Estudio de La Caída de Una Gota

Alberto García García
(48718198-N)
agg180@alu.ua.es

***Resumen*—En esta primera práctica de la asignatura Física I del Grado en Física (curso académico 2018-2019) estudiaremos la caída de una gota de agua. Para ello consideraremos que la gota cae desde una nube alta y aproximaremos su forma mediante una esfera, de esta forma emplearemos la Ley de Stokes para expresar el rozamiento de la gota con el aire.**

Este problema será resuelto de dos formas diferentes. Por una parte, estudiaremos la caída de forma analítica. Por otro lado, estudiaremos dicha caída de manera numérica, siendo esta segunda forma el objetivo principal de esta práctica. Para ello, discretizaremos el tiempo y resolveremos la ecuación diferencial suponiendo que en cada tramo o instante temporal dt el movimiento transcurre con aceleración constante.

Una vez resuelto el problema tanto de forma numérica como analítica, calcularemos la velocidad con la que la gota impacta en el suelo y dispondremos en una gráfica la evolución de la velocidad y de la posición respecto al tiempo para comparar el resultado numérico con el analítico.

Además, obtendremos también la velocidad límite de la gota y experimentaremos con distintos tamaños y otros parámetros para comprobar la precisión de nuestra solución con las suposiciones anteriormente mencionadas respecto a las verdaderas velocidades alcanzadas por las gotas con modelos más cercanos a la realidad.

Por último, llevaremos a cabo una serie de experimentos cambiando la Ley de Stokes de forma que la velocidad v quede expresada con una potencia mayor que 1 con el objetivo de determinar qué ley o proporción es la más adecuada para representar la fricción de una gota de lluvia con el aire.

El código Python que implementa los modelos matemáticos así como las rutinas de visualización para la resolución de este ejercicio se adjunta con este informe y además puede ser consultado en el siguiente repositorio online [1].

I. Introducción

CUANDO un fluido fluye en capas de manera uniforme y regular, se está en presencia de un flujo laminar. Cuando se aumenta la velocidad relativa entre el sólido y el fluido, se alcanza un punto en el que el flujo ya no es uniforme ni regular. Se dice entonces que es un flujo turbulento.

Todo fluido real presenta viscosidad. Esta viscosidad se manifiesta cuando un sólido se mueve en su seno.

El desarrollo de una capa límite en la que existe turbulencia depende de la forma del sólido (fundamentalmente de la superficie que presenta).

El resultado es la aparición de una fuerza de arrastre que se opone al movimiento. A velocidades muy bajas, la fuerza es proporcional a la velocidad, a velocidades moderadas $F = \frac{1}{2}C_d \rho S v^2$.

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$
$m\vec{g} - \vec{F_r} - \vec{E} = m\vec{a}$

[1] https://github.com/Blitzman/physics

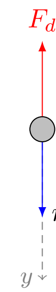

Figura 1: ...

$F_r = \rho S v^2 f(Re)$ donde $f(Re)$ es el factor de Reynolds. Para una esfera y número de Reynolds bajo, se tiene $f(Re) = \frac{12}{Re}$

Si escribimos $Re = \frac{v\rho 2R}{\eta}$ por lo que $F = 6\pi\rho R v$. Por lo tanto, si la velocidad va creciendo, la fuerza de arrastre va creciendo hasta que se llega a un equilibrio:

$V_{lim} = \frac{2R^2(\rho_{cuerpo} - \rho_{fluido})g}{9\eta}$

Como la fuerza es proporcional a la velocidad:

$mg - bv = ma$
$mg - bv = m\frac{dv}{dt}$

Integración de esta ecuación para obtener una solución analítica.

Por lo que la velocidad límite se alcanza en:

$mg = bv$
$v = \frac{mg}{b}$

II. Ley de Stokes

La Ley de Stokes, en su forma general, hace referencia a la fuerza que se opone al movimiento y que es experimentada por cuerpos esféricos cuando se mueven en un fluido en un régimen laminar (números de Reynolds bajos). Esto significa que la Ley únicamente es válida para movimientos de partículas pequeñas a baja velocidad (mientras el régimen no sea turbulento). La ecuación de Stokes se define como:

$$F_d = 6\pi r \eta v \tag{1}$$

, donde η es la viscosidad del fluido, r el radio de la esfera y v la velocidad de la misma.

En nuestro caso, la gota se ve sometida a dos fuerzas: la gravitatoria (con sentido hacia el suelo) y la de rozamiento (en sentido opuesto). La fuerza de rozamiento se rige por la ecuación de Stokes previamente descrita. Como se puede comprobar, es una función de la velocidad v de la partícula por lo que en un determinado instante de tiempo, ambas fuerzas se igualarán, produciendo entonces una aceleración nula y una velocidad constante (la denominada velocidad límite v_{lim}).

II-A. *Solución Analítica*

La solución analítica a este problema podemos obtenerla a partir de las ecuaciones de Newton de la propia gota. Partiendo de la base

$$-F_r + P = ma \ , \tag{2}$$

donde F_r es la ecuación de Stokes $6\pi r \eta v^{v_e}$ (siendo $v_e > 0$); podemos factorizar $D = 6\pi r\eta$ y entonces

$$F_r = Dv = mg - ma \ , \tag{3}$$

y por lo tanto podemos despejar la aceleración como

$$a = g - \frac{Dv}{m} \ . \tag{4}$$

Sabemos que $a = \frac{dv}{dt}$. Podemos entonces agrupar los términos de la siguiente forma

$$a = g - \frac{Dv}{m} = \frac{mg - Dv}{m} \tag{5}$$

para poder integrar a un lado y a otro:

$$\frac{m}{mg - Dv} dv = dt \ , \tag{6}$$

por lo que

$$m \int_{v_0}^{v} \frac{1}{mg - Dv} dv = t - t_0 \tag{7}$$

$$-\frac{m}{D} ln(mg - Dv)|_{v_0}^{v} = \frac{m}{D} ln\left(\frac{mg - Dv_0}{mg - Dv}\right) \ . \tag{8}$$

Tomando que en $t_0 = 0 \ [s]$ la velocidad inicial $v_0 = 0 \ [m/s]$, entonces

$$t = \frac{m}{D} ln\left(\frac{mg}{mg - Dv}\right) \tag{9}$$

y por lo tanto, tomando exponentes

$$e^{(\frac{tD}{m})} = \frac{mg}{mg - Dv} \tag{10}$$

llegamos a la solución analítica del problema:

$$v(t) = \frac{mg}{D}(1 - e^{-(\frac{tD}{m})}) \ [m/s] \tag{11}$$

II-B. *Solución Numérica*

Para implementar una solución numérica al problema del rozamiento y cálculo de la posición, velocidad y aceleración de la gota en cada instante discretizaremos el tiempo y supondremos que en cada tramo dt el movimiento transcurre con aceleración constante. Así pues, la implementación se reduce a un bucle (cuyas condiciones iniciales son el tiempo $t = 0 \ [s]$ y la altura de la gota $y \ [m]$) que iterará incrementando el instante de tiempo de acuerdo al intervalo dt elegido hasta que la gota impacte contra el suelo $y = 0 \ [m]$.

Así pues, en cada iteración se producen cuatro operaciones: (1) incremento del tiempo, (2) actualización de posición, (3) actualización de velocidad, (4) actualización de aceleración. El fragmento de Código 1 muestra dichas operaciones.

```
t_ += dt
y_ = update_position(y_, v_, dt)
v_ = update_velocity(v_, a_, dt)
a_ = update_acceleration(mass, v_, b, ve)
```

Código 1: Actualizaciones en bucle de simulación.

A lo largo del código, `t_` es el instante de tiempo actual en $[s]$, `dt` es el intervalo discreto de tiempo en $[s]$ y prefijado al inicio de la simulación, `y_`, `v_` y `a_` son la posición $[m]$, velocidad $[m/s]$ y la aceleración respectivamente $[m/s^2]$, `mass` es la masa de la gota $[kg]$ prefijada, `b` es la constante de la Ley de Stokes $6\pi r\eta\rho$ y `ve` es la potencia de la velocidad en la fuera de rozamiento. Las funciones del bucle que actualizan la posición y, velocidad v y aceleración a se muestran en el fragmento de Código 2.

```
def update_acceleration(mass, velocity, b, ve):
  return (G - (b * velocity**ve / mass))

def update_velocity(velocity, acceleration, dt):
  return velocity + acceleration * dt

def update_position(position, velocity, dt):
  return position - velocity * dt
```

Código 2: Funciones de actualización.

Como ya comentamos anteriormente, asumimos que en cada intervalo de tiempo el movimiento transcurre con aceleración y velocidad constante por lo que la posición puede calcularse de forma sencilla como:

$$y(t) = y(t-1) - v(t) \cdot dt \ . \tag{12}$$

De igual manera podemos proceder con la velocidad:

$$v(t) = v(t-1) + a(t) \cdot dt \ . \tag{13}$$

La aceleración por su parte se obtiene teniendo en cuenta las dos fuerzas que actúan (la gravedad y el rozamiento) así como la masa de la gota:

$$a(t) = \frac{m \cdot g - b \cdot v^{v_e}}{m} = g - \frac{b \cdot v^{v_e}}{m} \ . \tag{14}$$

II-C. Solución Analítica vs. Numérica

Una vez implementadas ambas soluciones, ejecutamos la simulación para realizar una comparativa de los resultados proporcionados por ambas. Para esta comparativa elegimos un conjunto de parámetros que nos permitiera observar el alcance de la velocidad límite para gotas de agua de diferente tamaño. Aunque habitualmente las gotas de agua caen por encima de los 2000 $[m]$ de altura, para los tamaños considerados como habituales (alrededor de los 0,25 $[mm]$ de radio), la velocidad límite se alcanza mucho antes de haber recorrido dicho espacio. En nuestro caso con una altura $h = 500$ $[m]$ para gotas de radio $r = \{0{,}15, 0{,}25, 0{,}30\}$ $[mm]$ podemos alcanzar la velocidad límite en todos los casos. Adicionalmente, cabe tener en cuenta los valores para la viscosidad del aire $\eta = 18 \cdot 10^{-16}$ $[Ns/m^2]$ y la densidad del agua $\rho = 1000$ $[kg/m^3]$. Los resultados de la simulación ejecutada con un intervalo de tiempo $dt = 0{,}001$ $[s]$ y con $t_0 = 0$ $[s]$ se muestran en la Figura 2 y se resumen en la Tabla I. Cabe destacar que ignoramos el efecto de la altura sobre la fuerza gravitatoria y consideramos en todo momento $g = 9{,}8$ $[m/s^2]$.

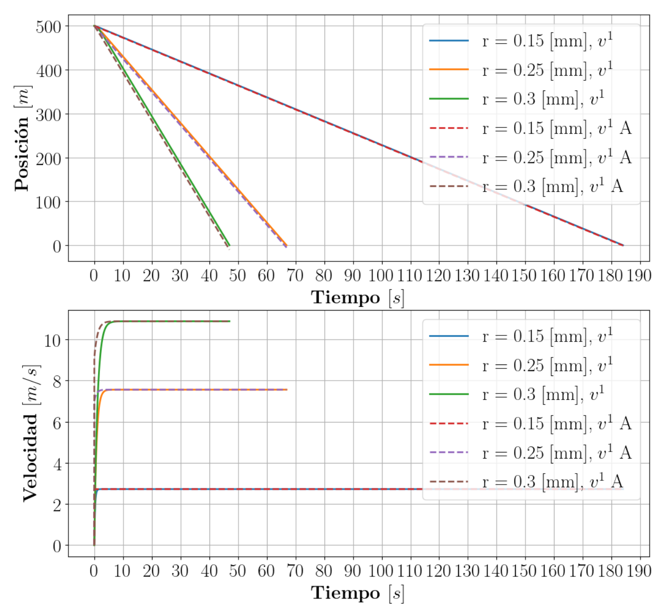

Figura 2: Gráficas de posición y velocidad que muestran la evolución de dichas componentes a lo largo del tiempo de simulación para diferentes tamaños de gota tanto para la solución numérica como para la analítica (A).

Radio $[mm]$	Velocidad Límite $[m/s]$		Tiempo de Impacto $[s]$	
	Numérica	Analítica	Numérica	Analítica
0,15	2.72	2.72	183.95	183.95
0,25	7.56	7.56	66.89	66.89
0,30	10.89	10.89	47.03	47.03

Cuadro I: Comparativa de resultados obtenidos mediante la solución analítica y la solución numérica para gotas de radio $r = \{0{,}15, 0{,}25, 0{,}30\}$.

Como podemos comprobar, no existe ninguna diferencia significativa en los resultados finales de cualquiera de las dos aproximaciones tanto analítica como numérica.

III. Experimentación

Una vez expuestas las soluciones tanto analítica como numérica y comparados los resultados obtenidos, procederemos a realizar una experimentación más extensa sobre la implementación numérica. Este conjunto de experimentos consistirá por un lado en la comparación de la velocidad límite obtenida para gotas de diferentes tamaños y por otro en el estudio del efecto de la potencia de v en la Ley de Stokes.

En ambos casos emplearemos el mismo juego de parámetros para todos los factores externos que no tienen que ver ni con la potencia de la velocidad ni con el tamaño de la gota: la densidad del agua $\rho = 1000$ $[kg/m^3]$, la viscosidad del aire $\eta = 18 \cdot 10^{-6}$ $[N \cdot s/m^2]$ a 20 grados centígrados, la altura desde la cual cae la gota $h = 100$ $[m]$ y el intervalo o diferencial de tiempo $dt = 0{,}001$ $[s]$.

III-A. Radio de la Gota

En este primer conjunto de experimentos variaremos el tamaño de la gota de agua, es decir, el radio de la misma, lo cual afectará tanto a la fuerza de rozamiento (ya que recordemos que el radio r es uno de sus componentes) como a la aceleración (puesto que al variar el radio también cambiará el volumen y por lo tanto la masa de la gota). Para estas pruebas hemos utilizado una potencia de v de 1 y los valores del radio de la gota $r = [0{,}10, 0{,}15, 0{,}20, 0{,}25, 0{,}30]$ $[mm]$.

Radio $[mm]$	Velocidad Límite $[m/s]$	Tiempo de Impacto $[s]$
0,10	1.21	82.77
0,15	2.72	37.01
0,20	4.84	21.16
0,25	7.56	14.00
0,30	10.89	10.30

III-B. Potencia de v

En esta segunda aprte de los experimentos cambiaremos la Ley de Stokes de forma que la potencia de v tome diferentes valores $v_e = [0, 1, 2, 3, 4]$ con el fin de determinar cuál es la Ley más adecuada para representar la fricción de una gota de lluvia con el aire. Para estas pruebas utilizamos el mismo juego de parámetros previamente descrito y una gota de lluvia de radio $r = 0{,}25$ $[mm]$.

IV. Conclusión

Referencias

[1] H. Kopka and P. W. Daly, *A Guide to LaTeX*, 3rd ed. Harlow, England: Addison-Wesley, 1999.

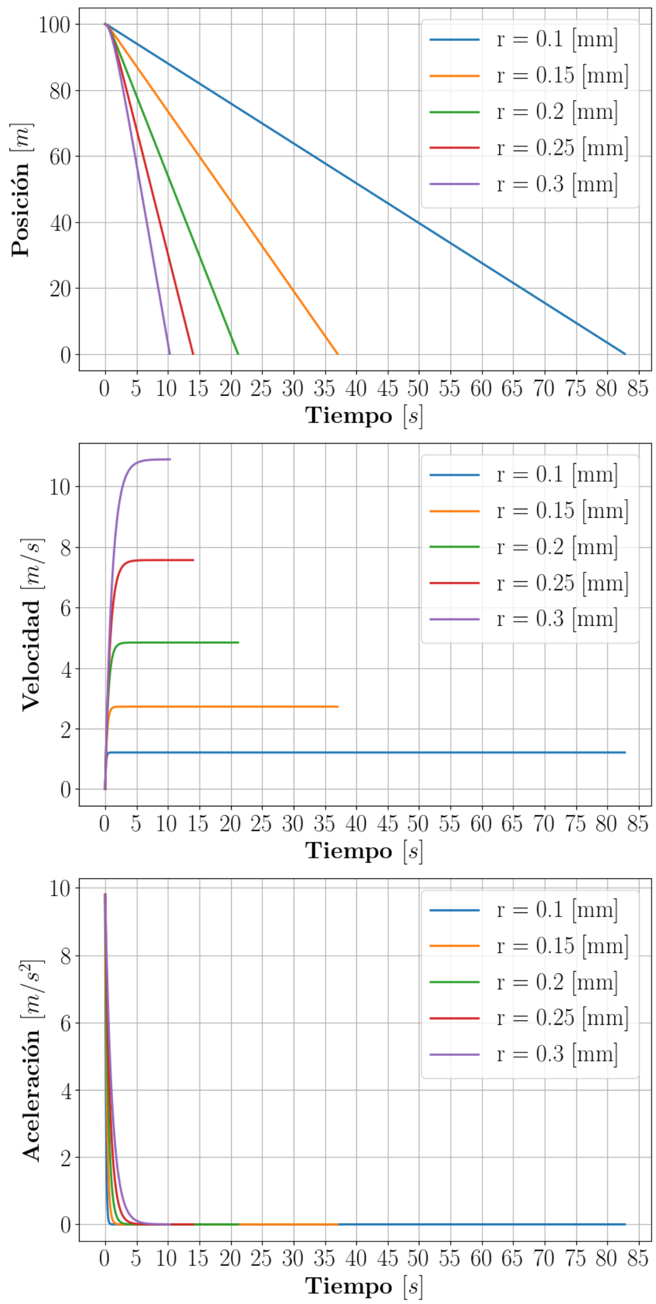

Figura 3: Gráficas de posición, velocidad y aceleración que muestran la evolución de dichas componentes a lo largo del tiempo de simulación para diferentes tamaños de gota.