να είναι ένα πρόβλημα NP -πλήρες είναι προφανώς να είναι NP . Το συγκεκριμένο πρόβλημα (2023-MAXSAT) έχει αποδειχθεί πως είναι πλήρες, στην υποενότητα (1.2), οπότε απαιτείται μονάχα να αποδειχθεί πως είναι και πλήρες.

Για την απόδειξη του ζητούμενου, γίνεται πολυωνυμική αναγωγή στο MAXSAT, το οποίο είναι γνωστό πως είναι NP -πλήρες πρόβλημα. Όπως προαναφέρθηκε στην αντίστοιχη ενότητα, η μετατροπή μίας συνθήκης σε συνθήκη συγκεκριμένου αριθμού είναι πολυωνυμικά πραγματοποιήσιμη, τότε τό πρόβλημα 2023-MAXSAT είναι ένα NP -πλήρες.