

Лекции по дискретной математике.

Титилин Александр

1 Вычислительная геометрия.

Задача 1 *Есть два вектора $p_1 p_2$ с началом в точке $(0, 0)$. Найти направление поворота вектора p_1 по отношению к p_2*

$$\vec{p}_1 = (x_1, y_1).$$

$$\vec{p}_2 = (x_2, y_2).$$

Ищем их векторное произведение

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Знак показывает направление (отрицательный по часовой, иначе против) Если определитель равен нулю, то векторы коллинеарны

Задача 2 *Ломанная $\overline{p_1 p_2 p_3}$ составлена из двух отрезков $\overline{p_1 p_2}$ и $\overline{p_2 p_3}$. В каком направлении осуществляется поворот при переходе через точку p_2 ?*

Считаем векторное произведение $p_1 \vec{p}_2$ и $p_1 \vec{p}_3$ Далее как в прошлой задаче

Задача 3 *Найти выпуклую оболочку заданную множества точек. (Выпуклый многоугольник внутри которого все точки)*

Задача 4 *Два отрезка заданы координатами своих концов. Пересекаются ли они?*

Сначала для каждого отрезка определим ограничивающий прямоугольник (прямоугольник, у которого данный отрезок является диагональю) Если ограничивающие прямоугольники не пересекаются, то и отрезки не пересекаются. Если пересекаются, то проверяем лежат ли $p_1 p_2$ по разные стороны от прямой $p_3 p_4$, и лежат ли $p_3 p_4$ по разные стороны $p_1 p_2$. $p_3 p_4$ лежат по разные стороны от $p_1 p_2$, если $p_1 \vec{p}_3$ и $p_1 \vec{p}_4$ имеют различную ориентацию относительно $p_1 \vec{p}_2$

1.1 Поиск пересекающихся отрезков

Есть множество отрезков, где нет вертикальных и никакие три не пересекаются в одной точке. Надо найти пару пересекающихся отрезков.

С отрезком мы можем делать следующие операции

1. Определить пересекается ли с другим
2. Определитель, какой из двух заданных непересекающихся отрезков данный момент выше относительно другого.

Проводим вертикальную прямую, двигаем ее слева направо и отмечаем изменение порядка ординат точек пересекающих прямую В начале работы все концы отрезков упорядочиваем по абциссам, а для одинаковых абцисс по ординатам. В момент добавления отрезка проверяем, не пересекается ли он с соседними.

При удалении проверяем не пересекаются ли соседние отрезки

Алгоритм находит пару пересекающихся отрезков за $O(n \log n)$

1.2 Алгоритм Грэхема

1. Сначала найдем самую нижнюю точку (если таких несколько, то самую левую из них)
2. Все оставшиеся точки отсортируем по возрастанию полярного угла
3. Рассматриваем точки по очереди, начиная с четвертой. Если поворот от предыдущей точки происходил направо, то предыдущую точку исключаем и повторяем проверку.

Алгоритм находит выпуклую оболочку за $O(n \log n)$

1.3 Алгоритм Джарвиса

1. тоже самое что в прошлом алгоритме
2. На каждом следующем шаге, выбираем из еще не вошедших в оболочку, точку, лежащую в направлении, имеющем минимальный положительный угол по сравнению с предыдущим направлением

Алгоритм Джарвиса становится лучше Грэхема, если количество точек оболочки меньше $\log n$