Práctica 2

Métodos Numéricos y Computación

Dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ donde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son puntos de la recta real distintos dos a dos (llamados nodos de interpolación), el problema de la interpolación polinomial de Lagrange consiste en determinar, si existe, un polinomio P_n , de grado menor o igual que n, que pase por todos ellos ($P_n(x_i) = y_i$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$). En muchas ocasiones, $y_i = f(x_i)$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, donde $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$.

En las clases teóricas hemos comprobado que, en las condiciones anteriores, el polinomio interpolador siempre existe y es único. Analíticamente, su cálculo se puede realizar desde tres puntos de vista diferentes (a partir de la matriz de Vandermonde, de los polinomios fundamentales de Lagrange y de las diferencias divididas de Newton).

La librería `numpy` de Python contiene la función `polyfit`, que permite calcular el polinomio interpolador. En esta práctica, implementaremos el primer y el tercer método. Los polinomios serán representados a partir de sus coeficientes ordenados en un array (habrá que prestar atención al orden en que se presentan en cada ocasión) y la evaluación del polinomio se realizará por medio de la función `polyval` (en `numpy`.

Ejercicio 1 *Define el array P formado por los valores $\{1, -1, 3, 2, 5\}$. Compila las instrucciones* `np.polyval(P,1)` *y* `np.polyval(P,0)`*. ¿Qué has obtenido? Representa por medio de un array el polinomio $2 + x - 0.25x^2 + x^4$ y evalúalo en los puntos $x = 1$ y $x = -2$.*

Ejercicio 2 *Usando la función* `polyfit`*, obtén el polinomio interpolador de grado 4 de la función:*

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

tomando nodos equiespaciados en el intervalo $[-1, 1]$. Representa gráficamente los valores de la función en los nodos, la función y el polinomio.

Ejercicio 3 *Construya la función* `PolLagrange`*, que halle el polinomio interpolador de Lagrange a partir de la matriz de Vandermonde (usa la función* `np.vander`*) tomando como argumento $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ donde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son puntos de la recta real distintos dos a dos.*

Ejercicio 4 *Usa la función* `PolLagrange` *para determinar el polinomio interpolador de Lagrange que pase por seis puntos generados aleatoriamente cuyas abscisas estén en orden creciente en $[-5, 4]$ y las ordenadas varíen entre $[-2, 6]$. Compara el resultado con el polinomio que proporciona la función* `polyfit` *para la interpolación (busca información sobre sus argumentos).*

Ejercicio 5 *Dada la función $f(x) = e^x \cos 3x$, en el intervalo $[-2, 3]$, halla los valores de la función en los puntos $\{-1.5, -0.75, 0.1, 1.5, 2, 2.7\}$. Halla el polinomio interpolador de dicha función en los puntos obtenidos. Representa en una misma figura los puntos dados, la función y el polinomio interpolador de Lagrange.*

Ejercicio 6 *Sea $P_n(x)$ el polinomio interpolador para la función $f(x) = \cos^5(x)$ en $n + 1$ puntos equidistantes en el intervalo $[0, 2]$. Representa el error de interpolación $E_n(x) = |P_n(x) - f(x)|$. Dibuja dicha función para $n = 6, 8, 10$. ¿Qué podemos observar?*

Ejercicio 7 *Consideremos la función del error definida por:*

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2)dt.$$

a) Obtén el valor de erf(x_i) donde $x_i = 0.2i$, para $i = 0, 1, \ldots, 5$.

b) Usa la interpolación lineal y cuadrática para dar una aproximación de erf($1/3$) y evalúa el error cometido.

Ejercicio 8 *Implementa una función* `dif_divididas` *que, dados $n+1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_)$ donde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son puntos de la recta real distintos dos a dos, devuelva las diferencias divididas en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.*

Ejercicio 9 *Usa la función* `dif_divididas` *para crear otra función, llamada* `PolNewton`*, que calcule el polinomio interpolador de grado menor o igual a n, cuando se dan $n+1$ puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_)$ donde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son puntos de la recta real distintos dos a dos.*

Ejercicio 10 *Utiliza la función* `PolNewton` *para obtener el polinomio interpolador en los puntos $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 6)$ y $(6, 5)$. Compara el resultado con los polinomios obtenidos con la funciones* `polyfit` *y* `PolLagrange`*.*

Ejercicio 11 *Utiliza la función* `PolNewton` *para obtener el polinomio interpolador de la función $f(x) = e^x \cos 3x$ en los nodos $\{-1.5, -0.75, 0, 1, 1.5, 2, 2.7\}$. Compara el resultado con los polinomios obtenidos con la funciones* `polyfit` *y* `PolLagrange`*.*