

Circuitos de Corriente Alterna

Alberto García García

(48718198-N)

agg180@alu.ua.es

Resumen—En esta primera práctica de la asignatura Física II del Grado en Física (curso académico 2018-2019) estudiaremos el movimiento de cargas en campos electromagnéticos. Para ello consideraremos diferentes partículas (iones de hidrógeno, electrones y protones) en diversos instrumentos típicos y estudiados en la parte teórica de la asignatura: el espectrómetro de masas, el selector de velocidades y el ciclotrón. Para cada caso desarrollaremos las ecuaciones analíticas que nos permitan resolver el movimiento de dichas partículas de forma teórica para posteriormente ejecutar los programas de simulación proporcionados con el objetivo de contrastar los resultados teóricos con los generados numéricamente. Además, exploraremos el efecto de variar ciertos parámetros en cada uno de los instrumentos también tanto de forma teórica como simulada.

El código Python que implementa esta práctica así las modificaciones realizadas a sus rutinas de visualización y las fuentes \LaTeX de este informe se encuentran disponibles online en el repositorio https://github.com/Blitzman/physics/tree/master/fisica_2/practica_2.

I. INTRODUCCIÓN

EN esta práctica estudiaremos mediante el uso de programas en el lenguaje Python la dinámica de circuitos RLC tanto con generador como sin él. Para ello, resolveremos las ecuaciones diferenciales que regulan dicha dinámica mediante el uso de algoritmos. Así pues, en la Sección II estudiaremos el caso sin generador mientras que en la Sección III abordaremos la situación con generador.

II. CIRCUITO RLC EN SERIE SIN GENERADOR

El sistema que estudiaremos en esta primera sección es el mostrado en la Figura 1. En este caso disponemos de: un condensador inicialmente cargado C , una resistencia R , una bobina L y un interruptor abierto. A tiempo cero se cierra el interruptor y se estudia cómo evoluciona el sistema.

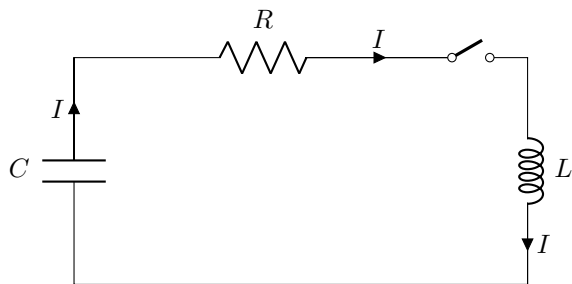


Figura 1: Circuito RLC en serie sin generador.

De forma teórica, podemos afirmar que la carga Q del condensador obedece a la siguiente ecuación diferencial:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0, \quad (1)$$

siendo esta ecuación totalmente análoga a la de un oscilador armónico amortiguado y que presenta las mismas soluciones. En el caso de la práctica, el programa `RCL.py` hace uso de la rutina `odeint` para resolver dicha ecuación diferencial para tres casos diferentes: amortiguado, subamortiguado y sobreamortiguado.

La frecuencia de oscilación en cada uno de los casos se puede calcular como:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} [Hz] \quad (2)$$

A continuación analizaremos la dinámica de dichos circuitos en los tres casos usando el programa de integración proporcionado. Para ello emplearemos los siguientes valores para el condensador C [F], la bobina L [H] y el tiempo de simulación tal como se muestra en el Código 1.

```
C=75.0e-6 # Condensador
L=0.15 # Bobina
tf=1.0e-1 # Tiempo de simulación
```

Código 1: Datos de simulación para estudio de dinámica de circuito RLC sin generador.

Por otro lado, la resistencia R tendrá valores diferentes dependiendo de si el caso es amortiguado ($R = 0$ [Ω]), subamortiguado ($R^2 < 4L/C$ [Ω]) y sobreamortiguado ($R^2 > 4L/C$ [Ω]).

Para todos los casos representaremos la carga y la intensidad en función del tiempo $Q = f(t)$ [C] e $I = (f)$ [A] respectivamente. Además, también representaremos la variación de la energía magnética U_m [J], la energía electrostática U_e [J] y la suma de las dos U [J].

También comprobaremos, a partir de las gráficas planteadas, que la frecuencia de oscilación teórica anteriormente expuesta coincide con la frecuencia de oscilación de las mismas.

II-A. Oscilador Amortiguado

En esta sección estudiaremos el caso amortiguado, para el cual hemos elegido una resistencia de $R = 0$ [Ω] y hemos ejecutado el programa `RCL.py` modificado para obtener las gráficas de evolución de la carga (ver Figura 2), de la intensidad (Figura 3) y de las energías (Figura 4).

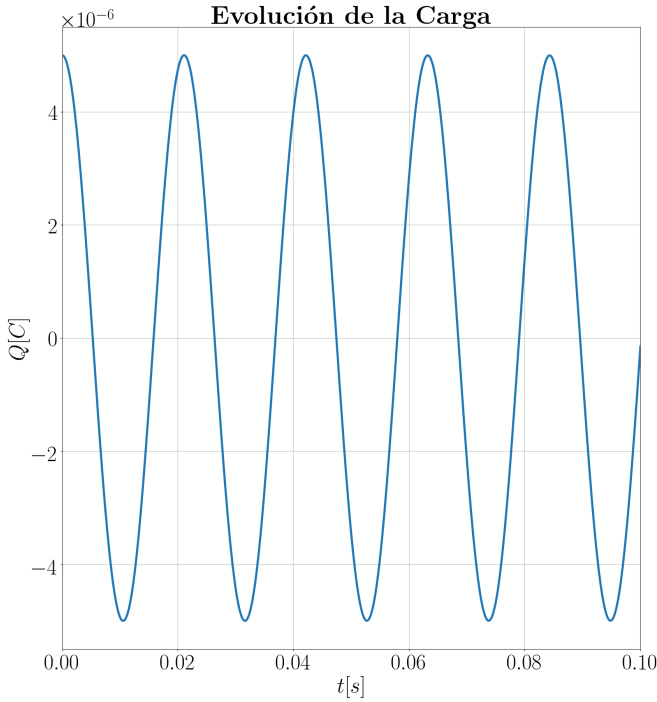


Figura 2: Evolución temporal de la carga Q [C] en el caso del circuito RLC amortiguado para $R = 0$ [Ω] y con $tf = 10,0$ [s].

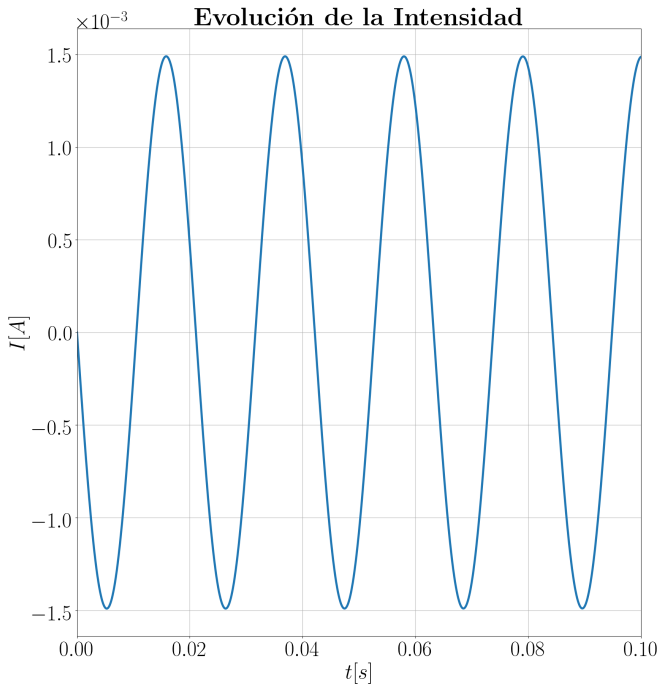


Figura 3: Evolución temporal de la intensidad I [A] en el caso del circuito RLC amortiguado para $R = 0$ [Ω] y con $tf = 10,0$ [s].

Como podemos observar, en el caso amortiguado la evolución tanto de la carga como de la intensidad presentan el comportamiento de oscilación armónica amortiguada (una analogía típica es el péndulo sometido a rozamiento debido a la resistencia del aire). Así pues, la carga y la intensidad van a oscilar debido a la inversión de la carga en las placas del condensador.

La Figura 4 muestra la evolución tanto de la energía magnética como electrostática y la suma de ambas. En ella podemos comprobar cómo cuando la carga Q es nula toda la energía es magnética y está almacenada en el inductor (por ejemplo, en el instante $t = 0,03$). De la misma forma, cuando la carga es máxima (instantes $t = 0,02$ y $t = 0,01$ aproximadamente), toda la energía es electrostática y está almacenada en el condensador.

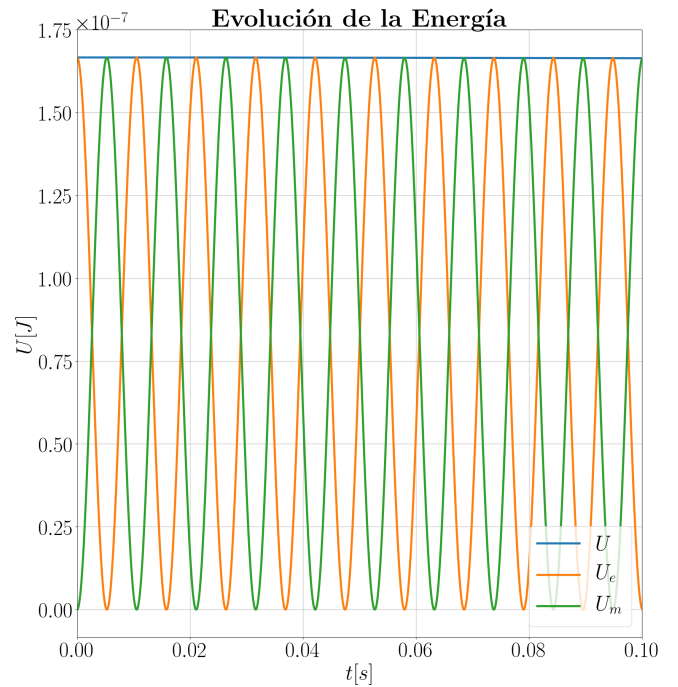


Figura 4: Evolución de las energías magnética U_m , electrostática U_e y total U en el caso amortiguado para $R = 0$ [Ω].

De forma teórica, la frecuencia de oscilación es:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(0,15 \cdot 75,0 \cdot 10^{-6})}} = 47,45 \text{ [Hz]} \quad (3)$$

Atendiendo a la gráfica de la evolución de la carga Q [C] mostrada en la Figura 2, podemos determinar que el período de oscilación (tiempo transcurrido entre dos máximos) es aproximadamente de $T = 0,021$ [s] ya que el primer máximo lo encontramos en $t = 0,000$ [s] y el siguiente en $t \simeq 0,021$ [s]. Dado que la frecuencia es la inversa del período $f = 1/T$, la frecuencia obtenida a partir de la gráfica es $f = 1/0,021 = 47,62$, la cual, apreciando los errores de precisión al seleccionar los valores de la gráfica, coincide con la frecuencia teórica calculada.

II-B. Oscilador Subamortiguado

Analizado el caso del oscilador amortiguado, procederemos a estudiar la situación subamortiguada. Para ello, mantendremos los mismos valores de C , L y Q_0 mientras que cambiaremos el valor para la resistencia R . Para darse la situación subamortiguada necesitamos la siguiente condición

$$R^2 < \frac{4L}{C} [\Omega] . \quad (4)$$

Así pues, elegimos un valor para R

$$R = 0,1 \cdot \sqrt{\frac{4L}{C}} = 0,1 \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot 0,15}{75,00 \cdot 10^{-6}}} = 8,94 [\Omega] . \quad (5)$$

Una vez determinado un valor necesario de R $[\Omega]$ para producir la subamortiguación, ejecutamos de nuevo el programa RLC.py y obtenemos las gráficas de evolución de la carga Q $[C]$ (Figura 5), de la intensidad (Figura 6) y de energía (Figura 7).

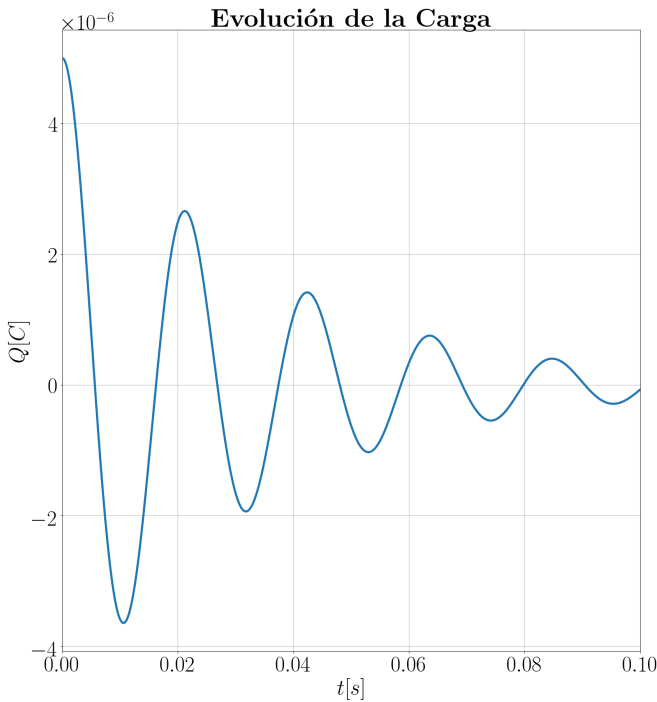


Figura 5: Evolución de la carga Q $[C]$ en el caso subamortiguado para $R = 0,1 \cdot \sqrt{\frac{4L}{C}} [\Omega]$.

En este caso podemos observar cómo, aunque se sigue produciendo oscilación con el mismo comportamiento que en el caso anterior, la amplitud de la misma disminuye con el tiempo lo cual provoca una disminución progresiva del valor absoluto de la carga, de la intensidad y por lo tanto una disminución de la energía del sistema a medida que transcurre el tiempo. Dicha energía se pierde progresivamente a causa principalmente de la resistencia.

En este caso, la frecuencia de oscilación no cambia respecto al caso anterior ($f = 47,45$ $[Hz]$) dado que la misma únicamente depende de L y de C . Como se puede comprobar en la Figura 2, de la misma forma que en la Figura 2, el período

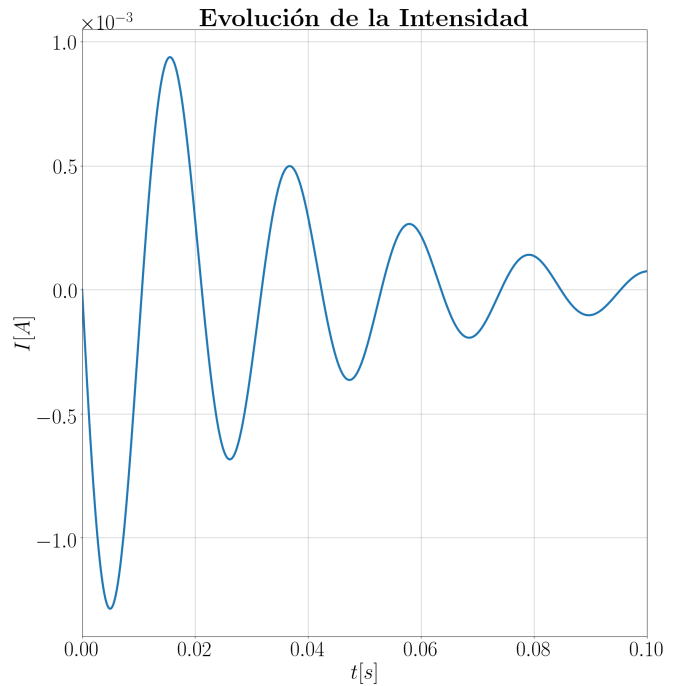


Figura 6: Evolución de la intensidad I $[A]$ en el caso subamortiguado para $R = 0,1 \cdot \sqrt{\frac{4L}{C}} [\Omega]$.

de oscilación entre los primeros dos máximos ($t = 0,000$ $[s]$ y $t \simeq 0,021$ $[s]$) es $T = 0,021$ $[s]$. Por lo tanto, la frecuencia es $f = 1/0,021 = 47,62$ $[Hz]$.

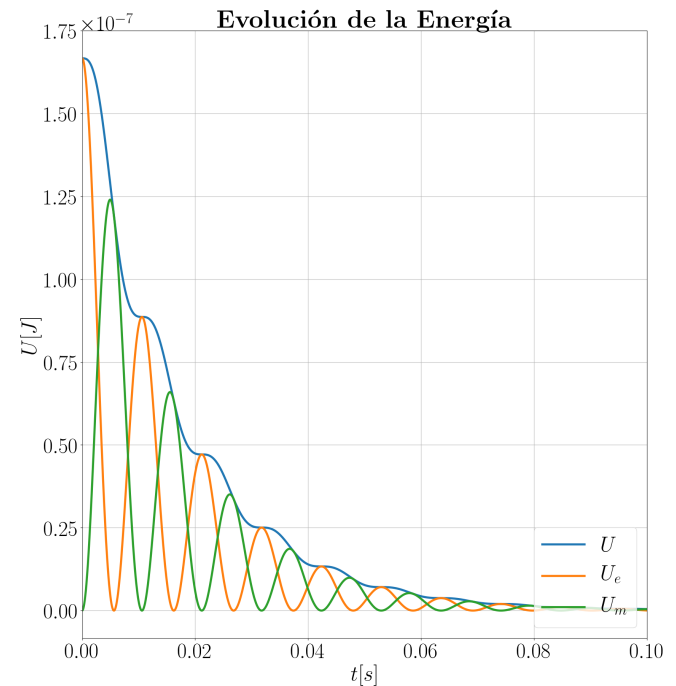


Figura 7: Evolución de las energías magnética U_m , electrostática U_e y total U en el caso subamortiguado para $R = 0,1 \cdot \sqrt{\frac{4L}{C}} [\Omega]$.

II-C. Oscilador Sobrearmortiguado

Por último, simularemos el caso sobrearmortiguado. De nuevo, mantenemos los mismos valores para el condensador C , la bobina L y para la carga inicial Q_0 y cambiaremos el valor de la resistencia R . Para conseguir una situación de sobrearmortiguación debe cumplirse que

$$R^2 > \frac{4L}{C} [\Omega], \quad (6)$$

por lo que daremos un valor arbitrario a R de

$$R = 10 \cdot \sqrt{\frac{4L}{C}} = 0,1 \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot 0,15}{75,00 \cdot 10^{-6}}} = 894,43 [\Omega]. \quad (7)$$

Determinado un valor necesario de R $[\Omega]$ para producir la sobrearmortiguación, ejecutamos de nuevo el programa `RLC.py` y obtenemos las gráficas de evolución de la carga Q $[C]$ (Figura 8), de la intensidad (Figura 9) y de energía (Figura 10).

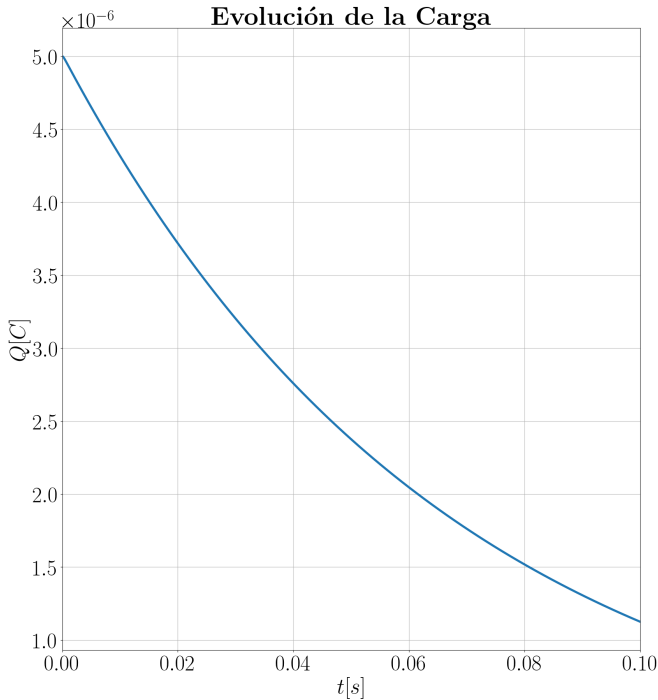


Figura 8: Evolución de la carga Q $[C]$ en el caso sobrearmortiguado para $R = 10 \cdot \sqrt{\frac{4L}{C}} [\Omega]$.

En esta situación podemos comprobar cómo una excesiva resistencia provoca pérdida de energía tal que ni tan siquiera se puede producir oscilación por lo que se produce una respuesta sobrearmortiguada. La pérdida de energía debido a la resistencia provoca que la carga en el condensador no pueda oscilar e invertir la intensidad de la corriente. La solución a la ecuación característica del circuito RLC en este caso da lugar a una corriente resultado de la superposición de dos exponenciales reales que decrecen hasta cero por lo que eventualmente dejará de existir corriente en el circuito y su energía será nula.

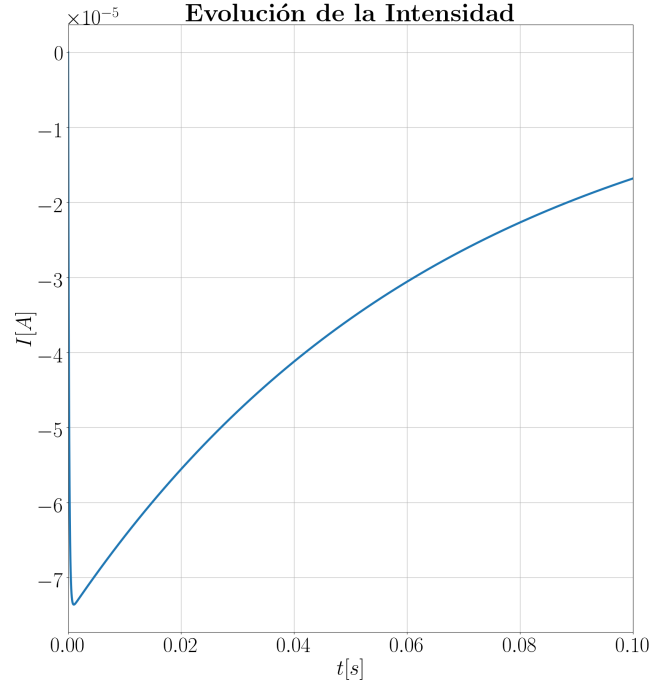


Figura 9: Evolución de la intensidad I $[A]$ en el caso sobrearmortiguado para $R = 10 \cdot \sqrt{\frac{4L}{C}} [\Omega]$.

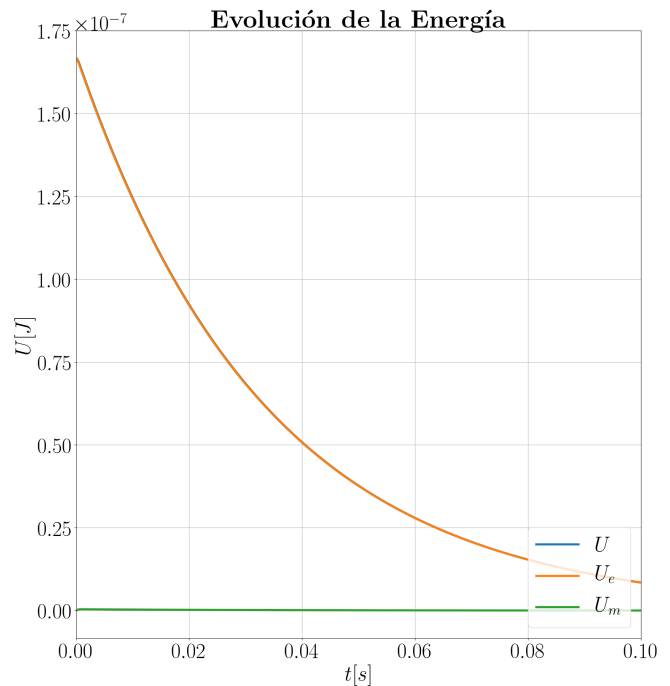


Figura 10: Evolución de las energías magnética U_m , electrostática U_e y total U en el caso sobrearmortiguado para $R = 10 \cdot \sqrt{\frac{4L}{C}} [\Omega]$. Nota: la energía total U coincide con la energía electrostática U_e .

II-D. Energía Disipada

Por último, de forma opcional, se nos plantea calcular la energía disipada en la resistencia conociendo la intensidad (cuyas gráficas se muestran en las Figuras 6 y 9 para los casos subamortiguado y sobreamortiguado respectivamente):

$$U_R = \int_0^{\infty} I^2(t) R dt [J]. \quad (8)$$

La implementación que nos permite resolver dicha integral se muestra en el Código 2 tal y como hemos desarrollado en el código adjunto a esta práctica.

```
ue_ = 0.5 * np.square(z[:, 0]) / C
um_ = 0.5 * L * np.square(z[:, 1])
u_ = ue_ + um_

ur_ = np.zeros_like(u_)
for i in range(len(t)-1):
    ur_[i+1] = ur_[i] + z[i,1] * z[i,1] * R
```

Código 2: Cálculo de la energía disipada.

Una vez ejecutada dicho cálculo podemos obtener la evolución de la energía disipada en función del tiempo. Las gráficas de dichas evoluciones se muestran en las Figuras 11 y 12 para los casos subamortiguado y sobreamortiguado respectivamente.

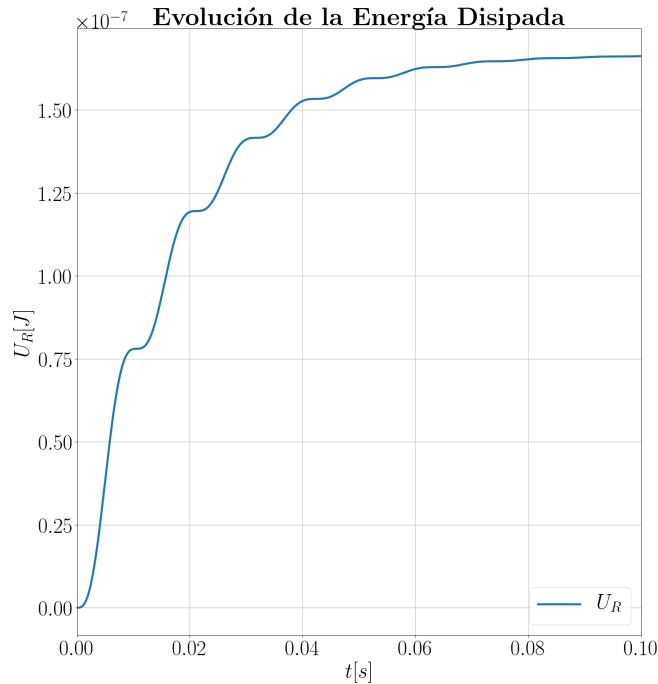


Figura 11: Evolución de la energía disipada en función del tiempo en el caso subamortiguado para $R = 0,1 \cdot \sqrt{\frac{4L}{C}} [\Omega]$.

Como podemos observar, el valor final de U_R (tras un tiempo suficiente para que la intensidad se vea reducida a cero) converge con el valor inicial de U_e que tenía el condensador inicialmente en ambos casos (ver Figuras 7 y 10): aproximadamente $1,66 \cdot 10^{-7} [J]$ en ambos casos.

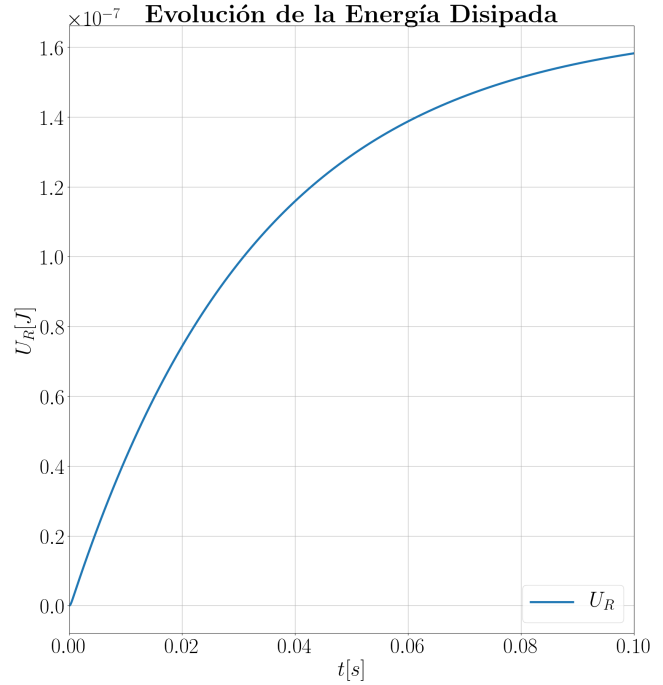


Figura 12: Evolución de la energía disipada en función del tiempo en el caso sobreamortiguado para $R = 10 \cdot \sqrt{\frac{4L}{C}} [\Omega]$.

III. CIRCUITO RLC EN SERIE CON GENERADOR

En esta segunda sección estudiaremos el sistema mostrado en la Figura 13. En este caso disponemos de un generador de voltaje alterno en serie con una disposición similar al circuito anterior: un condensador inicialmente descargado, una resistencia y una bobina. El generador produce un voltaje alterno del tipo $V(t) = V_0 \cos \omega t$.

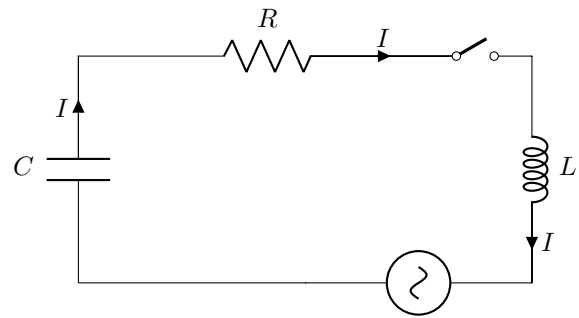


Figura 13: Circuito RLC en serie con generador.

De forma teórica, podemos expresar la ecuación que controla el sistema como la equivalente a la de un oscilador armónico amortiguado y forzado:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = V_s = V_0 \cos \omega t \quad (9)$$

III-A. Estudio Teórico Mediante Método de Fasores

Sabemos que el voltaje del circuito se puede expresar como

$$V_s = IZ [V] , \quad (10)$$

siendo Z la impedancia del circuito que posee tres componentes: la impedancia resistiva R , la impedancia capacitiva X_C y la impedancia inductiva o reactancia X_L . Por lo tanto, el voltaje posee tres componentes:

$$V_R = IR [V] , \quad (11)$$

$$V_C = IX_C = I \frac{-i}{\omega C} [V] , \quad (12)$$

$$V_L = IX_L = I i \omega L [V] , \quad (13)$$

así pues, el voltaje se puede expresar como

$$\vec{V}_L + \vec{V}_C + \vec{V}_R = (V_R)\hat{u}_x + (V_L - V_C)\hat{u}_y [V] . \quad (14)$$

El módulo de dicho vector (con componentes imaginaria y real) es la impedancia del circuito Z multiplicada por la corriente I , el ángulo δ que forma con el eje horizontal es el desfase entre la corriente y el voltaje aplicado.

$$|\vec{V}_L + \vec{V}_C + \vec{V}_R| = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} \quad (15)$$

$$|\vec{V}_L + \vec{V}_C + \vec{V}_R| = \sqrt{(IR)^2 + (I(X_L - X_C))^2} \quad (16)$$

$$\mathcal{E}_0 = IZ = I \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad (17)$$

Así pues, podemos determinar el valor de la intensidad como

$$I = \frac{V_s}{Z} = \frac{V_s}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} [A] , \quad (18)$$

$$I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t - \delta) [A] , \quad (19)$$

siendo $I_0 = V_0/Z$ e $I_{ef} = I/\sqrt{2}$.

El desfase entre el voltaje y la corriente se puede calcular a partir del ángulo δ como

$$\tan \delta = \frac{|X_L - X_C|}{R} , \quad (20)$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) [rad] . \quad (21)$$

Si $\delta > 0$ significa que la corriente adelanta a la tensión y de lo contrario le tensión adelanta a la corriente.

Conociendo los fundamentos teóricos mediante el método de los fasores podemos calcular, antes de confirmarlos experimentalmente, los valores tanto de la corriente eficaz del circuito como del desfase. Los valores que utilizaremos para este propósito para la simulación se encuentran en el Código 3 y han sido escogidos siguiendo las restricciones indicadas por el enunciado de la práctica.

```
R=300 # Resistencia
C=75.0e-6 # Condensador
L=0.30 # Bobina
Vef=165 # Tension eficaz
f=75 # Frecuencia
```

Código 3: Datos de simulación para estudio de dinámica de circuito RLC con generador.

La impedancia del circuito es

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \quad (22)$$

$$Z = \sqrt{300^2 + (2\pi \cdot 75 \cdot 0,30 - \frac{1}{2\pi \cdot 75 \cdot 75 \cdot 10^{-6}})^2} \quad (23)$$

$$Z = 320,60 \quad (24)$$

El valor eficaz de la corriente es

$$I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{V_{ef}\sqrt{2}}{Z\sqrt{2}} = \frac{165,00}{320,60} = 0,51 [A] , \quad (25)$$

y por lo tanto, su intensidad inicial es

$$I_0 = I_{ef}\sqrt{2} = 0,51\sqrt{2} = 0,72 [A] . \quad (26)$$

El desfase es

$$\delta = \arctan \frac{2\pi \cdot 75,00 \cdot 0,30 - \frac{1}{2\pi \cdot 75,00 \cdot 75,00 \cdot 10^{-6}}}{300} . \quad (27)$$

$$\delta = 0,38 [rad] = 21,60 [deg] \quad (28)$$

Así pues, la intensidad es $I(t) = 0,72 \cdot \cos(\omega t - 0,38) [A]$ y dado que $\delta > 0$ adelanta a la tensión.

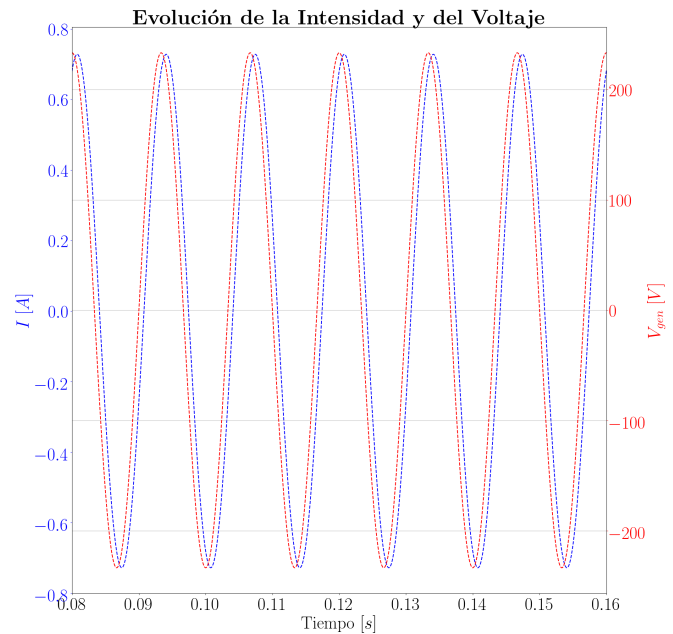


Figura 14: Evolución de la intensidad y del voltaje para el circuito RLC con generador.

Como podemos observar en la gráfica mostrada en la Figura 14, la intensidad toma un valor máximo $I_0 \simeq 0,71$ que coincide (con el margen de error de la visualización) con el valor calculado. De la misma forma, el desfase calculado $\delta = 0,38 \text{ [rad]} = 21,60 \text{ [deg]}$ también coincide con el que podemos extraer de la gráfica como

$$\delta = 2\pi \frac{t}{T} = 2\pi \frac{8 \cdot 10^{-4}}{1,1335 \cdot 10^{-2}} = 0,3765 \text{ [rad]} = 21,57 \text{ [deg]}, \quad (29)$$

siendo t el espacio de tiempo entre dos puntos de igual amplitud en el voltaje y en la intensidad que hemos medido en la gráfica como $t = t_i - t_v$ siendo $t_v = 0,08665 \text{ [s]}$ y $t_i = 0,08745 \text{ [s]}$ por lo que $t = 0,08745 - 0,08665 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ [s]}$. El período es de forma similar pero tomando el tiempo entre dos oscilaciones $T = 0,10000 - 0,08665 = 1,1335 \cdot 10^{-2} \text{ [s]}$.

III-B. Estudio de Resonancia

A continuación procederemos a realizar un estudio de resonancia para demostrar que el máximo de I se obtiene para la frecuencia de resonancia

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,30 \cdot 75 \cdot 10^{-6}}} = 33,55 \text{ [Hz]}. \quad (30)$$

Para este estudio hemos variado la frecuencia del generador y hemos obtenido la corriente que circula por el circuito para los diferentes valores con los que hemos experimentado: $f = \{75,00, 50,00, 33,55, 10,00, 5,00\} \text{ [Hz]}$, siendo uno de ellos el valor de la frecuencia de resonancia $f_{res} = 33,55 \text{ [Hz]}$.

Las Figuras 15, 16, 17, 18 y 19 muestran las evoluciones de la intensidad y del voltaje para las diferentes frecuencias estudiadas $f = 75,00 \text{ [Hz]}$, $f = 50,00 \text{ [Hz]}$, $f = 33,55 \text{ [Hz]}$, $f = 10,00 \text{ [Hz]}$ y $f = 5,00 \text{ [Hz]}$ respectivamente.

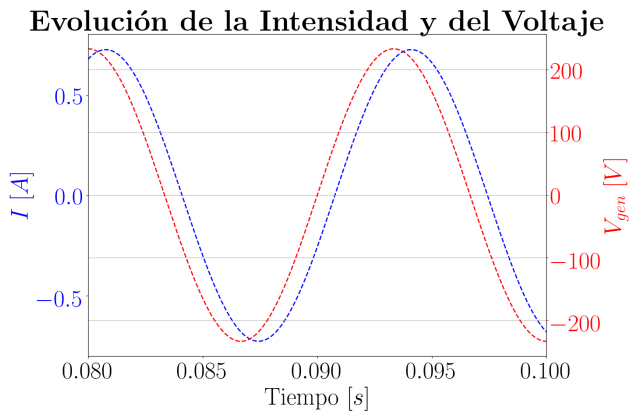


Figura 15: Evolución de la intensidad y del voltaje para el circuito RLC con generador para una frecuencia $f = 75,00 \text{ [Hz]}$.

Evolución de la Intensidad y del Voltaje

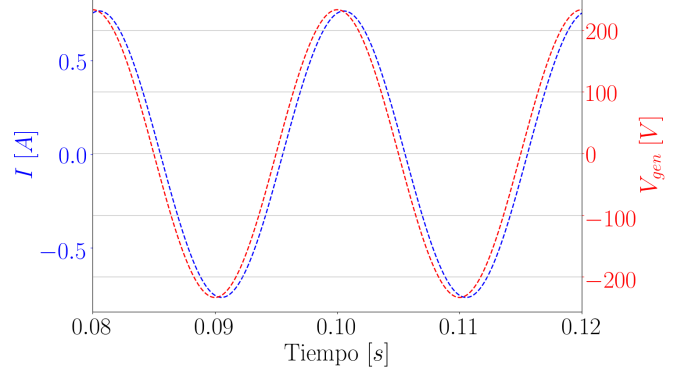


Figura 16: Evolución de la intensidad y del voltaje para el circuito RLC con generador para una frecuencia $f = 50,00 \text{ [Hz]}$.

Evolución de la Intensidad y del Voltaje

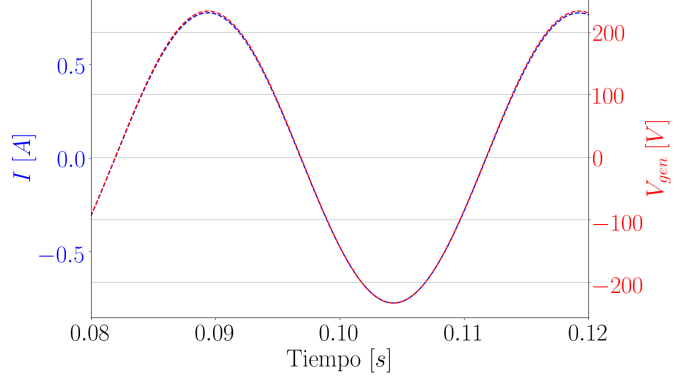


Figura 17: Evolución de la intensidad y del voltaje para el circuito RLC con generador para una frecuencia $f = 33,55 \text{ [Hz]}$ que coincide con la frecuencia de resonancia.

Evolución de la Intensidad y del Voltaje

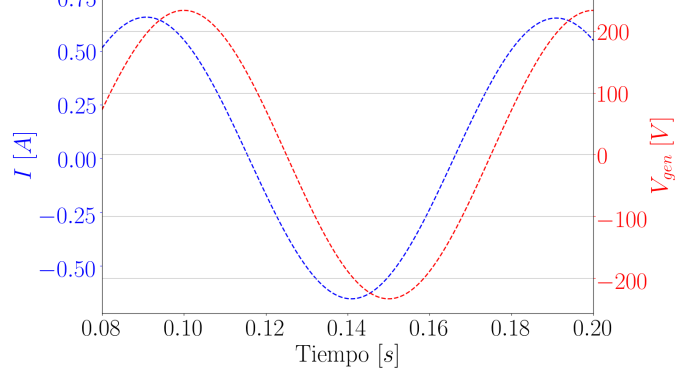


Figura 18: Evolución de la intensidad y del voltaje para el circuito RLC con generador para una frecuencia $f = 10,00 \text{ [Hz]}$.

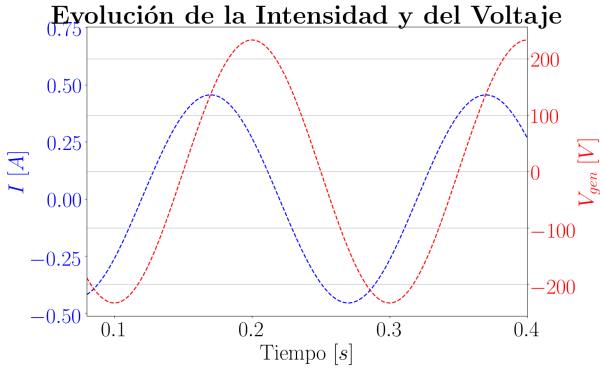


Figura 19: Evolución de la intensidad y del voltaje para el circuito RLC con generador para una frecuencia $f = 5,00 \text{ [Hz]}$.

Como podemos comprobar, en el caso mostrado en la Figura 17, el desfase es nulo $\delta = 0 \text{ [rad]}$ y el voltaje coincide con la intensidad a la vez que se obtiene la intensidad máxima de $I_0 \simeq 0,779 \text{ [A]}$. La Figura 20 muestra la evolución de la intensidad en función de la frecuencia elegida y viene a constatar que la intensidad máxima se alcanza cuando la frecuencia elegida se corresponde con la frecuencia de resonancia f_{res} . También mostramos los cálculos necesarios para obtener las diferentes intensidades:

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC})^2}} \quad (31)$$

$$I_{f=75} = \frac{165\sqrt{2}}{\sqrt{300^2 + (2\pi 75,00 \cdot 0,30 - \frac{1}{2\pi 75,00 \cdot 75,00 \cdot 10^{-6}})^2}} \quad (32)$$

$$I_{f=75} = 0,728 \text{ [A]} \quad (33)$$

$$I_{f=50} = \frac{165\sqrt{2}}{\sqrt{300^2 + (2\pi 50,00 \cdot 0,30 - \frac{1}{2\pi 50,00 \cdot 75,00 \cdot 10^{-6}})^2}} \quad (34)$$

$$I_{f=50} = 0,766 \text{ [A]} \quad (35)$$

$$I_{f=f_{res}} = \frac{165\sqrt{2}}{\sqrt{300^2 + (2\pi 33,55 \cdot 0,30 - \frac{1}{2\pi 33,55 \cdot 75,00 \cdot 10^{-6}})^2}} \quad (36)$$

$$I_{f=f_{res}} = 0,779 \text{ [A]} \quad (37)$$

$$I_{f=10} = \frac{165\sqrt{2}}{\sqrt{300^2 + (2\pi 10,00 \cdot 0,30 - \frac{1}{2\pi 10,00 \cdot 75,00 \cdot 10^{-6}})^2}} \quad (38)$$

$$I_{f=10} = 0,654 \text{ [A]} \quad (39)$$

$$I_{f=5} = \frac{165\sqrt{2}}{\sqrt{300^2 + (2\pi 5,00 \cdot 0,30 - \frac{1}{2\pi 5,00 \cdot 75,00 \cdot 10^{-6}})^2}} \quad (40)$$

$$I_{f=5} = 0,456 \text{ [A]} \quad (41)$$

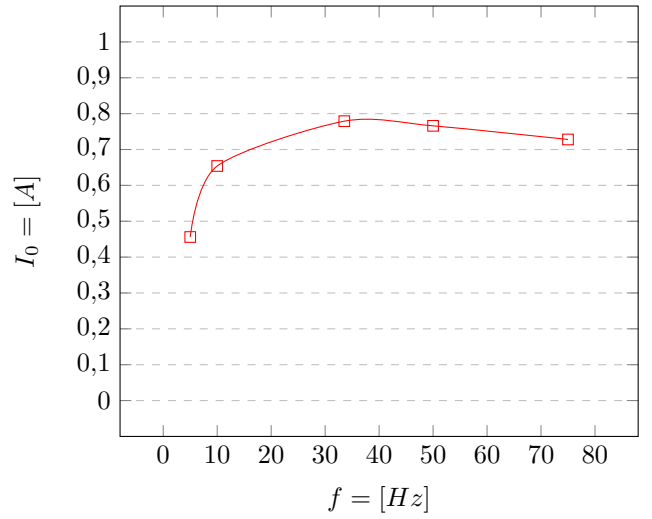


Figura 20: Intensidad en función de la frecuencia.

IV. CONCLUSIÓN

El código Python que implementa esta práctica así como las fuentes \LaTeX de este informe se encuentran disponibles online en el repositorio https://github.com/Blitzman/physics/tree/master/fisica_2/practica_1.