Práctica 6

Métodos Numéricos y Computación

La interpolación y la aproximación polinomial en el caso continuo conforman dos problemas diferentes. Por un lado, interpolar es obtener un polinomio que pase por ciertos puntos del plano y, por otro lado, aproximar es calcular el polinomio más cercano a la función según un cierto criterio dado por la distancia entre funciones continuas. En este último caso, si consideramos las funciones continuas en el intervalo $[-1, 1]$, las bases de los polinomios de Chebyshev y Legendre son ortogonales y facilitan la obtención de los coeficientes del polinomio aproximante de cierto grado en dichas bases.

Ejercicio 1 *Considera la función* $f(x) = \cos(\arctan x) - e^{x^2} \log(x + 2)$ *definida en el intervalo* $[-1, 1]$*:*

a) Obtén el polinomio interpolador de grado 4 en los nodos de Chebyshev.

b) Obtén el polinomio aproximante de grado 4, utilizaremos la base ortogonal de los polinomios de Chebyshev.

c) Representa en una misma gráfica la función y los dos polinomios anteriores.

Los bases de los polinomios de Chebyshev y de Legendre hasta grado n conforman bases ortogonales de los polinomios de grado menor o igual que n en el intervalo $[-1, 1]$. Ahora bien, supongamos que deseamos aproximar una función cuyo dominio es un intervalo arbitrario $[a, b]$ aprovechando las propiedades de los polinomios de dichas bases. En este caso, podemos aplicar un cambio de variable que nos permita trabajar en $[a, b]$. Más concretamente,

$$x \in [a, b] \Rightarrow y = -1 + \frac{2}{b-a}(x - a) \in [-1, 1]. \tag{1}$$

$$y \in [-1, 1] \Rightarrow x = a + \frac{(y + 1)(b - a)}{2} \in [a, b]. \tag{2}$$

Si $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ es una base ortogonal de los polinomios de grado menor o igual que n en el intervalo $[-1, 1]$ para el producto escalar:

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} \omega(x) f(x) g(x) dx,$$

entonces $\{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n\}$, definidos como

$$\psi_i(x) = \phi_i\left(-1 + \frac{2}{b-a}(x - a)\right), \text{ para } i = 0, 1, \ldots, n,$$

es una base ortogonal para los polinomios de grado menor o igual que n en el intervalo $[a, b]$ para el producto escalar:

$$(f, g) = \int_a^b \omega^*(x) f(x) g(x) dx,$$

donde

$$\omega^*(x) = \omega \left(-1 + \frac{2}{b-a}(x-a) \right).$$

A efectos prácticos, los polinomios ortogonales en un intervalo cualquiera $[a, b]$ pueden ser obtenidos a partir de la transformación lineal de las correspondientes raíces en $[-1, 1]$ al intervalo $[a, b]$. Si $y \in [-1, 1]$ es una raíz de uno de los polinomios ortogonales en $[-1, 1]$, entonces $x = a + (y + 1)(b - a)/2$ es una raíz del polinomio ortogonal correspondiente en $[a, b]$.

Ejercicio 2 *Crea funciones para aplicar las transformaciones* (1) *y* (2) *y obtén la base de los polinomios ortogonales de Legendre y Chebyshev de grado menor o igual que 3 en el intervalo* $[3, 6]$.

Ejercicio 3 *Considera la función* $f(x) = e^{-x} \cos(2x)$ *definida en el intervalo* $[3, 6]$*:*

a) Obtén el polinomio aproximante de grado 3 usando la base ortogonal de los polinomios de Chebyshev.

b) Obtén el polinomio aproximante de grado 3 usando la base ortogonal de los polinomios de Legendre.

c) Representa en una misma gráfica la función y los dos polinomios aproximantes.

d) Evalúa el error obteniendo la norma inducida por el correspondiente producto escalar de $||f - p||$ *para* p *el polinomio obtenido por Chebyshev y por Legendre.*