

FISICA II¹

Alberto Garcia-Garcia

24 de abril de 2019

Inducción Magnética

Flujo Magnético

El flujo magnético ϕ_m a través de una superficie A se calcula de forma análoga al flujo de un campo eléctrico. Siendo dA un elemento de área infinitesimal de dicha superficie y \hat{n} el vector unitario perpendicular a dicho elemento ², el flujo queda definido como sigue (siendo su unidad el *Weber* [Wb] que equivale a $[T \cdot m^2]$)

$$\phi_m = \int_S \tilde{\mathbf{B}} \hat{n} dA = \int_S B_n dA [Wb] , \quad (1)$$

Dado que el campo magnético es proporcional al número de líneas de campo por unidad de área, el flujo es proporcional al número de líneas que atraviesan dicha superficie. Por lo tanto, si la superficie es un plano de área A y el campo magnético es constante sobre la superficie, el flujo que la atraviesa es

$$\phi_m = \tilde{\mathbf{B}} \hat{n} A = BA \cos \theta [Wb] , \quad (2)$$

donde θ es el ángulo que forman el campo magnético y la normal de la superficie. Frecuentemente, esta aproximación se utiliza para calcular el flujo magnético a través de una superficie rodeada por una bobina con N espiras

$$\phi_m = N \tilde{\mathbf{B}} \hat{n} A = NBA \cos \theta [Wb] . \quad (3)$$

FEM Inducida y Ley de Faraday

Si el flujo magnético a través de un área rodeada por un circuito varía por cualquier motivo, se induce una FEM que es igual en módulo a la variación por unidad de tiempo del flujo que atraviesa dicho circuito:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} [V] . \quad (4)$$

Los campos eléctricos estudiados con anterioridad eran producidos por cargas eléctricas estáticas por lo que su circulación (potencial

¹ Inspired by Edward R. Tufte!

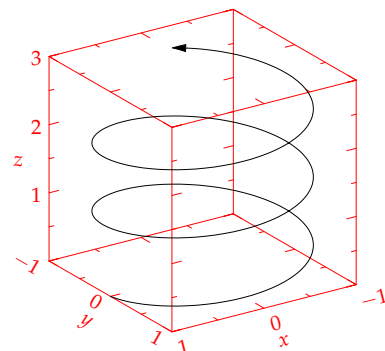


Figura 1: Superficie, campo y flujo magnético.

² Podemos observar además que, si bien hay dos direcciones normales posibles, su elección es arbitraria y el signo del flujo no depende de dicha elección.

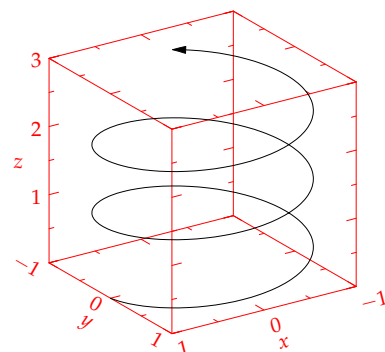


Figura 2: Flujo magnético a través de una superficie S encerrada por una bobina con N espiras o vueltas.

como $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$ alrededor de una curva cerrada C era cero. No obstante, el campo eléctrico generador por un campo magnético variable no es conservativo ya que su circulación (potencial) es una FEM inducida por el flujo magnético que atraviesa cualquier superficie S encerrada por C tal y como comentamos anteriormente

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E}_{nc} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = -\frac{d\phi_m}{dt} [V]. \quad (5)$$

Ley de Lenz

Cuando se produce una variación del flujo magnético que atraviesa una superficie, el campo magnético debido a la corriente inducida genera un flujo magnético sobre la misma superficie que se opone a dicha variación. Dicho de otro modo, la Ley de Lenz es la responsable del signo negativo en la Ley de Faraday puesto que la FEM y la corriente inducidas poseen una dirección y sentido tal que tienden a oponerse a la variación que las produce.

FEM de Movimiento

La FEM inducida en un conductor que se mueve a través de un campo magnético se denomina FEM de movimiento. El ejemplo más claro es el de una varilla conductora que se desliza a lo largo de dos conductores unidos a una resistencia, todo ello en el seno de un campo magnético uniforme tal y como se muestra en la Figura 4.

En este caso, el área de la superficie S encerrada por el circuito se incrementa cuando la varilla se desplaza a la derecha por lo que el flujo magnético a través de la misma también crece y por ello se induce una FEM en el circuito. Si denominamos l a la distancia entre los raíles y x a la distancia entre el extremo izquierdo de los raíles y la varilla, el área es lx y por lo tanto el flujo es

$$\phi_m = BA = Blx [Wb]. \quad (6)$$

Si derivamos respecto al tiempo para obtener la variación del flujo respecto al mismo (teniendo en cuenta que x varía con el tiempo ³)

$$\frac{d\phi_m}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv [V], \quad (7)$$

podemos deducir que la FEM inducida en el circuito es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -Blv [V] \quad (8)$$

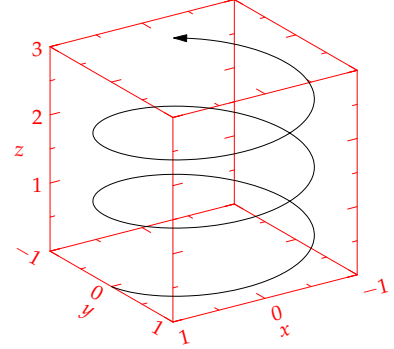


Figura 3: Ejemplo de la Ley de Lenz.

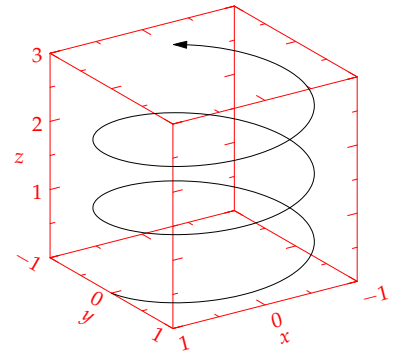


Figura 4: Varilla conductora deslizando sobre raíles conductores (conectados a una resistencia) en el seno de un campo magnético.

³ La variación de la longitud x con el tiempo es simplemente la velocidad a la que se desplaza la varilla $v = \frac{dx}{dt}$

Generadores y Motores

Un generador de corriente alterna se puede construir mediante una bobina giratoria en el seno de un campo magnético uniforme. Los extremos de la bobina se conectan a un anillo deslizante que gira con la bobina. Cuando la bobina gira por acción mecánica, el flujo magnético a través de ella varía y por lo tanto se induce una FEM en ella. El ángulo formado entre el campo magnético \vec{B} y la normal de la superficie de la bobina \hat{n} viene dado por

$$\theta = \omega t \text{ [deg]} , \quad (9)$$

por lo tanto, el flujo magnético que atraviesa la bobina depende del tiempo y de la velocidad angular de rotación de la misma como sigue

$$\phi_m = NBA \cos \omega t = NBA \cos 2\pi f \text{ [Wb]} . \quad (10)$$

Podemos deducir entonces que la FEM producida por la bobina es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = \omega NBA \sin \omega t = \mathcal{E}_{max} \sin \omega t \text{ [V]} , \quad (11)$$

donde

$$\mathcal{E}_{max} = \omega NBA \text{ [V]} . \quad (12)$$

Inductancia

El flujo magnético generado a través de una bobina por una corriente que circula por la misma es proporcional a la intensidad de corriente según una constante L [H]⁴

$$\phi_m = LI \text{ [Wb]} , \quad (13)$$

esta constante se denomina autoinducción y depende de la geometría de la bobina. Para el caso de un solenoide enrollado determinamos anteriormente que el flujo máximo venía dado por NBA , por lo que desarrollando esta igualdad

$$\phi_m = NBA = N(\mu_0 n I) A = \mu_0 n^2 I A l \text{ [H]} , \quad (14)$$

ya que el campo magnético es conocido $B = \mu_0 n I$ y el número de vueltas de la bobina también $N = nl$. La constante de proporcionalidad respecto a la intensidad de corriente es la autoinducción y únicamente depende de factores geométricos

$$L = \phi_m / I = \mu_0 n^2 A l \text{ [H]} . \quad (15)$$

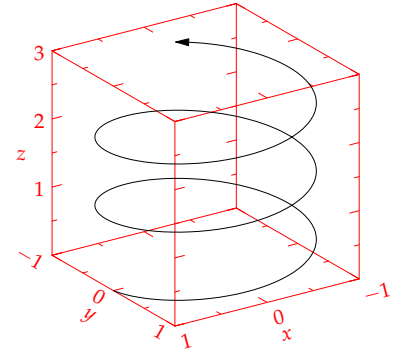


Figura 5: Generador de corriente alterna en el que una bobina girando con velocidad angular constante en el seno de un campo magnético genera una FEM inducida sinusoidal.

⁴ La unidad del sistema internacional para la inductancia L es el Henry [H].

Energía Magnética

De la misma forma que un condensador almacena energía eléctrica, un inductor almacena energía magnética. La energía almacenada en un inductor que transporta una corriente I es

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 [J]. \quad (16)$$

Esa energía magnética puede ser expresada como

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 Al \left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} Al [J], \quad (17)$$

y a partir de la misma podemos derivar la densidad de energía magnética u_m como la energía por unidad de volumen Al

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} [J \cdot m^{-3}]. \quad (18)$$

Circuitos RL

Un circuito RL (ver Figura 6) es todo aquel que contiene una resistencia y un inductor. La aplicación de la regla de las mallas de Kirchoff arroja la siguiente expresión para el circuito

$$\mathcal{E}_0 - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (19)$$

En el instante inicial, la corriente es nula por lo que IR es cero y la FEM de la batería es igual a la caída de potencial en el inductor. Cuando la corriente comienza a crecer, IR crece y la variación de la corriente con el tiempo disminuye⁵ hasta que en un tiempo breve, la corriente alcanza un valor positivo I . Su variación con el tiempo podemos resolverla separando variables e integrando

$$\frac{dI}{dt} = \mathcal{E} - \frac{IR}{L} \rightarrow \frac{dI}{\mathcal{E} - IR} = \frac{dt}{L} \quad (20)$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = I_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) [A], \quad (21)$$

donde I_0 es el valor máximo o final de la corriente \mathcal{E}/R [A] cuando $t \rightarrow \infty$ y τ es la constante de tiempo o tiempo característico del circuito L/R [s].

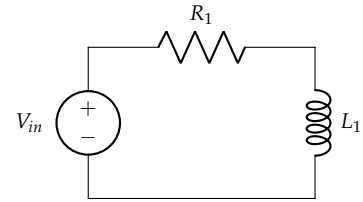


Figura 6: Circuito RL básico.

⁵ Cuando la inductancia L no es despreciable, I no puede saltar súbitamente de cero a un valor finito sino que dI/dt es finita y por lo tanto la corriente es continua en el tiempo.

Cuanto mayor es la autoinducción L o menor es la resistencia R del circuito, más tiempo es necesario para establecer una fracción determinada de la corriente final I_0 .

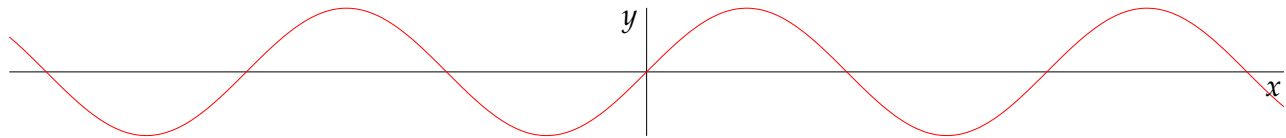


Figura 7: Variación de la intensidad de corriente en función del tiempo en un circuito RL.

Ondas Electromagnéticas

Corriente de Desplazamiento

La Ley de Ampère relaciona la componente tangencial del campo magnético (integral lineal) alrededor de una curva cerrada C con la corriente I_S que atraviesa cualquier área S limitada por dicha curva

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_S . \quad (22)$$

Sin embargo, esta afirmación no es siempre cierta: no es válida cuando la corriente no es continua, como por ejemplo sucede al interrumpirse en la placa de un condensador (ver Figura 8).

No obstante, Maxwell demostró que esta Ley sí puede generalizarse a todas las situaciones si sustituimos la corriente I_S de la ecuación por la suma de dicha corriente I_S y otro término I_D conocido como corriente de desplazamiento de Maxwell y definido como

$$I_D = \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} , \quad (23)$$

siendo ϕ_e el flujo del campo eléctrico a través de la superficie limitada por la curva C ⁶. Así pues, la forma modificada de la Ley de Ampère, conocida como Ley de Ampère-Maxwell es

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_S + I_D) = \mu_0 I_S + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} . \quad (24)$$

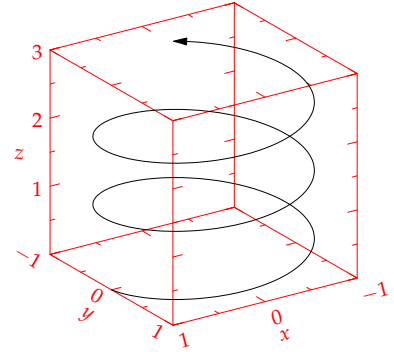


Figura 8: Dos superficies S_1 y S_2 limitadas por la misma curva C . La corriente atraviesa la superficie S_1 pero no S_2 . La ley de Ampère no es válida.

⁶ $\phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$

Óptica

Sidenotes

One of the most prominent and distinctive features of this style is the extensive use of sidenotes. There is a wide margin to provide ample room for sidenotes and small figures. Any `\footnotes` will automatically be converted to sidenotes.⁷ If you'd like to place ancillary information in the margin without the sidenote mark (the superscript number), you can use the `\marginnote` command.

The specification of the `\sidenote` command is:

```
\sidenote[⟨number⟩][⟨offset⟩]{Sidenote text.}
```

Both the `⟨number⟩` and `⟨offset⟩` arguments are optional. If you provide a `⟨number⟩` argument, then that number will be used as the sidenote number. It will change of the number of the current sidenote only and will not affect the numbering sequence of subsequent sidenotes.

Sometimes a sidenote may run over the top of other text or graphics in the margin space. If this happens, you can adjust the vertical position of the sidenote by providing a dimension in the `⟨offset⟩` argument. Some examples of valid dimensions are:

```
1.0in    2.54cm    254mm    6\baselineskip
```

If the dimension is positive it will push the sidenote down the page; if the dimension is negative, it will move the sidenote up the page.

While both the `⟨number⟩` and `⟨offset⟩` arguments are optional, they must be provided in order. To adjust the vertical position of the sidenote while leaving the sidenote number alone, use the following syntax:

```
\sidenote[][⟨offset⟩]{Sidenote text.}
```

The empty brackets tell the `\sidenote` command to use the default sidenote number.

If you *only* want to change the sidenote number, however, you may completely omit the `⟨offset⟩` argument:

```
\sidenote[⟨number⟩]{Sidenote text.}
```

The `\marginnote` command has a similar *offset* argument:

```
\marginnote[⟨offset⟩]{Margin note text.}
```

References

References are placed alongside their citations as sidenotes, as well. This can be accomplished using the normal `\cite` command.⁸

The complete list of references may also be printed automatically by using the `\bibliography` command. (See the end of this document

⁷ This is a sidenote that was entered using the `\footnote` command.

This is a margin note. Notice that there isn't a number preceding the note, and there is no number in the main text where this note was written.

⁸ The first paragraph of this document includes a citation.

for an example.) If you do not want to print a bibliography at the end of your document, use the `\nobibliography` command in its place.

To enter multiple citations at one location,⁹ you can provide a list of keys separated by commas and the same optional vertical offset argument: `\cite{Tufte2006,Tufte1990}`.

`\cite[⟨offset⟩]{bibkey1,bibkey2,...}`

Figures and Tables

Images and graphics play an integral role in Tufte's work. In addition to the standard figure and tabular environments, this style provides special figure and table environments for full-width floats.

Full page-width figures and tables may be placed in `figure*` or `table*` environments. To place figures or tables in the margin, use the `marginfigure` or `marginfigure` environments as follows (see figure 9):

```
\begin{marginfigure}
  \includegraphics{helix}
  \caption{This is a margin figure.}
\end{marginfigure}
```

The `marginfigure` and `marginfigure` environments accept an optional parameter `⟨offset⟩` that adjusts the vertical position of the figure or table. See the "Sidenotes" section above for examples. The specifications are:

```
\begin{marginfigure}[⟨offset⟩]
  ...
\end{marginfigure}

\begin{marginfigure}[⟨offset⟩]
  ...
\end{marginfigure}
```

Figure 10 is an example of the `figure*` environment and figure 11 is an example of the normal `figure` environment.

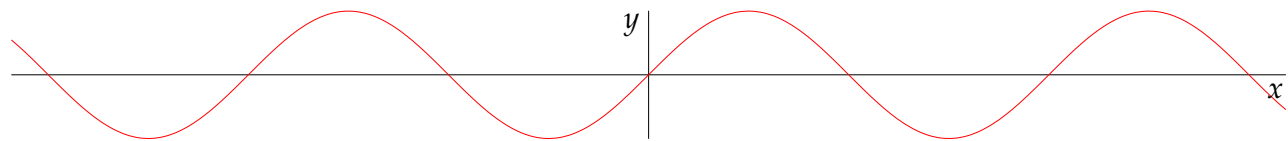


Table 1 shows table created with the `booktabs` package. Notice the lack of vertical rules—they serve only to clutter the table's data.

⁹ Edward R. Tufte. *Beautiful Evidence*. Graphics Press, LLC, first edition, May 2006. ISBN 0-9613921-7-7; and Edward R. Tufte. *Envisioning Information*. Graphics Press, Cheshire, Connecticut, 1990. ISBN 0-9613921-1-8

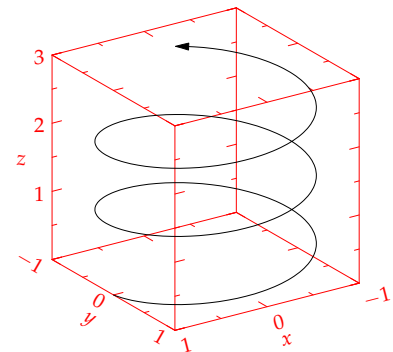


Figura 9: This is a margin figure. The helix is defined by $x = \cos(2\pi z)$, $y = \sin(2\pi z)$, and $z = [0, 2, 7]$. The figure was drawn using Asymptote (<http://asymptote.sf.net/>).

Figura 10: This graph shows $y = \sin x$ from about $x = [-10, 10]$. Notice that this figure takes up the full page width.

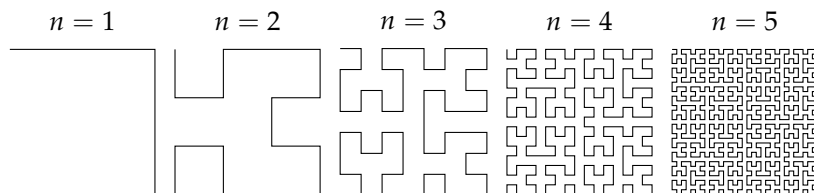


Figura 11: Hilbert curves of various degrees n . Notice that this figure only takes up the main textblock width.

Margin	Length
Paper width	8 ¹ / ₂ inches
Paper height	11 inches
Textblock width	6 ¹ / ₂ inches
Textblock/sidenote gutter	³ / ₈ inches
Sidenote width	2 inches

Cuadro 1: Here are the dimensions of the various margins used in the Tufte-handout class.

Full-width text blocks

In addition to the new float types, there is a fullwidth environment that stretches across the main text block and the sidenotes area.

```
\begin{fullwidth}
Lorem ipsum dolor sit amet...
\end{fullwidth}
```

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Typography

Typefaces

If the Palatino, Helvetica, and Bera Mono typefaces are installed, this style will use them automatically. Otherwise, we'll fall back on the Computer Modern typefaces.

Letterspacing

This document class includes two new commands and some improvements on existing commands for letterspacing.

When setting strings of ALL CAPS or SMALL CAPS, the letter-spacing—that is, the spacing between the letters—should be increased slightly.¹⁰ The `\allcaps` command has proper letterspacing for

¹⁰ Robert Bringhurst. *The Elements of Typography*. Hartley & Marks, 3.1 edition, 2005. ISBN 0-88179-205-5

strings of FULL CAPITAL LETTERS, and the `\smallcaps` command has letterspacing for SMALL CAPITAL LETTERS. These commands will also automatically convert the case of the text to upper- or lowercase, respectively.

The `\textsc` command has also been redefined to include letterspacing. The case of the `\textsc` argument is left as is, however. This allows one to use both uppercase and lowercase letters: THE INITIAL LETTERS OF THE WORDS IN THIS SENTENCE ARE CAPITALIZED.

Installation

To install the Tufte- \LaTeX classes, simply drop the following files into the same directory as your `.tex` file:

```
tufte-common.def
tufte-handout.cls
tufte-book.cls
```

More Documentation

For more documentation on the Tufte- \LaTeX document classes (including commands not mentioned in this handout), please see the sample book.

Support

The website for the Tufte- \LaTeX packages is located at <http://code.google.com/p/tufte-latex/>. On our website, you'll find links to our svn repository, mailing lists, bug tracker, and documentation.

Referencias

Robert Bringhurst. *The Elements of Typography*. Hartley & Marks, 3.1 edition, 2005. ISBN 0-88179-205-5.

Edward R. Tufte. *Envisioning Information*. Graphics Press, Cheshire, Connecticut, 1990. ISBN 0-9613921-1-8.

Edward R. Tufte. *Beautiful Evidence*. Graphics Press, LLC, first edition, May 2006. ISBN 0-9613921-7-7.