Estudio de La Caída de Una Gota

Alberto García García
(48718198-N)
agg180@alu.ua.es

***Resumen*—En esta primera práctica de la asignatura Física I del Grado en Física (curso académico 2018-2019) estudiaremos la caída de una gota de agua. Para ello consideraremos que la gota cae desde una nube alta y aproximaremos su forma mediante una esfera, de esta forma emplearemos la Ley de Stokes para expresar el rozamiento de la gota con el aire.**

Este problema será resuelto de dos formas diferentes. Por una parte, estudiaremos la caída de forma analítica. Por otro lado, estudiaremos dicha caída de manera numérica, siendo esta segunda forma el objetivo principal de esta práctica. Para ello, discretizaremos el tiempo y resolveremos la ecuación diferencial suponiendo que en cada tramo o instante temporal dt el movimiento transcurre con aceleración constante.

Una vez resuelto el problema tanto de forma numérica como analítica, calcularemos la velocidad con la que la gota impacta en el suelo y dispondremos en una gráfica la evolución de la velocidad y de la posición respecto al tiempo para comparar el resultado numérico con el analítico.

Además, obtendremos también la velocidad límite de la gota y experimentaremos con distintos tamaños y otros parámetros para comprobar la precisión de nuestra solución con las suposiciones anteriormente mencionadas respecto a las verdaderas velocidades alcanzadas por las gotas con modelos más cercanos a la realidad.

Por último, llevaremos a cabo una serie de experimentos cambiando la Ley de Stokes de forma que la velocidad v quede expresada con una potencia mayor que 1 con el objetivo de determinar qué ley o proporción es la más adecuada para representar la fricción de una gota de lluvia con el aire.

El código Python que implementa los modelos matemáticos así como las rutinas de visualización para la resolución de este ejercicio se adjunta con este informe y además puede ser consultado en el siguiente repositorio online [1].

I. Introducción

UNA gota de agua que cae verticalmente desde una nube puede modelarse como una esfera en el seno de un fluido que se mueve bajo la acción de diversas fuerzas: el peso, el empuje y una fuerza de rozamiento que puede formularse como proporcional a la velocidad según la Ley de Stokes.

En esta práctica simularemos la caída de una gota de radio r que cae desde una altura h y que se ve sometida a la fuerza ejercida tanto por su peso como por el rozamiento, omitiendo el empuje tal y como se muestra en la Figura 1.

II. Ley de Stokes

La Ley de Stokes, en su forma general, hace referencia a la fuerza que se opone al movimiento y que es experimentada por cuerpos esféricos cuando se mueven en un fluido en un régimen laminar (números de Reynolds bajos). Esto significa

[1] https://github.com/Blitzman/physics

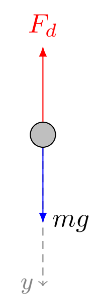

Figura 1: Diagrama de cuerpo libre de caída de la gota.

que la Ley únicamente es válida para movimientos de partículas pequeñas a baja velocidad (mientras el régimen no sea turbulento). La ecuación de Stokes se define como:

$$F_d = 6\pi r\eta v \tag{1}$$

, donde η es la viscosidad del fluido, r el radio de la esfera y v la velocidad de la misma.

En nuestro caso, la gota se ve sometida a dos fuerzas: la gravitatoria (con sentido hacia el suelo) y la de rozamiento (en sentido opuesto). La fuerza de rozamiento se rige por la ecuación de Stokes previamente descrita. Como se puede comprobar, es una función de la velocidad v de la partícula por lo que en un determinado instante de tiempo, ambas fuerzas se igualarán, produciendo entonces una aceleración nula y una velocidad constante (la denominada velocidad límite v_{lim}).

II-A. *Solución Analítica*

La solución analítica a este problema podemos obtenerla a partir de las ecuaciones de Newton de la propia gota. Partiendo de la base

$$-F_r + P = ma \ , \tag{2}$$

donde F_r es la ecuación de Stokes $6\pi r\eta v^{v_e}$ (siendo $v_e > 0$); podemos factorizar $D = 6\pi r\eta$ y entonces

$$F_r = Dv = mg - ma \ , \tag{3}$$

y por lo tanto podemos despejar la aceleración como

$$a = g - \frac{Dv}{m} \ . \tag{4}$$

Sabemos que $a = \dfrac{dv}{dt}$. Podemos entonces agrupar los términos de la siguiente forma

$$a = g - \frac{Dv}{m} = \frac{mg - Dv}{m} \quad (5)$$

para poder integrar a un lado y a otro:

$$\frac{m}{mg - Dv} dv = dt \ , \quad (6)$$

por lo que

$$m \int_{v_0}^{v} \frac{1}{mg - Dv} dv = t - t_0 \quad (7)$$

$$-\frac{m}{D} ln(mg - Dv)|_{v_0}^{v} = \frac{m}{D} ln\left(\frac{mg - Dv_0}{mg - Dv}\right) \ . \quad (8)$$

Tomando que en $t_0 = 0$ $[s]$ la velocidad inicial $v_0 = 0$ $[m/s]$, entonces

$$t = \frac{m}{D} ln\left(\frac{mg}{mg - Dv}\right) \quad (9)$$

y por lo tanto, tomando exponentes

$$e^{(\frac{tD}{m})} = \frac{mg}{mg - Dv} \quad (10)$$

llegamos a la solución analítica del problema:

$$v(t) = \frac{mg}{D}(1 - e^{-(\frac{tD}{m})}) \ [m/s] \quad (11)$$

II-B. *Solución Numérica*

Para implementar una solución numérica al problema del rozamiento y cálculo de la posición, velocidad y aceleración de la gota en cada instante discretizaremos el tiempo y supondremos que en cada tramo dt el movimiento transcurre con aceleración constante. Así pues, la implementación se reduce a un bucle (cuyas condiciones iniciales son el tiempo $t = 0$ $[s]$ y la altura de la gota y $[m]$) que iterará incrementando el instante de tiempo de acuerdo al intervalo dt elegido hasta que la gota impacte contra el suelo $y = 0$ $[m]$.

Así pues, en cada iteración se producen cuatro operaciones: (1) incremento del tiempo, (2) actualización de posición, (3) actualización de velocidad, (4) actualización de aceleración. El fragmento de Código 1 muestra dichas operaciones.

```
t_ += dt
y_ = update_position(y_, v_, dt)
v_ = update_velocity(v_, a_, dt)
a_ = update_acceleration(mass, v_, b, ve)
```

Código 1: Actualizaciones en bucle de simulación.

A lo largo del código, `t_` es el instante de tiempo actual en $[s]$, `dt` es el intervalo discreto de tiempo en $[s]$ y prefijado al inicio de la simulación, `y_`, `v_` y `a_` son la posición $[m]$, velocidad $[m/s]$ y la aceleración respectivamente $[m/s^2]$, `mass` es la masa de la gota $[kg]$ prefijada, `b` es la constante de la Ley de Stokes $6\pi r\eta\rho$ y `ve` es la potencia de la velocidad en la fuera de rozamiento. Las funciones del bucle que actualizan la posición y, velocidad v y aceleración a se muestran en el fragmento de Código 2.

```
def update_acceleration(mass, velocity, b, ve):
  return (G - (b * velocity**ve / mass))

def update_velocity(velocity, acceleration, dt):
  return velocity + acceleration * dt

def update_position(position, velocity, dt):
  return position - velocity * dt
```

Código 2: Funciones de actualización.

Como ya comentamos anteriormente, asumimos que en cada intervalo de tiempo el movimiento transcurre con aceleración y velocidad constante por lo que la posición puede calcularse de forma sencilla como:

$$y(t) = y(t-1) - v(t) \cdot dt \ . \quad (12)$$

De igual manera podemos proceder con la velocidad:

$$v(t) = v(t-1) + a(t) \cdot dt \ . \quad (13)$$

La aceleración por su parte se obtiene teniendo en cuenta las dos fuerzas que actúan (la gravedad y el rozamiento) así como la masa de la gota:

$$a(t) = \frac{m \cdot g - b \cdot v^{v_e}}{m} = g - \frac{b \cdot v^{v_e}}{m} \ . \quad (14)$$

II-C. *Solución Analítica vs. Numérica*

Una vez implementadas ambas soluciones, ejecutamos la simulación para realizar una comparativa de los resultados proporcionados por ambas. Para esta comparativa elegimos un conjunto de parámetros que nos permitiera observar el alcance de la velocidad límite para gotas de agua de diferente tamaño. Aunque habitualmente las gotas de agua caen por encima de los 2000 $[m]$ de altura, para los tamaños considerados como habituales **[?][?]** (alrededor de los 0,25 $[mm]$ de radio para las gotas más pequeñas), la velocidad límite se alcanza mucho antes de haber recorrido dicho espacio. En nuestro caso con una altura $h = 100$ $[m]$ para gotas de radio $r = \{0{,}15, 0{,}25, 0{,}30\}$ $[mm]$ podemos alcanzar la velocidad límite en todos los casos por lo que elegiremos esta altura para reducir el tiempo de experimentación. Adicionalmente, cabe tener en cuenta los valores para la viscosidad del aire $\eta = 18 \cdot 10^{-16}$ $[Ns/m^2]$ y la densidad del agua $\rho = 1000$ $[kg/m^3]$. Los resultados de la simulación ejecutada con un intervalo de tiempo $dt = 0{,}001$ $[s]$ y con $t_0 = 0$ $[s]$ se muestran en la Figura 2 y se resumen en la Tabla I. Cabe destacar que ignoramos el efecto de la altura sobre la fuerza gravitatoria y consideramos en todo momento $g = 9{,}8$ $[m/s^2]$.

Radio $[mm]$	Velocidad Límite $[m/s]$		Tiempo de Impacto $[s]$	
	Numérica	Analítica	Numérica	Analítica
0,15	2.72	2.72	183.95	183.95
0,25	7.56	7.56	66.89	66.89
0,30	10.89	10.89	47.03	47.03

Cuadro I: Comparativa de resultados obtenidos mediante la solución analítica y la solución numérica para gotas de radio $r = \{0{,}15, 0{,}25, 0{,}30\}$.

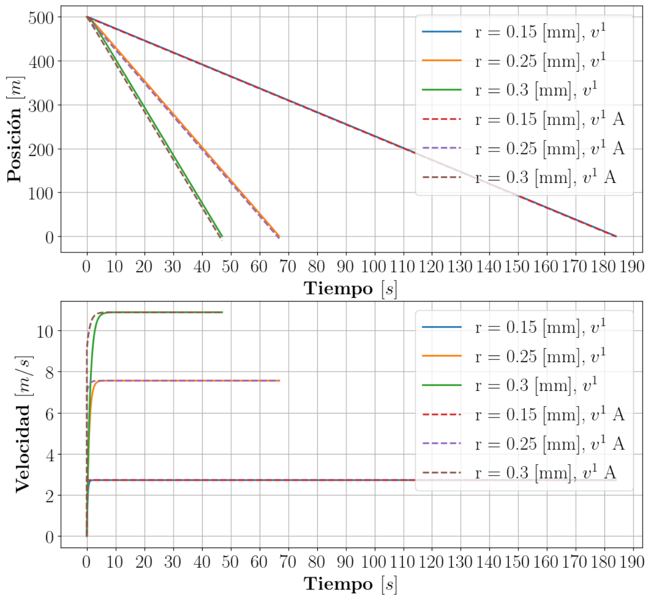

Figura 2: Gráficas de posición y velocidad que muestran la evolución de dichas componentes a lo largo del tiempo de simulación para diferentes tamaños de gota tanto para la solución numérica como para la analítica (A).

Como podemos comprobar, no existe ninguna diferencia significativa en los resultados finales de cualquiera de las dos aproximaciones tanto analítica como numérica.

III. Experimentación

Una vez expuestas las soluciones tanto analítica como numérica y comparados los resultados obtenidos, procederemos a realizar una experimentación más extensa sobre la implementación numérica. Este conjunto de experimentos consistirá por un lado en la comparación de la velocidad límite obtenida para gotas de diferentes tamaños y por otro en el estudio del efecto de la potencia de v en la Ley de Stokes.

En ambos casos emplearemos el mismo juego de parámetros para todos los factores externos que no tienen que ver ni con la potencia de la velocidad ni con el tamaño de la gota: la densidad del agua $\rho = 1000$ $[kg/m^3]$, la viscosidad del aire $\eta = 18 \cdot 10^{-6}$ $[N \cdot s/m^2]$ a 20 grados centígrados, la altura desde la cual cae la gota $h = 100$ $[m]$ y el intervalo o diferencial de tiempo $dt = 0{,}001$ $[s]$.

III-A. Radio de la Gota

En este primer conjunto de experimentos variaremos el tamaño de la gota de agua, es decir, el radio de la misma, lo cual afectará tanto a la fuerza de rozamiento (ya que recordemos que el radio r es uno de sus componentes) como a la aceleración (puesto que al variar el radio también cambiará el volumen y por lo tanto la masa de la gota). Para estas pruebas hemos utilizado una potencia de v de 1 y los valores del radio de la gota $r = [0{,}10, 0{,}15, 0{,}20, 0{,}25, 0{,}30]$ $[mm]$.

Radio $[mm]$	Velocidad Límite $[m/s]$	Tiempo de Impacto $[s]$
0,10	1.21	82.77
0,15	2.72	37.01
0,20	4.84	21.16
0,25	7.56	14.00
0,30	10.89	10.30

Cuadro II: Resumen de experimentos de radio mostrando la velocidad límite de cada gota y el tiempo necesario para lograr el impacto contra el suelo desde el inicio de la simulación.

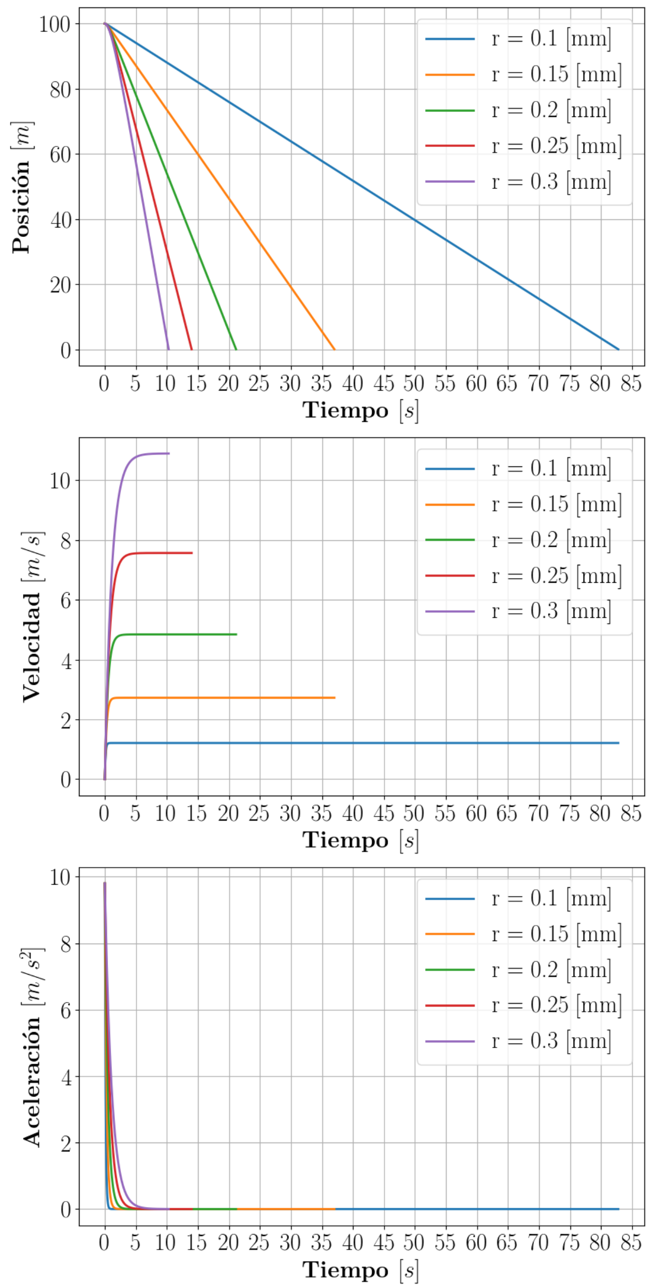

Figura 3: Gráficas de posición, velocidad y aceleración que muestran la evolución de dichas componentes a lo largo del tiempo de simulación para diferentes tamaños de gota.

Como muestran las gráficas de la Figura 3 (resumidos sus valores en la Tabla II), la velocidad límite depende en gran medida del tamaño de la gota, siendo mayor a medida que el radio de la gota aumenta. En comparación a la velocidad límite de las gotas en la realidad se observa una notable diferencia. Por ejemplo, en el caso de la gota de 0,25 $[mm]$ de radio (0,50 $[mm]$ de radio), su velocidad límite se establece en 7,56 $[m/s]$ según nuestra solución, mientras que otros estudios **[?]** **[?]** **[?]** sugieren una velocidad de alrededor de entre 2 $[m/s]$ y 3 $[m/s]$.

III-B. Potencia de v

En esta segunda aprte de los experimentos cambiaremos la Ley de Stokes de forma que la potencia de v tome diferentes valores $v_e = [1, 2, 3, 4]$ con el fin de determinar cuál es la Ley más adecuada para representar la fricción de una gota de lluvia con el aire. Para estas pruebas utilizamos el mismo juego de parámetros previamente descrito y una gota de lluvia de radio $r = 0{,}25$ $[mm]$. La Figura **??** muestra la evolución de la posición, velocidad y aceleración para dichos experimentos.

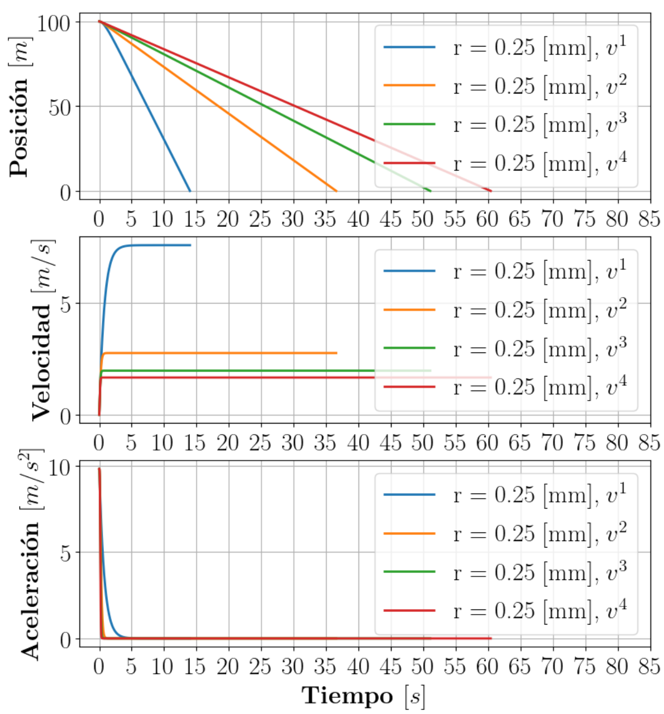

Figura 4: Gráficas de posición, velocidad y aceleración que muestran la evolución de dichas componentes a lo largo del tiempo de simulación para diferentes valores del exponente de la velocidad en el término de rozamiento ve con una gota de radio 0,25 $[mm]$.

Podemos observar los diferentes valores de la velocidad límite obtenidos para las diversas potencias: en el caso que ya estudiamos anteriormente $v_e = 1$ la velocidad límite es de 7,56 $[m/s]$, para $v_e = 2$ la velocidad es 2,74 $[m/s]$, para $v_e = 3$ es 1,96 $[m/s]$ y para $v_e = 4$ se obtiene una velocidad límite de 1,66 $[m/s]$. Según los estudios antes mencionados, la velocidad límite de una gota de 0,50 $[mm]$ de diámetro se aproxima a 2,50 $[m/s]$. Esta correspondencia implica que un exponente cuadrático refleja mejor el rozamiento producido, hipótesis que concuerda con el hecho de que la Ley de Stokes se cumpla únicamente para números de Reynold bajos (es decir, mientras que la velocidad baja con una esfera de radio reducido y el flujo sea laminar) y que para el resto de situaciones el término de rozamiento sea proporcional al cuadrado de la velocidad.

IV. CONCLUSIÓN

En esta primera práctica de la asignatura hemos presentado un estudio completo de la caída de una gota de agua. Para ello, hemos implementado una simulación en Python capaz de resolver el problema de dos formas teniendo en cuenta las ecuaciones del movimiento de la gota: analítica y numérica. A lo largo de la experimentación hemos validado ambas soluciones, mostrando que no existe discrepancia entre ellas. En una tanda de experimentación adicional mostramos el efecto que tiene el radio de la gota en su velocidad de caída así. Por último, demostramos empíricamente cuál es el exponente más adecuado para la velocidad en el término de rozamiento.

El código Python que implementa los modelos matemáticos así como las rutinas de visualización para la resolución de este ejercicio se adjunta con este informe y además puede ser consultado en el siguiente repositorio online[2].

REFERENCIAS

[1] J.H. Corbert, *Physical Geography Manual*, 1974. 5th ed. N.p.: Kendall/Hunt, 2003.
[2] J.O. Laws, *Measurements of the fall-velocity of water-drops and raindrops*. Eos, Transactions American Geophysical Union (1947), 22(3), 709-721.
[3] K.V. Beard, *Terminal Velocity and Shape of Cloud and Precipitation Drops*, Journal of the Atmospheric Sciences (May 1976): 851-864.
[4] A.F. Spilhaus, *Raindrop Size, Shape, and Falling Speed*, Journal of Meteorology. 5 (June 1948): 108-110.
[5] A. Holladay, *Falling Raindrops Hit 5 to 20 mph speeds*, Wonderquest.

[2] https://github.com/Blitzman/physics