

Práctica 4

Métodos Numéricos y Computación

Python nos permite hacer interpolación mediante splines. Por ejemplo, la librería `interpolate` de `scipy` proporciona las funciones `splrep`, que encuentra la expresión del spline, y `splev`, que evalúa el spline sobre cualquier vector de datos. Más recomendable, sin embargo, es el uso de la función `CubicSpline`, también en `scipy`, ya que podemos calcular los diferentes tipos de splines y obtener los coeficientes de los polinomios cúbicos.

Ejercicio 1 *Dados los puntos:*

| | | | | |
|-------|-----|---|---|-----|
| x_k | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y_k | 0.5 | 4 | 2 | 0.7 |

- Construye el spline cúbico natural ($S''(1) = S''(4) = 0$).
- Construye el spline cúbico de frontera con $S'(1) = 0.3$ y $S'(4) = -0.3$.

Ejercicio 2 *La función de densidad de una distribución normal de probabilidad viene dada por:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

- Aproxima dicha función por un polinomio interpolador de grado cuatro, tomando nodos equiespaciados en el intervalo $[-3, 3]$.
- Aproxima dicha función por un spline cúbico natural tomando los mismos nodos que en el apartado anterior.
- Representa el polinomio y el spline junto a la función y los puntos de interpolación.
- Tabula la diferencia entre la función y el polinomio de interpolación, y entre la función y el spline, para valores de x en $[-3, 3]$ con paso 0.2, para indicar los errores máximos.

Ejercicio 3 *Consideremos la función de Runge en el intervalo $[-5, 5]$:*

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

- Obtén los polinomios de interpolación de grados 5, 7, 9 y 11 tomando nodos equiespaciados en el intervalo $[-5, 5]$.
- Representa los polinomios anteriores junto a la función que aproximan. ¿Al aumentar el número de nodos mejora la aproximación global?
- Compara el polinomio de grado 5 anterior y el obtenido tomando nodos de Chebyshev.
- Aproxima la función mediante un spline de frontera para nueve puntos equiespaciados en el intervalo $[-5, 5]$.

Ejercicio 4 Las diferentes contracciones de un resorte dependiendo de las cargas aplicadas vienen dadas en la tabla siguiente:

| Carga (Kp) | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|------------------|----|-----|-----|-----|-----|
| Contracción (mm) | 49 | 105 | 172 | 253 | 352 |

- Obtén el polinomio de interpolación de grado 2 para estimar la contracción producida por una carga de 13 Kp.
- Utiliza un polinomio interpolador de grado 4 y estima las contracciones del resorte para las cargas 7, 12, 17 y 22.
- Utiliza ahora un spline cúbico y estima las contracciones del resorte para las mismas cargas del apartado anterior.
- Representa en una figura los puntos dados, los dos polinomios interpolantes y el spline.

Ejercicio 5 El número de personas afectadas por el virus contagioso que produce la gripe en una determinada población viene dado por la siguiente función, donde t indica el tiempo en días:

$$f(t) = \frac{100}{2 + 999e^{-2.1t}}.$$

- Aproxima esta función en $[0, 7]$ por polinomios de interpolación de grados 4, 6 y 8, tomando nodos equiespaciados.
- Calcula ahora los polinomios de interpolación tomando nodos de Chebyshev, también de grado 4, 6 y 8.
- Calcula el spline cúbico natural en seis nodos equiespaciados del intervalo $[0, 7]$.
- Calcula el spline cúbico de frontera en seis nodos equiespaciados del intervalo $[0, 7]$.
- Representa la función, los polinomios interpoladores y los splines anteriores junto a los nodos.