

Estudio de La Oscilación de un Péndulo

Alberto García García
(48718198-N)
agg180@alu.ua.es

Resumen—En esta segunda práctica de la asignatura Física I del Grado en Física (curso académico 2018-2019) estudiaremos la oscilación de un péndulo. Para ello consideraremos que el péndulo posee una masa y longitud preestablecidas y que se deja caer desde el reposo al apartarlo de su posición de equilibrio en cierta medida. En primer lugar, obtendremos las ecuaciones diferenciales que permiten calcular los diferentes componentes del péndulo. Seguidamente resolveremos dichas ecuaciones con un módulo de integración numérica para calcular la amplitud, la velocidad angular y la tensión de la cuerda. Con tal resolución, estudiaremos la dependencia entre el período de oscilación y la amplitud inicial. También compararemos los resultados numéricos obtenidos anteriormente con la solución analítica. Por último, introduciremos un término de rozamiento y estudiaremos su efecto sobre el péndulo y su período.

El código Python que implementa los modelos matemáticos así como las rutinas de visualización para la resolución de este ejercicio se adjunta con este informe y además puede ser consultado en el siguiente repositorio online ¹.

I. INTRODUCCIÓN

EL péndulo es un cuerpo suspendido por una cuerda de un punto alrededor del cual oscila por acción de la fuerza gravitatoria. Podemos hablar de péndulo ideal cuando se asume que la cuerda no tiene masa y que el cuerpo carece de fricción o rozamiento con el medio. Es decir, que el péndulo oscilará indefinidamente.

En esta práctica consideraremos un péndulo de longitud l y masa m que se aparta de su posición de equilibrio un ángulo θ_0 y se deja caer desde el reposo (tal y como se muestra en la Figura 1). Inicialmente supondremos un péndulo ideal para posteriormente introducir fuerzas amortiguadoras y estudiar el efecto de las mismas.

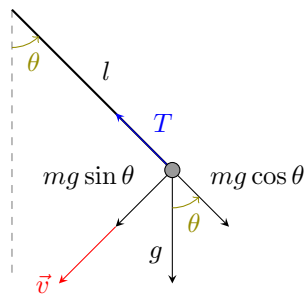


Figura 1: Diagrama de cuerpo libre de un péndulo de masa m y cuerda de longitud l apartado un ángulo θ de la vertical.

II. ECUACIONES DIFERENCIALES DEL PÉNDULO

Las ecuaciones diferenciales que permiten calcular el ángulo θ y la tensión de la cuerda T como función del tiempo pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de Newton que rigen el funcionamiento del péndulo ideal.

El sumatorio de fuerzas sobre el eje radial (y) es

$$\sum F_y = T - P \cos(\theta) = m a_n \Rightarrow T = m a_n + m g \cos(\theta) . \quad (1)$$

Puesto que θ depende del tiempo (ya que la posición o ángulo del péndulo varía con el mismo), hemos encontrado la ecuación que permite calcular la tensión de la cuerda

$$T(\theta(t)) = l \omega(t)^2 + m g \cos(\theta(t)) \text{ [N]} . \quad (2)$$

Por otro lado, en el eje tangencial o angular es

$$\sum F_x = -P \sin(\theta) = m a \Rightarrow -m g \sin(\theta) = m a_\theta \quad (3)$$

$$\Rightarrow -g \sin(\theta) = a_\theta \quad (4)$$

Toda la aceleración producida en el eje tangencial podemos expresarla en coordenadas polares (teniendo en cuenta que el radio l es constante) como

$$a_\theta = 2 \frac{dl}{dt} \frac{d\theta}{dt} + l \frac{d^2\theta}{dt^2} = l \frac{d^2\theta}{dt^2} . \quad (5)$$

Reemplazando la aceleración obtenida y reorganizando los términos teniendo en cuenta la aproximación de pequeñas oscilaciones ($\sin(\theta) \sim \theta$) obtenemos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0 . \quad (6)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0 . \quad (7)$$

Esta ecuación describe un movimiento armónico simple cuya solución analítica para la posición o ángulo es

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \text{ [rad]} \quad (8)$$

y para la velocidad angular

$$\omega(t) = -\omega_0 \theta_0 \sin(\omega_0 t) \text{ [rad/s]} . \quad (9)$$

¹<https://github.com/Blitzman/physics>

III. ÁNGULO, VELOCIDAD ANGULAR Y PERÍODO

Una vez obtenidas las ecuaciones diferenciales que rigen el estado del péndulo en función del tiempo, podemos resolverlas para encontrar $\theta(t)$, $\omega(t)$ y $T(t)$ empleando la rutina `odeint` tal y como se muestra en el Código 1. A dicha rutina le proporcionaremos la función con las derivadas `pendulum` (mostrada en el Código 2), las condiciones iniciales `z_0_`, los pasos de tiempo `t_values_` y los parámetros necesarios para la integración `args=([G, args.l],)` (la constante gravitatoria y la longitud del péndulo).

Posteriormente, del resultado `z_` extraeremos los valores de $\theta(t)$ en `z_[:,0]`, los de $\omega(t)$ en `z_[:,1]` y calcularemos los valores para la tensión empleando los valores anteriores.

```
w_0_ = 0.0
theta_0_ = np.radians(theta_0)
t_values_ = np.linspace(args.t0,
                        args.tf,
                        int((args.tf - args.t0) / args.dt))
z_0_ = [theta_0_, w_0_]
z_ = odeint(pendulum, z_0_, t_values_,
            args=([G, args.l],))

thetas_ = z_[:,0]
omegas_ = z_[:,1]
tension_ = args.m * G * np.cos(z_[:,0]) + \
            args.l * np.square(z_[:,1])
```

Código 1: Parámetros de integración, llamada a rutina `odeint` y extracción de valores de $\theta(t)$, $\omega(t)$ y $T(t)$.

```
def pendulum(y, t, params):
    phi, omega = y
    g, R = params
    derivs = [omega,
              -(g/R)*np.sin(phi)]
    return derivs
```

Código 2: Código de derivadas para `odeint`.

Los resultados para diferentes ángulos iniciales $\theta_0 = \{0,0, 5,0, 10,0, 20,0, 40,0\}$ [rad], $l = 5,0$ [m] y $m = 1,0$ [kg] se muestran en las Figuras 2, 3, 4 para $\theta(t)$, $\omega(t)$ y $T(t)$ respectivamente. En todos los casos $dt = 0,001$ [s], $t_0 = 0$ [s] y $t_f = 10$ [s].

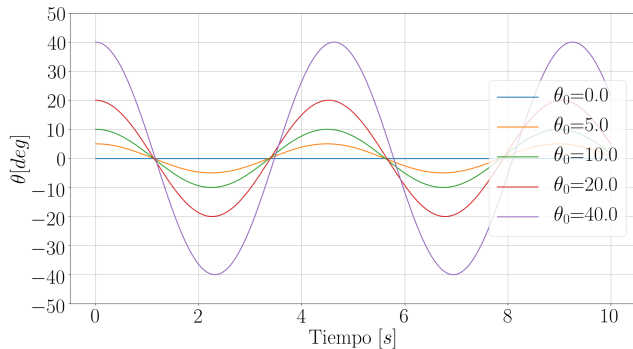


Figura 2: Evolución del ángulo θ con el tiempo para diversos ángulos iniciales θ_0 .

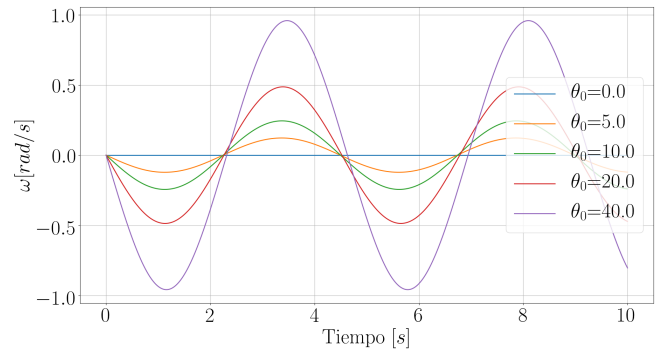


Figura 3: Evolución de la velocidad angular ω con el tiempo para diversos ángulos iniciales θ_0 .

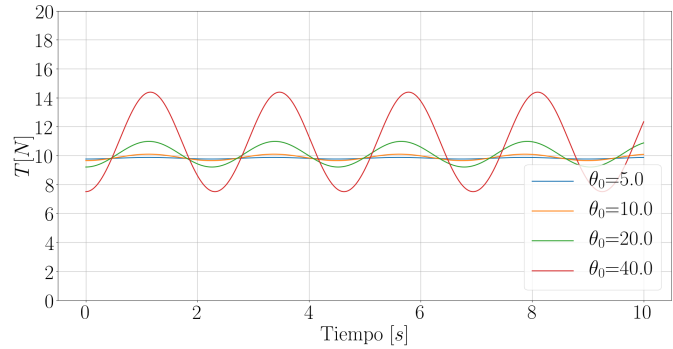


Figura 4: Evolución de la tensión T con el tiempo para diversos ángulos iniciales θ_0 .

IV. ESTUDIO DEL PERÍODO CON LA AMPLITUD

En este primer conjunto de experimentos trataremos de determinar cómo depende el período de la oscilación del péndulo T con la amplitud inicial del mismo θ_0 . Para ello hemos solucionado las ecuaciones diferenciales expuestas anteriormente con la rutina `odeint` con el propósito de obtener la amplitud $\theta(t)$ en cada instante de tiempo y así poder comprobar la evolución de la misma.

Para estos experimentos hemos elegido un tiempo inicial $t_0 = 0$ [s], un tiempo final $t = 10$ [s], un intervalo de tiempo $dt = 0,01$ [s], masa del péndulo $m = 1,0$ [kg], longitud del mismo $l = 5,0$ [m] y siete posibles valores para la amplitud inicial $\theta_0 = \{5, 10, 15, 30, 45, 60, 90\}$ [deg].

La Figura 5 muestra las soluciones obtenidas a medida que incrementamos el valor del ángulo inicial θ_0 . Como podemos observar, para ángulos iniciales pequeños podemos realizar la aproximación $\sin(\theta) \sim \theta$ y calcular su período como $T \sim 2\pi\sqrt{l/g}$. Para el caso que nos ocupa $T \sim 2\pi\sqrt{5/9.8} = 4,48$ [s] y vemos que esta aproximación se cumple para los valores $\theta_0 = \{5, 10, 15\}$. A partir de $\theta_0 = 30$ se comienza a producir una desviación significativa respecto a ese período.

Así pues, podemos concluir con que existe una relación entre la amplitud inicial y el período del péndulo de manera que a medida que la amplitud aumenta también lo hace el propio período $T \propto \theta_0$.

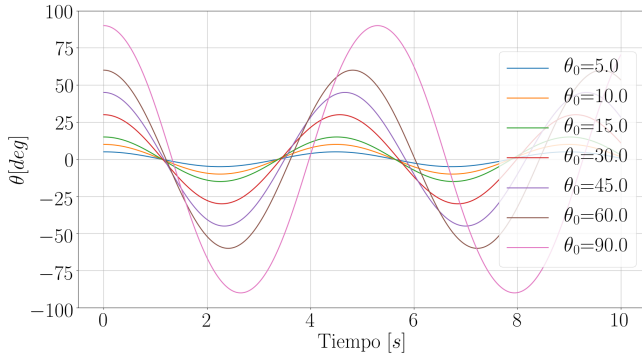


Figura 5: Evolución de la amplitud θ con el tiempo t para diferentes amplitudes iniciales θ_0 . Valores calculados empleando la rutina de integración `odeint`.

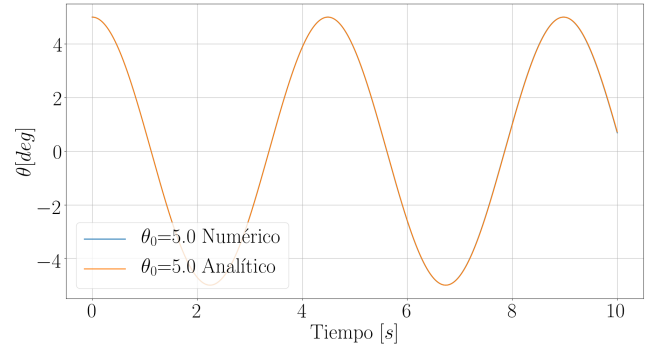


Figura 6: Evolución de la amplitud θ con el tiempo t para amplitud inicial $\theta_0 = 5[deg]$. Valores numéricos calculados empleando la rutina de integración `odeint` y analíticos empleando la aproximación de pequeñas oscilaciones.

V. COMPARACIÓN CON SOLUCIÓN ANALÍTICA

A continuación procederemos a comparar los resultados numéricos con las soluciones analíticas obtenidas empleando la aproximación de pequeñas oscilaciones implementada en el Código 3. Las Figuras 6, 7, 8 y 9 muestran comparativas de los valores de θ para ambas soluciones con diferentes ángulos iniciales θ_0 . Podemos comprobar como la aproximación difiere de los resultados numéricos a medida que el tiempo transcurre, siendo esta diferencia acentuada conforme incrementamos el ángulo inicial θ_0 .

```
def small_angle_approx (theta0, w0, t):
    return theta0 * np.cos(w0 * t)
```

Código 3: Código de aproximación de pequeñas oscilaciones.

La Tabla I muestra el tiempo que transcurre para cada uno de dichos experimentos mostrados en las gráficas hasta que el resultado analítico $\theta_T(t)$ y el numérico $\theta(t)$ difieren en más de un umbral determinado (1 %), es decir $\left| \frac{\theta(t) - \theta_T(t)}{\theta_T(t)} \right| > 0,01$ (ver Código 4).

```
def time_to_diff(tValues,
    thetaNumeric,
    thetaAnalytic, threshold=0.01):

    for i in range(len(thetaNumeric)):
        if abs((thetaNumeric[i] -
            thetaAnalytic[i])/thetaAnalytic[i]) > 0.01:
            return tValues[i]
    return None
```

Código 4: Código de cálculo de discrepancia.

Esta diferencia se puede apreciar también en otra vista proporcionada por la Figura 10, la cual muestra la diferencia angular θ entre ambas soluciones a medida que transcurre el tiempo.

	$\theta_0 = 5$	$\theta_0 = 10$	$\theta_0 = 20$	$\theta_0 = 40$
Tiempo [s]	1,08	0,94	0,64	0,35

Tabla I: Tiempo transcurrido hasta que la solución analítica y la numérica difieren en más de un 1 % para diferentes valores de ángulo inicial $\theta_0 = \{5, 10, 20, 40\}[deg]$.

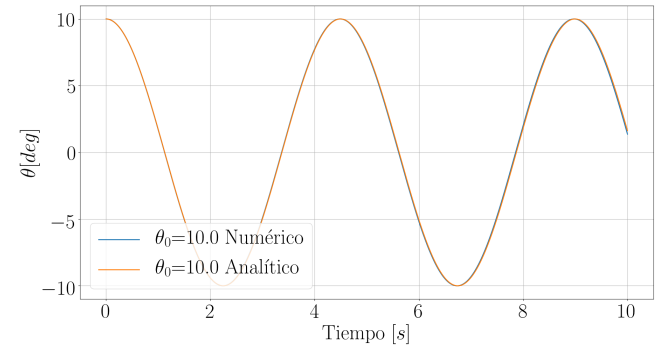


Figura 7: Evolución de la amplitud θ con el tiempo t para amplitud inicial $\theta_0 = 10[deg]$. Valores numéricos calculados empleando la rutina de integración `odeint` y analíticos empleando la aproximación de pequeñas oscilaciones.

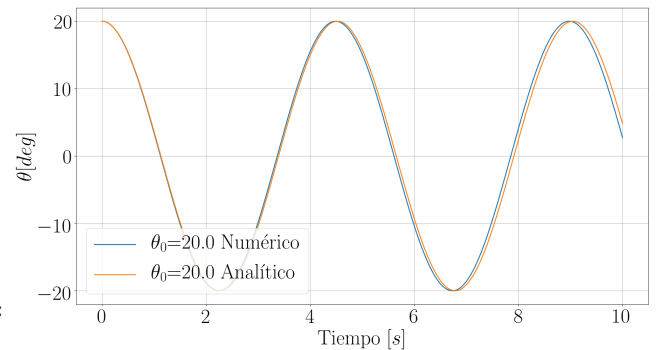


Figura 8: Evolución de la amplitud θ con el tiempo t para amplitud inicial $\theta_0 = 20[deg]$. Valores numéricos calculados empleando la rutina de integración `odeint` y analíticos empleando la aproximación de pequeñas oscilaciones.

Por último, la Figura 11 muestra una comparativa entre la evolución de la tensión para los experimentos anteriores, tanto para los casos numéricos como analíticos. Como se puede comprobar, existe una pequeña discrepancia entre ambas (la cual es causada a su vez por la diferencia entre las posiciones θ obtenidas ya que la propia tensión es dependiente del ángulo del péndulo $T(\theta(t))$).

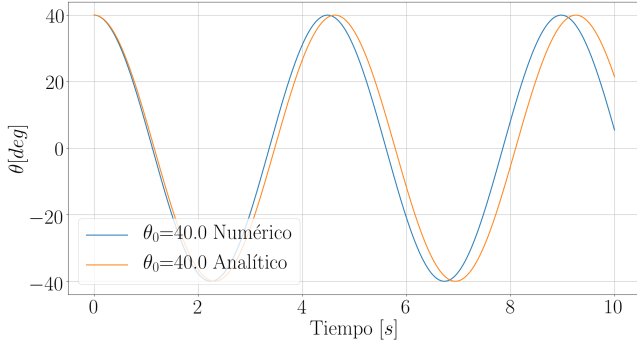


Figura 9: Evolución de la amplitud θ con el tiempo t para amplitud inicial $\theta_0 = 40[\text{deg}]$. Valores numéricos calculados empleando la rutina de integración `odeint` y analíticos empleando la aproximación de pequeñas oscilaciones.

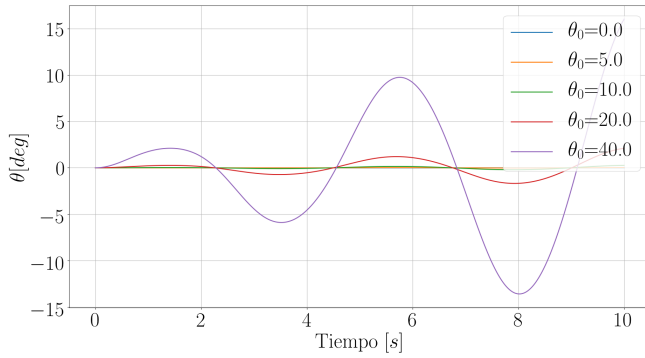


Figura 10: Evolución de la diferencia angular θ entre las soluciones analítica y numérica a lo largo del tiempo para diferentes valores de ángulos iniciales.

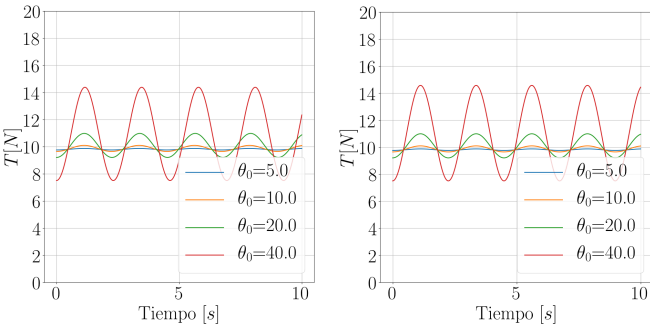


Figura 11: Evolución de la tensión T a lo largo del tiempo para diversos valores iniciales del ángulo $\theta_0 = \{5,0,10,0,20,0,40,0\}$ tanto para la solución numérica (izquierda) como analítica (derecha).

VI. INTRODUCCIÓN DE ROZAMIENTO

Para el último experimento introducimos un término de rozamiento proporcional a la velocidad ($\alpha\omega$) en la ecuación original. El fragmento de Código 5 muestra la implementación del mismo en la función de derivadas para `odeint` empleando un parámetro adicional `alpha` de acuerdo con la ecuación

$$-\frac{g}{l}\sin(\theta) - \alpha\omega. \quad (10)$$

```
def pendulum(y, t, params):
    phi, omega = y
    g, R, alpha = params
    derivs = [omega,
              -(g/R)*np.sin(phi) - alpha * omega]
    return derivs
```

Código 5: Código de derivadas para `odeint`.

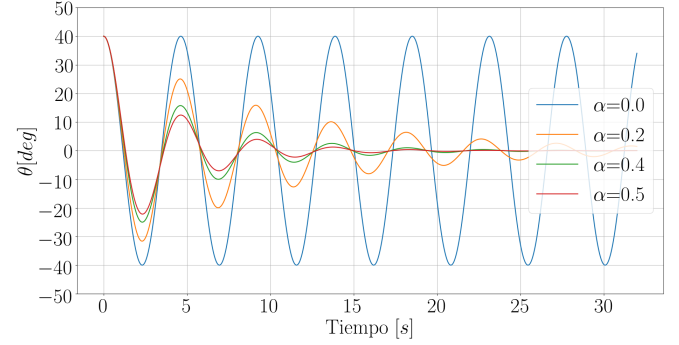


Figura 12: Evolución de la amplitud θ con el tiempo t para diferentes valores del término de rozamiento α con amplitud inicial $\theta_0 = 40 [\text{deg}]$ y masa $m = 1 [\text{kg}]$. Valores calculados empleando la rutina de integración `odeint`.

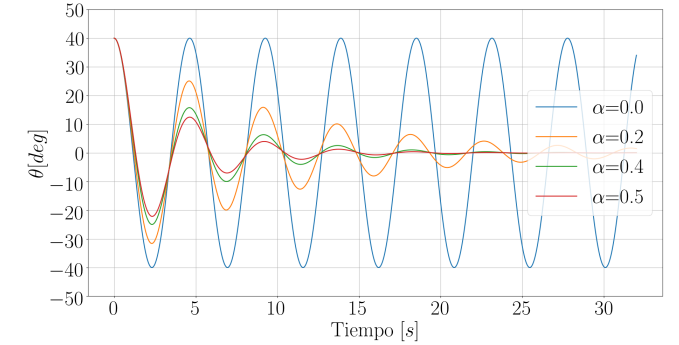


Figura 13: Evolución de la amplitud θ con el tiempo t para diferentes valores del término de rozamiento α con amplitud inicial $\theta_0 = 40 [\text{deg}]$ y masa $m = 5 [\text{kg}]$. Valores calculados empleando la rutina de integración `odeint`.

Las Figuras 12 y 13 muestran el efecto del parámetro α sobre la evolución del ángulo del péndulo θ para distintos valores del término de rozamiento y para masas $m = 1 [\text{kg}]$ y $m = 5 [\text{kg}]$ respectivamente.

Como podemos observar, respecto a los experimentos anteriores, la introducción de este término de rozamiento provoca una disminución gradual de la amplitud de la oscilación (más acusada a medida que incrementamos la magnitud del coeficiente α). Observamos también una disminución en la velocidad w que se ve confirmada en la gráfica de la Figura 14 por lo que el período también disminuye con el tiempo y por lo tanto depende de la constante α en ese sentido. Anteriormente comentamos que, en la aproximación de pequeñas oscilaciones, el período podía expresarse como

$$T = \frac{2\pi}{\omega} [T]. \quad (11)$$

Por completitud, aportaremos la ecuación (la cual podemos derivar de la solución analítica antes expuesta) que permite calcular el período con un ángulo inicial arbitraria

$$T = \frac{4}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{(\cos\theta - \cos\theta_0)}} . \quad (12)$$

Por último, apreciamos que no depende de la masa puesto que hemos demostrado empíricamente que los resultados son idénticos para $m = 1 [kg]$ y $m = 2 [kg]$ tal y como se aprecia en las gráficas anteriores.

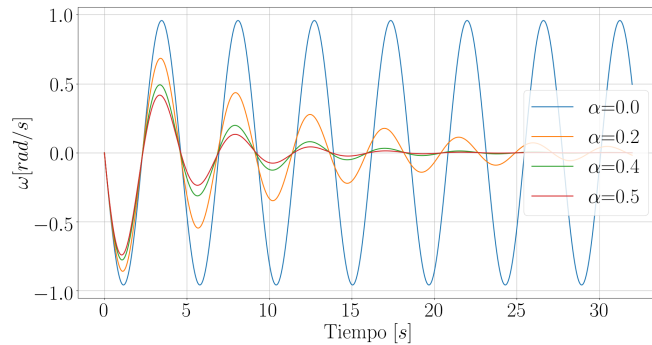


Figura 14: Evolución de la velocidad ω con el tiempo t para diferentes valores del término de rozamiento α con amplitud inicial $\theta_0 = 40 [deg]$ y masa $m = 1 [kg]$. Valores calculados empleando la rutina de integración `odeint`.

VII. CONCLUSIÓN

En esta segunda práctica de la asignatura hemos llevado a cabo un estudio de la oscilación de un péndulo. Para ello derivamos todas las ecuaciones que nos permiten calcular el ángulo θ y la tensión de la cuerda como función del tiempo. Posteriormente implementamos un simulador en Python que emplea la rutina `odeint` para resolver las ecuaciones anteriores y encontrar los valores $\theta(t)$, $\omega(t)$ y $T(t)$. Utilizando dicho simulador estudiamos la variación del período de la oscilación con el ángulo inicial, concluyendo que el mismo aumentaba al incrementar esa amplitud inicial. También comparamos el resultado numérico con el resultado analítico obtenido mediante la aproximación de pequeñas oscilaciones, demostrando que la discrepancia es mínima cuando el ángulo inicial es reducido pero significativa a medida que incrementamos la amplitud inicial. Por último, llevamos a cabo otro conjunto de experimentos introduciendo un término de rozamiento proporcional a la velocidad y demostramos que el período se ve afectado puesto que la velocidad angular disminuye con el tiempo (más rápidamente cuanto mayor sea el coeficiente del término de rozamiento) pero que no depende de la masa del péndulo.

El código Python que implementa los modelos matemáticos así como las rutinas de visualización para la resolución de este ejercicio se adjunta con este informe y además puede ser consultado en el siguiente repositorio online ².

REFERENCIAS

- [1] Tipler, P. A., and Mosca, G. (2007). *Physics for scientists and engineers*. Macmillan.
- [2] Alonso, M., and Finn, E. J. (1967). *Fundamental university physics* (Vol. 2). Reading, MA: Addison-Wesley.
- [3] Halliday, D., Resnick, R., and Walker, J. (2016). *Principles of Physics Extended*. India: Wiley India Pvt. Ltd.
- [4] Ohanian, H. C., and Market, J. T. (2007). *Physics for Engineers and Scientists* Vol. 1. ed: McGraw Hill.

²<https://github.com/Blitzman/physics>