Práctica 5

Métodos Numéricos y Computación

Un caso particular del problema de aproximación por mínimos cuadrados es la aproximación discreta. Frecuentemente se recopilan observaciones a las cuales queremos asignar un modelo matemático. Supongamos que disponemos de $n+1$ puntos en el plano, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, y consideramos el producto escalar en el espacio de las funciones definidas sobre $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$(f, g) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i). \tag{1}$$

Nuestro objetivo es obtener el polinomio de grado m, $1 \leq m \leq n$, para el cual la distancia a los puntos sea mínima. Más concretamente, si llamamos:

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m,$$

y $\{\phi_0, \phi_1, \phi_m\} = \{1, x, \ldots, x^m\}$ es la base canónica de los polinomios de grado menor o igual que m, e $y_i = f(x_i)$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_m$ son las soluciones del siguiente sistema de $m+1$ ecuaciones con $m+1$ incógnitas (llamado sistema de ecuaciones normales):

$$\left.\begin{array}{rcl} a_0(\phi_0,\phi_0) + a_1(\phi_1,\phi_0) + \cdots + a_n(\phi_m,\phi_0) & = & (f,\phi_0) \\ a_0(\phi_0,\phi_1) + a_1(\phi_1,\phi_1) + \cdots + a_n(\phi_m,\phi_1) & = & (f,\phi_1) \\ & \vdots & \\ a_0(\phi_0,\phi_m) + a_1(\phi_1,\phi_n) + \cdots + a_m(\phi_m,\phi_m) & = & (f,\phi_m) \end{array}\right\}$$

Ejercicio 1 *Crea una función* `modelo_discreto_general` *que, dados* $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ *y* $1 \leq m \leq n$, *devuelva el polinomio aproximante de grado* m.

Dados $n+1$ puntos del plano, uno de los polinomios aproximantes más utilizados es el de primer grado. Este polinomio es conocido como el modelo (o recta) de regresión lineal $y = a_0 + a_1 x$. En este caso, el problema queda reducido a encontrar los parámetros a_0 y a_1 de la recta que mejor se ajusta al conjunto de observaciones.

Ejercicio 2 *Consideremos los siguientes datos:*

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
y	0.000	0.078	0.138	0.192	0.244

a) Obtén los polinomios aproximantes de grado 1, 2, 3 y 4.

b) Comprueba que el polinomio de grado 4 coincide con el polinomio interpolador.

c) Representa en un mismo gráfico los cuatro polinomios junto con los cinco puntos del plano.

Ejercicio 3 *Considera ocho puntos equiespaciados en el intervalo* $[2, 4]$ *y aplícales la transformación* $y = -0.3x + 1.4$.

a) ¿Qué parámetros obtenemos si aplicamos el ajuste de mínimos cuadrados?

b) Representa gráficamente los resultados.

c) Utiliza ahora ocho datos aleatorios del intervalo $[2, 4]$. *¿Se mantiene el mismo resultado?*

d) Considera los mismos datos del apartado (c), pero perturbemos los valores de las ordenadas con valores aleatorios en el intervalo $(0, 1)$. *¿Se mantiene el mismo resultado?*

Ejercicio 4 *Un vehículo se mueve supuestamente a velocidad constante. A continuación se muestran los tiempos de llegada a diferentes posiciones separadas 900 metros:*

Posición (x)	0	900	1800	2700
Tiempo (y)	17.6	40.4	67.7	90.1

a) Obtén el modelo de regresión lineal.

b) Representa el modelo de regresión lineal junto a los datos.

c) ¿Se mueve el automóvil a velocidad constante?

Ejercicio 5 *Se ha realizado un estudio para investigar el efecto de un determinado proceso térmico en la dureza de una determinada pieza. Siete piezas se seleccionaron para el estudio. Antes del tratamiento se realizaron pruebas de dureza para determinar la dureza de cada pieza. Después, las piezas fueron sometidas a un proceso térmico de templado con el fin de mejorar su dureza. Al final del proceso, se realizaron nuevamente pruebas de dureza y se obtuvo una segunda lectura. Se recogieron los siguientes datos (Kg. de presión)*

Dureza previa (x)	182	232	191	200	148	249	276
Dureza post. (y)	198	210	194	220	138	220	219

a) Obtén los polinomios aproximantes de grado 1 (modelo de regresión lineal) y 2 (P_1 *y* P_2*).*

b) Representa los dos polinomios junto a los datos.

c) Obtén el máximo de los valores absolutos de la diferencia entre la función y el polinomio de grado 1, y entre la función y el polinomio de grado 2, para los valores de x *conocidos, para indicar los errores máximos.*

d) Estima la dureza posterior de una pieza cuya dureza previa es 212 con aquel polinomio que presente un menor error.

En la aproximación de funciones continuas, se utilizan las bases ortogonales de los polinomios de Chebyshev y de los polinomios de Legendre. Estas bases se obtienen aplicando la ortogonalización de Gram-Schmidt a la base canónica de los polinomios considerando diferentes pesos. A lo largo de la historia han sido muy estudiados y se sabe, por ejemplo, que:

(i) Los polinomios de Chebyshev no mónicos verifican la ecuación recurrente:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \text{ para } n = 2, \ldots$$

(ii) Los polinomios de Legendre no mónicos verifican la ecuación recurrente:

$$T_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} xT_n(x) - \frac{n}{n+1} T_{n-1}(x), \text{ para } n = 2, \ldots$$

En ambos casos, $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$. Hemos de tener en cuenta que esta relación de recurrencia no proporciona directamente los polinomios mónicos, pero estos se pueden obtener fácilmente. Además, los polinomios así obtenidos son en el intervalo $[-1, 1]$.

Ejercicio 6 *Crea una función que devuelva los polinomios ortogonales no mónicos de Chebyshev hasta un cierto grado n teniendo en cuenta las propiedades anteriores. Haz lo mismo para los polinomios de Legendre.*

Dada una base ortogonal $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ y una función continua f en $[-1, 1]$, aproximaremos f por:

$$P(x) = a_0 + a_1\phi_1 + \cdots + a_n\phi_n,$$

donde

$$a_i = \frac{(f, \phi_i)}{(\phi_i, \phi_i)}, \text{ para todo } i = 0, 1, \ldots, n,$$

y

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} \omega(x) f(x) g(x) dx.$$

Ejercicio 7 *Dada la función:*

$$f(x) = e^{-2x} \sin(3x) \textit{ para todo } x \in [-1, 1].$$

a) Calcula los coeficientes del polinomio aproximante de grado 2 de f en el intervalo $[-1, 1]$ según las dos bases de polinomios ortogonales consideradas y el producto escalar correspondiente.

b) Representa en una sola figura la función y sus dos polinomios aproximantes.

c) Una vez obtenidas las aproximaciones, calcula la norma de la diferencia entre la función y dichas aproximaciones.