Problemas

Aproximación de funciones

Ejercicio 1 *Aproxima la función $f(x) = \exp(x)$ por un polinomio de grado 3 usando la base de los polinomios de Legendre.*

La función $f(x) = \exp(x)$ es continua en el intervalo $[-1, 1]$. Si consideramos la base de los polinomios de Legendre en el intervalo $[-1, 1]$ podemos obtener el polinomio que mejor la aproxima con respecto a la distancia:

$$d(f, g) = \left(\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))^2 \right)^{1/2},$$

donde se está considerando $\omega(x) = 1$, para todo $x \in (-1, 1)$ (que es el peso para el que los polinomios de Legendre son ortogonales respecto al producto escalar en las funciones continuas). Esta distancia es, por tanto, la inducida por el producto escalar:

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Sean $\{\psi_0, \psi_1, \psi_2\}$ la base de los polinomios mónicos de Legendre de grado menor o igual que 2 donde:

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= 1, \\ \psi_1(x) &= x, \\ \psi_2(x) &= x^2 - 1/3. \end{aligned}$$

Aproximaremos f por:

$$f \approx L_2 = a_0\psi_0 + a_1\psi_1 + a_2\psi_2,$$

Por ser una base de polinomios ortogonales respecto al producto escalar correspondiente, se tiene que:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{(f,\psi_0)}{(\psi_0,\psi_0)}, \\ a_1(x) &= \frac{(f,\psi_1)}{(\psi_1,\psi_1)}, \\ a_2(x) &= \frac{(f,\psi_2)}{(\psi_2,\psi_2)}. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$a_0 = \frac{\int_{-1}^{1} e^x dx}{\int_{-1}^{1} dx} = \frac{e - \frac{1}{e}}{2}.$$

$$a_1 = \frac{\int_{-1}^{1} xe^x dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \frac{3}{e}.$$

$$a_2 = \frac{\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) xe^x dx}{\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx} = \frac{5}{2}\left(e - \frac{7}{e}\right).$$

Una vez que conocemos los coeficientes, podemos afirmar que el polinomio de aproximación de Legendre viene dado por:

$$\begin{aligned} f \approx L_2(x) &= \frac{e - \frac{1}{e}}{2}\psi_0(x) + \frac{3}{e}\psi_1(x) + \frac{5}{2}\left(e - \frac{7}{e}\right)\psi_2(x) \\ &= \frac{e - \frac{1}{e}}{2} + \frac{3}{e}x + \frac{5}{2}\left(e - \frac{7}{e}\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Ejercicio 2 *Obtén la base de los polinomios ortogonales de Legendre de grado menor o igual que 3 aplicando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base* $\{1, x, x^2, x^3\}$*. Recuerda que debes utilizar el producto escalar usual en las funciones continuas en* $[-1, 1]$ *para el peso* $\omega(x) = 1$.

Ejercicio 3 *Obtén la base de los polinomios ortogonales de Chebyshev de grado menor o igual que 3 aplicando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base* $\{1, x, x^2, x^3\}$*. Recuerda que debes utilizar el producto escalar usual en las funciones continuas en* $[-1, 1]$ *para el peso* $\omega(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$.

Ejercicio 4 *Aproxima la función* $f(x) = \exp(x)$ *por un polinomio de grado menor o igual 3 usando las base de los polinomios de Chebyshev.*

Ejercicio 5 *Calcula el polinomio trigonométrico de Fourier de grado 3 de la extensión periódica de la función:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -\pi \le x < 0, \\ \pi - x, & \text{si } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Ejercicio 6 *Calcula el polinomio trigonométrico de Fourier de grado 3 de la extensión periódica de la función* $f(x) = x$ *en* $[-\pi, \pi]$.

Ejercicio 7 *Aproxima la extensión periódica de la función* $f(x) = -x^6 + 4x^4 - x^2 + 1$ *mediante un polinomio trigonométrico de orden 4 en* $[-\pi, \pi]$.

Ejercicio 8 *Calcula la aproximación polinomial de orden 4 de la extensión periódica de la función:*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & si\ -T/2 < x < -T/4, \\ 1, & si\ -T/4 < x < T/4, \\ -1, & si\ T/4 < x < T/2, \end{cases}$$

para $T = 2$.

La función que debemos aproximar es:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } -1 < x < -1/2, \\ 1, & \text{si } -1/2 < x < 1/2, \\ -1, & \text{si } 1/2 < x < 1, \end{cases}$$

que consideraremos periódica de periodo $2L = 2$, es decir $L = 1$. Entonces,

$$f\,(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\pi x/L) + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin(k\pi x/L),$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \\ a_k &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(k\pi x/L)dx \text{ para } k = 1, \ldots, n, \\ b_k &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(k\pi x/L)dx \text{ para } k = 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Ejercicio 9 *Aproxima la extensión periódica de la función* $f(x) = x^3 + x$ *mediante un polinomio trigonométrico de orden 4 en* $[0, 2]$.

Ejercicio 10 *Calcula el polinomio trigonométrico de Fourier de grado 3 de la extensión periódica de la función:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & si\ |x| \leq 1, \\ 0, & si\ 1 < |x| < 2. \end{cases}$$

Ejercicio 11 *Obtén la aproximación racional de Padé para* $x_0 = 0$ *con* $n = 3$ *(grado del numerador) y* $m = 3$ *(grado del denominador) de la función:*

$$f(x) = \log(1 + x).$$

Ejercicio 12 *Obtén la aproximación racional de Padé* $x_0 = 0$ *con* $n = 2$ *(grado del numerador) y* $m = 2$ *(grado del denominador) de la función:*

$$f(x) = \sin(x).$$