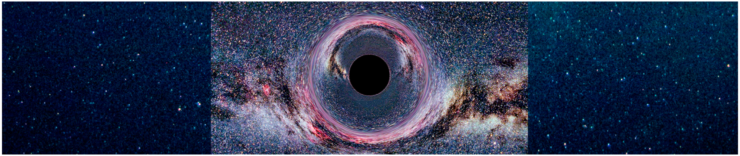
Aproximación de funciones

Julio Mulero
@juliomulero
julio.mulero
Departamento de Matemáticas
Universidad de Alicante

Carmen Gandía
Departamento de Matemáticas
Universidad de Alicante



El problema

- La interpolación trata de obtener un polinomio que coincida con una función, y posiblemente sus derivadas, en un conjunto dado de puntos.
- Si el conjunto de puntos es grande, el polinomio resultante es de alto grado y, por lo tanto, muy oscilante. Esto implica que el error de interpolación alcanza muchos máximos locales.
- Los splines tratan de reducir el error y lo cierto es que, en parte, lo consiguen.
- Otra forma de abordar este problema es buscar una función dentro de un conjunto concreto de funciones que esté “lo más cerca posible” de la función original.

Outline

1 El problema de la mejor aproximación

2 La aproximación de funciones

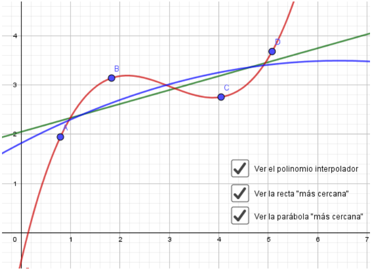
3 La aproximación polinomial

4 La aproximación trigonométrica

5 La aproximación racional

El problema de la mejor aproximación

El problema de la mejor aproximación



https://www.geogebra.org/m/jhukacsk

El problema de la mejor aproximación

El problema de la mejor aproximación

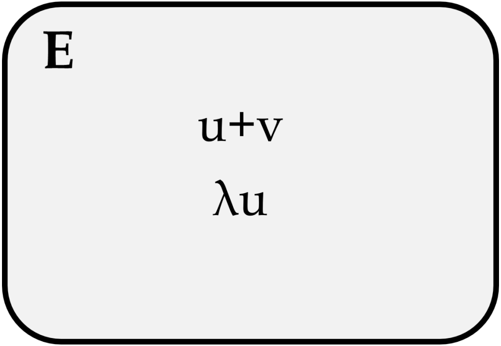
Contexto:

- Sea E un espacio (vectorial) y sea $f \in E$.
- Sea $F \subset E$ un subespacio (vectorial), una de cuyas bases es el conjunto $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$.
- Sea d una distancia (o métrica) en E (y, por tanto, en F).

Problema:

Buscamos un elemento de $f_n \in F$, de forma que la distancia (o métrica) $d(f, f_n)$ sea lo más pequeña posible.

Un espacio vectorial



Un espacio vectorial

Definición

Un espacio vectorial es una terna $(E, +, \cdot)$, donde E es un conjunto no vacío y $+, \cdot$ son dos operaciones del tipo $+ : E \times E \to E$, $\cdot : \mathbb{R} \times E \to E$ con las siguientes propiedades:

- $u + (v + w) = (u + v) + w$, para todo $u, v, w \in E$ (asociativa).
- $u + v = v + u$, para todo $u, v \in E$ (conmutativa).
- Existe $e \in E$ tal que $e + v = v + e = v$, para todo $v \in E$ (elemento neutro).
- Para cada $v \in E$ existe w tal que $v + w = w + v = e$ (elemento opuesto).
- $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$, para todo $v \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (seudo-asociativa).
- $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ y $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$, para todo $u, v \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (distributiva).
- $1v = v$, para todo $v \in E$ (unimodular).

El problema

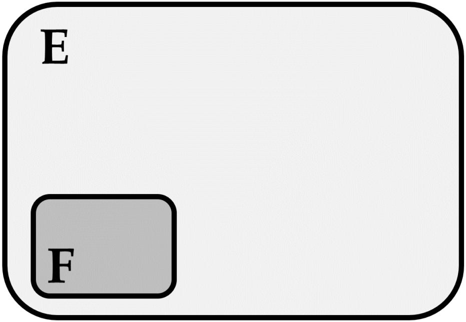
Ejemplos

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ con la suma de vectores y el producto por escalares (componente a componente) es un espacio vectorial.
- $(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ con la suma de polinomios y el producto por escalares usual es un espacio vectorial.
- $(\mathcal{C}([a, b)), +, \cdot)$ donde:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ y } (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

es un espacio vectorial.

Un subespacio vectorial



Un subespacio vectorial

Definición

$F \subset E$ es un subespacio vectorial de E si, y solo si,

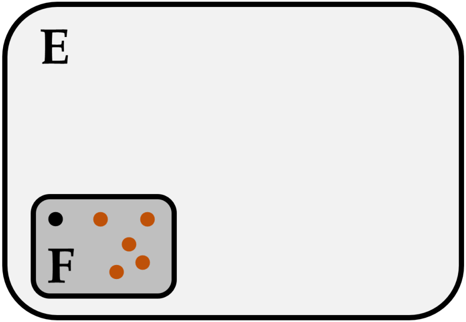
(i) Si $u, v \in F$, entonces $u + v \in F$.

(ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in F$, entonces $\lambda u \in F$.

Ejemplos

$\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}([a, b])$.

Una base del subespacio vectorial



Una base del subespacio vectorial

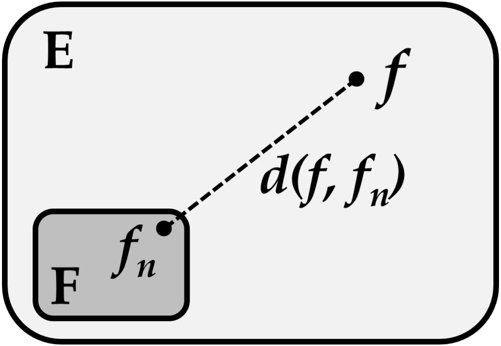
Definición

Una base de un espacio vectorial E (o de un subespacio vectorial F) es un conjunto de elementos $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\} \subset E$ (o en F) si es sistema generador de E (de F) y es linealmente independiente.

Ejemplos

$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es una base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Una distancia en el espacio vectorial



Una distancia en el espacio vectorial

Definición

Una distancia o métrica en un espacio vectorial E es una aplicación $d : E \times E \to \mathbb{R}$ que cumple:

(i) Si $u, v \in E$, entonces $d(u, v) \geq 0$.

(ii) $d(u, v) = 0$ si, y solo si, $u = v$.

(iii) Si $u, v, w \in E$, entonces $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

Una distancia en el espacio vectorial

Ejemplos

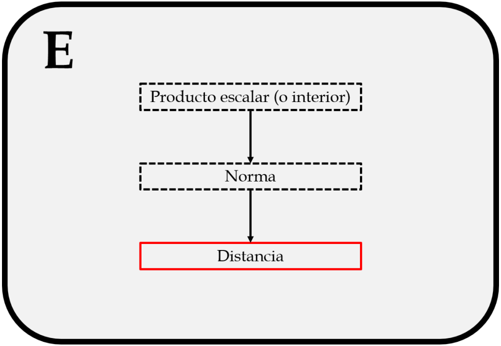
- Dados dos puntos $x, y \in \mathbb{R}$, la aplicación $d(x, y) = |x - y|$ es una distancia en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, la distancia entre $x = -2$ e $y = 3$ es $d(x, y) = |-2-3| = 5$.
- Dados dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, la aplicación:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

es una distancia en $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, la distancia entre $\mathbf{x} = (0, -1), \mathbf{y} = (3, 2)$ es:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(0-3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{18} = 4.2426.$$

Construcción de una distancia en el espacio vectorial



Un producto escalar en el espacio vectorial

Definición

Un producto escalar (o interior) en E es una aplicación $(\bullet, \bullet) : E \times E \to \mathbb{R}$ que cumple:

(i) $(u, v) = (v, u)$ para todo $u, v \in E$.

(ii) $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v)$ para todo $u, v \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$ para todo $u, v, w \in E$.

(iv) $(u, u) \geq 0$ y $(u, v) = 0$ si, y solo si, $u = v$ para todo $u, v \in E$.

Ejemplo

Dados dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, la aplicación $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ es un producto escalar en $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, el producto escalar de $\mathbf{x} = (0, -1)$ e $\mathbf{y} = (3, 2)$ es $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -2$.

Un producto escalar en el espacio vectorial

Ejemplo

Dadas dos funciones $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$, la aplicación:

$$(f, g) = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx,$$

donde $\omega \in E$ se denomina función peso y satisface $\omega(x) > 0$, para todo $x \in [a, b]$, es un producto escalar (o interior) en $\mathcal{C}([a, b])$.

Ejemplo

Sea $E = \mathcal{C}([-1, 1])$ y $f, g \in \mathcal{C}([-1, 1])$ las funciones dadas por $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Si consideramos $\omega(x) = 1$ para todo $x \in [-1, 1]$, el producto escalar de f y g es:

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=-1}^{x=1} = 1/2.$$

La norma inducida por el producto escalar

Definición

Una norma en E es una aplicación $||\bullet|| : E \to \mathbb{R}$ que cumple:

(i) $||u|| > 0$ para todo $u \in E$, $u \neq 0$.

(ii) $||\lambda u|| = |\lambda|||u||$ para todo $u \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$ para todo $u, v \in E$.

Teorema

Dado un producto escalar $(\bullet, \bullet)$ en E, la aplicación definida como:

$$||u|| = +\sqrt{(u,u)},$$

para todo $u \in E$, es una norma en E. Esta norma se conoce como la norma inducida por el producto escalar $(\bullet, \bullet)$.

La norma inducida por el producto escalar

Ejemplos

- Sea $E = \mathcal{C}([a,b])$ y $f \in E$, la aplicación definida como:

$$||f|| = \left(\int_a^b \omega(x)u(x)^2 dx\right)^{1/2},$$

es una norma en $\mathcal{C}([a,b])$ inducida por el producto escalar $(\bullet, \bullet)$.

Ejemplo

Sea $E = \mathcal{C}([-1,1])$ y $f \in E$ la función dada por $f(x) = x$. Si consideramos $\omega(x) = 1$ para todo $x \in [-1,1]$, la norma inducida por $(\bullet, \bullet)$ para f es:

$$||f|| = \left(\int_{-1}^1 x^2 dx\right)^{1/2} = \left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1}\right)^{1/2} = 0.$$

La distancia inducida por la norma

Teorema

Dada una norma en un espacio vectorial E, la aplicación definida como:

$$d(u,v) = ||u - v||,$$

para todo $u, v \in E$, es una distancia en E.

Ejemplos

- Sea $E = \mathcal{C}([a,b])$ y $f, g \in E$, la aplicación definida como:

$$d(f,g) = ||f - g|| = (f - g, f - g)^{1/2} = \left(\int_a^b \omega(x)(f(x) - g(x))^2 dx \right)^{1/2},$$

  es una distancia en $\mathcal{C}([a,b])$. Esta distancia se conoce como la distancia inducida por la norma $|| \bullet ||$.

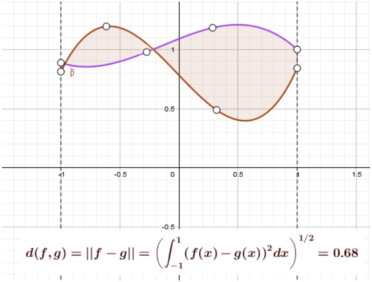
La distancia inducida por la norma

Ejemplo

Sea $E = \mathcal{C}([-1,1])$ y $f, g \in E$ las funciones dadas por $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Si consideramos $\omega(x) = 1$ para todo $x \in [-1,1]$, la distancia inducida por la norma $|| \bullet ||$ entre f y g es:

$$||f-g|| = (f-g, f-g)^{1/2} = \left(\int_{-1}^{1} (x-x^2)^2 dx\right)^{1/2}$$
$$= \left(\left[\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=1}\right)^{1/2} = \dots$$

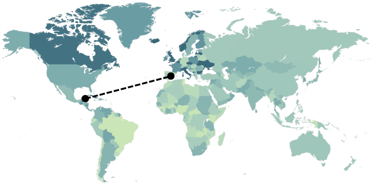
La distancia inducida por la norma



https://www.geogebra.org/m/g3syzdek

Outline

La aproximación de funciones



La aproximación de funciones

Contexto:

- Sea E el espacio (vectorial) de las funciones continuas en $[a, b]$ y sea $f \in E$.
- Sea $F \subset E$ un subespacio (vectorial), una de cuyas bases es el conjunto $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$.
- Sea d la métrica en E (y, por tanto, en F) definida como:

$$d(f, g) = ||f - g|| = \left(\int_a^b \omega(x)(f(x) - g(x))^2 dx\right)^{1/2},$$

donde ω es una función peso.

La aproximación de funciones

Problema:

- Dada una función $f \in \mathcal{C}([a,b])$, buscamos un polinomio $f_n \in \mathcal{P}_n([a,b])$ de forma que la distancia $d(f, f_n)$ sea lo más pequeña posible.
- Por un lado, dado que...

$$d(f, f_n) = ||f - f_n|| = (f - f_n, f - f_n)^{1/2} = \left(\int_a^b \omega(x)(f(x) - f_n(x))^2 dx \right)^{1/2},$$

minimizaremos

$$(f - f_n, f - f_n) = \int_a^b \omega(x)(f(x) - f_n(x))^2 dx.$$

La aproximación de funciones

- Por otro lado, $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ es una base fijada de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ (por ejemplo, $\{1, x, \ldots, x^n\}$) y, por tanto, si $f_n \in \mathcal{P}_n([a, b])$, se tiene que

$$f_n = a_0\phi_0 + a_1\phi_1 + \cdots + a_n\phi_n = \sum_{i=0}^{n} a_i\phi_i,$$

- Nuestro objetivo se traduce en $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ de forma que

$$M(a_0, a_1, \ldots, a_n) := \int_a^b \omega(x) \left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i\phi_i(x) \right)^2 dx.$$

  sea mínima.

- Este criterio se conoce como la optimización mínimo-cuadrática.

La aproximación de funciones

Observación

- Si deseamos calcular el mínimo de una función de varias variables $f(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, calculamos las derivadas parciales y resolvemos el sistema de ecuaciones resultante:

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\partial f(a_0,a_1,\ldots,a_n)}{\partial a_0} & = & 0 \\ \frac{\partial f(a_0,a_1,\ldots,a_n)}{\partial a_1} & = & 0 \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f(a_0,a_1,\ldots,a_n)}{\partial a_n} & = & 0 \end{array}\right\}$$

- Obtendremos entonces los valores de $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (es decir, los coeficientes f_n en la base considerada) tales que la distancia es la menor posible. Matemáticamente, $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ será un mínimo si el hessiano (es decir, el determinante formado por las segundas derivadas) evaluado en dicho punto es mayor que cero y $\frac{\partial^2 f(a_0,a_1,\ldots,a_n)}{\partial a_0^2} > 0$.

La aproximación de funciones

- Fijado $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, se tiene que:

$$\frac{\partial M(a_0, a_1, \ldots, a_n)}{\partial a_j} = 0.$$

- Dado que

$$\frac{\partial M(a_0, a_1, \ldots, a_n)}{\partial a_j} = -2 \int_a^b \omega(x)\phi_j(x) \left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i(x) \right) dx,$$

se obtiene:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \int_a^b \omega(x)\phi_i(x)\phi_j(x) dx = \int_a^b \omega(x) f(x) \phi_j(x) dx.$$

- O, equivalentemente,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i (\phi_i, \phi_j) = (f, \phi_j).$$

La aproximación de funciones

- Así, el sistema de ecuaciones resultante es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_0(\phi_0,\phi_0)+a_1(\phi_1,\phi_0)+\cdots+a_n(\phi_n,\phi_0) & = & (f,\phi_0) \\ a_0(\phi_0,\phi_1)+a_1(\phi_1,\phi_1)+\cdots+a_n(\phi_n,\phi_1) & = & (f,\phi_1) \\ & \vdots & \\ a_0(\phi_0,\phi_n)+a_1(\phi_1,\phi_n)+\cdots+a_n(\phi_n,\phi_n) & = & (f,\phi_n) \end{array}\right\}$$

- Este sistema de ecuaciones se conoce como sistema de ecuaciones normales y su matriz es:

$$A=\left[(\phi_i,\phi_j)\right]_{0\leq i,j\leq n}.$$

La aproximación de funciones

Teorema

El sistema de ecuaciones normales:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_0(\phi_0,\phi_0)+a_1(\phi_1,\phi_0)+\cdots+a_n(\phi_n,\phi_0) & = & (f,\phi_0) \\ a_0(\phi_0,\phi_1)+a_1(\phi_1,\phi_1)+\cdots+a_n(\phi_n,\phi_1) & = & (f,\phi_1) \\ & \vdots & \\ a_0(\phi_0,\phi_n)+a_1(\phi_1,\phi_n)+\cdots+a_n(\phi_n,\phi_n) & = & (f,\phi_n) \end{array}\right\}$$

tiene solución y es única.

Observación

La elección de una base que satisfaga ciertas condiciones "especiales" puede facilitar la resolución del sistema.

¿Cómo simplificar el sistema de ecuaciones normales?

Teorema

Dado un espacio vectorial E y un producto escalar en E, una base $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\} \subset E$ se dice ortogonal si cumple que $(\phi_i, \phi_j) = 0$, para todo $i \neq j$.

- Si consideramos una base ortogonal, el sistema de ecuaciones normales

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(\phi_i, \phi_j) = (f, \phi_j), \text{ para } j = 0, 1, \ldots, n,$$

se convertirá en un sistema diagonal (solo los coeficientes de la diagonal serían distintos de cero).

¿Cómo simplificar el sistema de ecuaciones normales?

- De hecho, dicho sistema diagonal sería:

$$a_j(\phi_j, \phi_j) = (f, \phi_j), \text{ para } j = 0, 1, \ldots, n,$$

y se obtendría que:

$$a_j = \frac{(f, \phi_j)}{(\phi_j, \phi_j)}, \text{ para } j = 0, 1, \ldots, n.$$

Observación

La pregunta es. . . dado un espacio vectorial y un producto escalar, ¿podemos disponer de una base ortogonal?

¿Cómo simplificar el sistema de ecuaciones normales?

Teorema (Ortogonalización de Gram-Schmidt)

Dada la base $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$, se pueden elegir los escalares

$$r_{01}, r_{02}, r_{12}, \ldots, r_{0n}, \ldots, r_{(n-1)n},$$

de forma que

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \phi_0 \\
\psi_1 &= \phi_1 - r_{01}\phi_0 \\
\psi_2 &= \phi_2 - r_{02}\phi_0 - r_{12}\phi_1 \\
&\vdots \\
\psi_n &= \phi_n - r_{0n}\phi_0 - r_{1n}\phi_1 - \cdots - r_{(n-1)n}\phi_{n-1}
\end{aligned}$$

sea una base ortogonal.

La aproximación de funciones

Ejemplo

Considere la base de $\mathbb{R}^3$ formada por los vectores $\phi_0 = (1,0,1)$, $\phi_1 = (0,1,1)$ y $\phi_2 = (1,0,0)$. Comprueba que no son una base ortogonal para el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ y obtén una base ortogonal por el proceso de Gram-Schmidt.

Asumimos que el conjunto $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ (que podría comprobarse fácilmente). Esta base no es ortogonal puesto que:

$$(\phi_0, \phi_1) = ((1,0,1),(0,1,1)) = 1 \neq 0.$$

La aproximación de funciones

Obtengamos una base ortogonal. Llamemos $\psi_0 = \phi_0 = (1, 0, 1)$.
Construyamos un vector $\psi_1 = \phi_1 - r_{01}\phi_0$ de forma que $(\psi_0, \psi_1) = 0$, es decir, r_{01} debe ser escogido de forma que:

$$0 = (\psi_0, \psi_1) = (\phi_0, \phi_1 - r_{01}\phi_0) = (\phi_0, \phi_1) - r_{01}(\psi_0, \phi_0),$$

y, por tanto,

$$r_{01} = \frac{(\phi_0, \phi_1)}{(\psi_0, \phi_0)} = \frac{((1,0,1),(0,1,1))}{((1,0,1),(1,0,1))} = \frac{1}{2}.$$

Se tiene que $\psi_1 = (0, 1, 1) - (1/2)(1, 0, 1) = (-1/2, 1, 1/2)$. Observemos que $(\psi_0, \psi_1) = 0$.
Finalmente, calculemos $\psi_2 = \phi_2 - r_{02}\phi_0 - r_{12}\phi_1$, de forma que:

$$\begin{aligned} 0 &= (\psi_0, \psi_2) = (\phi_0, \phi_2 - r_{02}\phi_0 - r_{12}\phi_1) \\ 0 &= (\psi_1, \psi_2) = (\phi_1 - r_{01}\phi_0, \phi_2 - r_{02}\phi_0 - r_{12}\phi_1) \end{aligned}$$

[. . .]

Outline

La aproximación polinomial

Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

Pafnuti Chebyshev (1821-1894)

La aproximación polinomial para funciones continuas

- Sea E el espacio (vectorial) de las funciones continuas en $[-1, 1]$ y sea $f \in E$.
- Sea $F \subset E$ el subespacio (vectorial) de los polinomios de grado menor o igual que n en $[-1, 1]$, una de cuyas bases es el conjunto $\{1, x, \ldots, x^n\}$.
- Sea d la métrica en E (y, por tanto, en F) definida como:

$$d(f, g) = ||f - g|| = \left(\int_a^b \omega(x)(f(x) - g(x))^2 dx \right)^{1/2},$$

donde ω es una función peso.

La aproximación polinomial para funciones continuas

Consideremos dos opciones:

Aplicamos el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base $\{1, x, \ldots, x^n\}$:

- Si $\omega(x) = 1$, obtenemos los polinomios de Legendre.
- Si $\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, obtenemos los polinomios de Chebyshev.

Los polinomios de Legendre para la aproximación de funciones continuas

Ejemplo

Aplica el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base $\{1, x, x^2\} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ considerando el producto escalar con peso $\omega(x) = 1$.

- $\psi_0(x) = 1$.
- $\psi_1(x) = x - r_{01}$ donde a será aquel que satisfaga:

$$(\psi_1, \psi_0) = \int_{-1}^{1} (x - r_{01})dx = 0 \Rightarrow r_{01} = 0.$$

- $\psi_2(x) = x^2 - r_{02} - r_{12}x$ donde r_{02} y r_{12} satisfacen que $(\psi_2, \psi_0) = (\psi_2, \psi_1) = 0$ (se puede calcular que $r_{02} = 1/3$ y $r_{12} = 0$).

Estos polinomios forman la base de los polinomios de Legendre .

Los polinomios de Legendre para la aproximación de funciones continuas

- Si $\omega(x) = 1$, los primeros polinomios ortogonales obtenidos son:

$$1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x, \ldots$$

y se conocen como polinomios de Legendre.

Teorema

El polinomio de Legendre de grado n tiene n ceros simples en el interior del intervalo $[-1, 1]$.

Los polinomios de Legendre para la aproximación de funciones continuas

Teorema

Supongamos que $x_1, x_2, \dots, x_n$ son las n raíces del polinomio de Legendre $P_n(x)$ y que, para cada $k = 1, 2, \dots, n$, los números c_k están definidos mediante la fórmula:

$$c_k = \int_{-1}^{1} \prod_{i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx.$$

Si P es un polinomio de grado menor que $2n$, entonces

$$\int_{-1}^{1} P(x) dx = \sum_{k=1}^{n} c_k P(x_k).$$

Los polinomios de Legendre para la aproximación de funciones continuas

- Llamemos $\{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n\}$ a la base de los polinomios de Legendre en $[-1, 1]$.
- Dada una función $f \in \mathcal{C}([-1, 1])$, aproximaremos f por

$$L_n(x) = a_0\psi_0(x) + a_1\psi_1(x) + \cdots + a_n\psi_n(x),$$

donde

$$a_j = \frac{(f, \psi_j)}{(\psi_j, \psi_j)} = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\psi_j(x)dx}{\displaystyle\int_{-1}^{1} \psi_j(x)^2 dx},$$

para $j = 0, 1, \ldots, n$.

Los polinomios de Chebyshev para la aproximación de funciones continuas

- Si $\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, los polinomios ortogonales obtenidos son:

$$1, x, x^2 - \frac{1}{2}, x^3 - \frac{3}{4}x, \ldots$$

  y se conocen como polinomios de Chebyshev.

- Existen muchas formas de obtener estos polinomos, una de ellas es a partir de la expresión:

$$T_n(x) = \cos[n \arccos(x)], \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

  que, analizando sus propiedades, proporciona una relación de recurrencia.

Los polinomios de Chebyshev para la aproximación de funciones continuas

Teorema

El conjunto $\{T_0, T_1, \ldots\}$ de polinomios obtenidos según la ecuación recurrente

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

donde $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$ verifica:

- Es un conjunto ortogonal.
- El grado de T_k es k.
- El coeficiente del término de mayor grado de T_k es 2^{k-1} para $k \geq 1$.

Los polinomios de Chebyshev para la aproximación de funciones continuas

- Llamemos $\{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n\}$ a la base de los polinomios de Chebyshev en $[-1, 1]$.
- Dada una función $f \in \mathcal{C}([-1, 1])$, aproximaremos f por

$$C_n(x) = a_0\psi_0(x) + a_1\psi_1(x) + \cdots + a_n\psi_n(x),$$

donde

$$a_j = \frac{(f, \psi_j)}{(\psi_j, \psi_j)} = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\psi_j(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}{\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\psi_j(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx},$$

para $j = 0, 1, \dots, n$.

La aproximación polinomial para funciones discretas

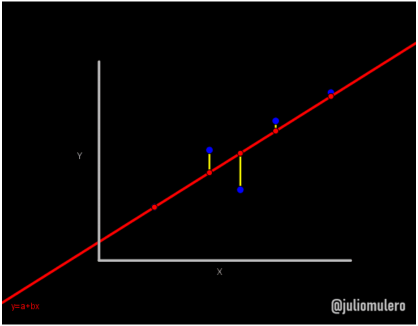
- Supongamos ahora que conocemos solo los valores de la función f sobre un conjunto discreto de puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. ¡No tenemos una función continua!
- Sea E el espacio vectorial de las funciones definidas sobre $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ (puedes comprobar que efectivamente es un espacio vectorial con la suma y el producto natural).
- Sea $F \subset E$ el subespacio (vectorial) de los polinomios de grado menor o igual que m definidos sobre $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$, una de cuyas bases es el conjunto $\{1, x, \ldots, x^m\}$.
- Sea d la métrica en E (y, por tanto, en F) definida como:

$$d(f,g) = ||f-g|| = \left(\sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - g(x_i))^2 \right)^{1/2}.$$

- La función peso es $\omega(x) = 1$.

La aproximación polinomial para funciones discretas

- El polinomio de primer grado (la recta) que mejor se aproxima a la función discreta se conoce como la recta de regresión lineal.



https://elultimoversodefermat.wordpress.com/2019/03/11/la-regresion-lineal/

Outline

La aproximación trigonométrica

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)

La aproximación trigonométrica

- El planteamiento anterior se ha realizado para un espacio vectorial E y un subespacio F generado por una base $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$.
- Sin embargo, el mismo desarrollo se puede realizar para un conjunto ortogonal de funciones del espacio vectorial E (para un producto escalar determinado) y el correspondiente subespacio generado.
- Consideremos ahora las funciones periódicas de periodo p (que forman un espacio vectorial).

La aproximación trigonométrica

Definición

Diremos que una función f es periódica, o p-periódica, si está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ y existe $p > 0$ tal que

$$f(x+p) = f(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Al valor p lo llamaremos periodo de f. La gráfica de esta función se obtiene por repetición periódica de su gráfica en cualquier intervalo de longitud p.

La aproximación trigonométrica

Definición

Diremos que una función f es periódica, o p-periódica, si está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ y existe $p > 0$ tal que

$$f(x + p) = f(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Al valor p lo llamaremos periodo de f. La gráfica de esta función se obtiene por repetición periódica de su gráfica en cualquier intervalo de longitud p.

Ejemplos

- Las funciones sin y cos son periódicas de periodo 2π.
- Las funciones x, x^2, $\log x$ o e^x no son periódicas.

La aproximación trigonométrica

Observación

Si f y g tienen periodo p, entonces la función

$$h(x) = af(x) + bg(x),$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, también tiene periodo p (este conjunto es un espacio vectorial). Por definición, se tiene que, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, $f(x + np) = f(x)$, y, por tanto, np también son periodos de f.

La aproximación trigonométrica

Observación

Si f y g tienen periodo p, entonces la función

$$h(x) = af(x) + bg(x),$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, también tiene periodo p (este conjunto es un espacio vectorial). Por definición, se tiene que, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, $f(x + np) = f(x)$, y, por tanto, np también son periodos de f.

Objetivo

El objetivo principal será la representación de funciones de periodo 2π en términos de funciones de periodo 2π más simples:

$$\{1/2, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \ldots, \cos(nx), \sin(nx), \ldots\}.$$

llamado sistema trigonométrico. Sus combinaciones lineales se conocen como polinomios trigonométricos.

La aproximación polinomial para funciones continuas

- Sea E el espacio (vectorial) de las funciones continuas periódicas de periodo 2π en $[-\pi,\pi]$ y sea $f\in E$.
- Sea $F\subset E$ el subespacio de polinomios trigonométricos generados por el sistema trigonométrico.
- Sea d la métrica en E (y, por tanto, en F) definida como:

$$d(f,g)=||f-g||=\left(\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2dx\right)^{1/2}.$$

La aproximación trigonométrica

Observación

El sistema trigonométrico es ortogonal para el producto escalar dado por:

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

para $f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi])$, es decir,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{2} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{2} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)dx \\ = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = 0,\end{aligned}$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$.

La aproximación trigonométrica

Observación

Dada una función f de periodo 2π, aproximaremos f por:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin(kx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) + a_n \cos(nx) \end{aligned}$$

- En algunos recursos, se incluye también el término correspondiente a $\sin(nx)$.
- El límite de S_n cuando $n \to \infty$ se conoce como serie de Fourier de f.

La aproximación trigonométrica

Observación

Dado que el sistema trigonométrico es ortogonal, se puede comprobar que:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \text{ para } k = 1, \ldots, n, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx \text{ para } k = 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

La aproximación trigonométrica

Recordatorio

Una función f es par si $f(x) = f(-x)$ y es impar si $f(x) = -f(-x)$.

Teorema

Si una función es par, los polinomios trigonométricos que la aproximan (y su serie de Fourier) solo tiene cosenos ($b_k = 0$ para todo k), y si es impar, solo tiene senos ($a_k = 0$ para todo k).

La aproximación trigonométrica

Ejemplo

Determina el polinomio trigonométrico que aproxima a la función:

$$f(x) = |x|, \text{ para } -\pi < x < \pi.$$

En primer lugar, observa que esta función se puede extender a toda la recta real de forma periódica.

Además, $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, y, por tanto, el polinomio trigonométrico solo contiene cosenos.

La aproximación trigonométrica

Aproximaremos f por:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx),$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x dx = \pi, \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \cos(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi k^2}((-1)^k - 1), \end{aligned}$$

para $k = 1, \ldots, n$.

El polinomio trigonométrico queda como:

$$S_n(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{((-1)^k - 1)}{k^2} \cos(kx).$$

La aproximación trigonométrica

Observación

Si g es una función periódica de periodo $2L$ (es decir, $f(x+2L)=f(x)$), entonces:

$$f(x) = g\left(\frac{L}{\pi}x\right),$$

es periódica de periodo 2π.

Outline

La aproximación racional

Henri Padé (1863–1953)

La aproximación de Padé

Definición

Una función racional r de grado N es un cociente de polinomios de grados n y m tales que $n + m = N$:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_0 + p_1(x - x_0) + \cdots + p_n(x - x_0)^n}{q_0 + q_1(x - x_0) + \cdots + q_m(x - x_0)^m}.$$

Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que $q_0 = 1$.

Definición

Si hacemos coincidir $f(x)$, y sus N primeras derivadas, con $r(x)$, y sus N primeras derivadas, en x_0:

$$f^{(i)}(x_0) = r^{(i)}(x_0),$$

para todo $i = 0, 1, \ldots, N$, obtendremos la aproximación de Padé.

La aproximación de Padé

- Supongamos que el desarrollo de Taylor en x_0 es $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$.
- Si calculamos:

$$
\begin{aligned}
f(x) - r(x) &= f(x) - \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)q(x) - p(x)}{q(x)} \\
&= \frac{f(x)\sum_{k=0}^{m} q_k(x-x_0)^k - \sum_{k=0}^{n} p_k(x-x_0)^k}{q(x)} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \sum_{k=0}^{m} q_k(x-x_0)^k - \sum_{k=0}^{n} p_k(x-x_0)^k}{q(x)}.
\end{aligned}
$$

- El objetivo es determinar los $n+m+1$ coeficientes desconocidos (suponiendo $q_0 = 1$) de forma que

$$f^{(i)}(x_0) - r^{(i)}(x_0) = 0,$$

para todo $i = 0, 1, \ldots, N$.

La aproximación de Padé

- La condición anterior es equivalente a que $f - r$ tiene un cero de multiplicidad $n+m+1$ en x_0 y, por tanto, el numerador

$$\left(a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots\right)\left(q_0 + q_1(x-x_0) + q_2(x-x_0)^2\right) - \left(p_0 + p_1(x-x_0) + p_2(x-x_0)^2\right),$$

no tiene términos de grado menor o igual que $n+m$.

- Si escribimos los coeficientes de $(x-x_0)^i$ en dicha expresión, obtenemos:

$$\left(\sum_{k=0}^{i} a_k q_{i-k}\right) - p_i = 0,$$

para todo $i = 0, 1, \dots, N$.

La aproximación de Padé

Ejemplo

Aproxima la función $f(x) = e^{-x}$ en $x_0 = 0$ con $n = 3$ y $m = 2$ sabiendo que:

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k.$$

El objetivo es determinar p_0, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 de forma que si

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3}{1 + q_1 x + q_2 x^2},$$

cumpla $f^{(i)}(0) = r^{(i)}(0)$, para todo $i = 0, 1, \ldots, 5$.

La aproximación de Padé

Consideramos el polinomio de Taylor de f en $x_0 = 0$:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \dots$$

Por tanto, los coeficientes de x^i para $i = 0, 1, \dots, 5$ en la expresión

$$\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + \dots\right)\left(1 + q_1 x + q_2 x^2\right) - \left(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3\right),$$

son todos nulos.

La aproximación de Padé

Por tanto,

$$
\left.
\begin{array}{rcrcrcrcl}
x^0: & 1 & & & & & & = & p_0 \\
x^1: & -1 & + & q_1 & & & & = & p_1 \\
x^2: & \frac{1}{2} & - & q_1 & + & q_2 & & = & p_2 \\
x^3: & -\frac{1}{6} & + & \frac{1}{2}q_1 & - & q_2 & & = & p_3 \\
x^4: & \frac{1}{24} & - & \frac{1}{6}q_1 & + & \frac{1}{2}q_2 & & = & 0 \\
x^5: & -\frac{1}{120} & + & \frac{1}{24}q_1 & - & \frac{1}{6}q_2 & & = & 0
\end{array}
\right\}
$$

Y se tiene que:

$$
\begin{aligned}
p_0 &= 1, \\
p_1 &= -3/5, \\
p_2 &= 3/20, \\
p_3 &= -1/60, \\
q_1 &= 2/5, \\
q_2 &= 1/20.
\end{aligned}
$$

Aproximación de funciones

Julio Mulero

@juliomulero

julio.mulero

Departamento de Matemáticas
Universidad de Alicante

Carmen Gandía

Departamento de Matemáticas
Universidad de Alicante