

Movimiento de Cargas en Campos Electromagnéticos

Alberto García García
(48718198-N)
agg180@alu.ua.es

Resumen—TODO

El código Python que implementa los modelos matemáticos así como las rutinas de visualización para la resolución de este ejercicio se adjunta con este informe y además puede ser consultado en el siguiente repositorio online ¹.

I. INTRODUCCIÓN

UNA partícula cargada en el seno de un campo electromagnético se ve sometida a una fuerza que provoca un movimiento de la misma. En esta primera práctica de la asignatura estudiaremos el movimiento de partículas cargadas en campos electromagnéticos generados por los siguientes instrumentos: el espectrómetro de masas, el selector de velocidad y por último el ciclotrón.

Para ello, analizaremos en primer lugar de forma teórica todos los instrumentos mencionados y obtendremos las ecuaciones del movimiento y los resultados del mismo de forma analítica. Posteriormente, resolveremos numéricamente las ecuaciones de movimiento utilizando algoritmos de simulación e integración numérica en Python. En cada caso, compararemos la solución obtenida de forma numérica con el resultado analítico y discutiremos los resultados.

El informe se organiza de la siguiente manera. En primer lugar, la Sección II presenta los cálculos y la simulación del movimiento de isótopos de hidrógeno en un espectrómetro de masas. Seguidamente, la Sección III describe el comportamiento de esos mismos iones en este caso en un selector de velocidades. A continuación, la Sección IV se dedica al estudio de la variación de la frecuencia de ciclotrón con la velocidad de la partícula (un electrón) a medida que esta se aproxima a cotas relativistas. La Sección V estudia la trayectoria de un protón al ser acelerado en un ciclotrón. Por último, la Sección VI presenta las conclusiones sobre este trabajo.

II. ESPECTRÓMETRO DE MASAS

En este primer apartado de la práctica estudiaremos el movimiento de una carga en un espectrómetro de masas. En dicho instrumento (ver Figura 1), iones procedentes de una fuente e inicialmente en reposo y los acelera mediante un campo eléctrico, una vez abandonan dicho campo eléctrico entran en una región en la que existe un campo magnético perpendicular a su velocidad que los desvía hasta que colisionan contra una superficie. Los iones seguirán trayectorias con radios de curvatura diferentes según su relación carga/masa y por ello tendrán puntos de incidencia distintos lo cual permite diferenciar unos de otros.

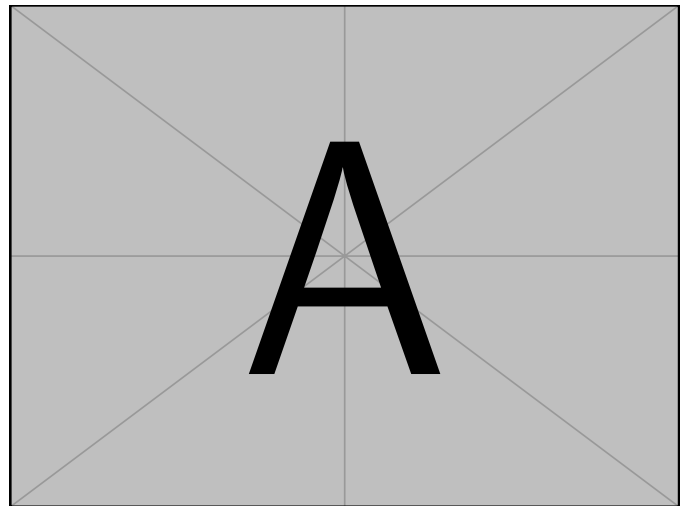


Figura 1: Representación esquemática del espectrómetro de masas con el campo eléctrico E , el campo magnético B , la distancia entre las placas LE y la distancia de simulación considerada LB . En rojo se muestra la trayectoria seguida por un ion cualquiera.

Para resolver este problema necesitamos encontrar por lo tanto la posición x a la que llegarán los tres iones propuestos. Para el cálculo tanto analítico como simulado emplearemos los siguientes datos de entrada:

- La carga $q = 1,6 \cdot 10^{-19} [C]$ y las masa $m_1 = 1,66 \cdot 10^{-27} [kg]$, $m_2 = 3,32 \cdot 10^{-27} [kg]$ y $m_3 = 4,98 \cdot 10^{-27} [kg]$ de los tres iones $^1H^+$, $^2H^+$ y $^3H^+$.
- La diferencia de potencial entre las placas $V = 15 [V]$.
- La distancia entre las placas $LE = 1 \cdot 10^{-3} [m]$.
- El campo magnético $B = 1 \cdot 10^{-2} [T]$.

¹<https://github.com/Blitzman/physics>

II-A. Cálculos Analíticos

En primer lugar, calcularemos el campo eléctrico E [$V \cdot m^{-1}$] entre las placas sabiendo que existe entre ellas una diferencia de potencial ΔV [V] y una separación de LE [m]

$$E = \frac{\Delta V}{LE} [V \cdot m^{-1}] , \quad (1)$$

conociendo el campo eléctrico podemos determinar la aceleración a [$m \cdot s^{-2}$] que sufren los iones debido a la fuerza eléctrica F_e [N] que se les aplica

$$F_e = ma \Rightarrow qE = ma \Rightarrow a = \frac{qE}{m} [m \cdot s^{-2}] . \quad (2)$$

Si queremos conocer la velocidad final v [$m \cdot s^{-1}$] con la que abandonan los iones el campo eléctrico basta con plantear las ecuaciones de movimiento para determinar en primer lugar el tiempo que tarda el ion en dicho tramo y posteriormente emplearlo para determinar la velocidad final teniendo en cuenta la aceleración uniforme a la que se somete el ion en la región

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow LE = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2LE}{a}} [s] , \quad (3)$$

$$v = v_0 + at \Rightarrow v = a \sqrt{\frac{2LE}{a}} \Rightarrow v = \sqrt{2aLE} [m \cdot s^{-1}] . \quad (4)$$

Una vez el ion abandona el campo eléctrico, se ve sometido a una aceleración causada por el campo magnético la cual hace que describa un movimiento circular cuyo radio podemos determinar

$$F_m = ma_c \Rightarrow qvB = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} [m] , \quad (5)$$

y por lo tanto, el tiempo que tardan los iones en recorrer el semicírculo es

$$t = \frac{v}{a} + \pi \frac{r}{v} = \frac{v}{qB} + \pi \frac{r}{v} [s] . \quad (6)$$

II-A1. Ión $^1H^+$: El primer ión tiene una carga $q_1 = 1,6 \cdot 10^{-19}$ y una masa $m_1 = 1 \cdot 10^{-3}/6,022 \cdot 10^{23} = 1,66 \cdot 10^{-27}$ [kg]. El campo eléctrico es fijo y común para todos los iones $E = \Delta V/LE = 15/10 \cdot 10^{-2} = 1,5 \cdot 10^2$ [$V \cdot m^{-1}$].

La aceleración de este ión es

$$a_1 = \frac{q_1 E}{m_1} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,5 \cdot 10^2}{1,66 \cdot 10^{-27}} = 1,44 \cdot 10^{10} [m \cdot s^{-2}] , \quad (7)$$

y por lo tanto la velocidad al salir de la región de campo eléctrico será

$$v_1 = \sqrt{2a_1 LE} = \sqrt{2 \cdot 1,44 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-1}} = 5,37 \cdot 10^4 [m \cdot s^{-1}] . \quad (8)$$

Conociendo la velocidad podemos calcular tanto el radio de la curva que describirá en el seno de la región de campo magnético así como el tiempo que tardará en describir el semicírculo

$$r_1 = \frac{m_1 v_1}{q_1 B} = \frac{1,66 \cdot 10^{-27} \cdot 5,37 \cdot 10^4}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 5,57 \cdot 10^{-2} [m] . \quad (9)$$

$$t_1 = \frac{v_1}{a_1} + \pi \frac{r_1}{v_1} = \frac{5,37 \cdot 10^4}{1,44 \cdot 10^{10}} + \pi \frac{5,57 \cdot 10^{-2}}{5,37 \cdot 10^4} = 6,99 \cdot 10^{-6} [s] . \quad (10)$$

La posición en el eje x en la que se producirá el impacto es simplemente el diámetro de la trayectoria circular $x_1 = 2 \cdot 5,57 \cdot 10^{-2} = 1,11 \cdot 10^{-1} [m]$.

II-A2. Ión $^2H^+$: El segundo ión tiene una carga $q_2 = 1,6 \cdot 10^{-19}$ y una masa $m_2 = 2 \cdot 10^{-3}/6,022 \cdot 10^{23} = 3,32 \cdot 10^{-27}$ [kg]. La aceleración de este ión es

$$a_2 = \frac{qE}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,5 \cdot 10^2}{3,32 \cdot 10^{-27}} = 7,23 \cdot 10^9 [m \cdot s^{-2}] , \quad (11)$$

y por lo tanto la velocidad al salir de la región de campo eléctrico será

$$v_2 = \sqrt{2a_2 LE} = \sqrt{2 \cdot 7,23 \cdot 10^9 \cdot 10^{-1}} = 3,80 \cdot 10^4 [m \cdot s^{-1}] . \quad (12)$$

Conociendo la velocidad podemos calcular tanto el radio de la curva que describirá en el seno de la región de campo magnético así como el tiempo que tardará en describir el semicírculo

$$r_2 = \frac{mv}{qB} = \frac{3,32 \cdot 10^{-27} \cdot 3,80 \cdot 10^4}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 7,90 \cdot 10^{-2} [m] . \quad (13)$$

$$t_2 = \frac{v}{a} + \pi \frac{r}{v} = \frac{3,80 \cdot 10^4}{7,23 \cdot 10^9} + \pi \frac{7,90 \cdot 10^{-2}}{3,80 \cdot 10^4} = 1,18 \cdot 10^{-5} [s] . \quad (14)$$

La posición en el eje x en la que se producirá el impacto es simplemente el diámetro de la trayectoria circular $x_2 = 2 \cdot 7,90 \cdot 10^{-2} = 1,58 \cdot 10^{-1} [m]$.

II-A3. Ión $^3H^+$: El tercer ión tiene una carga $q_3 = 1,6 \cdot 10^{-19}$ y una masa $m_3 = 3 \cdot 10^{-3}/6,022 \cdot 10^{23} = 4,98 \cdot 10^{-27}$ [kg]. La aceleración de este ión es

$$a_3 = \frac{qE}{m} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,5 \cdot 10^2}{4,98 \cdot 10^{-27}} = 4,81 \cdot 10^9 [m \cdot s^{-2}] , \quad (15)$$

y por lo tanto la velocidad al salir de la región de campo eléctrico será

$$v_3 = \sqrt{2a_3 LE} = \sqrt{2 \cdot 4,81 \cdot 10^9 \cdot 10^{-1}} = 3,10 \cdot 10^4 [m \cdot s^{-1}] . \quad (16)$$

Conociendo la velocidad podemos calcular tanto el radio de la curva que describirá en el seno de la región de campo magnético así como el tiempo que tardará en describir el semicírculo

$$r_3 = \frac{mv}{qB} = \frac{4,98 \cdot 10^{-27} \cdot 3,10 \cdot 10^4}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 9,64 \cdot 10^{-2} [m] . \quad (17)$$

$$t_3 = \frac{v}{a} + \pi \frac{r}{v} = \frac{3,10 \cdot 10^4}{4,81 \cdot 10^9} + \pi \frac{9,64 \cdot 10^{-2}}{3,10 \cdot 10^4} = 1,62 \cdot 10^{-5} [s]. \quad (18)$$

La posición en el eje x_3 en la que se producirá el impacto es simplemente el diámetro de la trayectoria circular $x_3 = 2 \cdot 9,64 \cdot 10^{-2} = 1,93 \cdot 10^{-2} [m]$.

II-B. Simulación

Los valores arrojados por la simulación (ejecutada con los parámetros antes mencionados y mostrados en el Código 1) son $x_1^s = 1,11 \cdot 10^{-1} [m]$, $x_2^s = 1,58 \cdot 10^{-1} [m]$, $x_3^s = 1,93 \cdot 10^{-1} [m]$ tal y como se puede observar en la Figura 2. Así pues, la simulación confirma nuestra solución analítica y viceversa puesto que los valores obtenidos en el cálculo de la sección anterior son también $x_1 = 1,11 \cdot 10^{-1} [m]$, $x_2 = 1,58 \cdot 10^{-1} [m]$, $x_3 = 1,93 \cdot 10^{-1} [m]$.

```
m=1.0e-3 / 6.022e23 #masa de la primer ion
q=1.6e-19 #carga del primer ion
m2=2.0e-3 / 6.022e23 #masa del segundo ion
q2=1.6e-19 #carga del segundo ion
m3=3.0e-3 / 6.022e23 #masa del tercer ion
q3=1.6e-19 #carga del tercer ion
Bf=1.0e-2 #Campo magnético usado
LE=10.0e-2 #Distancia entre las placas
dV=15.0 #Diferencia de potencial
LB=0.25 #Distancia horizontal considerada
tf=18e-6 # tiempo de simulación considerado
```

Código 1: Datos de simulación.

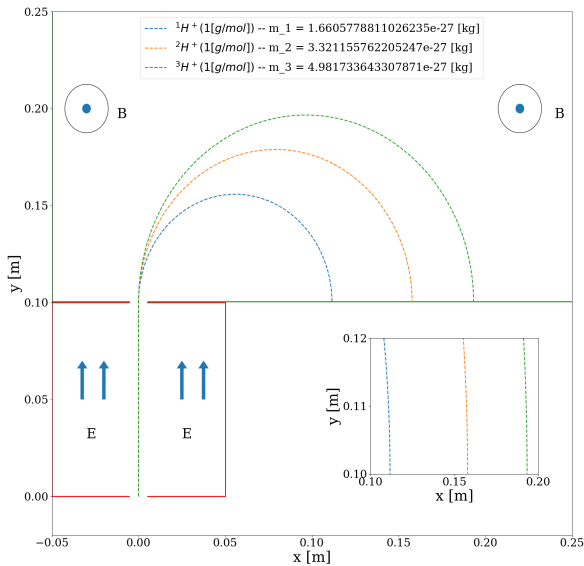


Figura 2: Gráfica de simulación de espectrómetro de masa para los iones de hidrógeno $^1H^+$, $^2H^+$ y $^3H^+$. El detalle muestra los puntos de impacto $x_1^s = 1,11 \cdot 10^{-1} [m]$, $x_2^s = 1,58 \cdot 10^{-1} [m]$, $x_3^s = 1,93 \cdot 10^{-1} [m]$.

III. SELECTOR DE VELOCIDADES

En el segundo apartado de la práctica estudiaremos el movimiento de uno de los iones ya mencionados en la sección anterior pero esta vez en el seno de otro instrumento: el selector de velocidades. En este caso, los iones procedentes de una fuente entran con una velocidad inicial al selector, dentro del cual existe tanto un campo eléctrico (perpendicular a la dirección de entrada) y un campo magnético (perpendicular tanto al campo eléctrico como a la dirección de entrada). Según el valor de los campos y la energía cinética del ion, la partícula en el interior se desviará en mayor o menor medida o bien no se desviará y realizará un movimiento rectilíneo consiguiendo salir del selector por una pequeña apertura en el extremo opuesto. De esta forma, eligiendo los valores adecuados para los campos se puede seleccionar aquellas partículas con una velocidad determinada. La Figura 3 muestra un esquema de dicho instrumento.

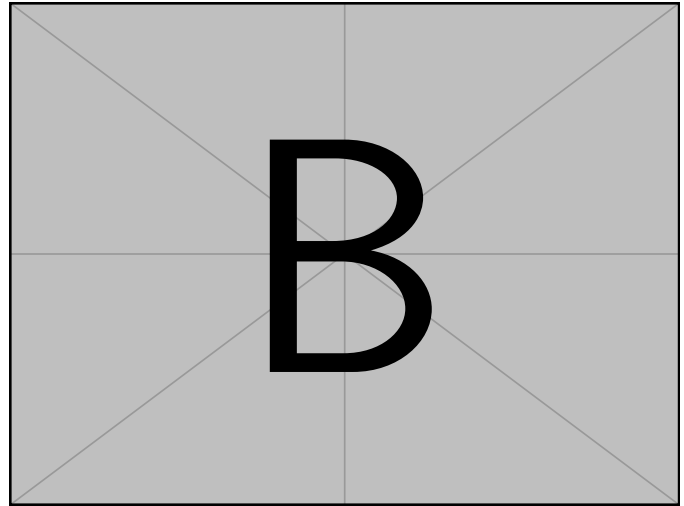


Figura 3: Representación esquemática del selector de velocidades de longitud L con un campo eléctrico E y magnético B y una separación entre placas $2H$.

Para resolver este problema fijaremos un campo eléctrico y variaremos el campo magnético hasta conseguir de forma experimental que la partícula salga por la rendija. Para que esto ocurra, la fuerza magnética debe compensar la fuerza eléctrica hasta cierto punto para que la partícula no sufra una desviación que le impida salir por la rendija. Para el cálculo tanto analítico como simulado emplearemos los siguientes datos de entrada:

- La carga de uno de los iones anteriores $q = 1,6 \cdot 10^{-19} [C]$ y su masa $m_1 = 1,66 \cdot 10^{-27} [kg]$ para $^1H^+$.
- La energía cinética del ion al entrar en el selector $E_c = 30[eV]$.
- La diferencia de potencial entre las placas $V = 25 [V]$.
- La distancia entre las placas horizontales $2H = 4 \cdot 10^{-1} [m]$.
- La longitud del selector $L = 2 [m]$.
- La apertura final del detector $2dy$ siendo $dy = 5 \cdot 10^{-2}H [m]$.

III-A. Cálculos Analíticos

Dado que la fuerza total que actúa sobre la partícula viene dada por la fuerza de Lorentz

$$F = q(E + v \times B) [N], \quad (19)$$

para conseguir que la partícula siga una trayectoria rectilínea y por lo tanto sea capaz de alcanzar la rendija es necesario que la fuerza ejercida por el campo eléctrico sea compensada por la fuerza realizada por el campo eléctrico

$$F_e = F_m \Rightarrow qE = qvB, \quad (20)$$

de lo cual deducimos que la velocidad del ión que será seleccionado (capaz de alcanzar la rendija sin desviarse significativamente) será

$$v = \frac{E}{B} [m \cdot s]. \quad (21)$$

Así pues, ajustando los valores de ambos campos podemos hacer que únicamente las partículas con una determinada velocidad de entrada v sigan una trayectoria rectilínea. Aquellas con una velocidad menor se verán más influenciadas por la fuerza eléctrica y por lo tanto se desviarán hacia arriba mientras que aquellas con una velocidad mayor sufrirán una fuerza magnética más intensa y se desviarán hacia abajo. Si esta desviación es demasiado pronunciada, no conseguirán alcanzar la rendija.

Para el caso que nos ocupa, el ión $^1H^+$, sabemos que su masa es de $m = 1,66 \cdot 10^{-27} [kg]$ y su carga es $q = 1,6 \cdot 10^{-19} [C]$. La energía cinética de dicha partícula la hemos fijado en $30 [eV]$ ($30 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} [J]$) por lo que a partir de la misma podemos obtener su velocidad

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 7,6 \cdot 10^4 [m \cdot s^{-1}]. \quad (22)$$

Dado que hemos fijado una diferencia de potencial de $V = 25 [V]$ y una distancia entre las placas horizontales de $2H = 4 \cdot 10^{-1} [m]$, podemos calcular el campo eléctrico E como

$$V = Ed \Rightarrow E = \frac{V}{2H} = \frac{25}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-1}} = 6,25 [V \cdot m^{-1}]. \quad (23)$$

Por lo tanto, el campo magnético que necesitaremos para compensar la fuerza eléctrica con el objetivo de seleccionar la velocidad v dada es

$$v = \frac{E}{B} \Rightarrow B = \frac{E}{v} = \frac{6,25}{7,6 \cdot 10^4} = 8,21 \cdot 10^{-4} [T]. \quad (24)$$

III-B. Simulación

Durante la simulación, hemos variado el campo magnético sin conocer el valor analítico hasta conseguir que el ión atravesase la rendija utilizando los valores de energía cinética y de campo eléctrico (diferencia de potencial y distancia entre las placas) seleccionados anteriormente (ver Código 2). Finalmente, llegamos a la conclusión de que el valor analítico $B = 8,21 \cdot 10^{-4} [T]$ permite al ión alcanzar la rendija sin desviarse tal y como se muestra en la Figura 4.

```
# Datos de entrada
# El programa calcula la trayectoria en un
# selector de velocidad de un ion con una
# dada velocidad, y la del mismo ion pero
# con una velocidad 10 % mayor y 10% menor

# Masa del ion
m=1.0e-3 / 6.022e23
#Carga del ion
q=1.6e-19
# 2*H es la distancia entre las placas horizontales
H=0.2
# Diferencia de potencial entre ambas placas
dV=25
E=dV/2./H # Campo eléctrico uniforme
# Campo magnético
B=8.21e-4
# Distancia horizontal del selector
L=2.0
# Energía cinética del ion que entra
Ec=30*1.6e-19
#Velocidad del ion que entra al selector
vx0=np.sqrt(2*Ec/m)
# 2*dy es el tamaño de la apertura
dy=0.05 * H

#tiempo final de simulacion
tf=10.0
```

Código 2: Datos de simulación de selector de velocidad.

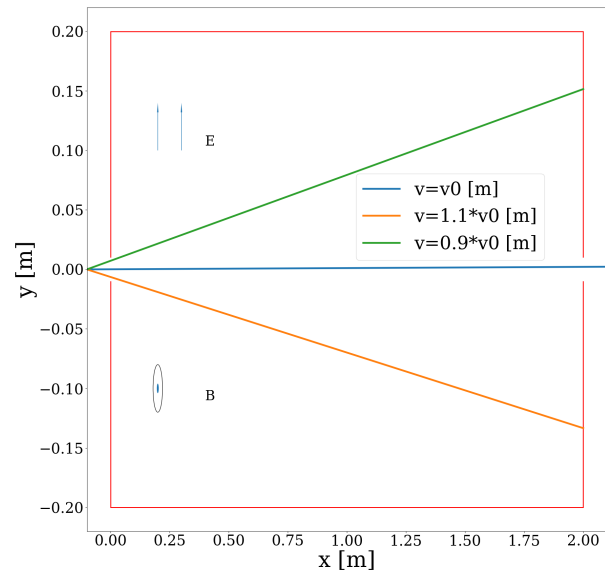


Figura 4: Gráfica de simulación de selector de velocidad con $v_0 = 7,6 \cdot 10^4 [m \cdot s^{-1}]$, $E = 6,25 [V \cdot m^{-1}]$ y $B = 8,21 \cdot 10^{-4} [T]$ tal y como calculamos de forma analítica. Como podemos observar, el ión es capaz de alcanzar la rendija. La simulación también muestra el resultado de utilizar un 90 % de la velocidad inicial (el campo eléctrico desvía el ión hacia arriba) y utilizar un 110 % de la misma (el campo magnético desvía el ión hacia abajo).

IV. FRECUENCIA DE CICLOTRÓN RELATIVISTA

En este apartado se pide estudiar el movimiento de partículas relativistas en campos magnéticos, es decir, teniendo en cuenta el efecto que tiene la teoría de la relatividad especial sobre el movimiento. En definitiva, deberemos comprobar cómo varía la frecuencia del movimiento circular de una partícula que se mueve en un campo magnético homogéneo en función de su velocidad cuando se aproxima a la velocidad de la luz $c \simeq 3 \cdot 10^8 [m \cdot s^{-1}]$.

Para resolver este problema elegiremos una partícula, en nuestro caso el protón, y escogeremos para la misma una serie de valores para la velocidad (entre $1 \cdot 10^2 [m \cdot s^{-1}]$ y $1 \cdot 10^8 [m \cdot s^{-1}]$) así como el campo magnético fijo. De esta forma, los datos de entrada serán los siguientes:

- Masa $m = 1,673 \cdot 10^{-27} [kg]$ y carga $q = 1,602 \cdot 10^{-19} [C]$ de la partícula (protón).
- Velocidades de la partícula $1 \cdot 10^2 [m \cdot s^{-1}]$, $0,2 \cdot 10^8 [m \cdot s^{-1}]$, $0,6 \cdot 10^8 [m \cdot s^{-1}]$, $0,8 \cdot 10^8 [m \cdot s^{-1}]$ y $1 \cdot 10^8 [m \cdot s^{-1}]$.
- Campo magnético $B = 1 [T]$.

IV-A. Cálculos Analíticos

En primer lugar, trataremos de obtener el radio de la curva que describe el protón en el seno de un campo magnético (por ejemplo, dentro del selector de velocidades o en las Ds de un ciclotrón tal y como veremos en la siguiente sección). Dicho campo magnético provoca la aparición de una fuerza magnética sobre la partícula ya que esta se desplaza con velocidad perpendicular al mismo. Esta fuerza hace que describa un movimiento circular cuyo radio podemos determinar como en el caso del espectrómetro de masas para velocidades no relativistas

$$F_m = ma_c \Rightarrow qvB = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} [m]. \quad (25)$$

Para el caso de velocidades relativistas, la fórmula es idéntica pero reemplazando la masa invariante m por la masa relativista $m\gamma$ siendo la constante

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})}}, \quad (26)$$

por lo tanto el radio de curvatura en el caso relativista es

$$r_\gamma = \frac{m\gamma v}{qB} = \frac{mv}{qB \sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})}} [m]. \quad (27)$$

El período se puede calcular para el caso no relativista como

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi mv}{qBv} = \frac{2\pi m}{qB} [s]. \quad (28)$$

Como podemos comprobar, no depende de la velocidad. El análogo relativista sí que depende de la misma puesto que la masa lo hace

$$T_\gamma = \frac{2\pi m\gamma}{qB} = \frac{2\pi m}{qB \sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})}} [s]. \quad (29)$$

La frecuencia en ambos casos es la inversa del período

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m} [Hz]. \quad (30)$$

$$f_\gamma = \frac{1}{T_\gamma} = \frac{qB \sqrt{(1 - \frac{v^2}{c^2})}}{2\pi m} [Hz]. \quad (31)$$

IV-A1. $v_1 = 1,0 \cdot 10^2 [m \cdot s^{-1}]$: Para la primera velocidad seleccionada estamos ante un caso no relativista. Dada la escasa velocidad, la constante γ se aproxima a 1,00 por lo que la masa relativista es prácticamente igual a la masa invariante

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{v_1^2}{c^2})}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{(1,0 \cdot 10^2)^2}{(3 \cdot 10^8)^2})}} \simeq 1,000 \quad (32)$$

Su radio de curvatura es por lo tanto

$$r_1 = \frac{mv_1}{qB} = \frac{1,673 \cdot 10^{-27} \cdot 1,000 \cdot 10^2}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 1,000} = 1,044 \cdot 10^{-6} [m]. \quad (33)$$

Su período es

$$T_1 = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi \cdot 1,673 \cdot 10^{-27}}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 1,000} = 6,562 \cdot 10^{-8} [s], \quad (34)$$

y por lo tanto la frecuencia es

$$f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{6,562 \cdot 10^{-8}} = 1,524 \cdot 10^7 [Hz]. \quad (35)$$

IV-A2. $v_2 = 0,2 \cdot 10^8 [m \cdot s^{-1}]$: Para la segunda velocidad seleccionada nos encontramos ante un caso relativista. La velocidad cercana a la velocidad de la luz hace que la constante γ sea superior a 1,00 por lo que la masa relativista es mayor que la masa invariante

$$\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{v_2^2}{c^2})}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{(0,2 \cdot 10^8)^2}{(3 \cdot 10^8)^2})}} \simeq 1,002 \quad (36)$$

Su radio de curvatura es por lo tanto

$$r_2 = \frac{m\gamma_2 v_2}{qB} = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 1,002 \cdot 0,200 \cdot 10^8}{1,603 \cdot 10^{-19} \cdot 1,000} = 2,093 \cdot 10^{-1} [m]. \quad (37)$$

Su período es

$$T_2 = \frac{2\pi m\gamma_2}{qB} = \frac{2\pi \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 1,002}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,000} = 6,575 \cdot 10^{-8} [s], \quad (38)$$

y por lo tanto la frecuencia es

$$f_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{6,575 \cdot 10^{-8}} = 1,521 \cdot 10^7 [Hz]. \quad (39)$$

IV-A3. $v_3 = 0,6 \cdot 10^8 [m \cdot s^{-1}]$: Para la tercera velocidad, la constante γ es todavía mayor

$$\gamma_3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_3^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,600 \cdot 10^8)^2}{(3,000 \cdot 10^8)^2}}} \simeq 1,020 \quad (40)$$

Su radio de curvatura es por lo tanto

$$r_3 = \frac{m\gamma_3 v_3}{qB} = \frac{1,673 \cdot 10^{-27} \cdot 1,020 \cdot 0,600 \cdot 10^8}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 1,000} = \quad (41)$$

$$= 6,391 \cdot 10^{-1} [m] . \quad (42)$$

Su período es

$$T_3 = \frac{2\pi m\gamma_3}{qB} = \frac{2\pi \cdot 1,673 \cdot 10^{-27} \cdot 1,020}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 1,000} = 6,693 \cdot 10^{-8} [s] , \quad (43)$$

y por lo tanto la frecuencia es

$$f_3 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{6,693 \cdot 10^{-8}} = 1,494 \cdot 10^7 [Hz] . \quad (44)$$

IV-A4. $v_4 = 0,8 \cdot 10^8 [m \cdot s^{-1}]$: En el caso de la cuarta velocidad, γ continúa creciendo

$$\gamma_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_4^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,8 \cdot 10^8)^2}{(3 \cdot 10^8)^2}}} \simeq 1,037 \quad (45)$$

Su radio de curvatura es por lo tanto

$$r_4 = \frac{m\gamma_4 v_4}{qB} = \frac{1,673 \cdot 10^{-27} \cdot 1,037 \cdot 0,800 \cdot 10^8}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 1,000} = \quad (46)$$

$$= 8,664 \cdot 10^{-1} [m] . \quad (47)$$

Su período es

$$T_4 = \frac{2\pi m\gamma_4}{qB} = \frac{2\pi \cdot 1,673 \cdot 10^{-27} \cdot 1,037}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 1,000} = 6,804 \cdot 10^{-8} [s] , \quad (48)$$

y por lo tanto la frecuencia es

$$f_4 = \frac{1}{T_4} = \frac{1}{6,804 \cdot 10^{-8}} = 1,470 \cdot 10^7 [Hz] . \quad (49)$$

IV-A5. $v_5 = 1,0 \cdot 10^8 [m \cdot s^{-1}]$: La quinta velocidad posee la constante γ más elevada

$$\gamma_5 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_5^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(1,0 \cdot 10^8)^2}{(3 \cdot 10^8)^2}}} \simeq 1,061 \quad (50)$$

Su radio de curvatura es por lo tanto

$$r_5 = \frac{m\gamma_5 v_5}{qB} = \frac{1,673 \cdot 10^{-27} \cdot 1,061 \cdot 1,000 \cdot 10^8}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 1,000} = \quad (51)$$

$$= 1,108 [m] . \quad (52)$$

Su período es

$$T_5 = \frac{2\pi m\gamma_5}{qB} = \frac{2\pi \cdot 1,673 \cdot 10^{-27} \cdot 1,061}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 1,000} = 6,962 \cdot 10^{-8} [s] , \quad (53)$$

y por lo tanto la frecuencia es

$$f_5 = \frac{1}{T_5} = \frac{1}{6,962 \cdot 10^{-8}} = 1,436 \cdot 10^7 [Hz] . \quad (54)$$

IV-B. Simulación

La simulación del movimiento del protón con velocidad no relativista y velocidades relativista se muestra en las Figuras 5, 6, 7, 8, 9 respectivamente para las velocidades $1 \cdot 10^2 [m \cdot s^{-1}]$, $0,2 \cdot 10^8 [m \cdot s^{-1}]$, $0,6 \cdot 10^8 [m \cdot s^{-1}]$, $0,8 \cdot 10^8 [m \cdot s^{-1}]$ y $1 \cdot 10^8 [m \cdot s^{-1}]$. El código proporcionado ha sido modificado para encontrar los dos mínimos más próximos en la simulación y calcular el período dados los instantes temporales de dichos valores. En todas las figuras antes mencionadas se muestra el período estimado T^s así como la línea que une los dos instantes temporales utilizados para su cálculo. El Código 3 muestra los datos empleados en el programa de simulación.

```
m=1.673e-27 # masa del ion
q=1.602e-19 # Carga del ion
B=1.0 # Campo magnético
#Ecr=(np.random.rand())*40+10
#Ec=round(Ecr,2)
vx0=1.0e2 # velocidad del ion
tf=12e-8 # tiempo de simulacion
```

Código 3: Datos de simulación para estudio de frecuencias a velocidades relativistas. El valor $vx0$ cambiará según la velocidad a estudiar.

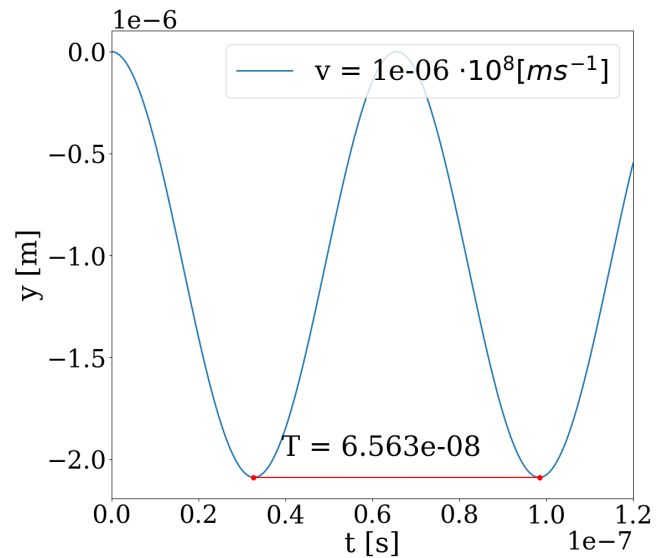


Figura 5: Variación de la coordenada del protón para velocidad no relativista $v = 1 \cdot 10^2 [m \cdot s^{-1}]$.

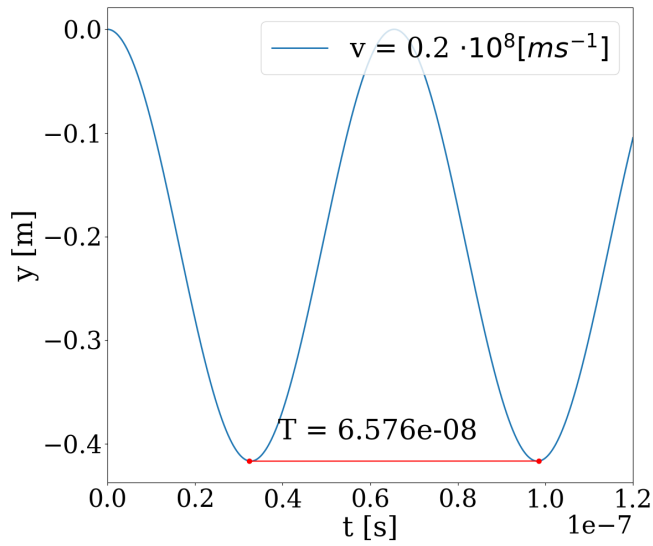


Figura 6: Variación de la coordenada del protón para velocidad relativista $v = 0,2 \cdot 10^8 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-1}]$.

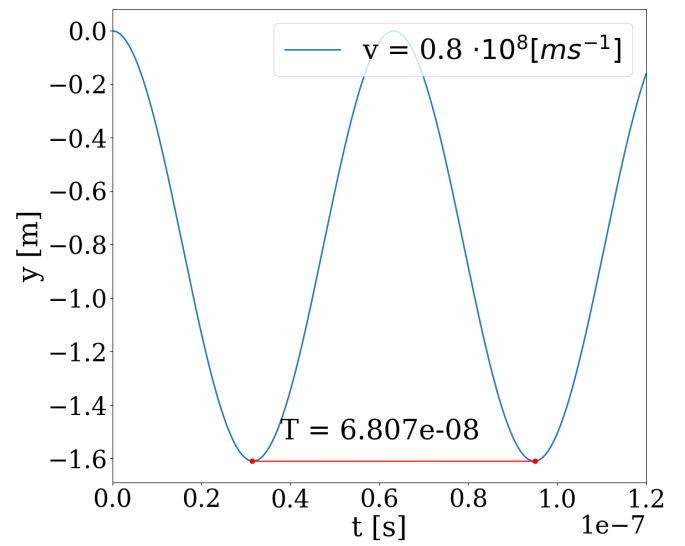


Figura 8: Variación de la coordenada del protón para velocidad relativista $v = 0,8 \cdot 10^8 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-1}]$.

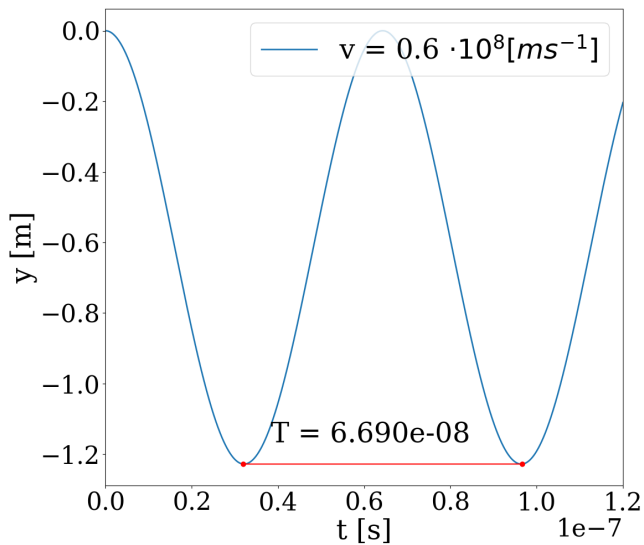


Figura 7: Variación de la coordenada del protón para velocidad relativista $v = 0,6 \cdot 10^8 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-1}]$.

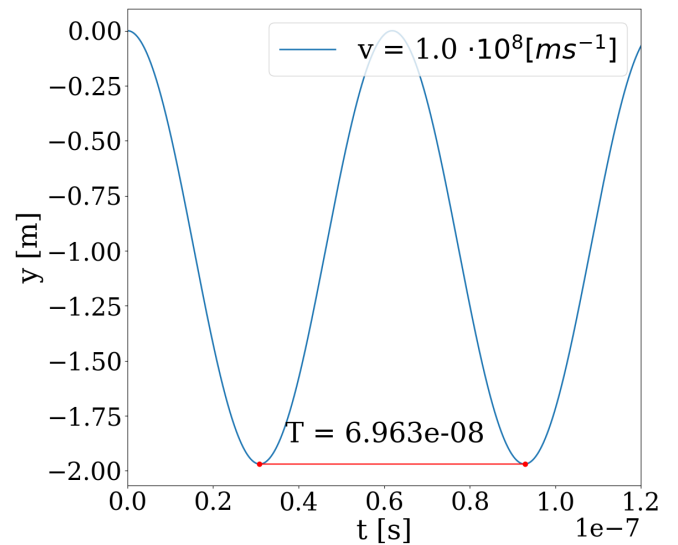


Figura 9: Variación de la coordenada del protón para velocidad relativista $v = 1,0 \cdot 10^8 \text{ [m} \cdot \text{s}^{-1}]$.

Como podemos comprobar, los valores simulados para el período $T_1^s = 6,563 \cdot 10^{-8} [s]$, $T_2^s = 6,576 \cdot 10^{-8} [s]$, $T_3^s = 6,690 \cdot 10^{-8} [s]$, $T_4^s = 6,807 \cdot 10^{-8} [s]$ y $T_5^s = 6,963 \cdot 10^{-8} [s]$ son prácticamente similares a los obtenidos de forma teórica. La Figura 10 muestra la comparativa de la variación de la frecuencia dependiendo de la velocidad para todos los casos anteriormente analizados tanto de forma teórica como de manera simulada.

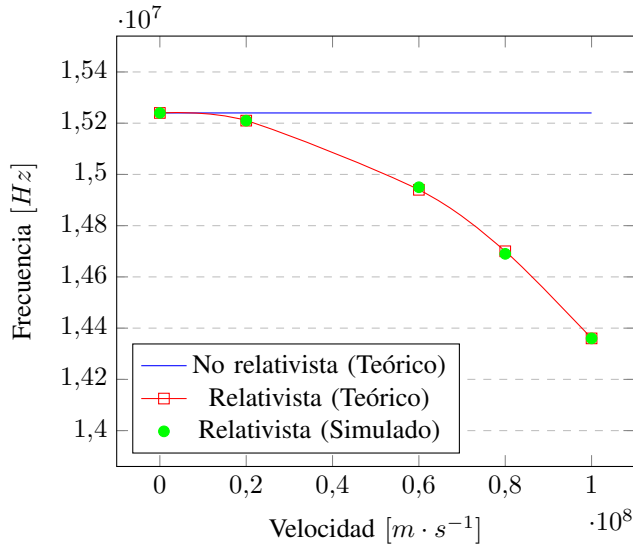


Figura 10: Variación de la frecuencia de ciclotrón $f [Hz]$ en función de la velocidad $v [m \cdot s^{-1}]$ del protón según los valores teóricos y simulados estudiados tanto para el caso relativista como para el no relativista.

V. CICLOTRÓN

En esta sección de la práctica trataremos el movimiento de protones en un ciclotrón (ver Figura 11), un instrumento en el que una partícula cargada es acelerada inicialmente desde el reposo mediante la acción de un campo eléctrico existente en la región de separación entre los dos semicírculos denominados Ds del ciclotrón. En los semicírculos existe un campo magnético que les produce un movimiento circular cuyo radio depende de la velocidad con la que provengan de la región del campo eléctrico que los ha acelerado. Ese movimiento circular les hace volver a la región del campo eléctrico que varía de manera periódica para acelerar los protones hacia la D opuesta. Con el tiempo y tras varios pasos por la región del campo eléctrico y por las D las partículas son capaces de ganar grandes cantidades de energía y alcanzar velocidades tremendamente elevadas.

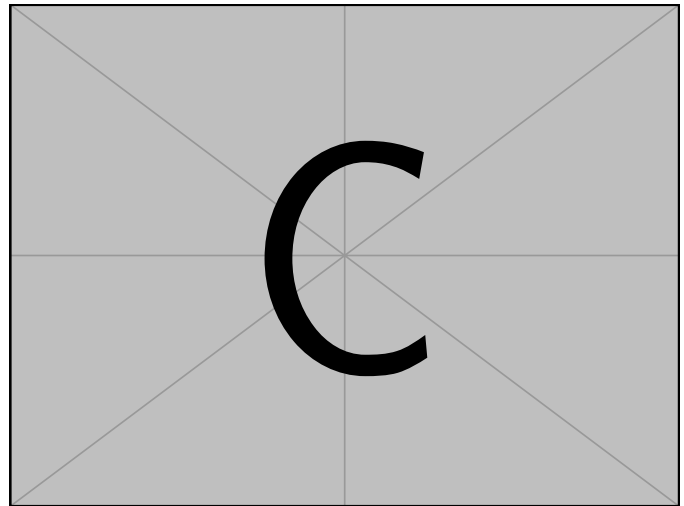


Figura 11: Representación esquemática del ciclotrón con un campo magnético B , radio R y distancia d .

Para resolver este problema fijaremos tanto un campo eléctrico E entre las Ds del ciclotrón, así como un campo magnético B en las mismas. Definiremos también la distancia entre las Ds y su radio. Calcularemos el período del movimiento circular, así como el tiempo que tarda la partícula en atravesar la región de campo eléctrico y la energía que ganará cada vez que pase entre las Ds . Para el cálculo tanto analítico como simulado utilizaremos los siguientes datos de entrada:

- Masa $m = 1,67 \cdot 10^{-27} [kg]$ y carga $q = 1,60 \cdot 10^{-19} [C]$ del protón.
- Campo magnético $B = 1 \cdot 10^{-1} [T]$ en las Ds .
- Diferencia de potencial $V = 5 \cdot 10^3 [V]$ entre las Ds .
- Distancia entre las Ds $d = 2 \cdot 10^{-2} [m]$.
- Radio de las Ds $r = 2,5 \cdot 10^{-1} [m]$.

V-A. Cálculos Analíticos

Para poder obtener el período del movimiento circular no relativista que ocurre en las Ds del ciclotrón deberemos en primer lugar calcular el radio de curvatura de la trayectoria descrita. Para ello sabemos que es la fuerza magnética la que provoca la aceleración que induce el movimiento circular en la partícula, por lo tanto

$$F_m = ma_c \Rightarrow qvB = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} [m], \quad (55)$$

así que podemos utilizar esta expresión para determinar el período (el cual no depende de la velocidad)

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi mv}{qBv} = \frac{2\pi m}{qB} [s]. \quad (56)$$

El tiempo que tarda un protón en reposo en atravesar la zona de las Ds podemos obtenerlo teniendo en cuenta que únicamente la fuerza eléctrica provoca una aceleración sobre el mismo

$$F_e = ma \Rightarrow qE = ma \Rightarrow a = \frac{qE}{m} [m \cdot s^{-2}], \quad (57)$$

teniendo en cuenta que $V = Ed$

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{qV}{md} [m \cdot s^{-2}]. \quad (58)$$

La fuerza eléctrica provoca un movimiento uniformemente acelerado (teniendo en cuenta que el protón en reposo se encuentra equidistante a ambas Ds, la distancia que tendrá que recorrer será $0,5d$)

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow \frac{d}{2} = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{md^2}{qV}} [s]. \quad (59)$$

Esta aceleración provocada en el ión al atravesar el campo eléctrico incrementa su energía cinética en una cantidad igual al producto de su carga por la diferencia de potencial entre las Ds del ciclotrón

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = qV [J]. \quad (60)$$

Para el caso que nos ocupa, un protón tendrá el siguiente período de movimiento circular no relativista

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi 1,67 \cdot 10^{-27}}{1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 2,00 \cdot 10^{-1}} = 6,56 \cdot 10^{-7} [s]. \quad (61)$$

El tiempo que tarda un protón en reposo en atravesar la zona entre las dos Ds es de

$$t = \sqrt{\frac{md^2}{qV}} = \sqrt{\frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot (1,00 \cdot 10^{-2})^2}{1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^3}} = 2,89 \cdot 10^{-8} [s]. \quad (62)$$

Cada vez que pasa entre las Ds, el protón gana energía cinética dada la aceleración uniforme sufrida

$$\Delta E_c = qV = 1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^3 = 8 \cdot 10^{-16} [J], \quad (63)$$

al partir del reposo únicamente recorre la mitad de la distancia por lo que gana la mitad de la energía $\Delta_0 E_c = 0,5 \Delta E_c = 4 \cdot 10^{-16} [J]$.

V-B. Simulación

En primer lugar, simularemos las condiciones anteriores (ver Código 4) para la aceleración de un protón en reposo. La Figura 12 muestra el resultado de esta simulación (tanto la trayectoria seguida por el protón como la evolución de la energía cinética del mismo).

```
m=1.67e-27 # masa del ion
q=1.60e-19 # carga del ion
Bf=1e-1 # Campo magnético existente en las Ds
dV=5e3 # Diferencia de potencial entre las Ds
dE=2e-2 # Separación entre las Ds
Ef=dV/dE # Campo eléctrico entre las Ds
omega=qm*Bf # frecuencia angular del voltaje
Rc=2.5e-1 # Radio de las Ds del ciclotron
tf=49e-7 # tiempo final de simulación
```

Código 4: Datos para simulación de ciclotrón.

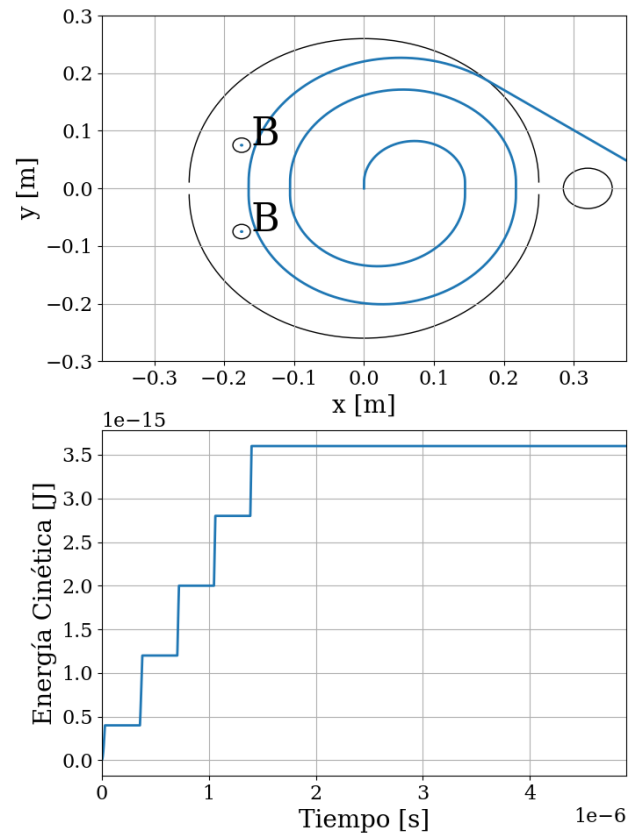


Figura 12: Resultado de la simulación del protón en el ciclotrón mostrando su trayectoria hasta escapar del ciclotrón (arriba) y la evolución de la energía cinética (abajo).

Como podemos comprobar, el protón atraviesa la región entre las Ds en un total de cuatro ocasiones además de la mitad del recorrido que realiza desde el reposo. De acuerdo a nuestro análisis teórico, la energía cinética alcanzada por el protón debería de ser de $4\Delta E_c + \Delta_0 E_c = 4 \cdot 8 \cdot 10^{-16} + 4 \cdot 10^{-16} = 3,6 \cdot 10^{-15} [J]$. Este cálculo analítico coincide con el resultado simulado mostrado en la Figura 12.

A continuación comprobaremos el efecto de la distancia de separación entre las Ds en el protón y su evolución. De forma analítica demostramos que esta distancia afecta al tiempo que tarda el protón en atravesar la región de separación pero que no tiene ningún efecto sobre el período del movimiento circular ni sobre la energía cinética ganada al atravesar la región antes mencionada. Las Figuras 13 y 14 muestran el resultado de la simulación cuando incrementamos la distancia de separación de $2 \cdot 10^{-2} [m]$ a $4 \cdot 10^{-2} [m]$ y $8 \cdot 10^{-2} [m]$ respectivamente.

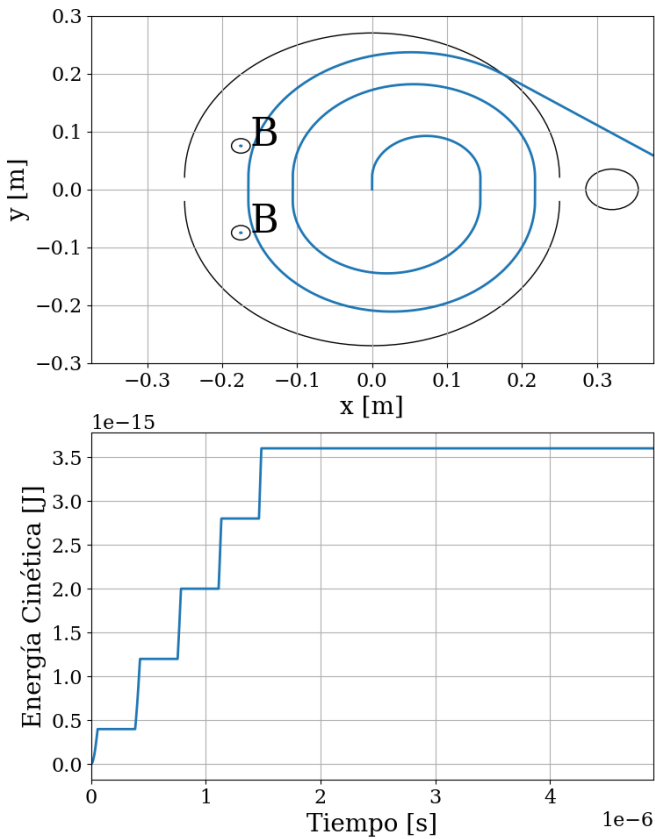


Figura 13: Resultado de la simulación del protón en el ciclotrón mostrando su trayectoria hasta escapar del ciclotrón (arriba) y la evolución de la energía cinética (abajo). En este caso, la distancia de separación entre las Ds ha sido aumentada de de $2 \cdot 10^{-2} [m]$ a $4 \cdot 10^{-2} [m]$.

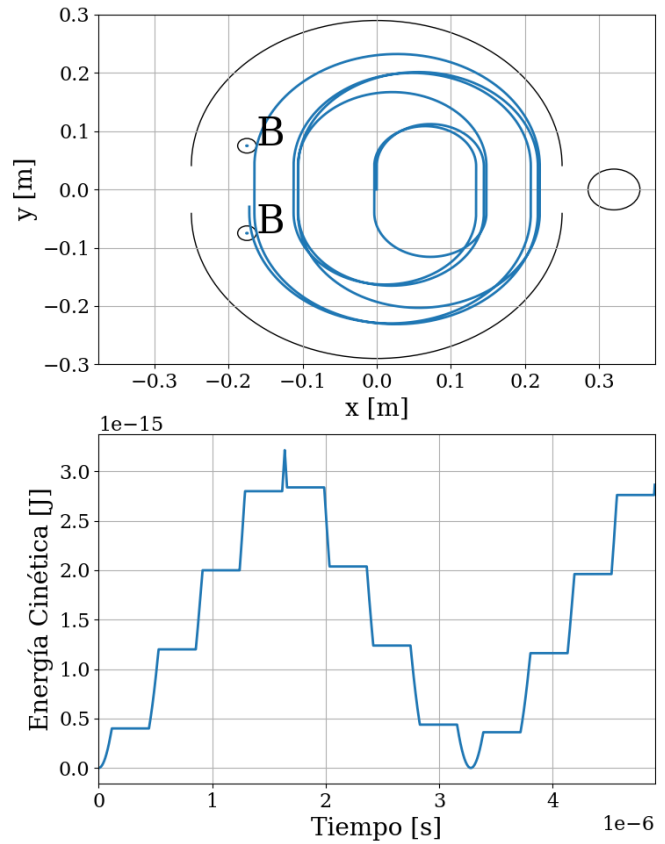


Figura 14: Resultado de la simulación del protón en el ciclotrón mostrando su trayectoria hasta escapar del ciclotrón (arriba) y la evolución de la energía cinética (abajo).

Como podemos observar, efectivamente la distancia de separación no tiene efecto sobre la energía cinética máxima alcanzada ni sobre el período del movimiento circular descrito por el protón. Sí que tiene un efecto sobre el movimiento del mismo puesto que, si la distancia es suficientemente grande, el tiempo que el protón emplea en atravesar la región del campo eléctrico no es despreciable respecto al tiempo que pasa en las Ds por lo que se produce un desfase entre el voltaje de la fuente alterna y el movimiento del ión, lo cual provoca a su vez que el ión no siempre se acelere en la región de campo eléctrico sino que como este se opone en ocasiones a su movimiento (fuera de fase) se frena y no se consigue el efecto deseado de acelerar la partícula constantemente. La Figura 13 muestra un caso en el que la distancia no es lo suficientemente grande como para provocar ese desfase, mientras que en el caso de la Figura 14 sí que ocurre este fenómeno.

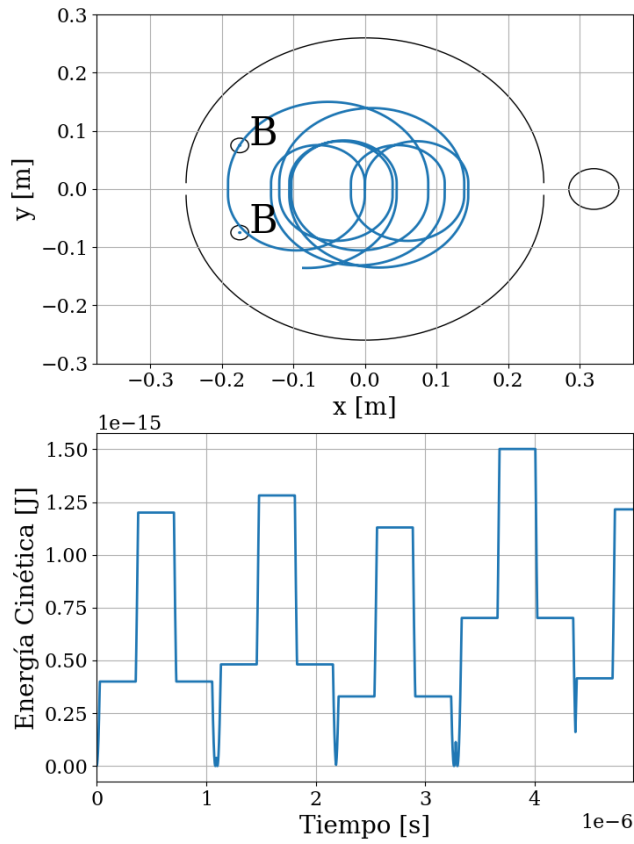


Figura 15: Resultado de la simulación del protón en el ciclotrón mostrando su trayectoria hasta escapar del ciclotrón (arriba) y la evolución de la energía cinética (abajo).

VI. CONCLUSIÓN

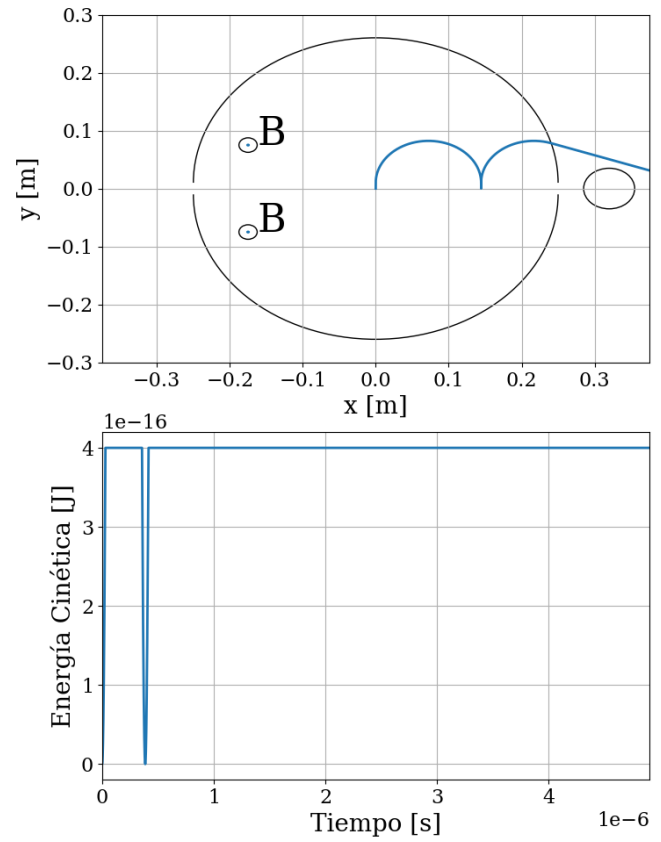


Figura 16: Resultado de la simulación del protón en el ciclotrón mostrando su trayectoria hasta escapar del ciclotrón (arriba) y la evolución de la energía cinética (abajo).