Problemas

Derivación e integración numéricas

Ejercicio 1 *Deduce razonadamente las fórmulas de derivación de tres y cinco puntos.*

Ejercicio 2 *Si $f(x) = e^x$, calcular la derivada en $x_0 = 0$ con $h = 1$ usando las fórmulas centradas de los tres y cinco puntos. Calcular el error absoluto y relativo en cada caso.*

Sea $h = 1$ y $x_{-1} = -1$ e $x_1 = 1$. Según la fórmula de los tres puntos,

$$f'(0) \approx \frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{e - 1/e}{2} = 1.5443.$$

Sea $h = 1$ y $x_{-2} = -2$, $x_{-1} = -1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Según la fórmula de los cinco puntos

$$f'(0) \approx \frac{-f(2) + 8f(1) - 8f(-1) + f(-2)}{12} = \frac{-e^2 + 8e - 8/e + 1/e^2}{12} = 0.9624.$$

Sabemos que $f'(x) = e^x$, y, por tanto, $f'(0) = 2.7186$. Si denotamos como $f_3'(0)$ la aproximación de la derivada según la fórmula de los tres puntos, el error absoluto viene dado por:

$$|f'(0) - f_3'(0)| =$$

y el error relativo por

$$\frac{|f'(0) - f_3'(0)|}{|f_3'(0)|} =$$

Si denotamos como $f_5'(0)$ la aproximación de la derivada según la fórmula de los cinco puntos, el error absoluto viene dado por:

$$|f'(0) - f_5'(0)| =$$

y el error relativo por

$$\frac{|f'(0) - f_5'(0)|}{|f_5'(0)|} =$$

Ejercicio 3 *Si $f(x) = e^x$, entonces $f'(1.5) \approx 4.4817$. Aproximamos el valor de esta derivada usando la fórmula progresiva. Si comenzamos con el paso $h = 0.2$ y lo vamos dividiendo cada vez a la mitad, ¿cuál es h para el cual se obtiene un error absoluto menor que 10^{-3}?*

Ejercicio 4 *Se conocen algunos valores de la función $f(x,y)$ y se especifican en la siguiente tabla:*

$y \backslash x$	0	0.5	1	1.5	2
0	0.0775	0.1573	0.2412	0.3309	0.4274
0.5	0.1528	0.3104	0.4767	0.6552	0.8478
1	0.2235	0.4547	0.7002	0.9653	1.2533
1.5	0.2866	0.5846	0.9040	1.2525	1.6348

Tomando $h = 0.5$, calcula:

a) $\partial f/\partial x$ *en* $(1,0)$.

b) $\partial^2 f/\partial x^2$ *en* $(1,0)$.

c) $\partial^2 f/\partial x \partial y$ *en* $(1,0)$.

Ejercicio 5 *Toma $h = 0.1$ y evalúa numéricamente las derivadas parciales de segundo orden de la función $f(x,y) = e^{x^2+y}$ en el origen. Compara los valores obtenidos con el valor exacto de tales derivadas. Repite los cálculos tomando $h = 0.05$.*

Ejercicio 6 *Deduce razonadamente las fórmulas simples de integración de Newton-Cotes cerradas para $n = 1, 2, 3$.*

Ejercicio 7 *Deduce razonadamente las fórmulas simples de integración de Newton-Cotes abiertas para $n = 1, 2, 3$.*

Ejercicio 8 *Deduce razonadamente las fórmulas compuestas de integración del trapecio y Simpson.*

Ejercicio 9 *Aproxima el valor de las siguientes integrales definidas usando los métodos simples del rectángulo, trapecio y Simpson y calculando el error que se comete en cada caso en relación con el valor exacto especificado:*

a) $\int_0^2 3x^2 dx = 8$.

b) $\int_0^1 e^x dx = 1.71828$.

c) $\int_{-1}^1 (x + 2x^2 - x^3 + 5x^4) dx = 3.3333$.

d) $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = 0.82842$.

Ejercicio 10 *Aproxima el valor de las siguientes integrales definidas usando los métodos compuestos del trapecio y Simpson, tomando en todos los casos $h = 0.1$, y calculando el error que se comete en cada caso en relación con el valor exacto especificado:*

a) $\int_0^2 3x^2 dx = 8$.

b) $\int_0^1 e^x dx = 1.71828$.

c) $\int_{-1}^{1}(x+2x^2-x^3+5x^4)dx = 3.3333.$

d) $\int_{2}^{3}\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = 0.82842.$

Ejercicio 11 *Teniendo en cuenta que no es conocida una integral de la función* $f(x) = e^{x^2}$*, calcula el valor de la siguiente integral definida*

$$\int_0^1 e^{x^2}dx,$$

con un error menor a 0.003. Usa las reglas compuestas del trapecio y de Simpson.

Ejercicio 12 *Una cuerda vibra adoptando la forma,* $y = \sin x$ *entre las abscisas* $x = 0$ *y* $x = 4$ *en un instante* t_0*. Calcula apróximadamente la longitud de la cuerda sabiendo que la longitud* L *viene dada por:*

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+\cos^2(x)}dx,$$

utilizando la regla de Simpson compuesta con $n = 8$*.*