

Interpolación de funciones

Julio Mulero



@juliomulero



julio.mulero

Departamento de Matemáticas
Universidad de Alicante

Carmen Gandía

Departamento de Matemáticas
Universidad de Alicante



El problema

- El problema de la interpolación consiste en calcular el valor de una función en un punto cuando
 - ... o bien no se conoce la expresión explícita de la misma,
 - ... o bien no es fácil de evaluar dicha función en ese punto.
- Para resolverlo, se construye una función fácil de evaluar y que coincide con la función objeto del problema en los datos que conocemos sobre esta.
- Una posible solución es sustituir esta función complicada por otra más sencilla de evaluar, por ejemplo, polinomios, funciones trigonométricas,...

El problema

- En todo problema de interpolación hay que concretar dos cuestiones básicas:
 - ... los datos que se desea que sean comunes a la función dada y a la que la va a interpolar,
 - ... el tipo de función que se va a utilizar como función de interpolación.
- Si P es un polinomio, o una función polinómica a trozos, se habla de **interpolación polinomial**.

El problema

Datos:

- $n + 1$ puntos x_0, x_1, \dots, x_n .
- $n + 1$ valores f_0, f_1, \dots, f_n .
- $n + 1$ enteros k_0, k_1, \dots, k_n .

Problema:

Buscamos un polinomio P que verifique

$$P^{(k_i)}(x_i) = f_i \text{ para todo } i = 0, 1, \dots, n.$$

Observaciones:

- x_0, x_1, \dots, x_n se llaman **nodos de interpolación**.

La interpolación polinomial

Ejemplos:

- Interpolación de Taylor.
- Interpolación de Lagrange.
- Interpolación de Hermite.
- Interpolación polinómica a trozos (splines).

Outline

1 La interpolación de Taylor

3 La interpolación de Hermite

La interpolación de Taylor



Brook Taylor (1685–1731)

La interpolación de Taylor

- En este problema se suponen conocidos los valores de la función f y sus derivadas sucesivas hasta el orden n en el punto x_0 y se trata de hallar un polinomio $P_n(x)$ de grado menor o igual que n tal que:

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0),$$

para todo $k = 0, 1, \dots, n$.

- Bajo ciertas condiciones, este polinomio existe y se conoce como el **polinomio de Taylor** de f de grado menor o igual que n en x_0 .

El polinomio de Taylor

Definición

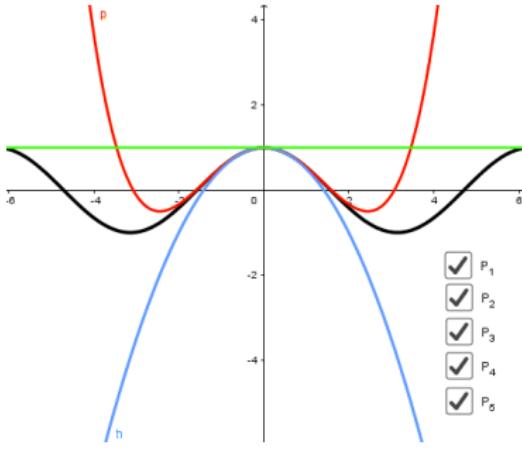
Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función n -veces derivable y $x_0 \in (a, b)$. El polinomio de Taylor de f de grado menor o igual que n en x_0 viene dado por

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}.$$

Observación

- A fin de construir el polinomio de Taylor de f en x_0 basta conocer el valor de sus derivadas en x_0 .
 - El polinomio de Taylor P_n satisface que $P^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$.
 - El polinomio de Taylor P_n aproxima a f en valores “cercanos” a x_0 .

El polinomio de Taylor



📄 <https://www.geogebra.org/m/s59srxwa>
📄 <https://www.geogebra.org/m/mhbRUfWp>

El error del polinomio de Taylor

Teorema (acotación del error)

- Sea $P_n(x)$ el polinomio de Taylor de una función f , $(n+1)$ -veces derivable, de grado menor o igual que n en x_0 y $x \in (a, b)$, entonces

$$f(x) - P_n(x) = f^{(n+1)}(\xi_x) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

donde ξ_x es un punto entre x y x_0 , es el error cometido si usamos la interpolación de Taylor.

- Se cumple que:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \sup_{y \in [a, b]} \left\{ |f^{(n+1)}(y)| \left| \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \right\}.$$

Demostración http://www.ma.uva.es/~antonio/Industriales/Apuntes_09-10/Mati/13_Tema-11_09-10.pdf

El polinomio de Taylor

Ejemplo 1

- Calcula el polinomio de Taylor de grado menor o igual que 4 de $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$.
- Calcula el polinomio de Taylor de grado menor o igual que 4 de $f(x) = 1/x$ en $x_0 = 1$.
- Calcula el polinomio de Taylor de grado menor o igual que 2 de una función f tal que
 - $f(64) = 8$.
 - $f'(64) = 1/16$.
 - $f''(64) = -1/2048$.

en $x_0 = 64$. ¿Imaginas qué función es?

📄 Profesor10mates: <https://www.youtube.com/watch?v=X8nsYGccnww&list=PLunRFUHsCA1yV2w50ELy7YC2Mffc-eB9k>

Outline

1 La interpolación de Taylor

2 La interpolación de Lagrange

3 La interpolación de Hermite

4 La interpolación polinómica a trozos

La interpolación de Lagrange



Joseph Louis Lagrange (1736–1813)

La interpolación de Lagrange

- El problema de la interpolación polinomial de Lagrange consiste en, dados los valores de una función f ,

$$f_i = f(x_i)$$

para $i = 0, 1, \dots, n$, en $n + 1$ puntos distintos x_0, x_1, \dots, x_n del intervalo $[a, b]$, determinar, si existe, un polinomio $P_n(x)$ de grado menor o igual a n tal que:

$$P_n(x_i) = f_i \text{ para todo } i = 0, 1, \dots, n.$$

- A dicho polinomio se le llama el **polinomio de interpolación** (o **interpolador**) de f en los $n + 1$ puntos dados.

La interpolación de Lagrange

📄 <https://www.geogebra.org/m/kh2zfhjb>

La interpolación de Lagrange

Ejemplo 2

Supongamos que x_0 y x_1 son dos puntos distintos y conocemos los valores $f_0 = f(x_0)$ y $f_1 = f(x_1)$. ¿Cuál será el polinomio interpolador de grado menor o igual que 1 en x_0 y x_1 ?

La interpolación de Lagrange

Ejemplo 2

Supongamos que x_0 y x_1 son dos puntos distintos y conocemos los valores $f_0 = f(x_0)$ y $f_1 = f(x_1)$. ¿Cuál será el polinomio interpolador de grado menor o igual que 1 en x_0 y x_1 ?

El polinomio interpolador de Lagrange de grado menor o igual que 1 es la recta que pasa por los puntos (x_0, f_0) y (x_1, f_1) , es decir,

$$P_1(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

La interpolación de Lagrange

Ejemplo 2

Supongamos que x_0 y x_1 son dos puntos distintos y conocemos los valores $f_0 = f(x_0)$ y $f_1 = f(x_1)$. ¿Cuál será el polinomio interpolador de grado menor o igual que 1 en x_0 y x_1 ?

El polinomio interpolador de Lagrange de grado menor o igual que 1 es la recta que pasa por los puntos (x_0, f_0) y (x_1, f_1) , es decir,

$$P_1(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Observación

En general, de la misma manera que por dos puntos pasa una única recta (un polinomio de grado 1), por tres puntos pasa una única parábola (un polinomio de grado 2) si no están alineados, etc, o por cuatro puntos pasa un único polinomio de grado 3 si no están alineados o sobre la misma parábola, etc.

El polinomio de interpolación

Teorema (Existencia y unicidad)

Dada una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, $n + 1$ puntos distintos en $[a, b]$, entonces existe un único polinomio P_n de grado a lo sumo n tal que:

$$P_n(x_i) = f(x_i),$$

para todo $i = 0, 1, \dots, n$.

Demostración

El polinomio de interpolación

Unicidad:

Supongamos que $p(x)$ y $q(x)$ son dos polinomios no nulos de grado a lo sumo n verificando dichas condiciones. Entonces, $r(x) = p(x) - q(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo n y además verifica que $r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = f_i - f_i = 0$, para $i = 0, 1, \dots, n$, luego $r(x)$ posee $n + 1$ raíces distintas y, por tanto, $r(x) = 0$ (Teorema Fundamental del Álgebra: Todo polinomio no nulo de grado n tiene exactamente n raíces, contando cada una tantas veces como indique su multiplicidad, luego posee a lo más n raíces distintas).

El polinomio de interpolación

Unicidad:

Supongamos que $p(x)$ y $q(x)$ son dos polinomios no nulos de grado a lo sumo n verificando dichas condiciones. Entonces, $r(x) = p(x) - q(x)$ es un polinomio de grado a lo sumo n y además verifica que $r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = f_i - f_i = 0$, para $i = 0, 1, \dots, n$, luego $r(x)$ posee $n + 1$ raíces distintas y, por tanto, $r(x) = 0$ (Teorema Fundamental del Álgebra: Todo polinomio no nulo de grado n tiene exactamente n raíces, contando cada una tantas veces como indique su multiplicidad, luego posee a lo más n raíces distintas).

Existencia:

Llamemos $f_i = f(x_i)$, para $i = 0, 1, \dots, n$. Tenemos $n + 1$ puntos $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ y buscamos un polinomio P_n de grado menor o igual que n ,

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

tal que

$$P_n(x_i) = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \cdots + a_nx_i^n = f_i,$$

para todo $i = 0, 1, \dots, n$.

El polinomio de interpolación

Por tanto, buscamos $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\left. \begin{array}{lcl} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n & = & f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n & = & f_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n & = & f_2 \\ \vdots & & \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n & = & f_n \end{array} \right\}$$

O, lo que es lo mismo,

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ & & \ddots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

El polinomio de interpolación

Se tiene que:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ & & \ddots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \neq 0.$$

 https://www.ditutor.com/determinantes/determinante_vandermonde.html

El polinomio de interpolación

Se tiene que:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ & & \ddots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \neq 0.$$

 https://www.ditutor.com/determinantes/determinante_vandermonde.html

En consecuencia, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = n$ y el sistema es compatible determinado, es decir, existe un conjunto único de soluciones $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ y, por tanto, existe un único polinomio P_n que verifica las condiciones.

El error del polinomio de interpolación

Teorema (error)

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función $(n+1)$ -veces derivable. Si P_n es el polinomio de interpolación de f en los puntos x_0, x_1, \dots, x_n y $x \in [a, b]$, entonces:

$$f(x) - P_n(x) = f^{(n+1)}(\xi_x) \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)}{(n+1)!},$$

donde $\xi_x \in (a, b)$.

Demostración

El error del polinomio de interpolación

Sea $x \in [a, b]$ un valor fijo:

- Si $x = x_k$, para cierto $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, la fórmula es trivialmente cierta.
- En caso contrario, sea $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$\phi(z) = f(z) - P_n(z) - a(x)(z - x_0)(z - x_1) \cdots (z - x_n),$$

donde

$$a(x) = \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)}.$$

Observemos que $\phi(x_0) = \phi(x_1) = \cdots = \phi(x_n) = \phi(x) = 0$.

El error del polinomio de interpolación

La función $\phi(z)$ se anula en $n + 2$ puntos y verifica las condiciones del Teorema de Rolle generalizado. Más concretamente, dado que ϕ es continua en $[a, b]$, $\phi^{(n+1)}(z)$ existe en cada punto de $z \in (a, b)$ y ϕ tiene $n + 2$ ceros en $[a, b]$, entonces existe un punto ξ_x en (a, b) tal que $\phi^{(n+1)}(\xi_x) = 0$. Es decir,

$$\phi^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - a(x)(n+1)! = 0.$$

Despejando $a(x)$, se obtiene:

$$a(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} f(x) - P_n(x) &= a(x)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \\ &= f^{(n+1)}(\xi_x) \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n)}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

El error del polinomio de interpolación

Teorema (acotación del error)

Bajo las mismas hipótesis que el teorema anterior, se cumple que:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \sup_{y \in [a, b]} \left\{ |f^{(n+1)}(y)| \left| \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)}{(n+1)!} \right| \right\}.$$

Demostración

Se deduce del teorema anterior.

El error del polinomio de interpolación

Observación

Cuando se quiere calcular el polinomio interpolador de grado n en $[a, b]$, es frecuente utilizar $n + 1$ nodos equiespaciados. Sin embargo, una opción que ofrece mejores resultados es el uso de los conocidos como nodos de Chebyshev, que son:

$$x_i = \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

o bien, se pueden calcular como las $n + 1$ raíces del polinomio (llamado) de Chebyshev de grado $n + 1$ en el intervalo $[a, b]$.

Cálculo del polinomio de interpolación

Ejemplo 3

Obtén el polinomio de interpolación con los datos de la siguiente tabla planteando las condiciones y resolviendo el sistema de ecuaciones cuya matriz de coeficientes viene dada por la matriz de Vandermonde:

x_k	-2	0	2	5
y_k	2	4	3	4

Cálculo del polinomio de interpolación

Dado que disponemos de información sobre cuatro puntos, buscamos un polinomio de grado tres forma que $P_3(-2) = 2$, $P_3(0) = 4$, $P_3(2) = 3$ y $P_3(5) = 4$.

El polinomio P_3 tendrá la forma:

$$P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,$$

de manera que, al plantear las condiciones correspondientes, se obtiene el siguiente el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La solución puede obtenerse en términos de la expresión matricial (si $Ax = b$, entonces $x = A^{-1}b$).

Cálculo del polinomio de interpolación

```
import numpy as np

x=np.array([-2,0,2,5])

np.vander(x)
Out[1]:
array([[ -8,    4,   -2,    1],
       [  0,    0,    0,    1],
       [  8,    4,    2,    1],
       [125,   25,    5,    1]])

y=np.array([2,4,3,4])

p=np.dot(np.linalg.inv(np.vander(x)),y.T)

print(p)
Out[2]:
[ 0.07738095 -0.375        -0.05952381   4.          ]

np.polyval(p,0)
Out[3]: 4.0
```

$$\text{El polinomio es } P_3(x) = 4 - 0.0595x - 0.375x^2 + 0.0773x^3.$$

Cálculo del polinomio de interpolación

Motivación:

- El polinomio de interpolación puede ser obtenido a partir de la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, pero se pueden cometer grandes errores porque la matriz de Vandermonde está mal condicionada...

Un procedimiento más “eficiente”:

- Usando los polinomios fundamentales de Lagrange.

Usando los polinomios fundamentales de Lagrange

- El polinomio P_n satisface que $P_n(x_i) = f_i$, para todo $i = 0, 1, \dots, n$.
- Si obtenemos polinomios ℓ_i , para $i = 0, 1, \dots, n$, tales que:

$$\ell_i(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = i, \\ 0, & \text{si } k \neq i. \end{cases}$$

entonces:

$$P_n(x) = f_0\ell_0(x) + f_1\ell_1(x) + \cdots + f_n\ell_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i\ell_i(x).$$

- Los ℓ_i , para $i = 0, 1, \dots, n$, se conocen como **polinomios fundamentales de Lagrange**.

Usando los polinomios fundamentales de Lagrange

Cálculo de los polinomios fundamentales

- Si $\ell_i(x_k) = 0$, para todo $i \neq k$, entonces

$$\ell_i(x) = c(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n).$$

- Dado que $\ell_i(x_i) = 1$,

$$1 = c(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n).$$

- Por tanto,

$$c = \frac{1}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}.$$

- Y,

$$\ell_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}.$$

Usando los polinomios fundamentales de Lagrange

Definición

Los polinomios fundamentales ℓ_i , para $i = 0, 1, \dots, n$, vienen dados por:

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{k \neq i} (x - x_k)}{\prod_{k \neq i} (x_i - x_k)}$$

Construcción usando los polinomios fundamentales

El polinomio interpolador se obtiene como una combinación lineal de los polinomios ℓ_i , $i = 0, 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{i=0}^n f_k \frac{\prod_{k \neq i} (x - x_k)}{\prod_{k \neq i} (x_i - x_k)} \\ &= \sum_{i=0}^n f_k \ell_i(x). \end{aligned}$$

Cálculo del polinomio de interpolación usando los polinomios fundamentales

Ejemplo 3 (cont.)

Obtén el polinomio de interpolación con los datos de la siguiente tabla planteando las condiciones y usando los polinomios fundamentales de Lagrange:

x_k	-2	0	2	5
y_k	2	4	3	4

Cálculo del polinomio de interpolación usando los polinomios fundamentales

El polinomio de interpolación será obtenido de la forma:

$$P_3(x) = f_0\ell_0(x) + f_1\ell_1(x) + f_2\ell_2(x) + f_3\ell_3(x),$$

donde

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{k \neq i} (x - x_k)}{\prod_{k \neq i} (x_i - x_k)}, \text{ para } i = 0, 1, 2, 3.$$

Los polinomios fundamentales son:

$$\ell_0(x) = \frac{x(x-2)(x-5)}{(-2)(-2-2)(-2-5)}$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x+2)x(x-5)}{4 \times 2 \times (-3)}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x+2)(x-2)(x-5)}{2(-2)(-5)}$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x+2)x(x-2)}{7 \times 5 \times 3}$$

Cálculo del polinomio de interpolación usando los polinomios fundamentales

El polinomio de interpolación es:

$$\begin{aligned}P_3(x) = & 2 \frac{x(x - 2)(x - 5)}{(-2)(-2 - 2)(-2 - 5)} + 4 \frac{(x + 2)(x - 2)(x - 5)}{2(-2)(-5)} \\& + 3 \frac{(x + 2)x(x - 5)}{4 \times 2 \times (-3)} + 4 \frac{(x + 2)x(x - 2)}{7 \times 5 \times 3}.\end{aligned}$$

Cálculo del polinomio de interpolación

Motivación:

- El polinomio de interpolación puede ser obtenido a partir de los polinomios fundamentales de Lagrange. Sin embargo, si añadimos un punto nuevo deberemos repetir todos los cálculos.
- Newton (que no daba puntada sin hilo) propuso un método para obtener el polinomio de interpolación aprovechando los cálculos previamente realizados...

Un procedimiento aún más “eficiente”:

- Usando las **diferencias divididas** de Newton.

Usando las diferencias divididas de Newton

Definición (diferencias divididas)

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función “suficientemente derivable” y $n+1$ puntos distintos, x_0, x_1, \dots, x_n , las diferencias divididas de orden 0 se definen como:

$$f[x_i] = f(x_i),$$

y, por inducción, las diferencias divididas de orden k :

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

Usando las diferencias divididas de Newton

Observación

Si no disponemos de una función, sino que solo conocemos un conjunto $\{(x_i, f_i) : i = 0, 1, \dots, n\}$, también podemos calcular las diferencias divididas. En este caso, las diferencias divididas de orden 0 se denotarán, y se calcularán, como:

$$[f_i] = f_i,$$

y las diferencias divididas de orden k :

$$[f_i, f_{i+1}, \dots, f_{i+k-1}, f_{i+k}] = \frac{[f_{i+1}, \dots, f_{i+k-1}, f_{i+k}] - [f_i, f_{i+1}, \dots, f_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

En resumen, observemos que solo necesitamos disponer de f_i , para $i = 0, 1, \dots, n$.

Usando las diferencias divididas de Newton

Construcción de una tabla para las diferencias divididas:

x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$...	$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$...	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$...	
...	
x_{n-1}	$f[x_{n-1}]$	$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

Usando las diferencias divididas de Newton

Construcción de una tabla para las diferencias divididas:

x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$...	$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$...	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$...	
...	
x_{n-1}	$f[x_{n-1}]$	$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

Usando las diferencias divididas de Newton

Construcción usando las diferencias divididas

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función “suficientemente derivable” y $n + 1$ puntos distintos, x_0, x_1, \dots, x_n , el polinomio de interpolación de grado menor o igual que n (que, en este contexto, también suele llamarse polinomio interpolador de Newton) se puede obtener como:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\ & + \cdots + f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Observación (recursividad)

Cada polinomio P_0, P_1, \dots, P_n puede obtenerse de forma recursiva añadiendo un “sumando”:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Cálculo del polinomio de interpolación usando las diferencias divididas

Ejemplo 3 (cont.)

Obtén el polinomio de interpolación con los datos de la siguiente tabla planteando las condiciones y usando las diferencias divididas de Newton:

x_k	-2	0	2	5
y_k	2	4	3	4

Usando las diferencias divididas de Newton

Construcción de una tabla para las diferencias divididas:

$x_0 = -2$	$f[x_0] = 2$	$f[x_0, x_1] = 1$	$f[x_0, x_1, x_2] = -0.375$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 0.$
$x_1 = 0$	$f[x_1] = 4$	$f[x_1, x_2] = -0.5$	$f[x_1, x_2, x_3] = 0.1666$	
$x_2 = 2$	$f[x_2] = 3$	$f[x_2, x_3] = 0.3333$		
$x_3 = 5$	$f[x_3] = 4$			

El polinomio será:

$$P_n(x) = 2 + (x + 2) - 0.375(x + 2)x + 0.0773(x + 2)x(x - 2).$$

Cálculo del polinomio de interpolación

Ejemplo 4

En una planta química se sintetiza un producto que es utilizado posteriormente como conservante de productos enlatados. El rendimiento del proceso depende de la temperatura. Se dispone de los siguientes datos:

T (°C)	150	160	170	180
R (%)	35.5	37.8	43.6	45.7

Se considera un rendimiento óptimo el que va de 38.5 a 45. Si la temperatura de trabajo cae a 162°C por una avería, ¿será el proceso satisfactorio hasta que sea reparada?

Cálculo del polinomio de interpolación en Python

```
import numpy as np

x=np.array([150,160,170,180])

y=np.array([35.5,37.8,43.6,45.7])

np.vander(x)
Out[1]:
array([[3375000,    22500,      150,         1],
       [4096000,    25600,      160,         1],
       [4913000,    28900,      170,         1],
       [5832000,    32400,      180,         1]])

#Tres formas:

np.dot(np.linalg.inv(np.vander(x)),y.T)

np.polyfit(x,y,3)

PolNewton(x,y) #Que programaremos...
```

$$\text{El polinomio es } P_3(x) = 5316.99 - 97.23x + 0.0593x^2 - 0.0012x^3.$$

Outline

1 La interpolación de Taylor

2 La interpolación de Lagrange

3 La interpolación de Hermite

4 La interpolación polinómica a trozos

La interpolación de Hermite



Charles Hermite (1822–1901)

La interpolación de Hermite

- El problema de la interpolación polinomial de Hermite consiste en, dados los valores de una función f y su derivada f' , que abreviamos por:

$$f_i = f(x_i) \text{ y } f'_i = f'(x_i),$$

para $i = 0, 1, \dots, n$, en $n + 1$ puntos distintos x_0, x_1, \dots, x_n del intervalo $[a, b]$, determinar, si existe un polinomio $H_{2n+1}(x)$ de grado menor o igual que $2n + 1$ tal que:

$$H_{2n+1}(x_i) = f_i \text{ y } H'_{2n+1}(x_i) = f'_i \text{ para todo } i = 0, 1, \dots, n.$$

- A dicho polinomio se le llama el **polinomio interpolador de Hermite** de f en los $n + 1$ puntos dados.



La interpolación de Hermite

Observación

¿Cuántas condiciones debe satisfacer el polinomio resultante?

La interpolación de Hermite

Observación

¿Cuántas condiciones debe satisfacer el polinomio resultante?

- $H_{2n+1}(x_i) = f_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ ($n + 1$ condiciones).
- $H'_{2n+1}(x_i) = f'_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ ($n + 1$ condiciones).
- El polinomio de Hermite satisfará $2n + 2$ condiciones, que permitirán calcular $2n + 2$ incógnitas, que serán los coeficientes de un polinomio de grado menor o igual que $2n + 1$.

La interpolación de Hermite

Teorema (existencia y unicidad)

El polinomio interpolador de Hermite de una función derivable $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en los puntos x_0, x_1, \dots, x_n , se puede obtener como:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) H_j(x) + \sum_{j=0}^n f'(x_j) \hat{H}_j(x),$$

donde

$$\begin{aligned} H_j(x) &= [1 - 2(x - x_j)\ell'_j(x)]\ell_j^2(x), \\ \hat{H}_j(x) &= (x - x_j)\ell_j^2(x), \end{aligned}$$

siendo ℓ_j el j -ésimo polinomio fundamental de Lagrange.

Además, $H_{2n+1}(x)$ es único y, si f es suficientemente derivable en el intervalo $[a, b]$ el error de interpolación viene dado por:

$$f(x) - H_{2n+1}(x) = f^{(2n+2)}(\xi_x) \frac{(x-x_0)^2(x-x_1)^2 \dots (x-x_{n-1})(x-x_n)^2}{(2n+2)!}.$$

Cálculo del polinomio interpolador de Hermite

Construcción de una tabla para las diferencias divididas:

$w_0 = x_0$	$f[w_0]$	$f[w_0, w_1]$	$f[w_0, w_1, w_2]$...	$f[w_0, w_1, \dots, w_{2n+1}]$
$w_1 = x_0$	$f[w_1]$	$f[w_1, w_2]$	$f[w_1, w_2, w_3]$...	
$w_2 = x_1$	$f[w_2]$	$f[w_2, w_3]$	$f[w_2, w_3, w_4]$...	
$w_3 = x_1$	$f[w_3]$	$f[w_3, w_4]$	$f[w_3, w_4, w_5]$...	
$w_4 = x_2$	$f[w_4]$	$f[w_4, w_5]$	$f[w_4, w_5, w_6]$...	
$w_5 = x_2$	$f[w_5]$	$f[w_5, w_6]$	$f[w_5, w_6, w_7]$...	
...	
$w_{2n-2} = x_{n-1}$	$f[w_{2n-2}]$	$f[w_{2n-2}, w_{2n-1}]$	$f[w_{2n-2}, w_{2n-1}, w_{2n}]$		
$w_{2n-1} = x_{n-1}$	$f[w_{2n-1}]$	$f[w_{2n-1}, w_{2n}]$	$f[w_{2n-1}, w_{2n}, w_{2n+1}]$		
$w_{2n} = x_n$	$f[w_{2n}]$	$f[w_{2n}, w_{2n+1}]$			
$w_{2n+1} = x_n$	$f[w_{2n+1}]$				

Observación

Notemos que:

- Llamamos $\omega_{2i} = \omega_{2i+1} = x_i$, para todo $i = 0, 1, \dots, n$.
- Sustituimos $f[\omega_{2i}, \omega_{2i+1}]$ por $f'(x_i)$, para todo $i = 0, 1, \dots, n$.

Cálculo del polinomio interpolador de Hermite

El polinomio interpolador de Hermite

El polinomio interpolador de Hermite de una función derivable $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en los puntos x_0, x_1, \dots, x_n satisface que:

$$H_{2n+1}(x) = P_{2n+1}(x).$$

Demostración

Fijamos $\omega_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, \dots, 2n + 1$, tales que:

$$\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \dots < \omega_{2n} < \omega_{2n+1},$$

donde $\omega_{2i} = x_i$, para todo $i = 0, 1, \dots, n$.

Cálculo del polinomio interpolador de Hermite

Construimos el polinomio interpolador de Lagrange de grado menor o igual que $2n + 1$:

$$f(x) = f[\omega_0] + f[\omega_0, \omega_1](x - \omega_0) + f[\omega_0, \omega_1, \omega_2](x - \omega_0)(x - \omega_1) + \\ + \cdots + f[\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2n+1}, x](x - \omega_0)(x - \omega_1) \dots (x - \omega_{2n+1}).$$

La función

$$f[x, x_i] = \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i}, \text{ para todo } i = 0, 1, \dots, n,$$

es continua en todo \mathbb{R} excepto en $x = x_i$.

Definimos

$$f[x_i, x_i] = \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i}, \text{ para todo } i = 0, 1, \dots, n.$$

Tomamos límites cuando $\omega_{2i+1} \rightarrow \omega_i$, para todo $i = 0, 1, \dots, n$.

Cálculo del polinomio interpolador de Hermite

Obtenemos:

$$\begin{aligned} f(x) = & f[\omega_0] + f[\omega_0, \omega_0](x - \omega_0) + f[\omega_0, \omega_0, \omega_2](x - \omega_0)(x - \omega_0) + \\ & + \cdots + f[\omega_0, \omega_0, \omega_2, \dots, \omega_{2n}, x](x - \omega_0)(x - \omega_0) \dots (x - \omega_{2n}). \end{aligned}$$

O, lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} f(x) = & f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + \\ & + \cdots + f[x_0, x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0)^2 \dots (x - x_n)^2. \end{aligned}$$

El polinomio interpolador de Lagrange será:

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(x) = & f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + \\ & + \cdots + f[x_0, x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)^2 \dots (x - x_n). \end{aligned}$$

Cálculo del polinomio interpolador de Hermite

Además, se tiene que:

$$f(x) - P_{2n+1}(x) = f[x_0, x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0)^2 \dots (x - x_n)^2.$$

Si llamamos

$$D(x) = f[x_0, x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0)^2 \dots (x - x_n)^2,$$

se puede ver que:

$$D(x_i) = 0$$

$$D'(x_i) = 0$$

para todo $i = 0, 1, \dots, n$.

Por tanto, P_{2n+1} es un polinomio de grado menor o igual que $2n+1$ que coincide con f , y cuya derivada coincide con f' , en x_i , $i = 0, 1, \dots, n$.

Cálculo del polinomio interpolador de Hermite

Ejemplo 5

Construye el polinomio interpolador de Hermite de una función f en los puntos $x_0 = -1$ y $x_1 = -2$, sabiendo que $f(-1) = -9$, $f'(-1) = 10$, $f(-2) = 12$ y $f'(-2) = 13$.

Cálculo del polinomio interpolador de Hermite

Ejemplo 5

Construye el polinomio interpolador de Hermite de una función f en los puntos $x_0 = -1$ y $x_1 = -2$, sabiendo que $f(-1) = -9$, $f'(-1) = 10$, $f(-2) = 12$ y $f'(-2) = 13$.

Construimos la tabla de las diferencias divididas:

$$\begin{array}{c|ccccc} \omega_0 = -1 & f[\omega_0] = -9 & f[\omega_0, \omega_1] = 10 & f[\omega_0, \omega_1, \omega_2] = 31 & f[\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3] = 65 \\ \omega_1 = -1 & f[\omega_1] = -9 & f[\omega_1, \omega_2] = -21 & f[\omega_1, \omega_2, \omega_3] = -34 & \\ \omega_2 = -2 & f[\omega_2] = 12 & f[\omega_2, \omega_3] = 13 & & \\ \omega_3 = -2 & f[\omega_3] = 12 & & & \end{array}$$

El polinomio de interpolación de Hermite será:

$$H_3(x) = -9 + 10(x + 1) + 31(x + 1)^2 + 65(x + 1)^2(x + 2).$$

Outline

1 La interpolación de Taylor

2 La interpolación de Lagrange

3 La interpolación de Hermite

4 La interpolación polinómica a trozos

Los splines



I.J. Schoenberg (1903–1990)

Motivación

- Es lógico pensar que, de todos los métodos vistos hasta ahora, el que mejor funciona es el de Hermite puesto que, en cada nodo, coinciden la “hipotética curva” que genera los datos, y su pendiente, con el polinomio interpolador y su derivada.
- Sin embargo, todos los métodos de interpolación presentan algunos defectos. En primer lugar, el método de Hermite requiere de información que en ocasiones no se puede conocer. En segundo lugar, los polinomios de alto grado son muy oscilantes.
- En este sentido, trataremos de ajustar varios polinomios de bajo grado (uno por cada $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n$, que se unirán obedeciendo ciertas condiciones de continuidad.

La interpolación polinómica a trozos

Datos:

- $n + 1$ puntos distintos x_0, x_1, \dots, x_n .
- $n + 1$ valores y_0, y_1, \dots, y_n .

Problema:

Buscamos una función S tal que:

- S es una función continua derivable $p - 1$ veces en el intervalo $[x_0, x_n]$.
- S es una función a trozos formada por los polinomios S_0, S_1, \dots, S_{n-1} que vamos a usar respectivamente en $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ y que son de grado menor o igual que p .
- Los polinomios pasan por los nodos. es decir, $S(x_0) = y_0, S(x_1) = y_1, \dots, S(x_{n-1}) = y_{n-1}$.
- Puede probarse que este problema tiene solución.
- Cada solución S se llama spline de orden p o p -spline en los puntos x_0, x_1, \dots, x_n relativo a los valores y_0, y_1, \dots, y_n . El más utilizado es el de orden 3, conocido como spline cúbico .

Los splines

Definición

Un spline S de orden k con nodos en $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ es una función que satisface:

- En cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, S es un polinomio de grado menor o igual que k .
- La derivada de orden $k - 1$ de S es continua en $[x_0, x_n]$.

Observación

Sea $S(x) = S_i(x)$ cuando $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, un spline cúbico. Entonces:

- Necesitamos determinar 4 coeficientes por cada subintervalo, es decir, tendremos $4n$ incógnitas.

Los splines

¿De cuántas condiciones disponemos?

- (1) $S(x_i) = S_i(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, y $S_{n-1}(x_n) = y_n$ ($n + 1$ condiciones).
- (2) $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n - 2$ ($n - 1$ condiciones).
- (3) $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n - 2$ ($n - 1$ condiciones).
- (4) $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n - 2$ ($n - 1$ condiciones).

Por lo tanto, disponemos de $4n - 2$ condiciones.

Necesitamos dos condiciones más...

A continuación, mostramos dos posibilidades:

- (5.1) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$, en cuyo caso construiremos el denominado spline natural (o de frontera libre).
- (5.2) $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$, en cuyo caso construiremos el denominado spline de frontera (o de frontera fija).

Los splines

Ejemplo 6

Calcula un spline cúbico natural que pase por los puntos $\{(2, 4), (6, 5), (7, 6)\}$.

Los splines

Ejemplo 6

Calcula un spline cúbico natural que pase por los puntos $\{(2, 4), (6, 5), (7, 6)\}$.

Llamaremos

$$S_0(x) = a_0 + a_1(x - 2) + a_2(x - 2)^2 + a_3(x - 2)^3,$$

$$S_1(x) = b_0 + b_1(x - 6) + b_2(x - 6)^2 + b_3(x - 6)^3.$$

(1) $S(x_i) = S_i(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, y $S_{n-1}(x_n) = y_n$ (tres condiciones).

$$S_0(2) = 4$$

$$a_0 = 4$$

$$S_1(6) = 5$$

$$b_0 = 5$$

\Rightarrow

$$S_1(7) = 6$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1$$

Los splines

(2) $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}), i = 0, 1, \dots, n - 2$ (una condición).

$$a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 5 \quad \Rightarrow 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 1.$$

(3) $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}), i = 0, 1, \dots, n - 2$ (una condición).

$$a_1 + 8a_2 + 48a_3 = b_1.$$

(4) $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}), i = 0, 1, \dots, n - 2$ (una condición).

$$2a_2 + 24a_3 = 2b_2.$$

(5.1) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (dos condiciones).

$$2a_2 = 0$$

$$2b_2 + 6b_3 = 0$$

Los splines

De las ocho incógnitas, ya conocemos $a_0 = 4$, $b_0 = 5$ y $a_2 = 0$. Nos queda:

$$\begin{array}{lcl} b_1 + b_2 + b_3 & = & 6 \\ 4a_1 + 64a_3 & = & 1 \\ a_1 + 48a_3 - b_1 & = & 0 \\ 24a_3 - 2b_2 & = & 0 \\ 2b_2 + 6b_3 & = & 0 \end{array} \left. \right\}$$

Y el sistema puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 64 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 48 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los splines

```
import numpy as np
from scipy.interpolate import CubicSpline

x = np.array([2,6,7])
y = np.array([4,5,6])

SP = CubicSpline(x, y, bc_type = 'natural')

#Coeficientes por columnas y en potencias decrecientes:
SP.c
Out[21]:
array([[ 1.87500000e-02, -7.50000000e-02],
       [-1.38777878e-17,  2.25000000e-01],
       [-5.00000000e-02,  8.50000000e-01],
       [ 4.00000000e+00,  5.00000000e+00]])
```

Los splines

Definición (útil)

Una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ es estrictamente diagonal dominante si el valor absoluto de cada elemento de la diagonal es superior a la suma de los valores absolutos del resto de los elementos de la fila, es decir,

$$|a_{ii}| < \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

Teorema

Toda matriz estrictamente diagonal dominante es regular.

En otras palabras...

Tiene inversa o tiene determinante no nulo o, en caso de ser la matriz de coeficientes de un sistema, dicho sistema es compatible determinado.

Los splines

Construcción de los splines

Se podría ver que es posible plantear (y resolver) el sistema de ecuaciones de manera general a partir de una matriz de coeficientes diagonal dominante y, por tanto, se obtienen soluciones únicas.

Interpolación de funciones

Julio Mulero



@juliomulero



julio.mulero

Departamento de Matemáticas
Universidad de Alicante

Carmen Gandía

Departamento de Matemáticas
Universidad de Alicante

