Реализация и сравнение итерационных стационарных методов решения СЛАУ.

Титилин Александр

СПбГЭУ

Недостатки прямых методов решения СЛАУ

Данную задачу можно решать с помощью метода Гаусса, но это не всегда целесообразно

- асимптотическая сложность $O(n^3)$;
- точное решение получить невозможно, из-за неточности данных или реализации чисел с плавающей запятой.

Рассмотрим СЛАУ $Ax = b$,где A квадратна матрица порядка n, b столбец длины n, x неизвестный столбец. $x^{(i)}$ – i-тое приближение к решению. T – оператор перехода, отображение, которое переводит приближение в следующее

$$x^{(i+1)} = \mathrm{T}\left(x^{(i)}\right).$$

Метод Якоби

Рассмотрим оператор перехода:

$$\mathrm{T}(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} \mathrm{T}_1(X^{(k)}) \\ \mathrm{T}_2(x^{(k)}) \\ \dots \\ \mathrm{T}_n(x^{(k)}) \end{pmatrix},$$

где

$$\mathrm{T}_i(x^{(k)}) = \frac{1}{a_{11}}(b_i - \sum_{i \neq j} a_{ij} x_j^{(k)}).$$

Метод Якоби сходится из любого начального приближения, если матрица A в СЛАУ Ax = b имеет диагональное преобладание.

Метод Гаусса-Зейделя

Рассмотрим Оператор перехода:

$$\mathrm{T}_i(x^{(k)}) = \frac{1}{a_{11}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ii}x^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ii}x^{(k+1)}).$$

Метод Гаусса-Зейделя сходится из любого начального приближения, если матрица A в СЛАУ Ax = b имеет диагональное преобладание или является симметричной и положительно определенной.

Метод Релаксации

Рассмотрим оператор перехода

$$\mathrm{T}_i(x^{(k)}) = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1})(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1} a_{ij}x_j^{(k)}), \ .$$

где $\omega \in \mathbb{R}$ – параметр релаксации. Метод Релаксации сходится из любого начального приближения, если

1. $0 < \omega < 2$;
2. матрица A в СЛАУ $Ax = b$ является положительно определенной.

Метод Ричардсона

Рассмотрим оператор перехода:

$$\mathrm{T}(x^{(k)}) = (E - \tau A)x^{(k)} + \tau b, \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Метод Ричардсона сходится из любого начального приближения с параметром $\tau = \frac{2}{M+\mu}$, M, μ границы спектра матрицы A СЛАУ $Ax = b$, если A является симметричной и положительно определенной.

Использованное программное обеспечение

Для реализации алгоритмов генерации матриц и решения СЛАУ язык программирования Python и следующие библиотеки:

1. numpy – содержит реализации матриц и векторов;
2. scipy – содержит реализации функций линейной алгебры;
3. pandas – содержит реализацию таблиц;
4. matplotlib – необходима для создания графиков;
5. numba – необходима для компиляции, что ускоряет вычисления;

Сравнение методов на матрицах с диагональным преобладанием

Сравнение производилось на случайно сгенерированных матрицах, порядка $k = 100, 200, \ldots, 5100$, сравнилась работа каждого метода с компилящей и без.

Время работы метода Якоби

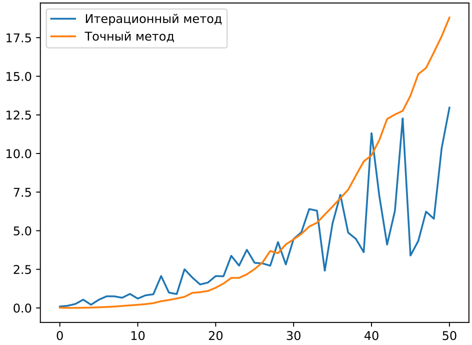

Рис. 1: Метод Якоби без компиляции.

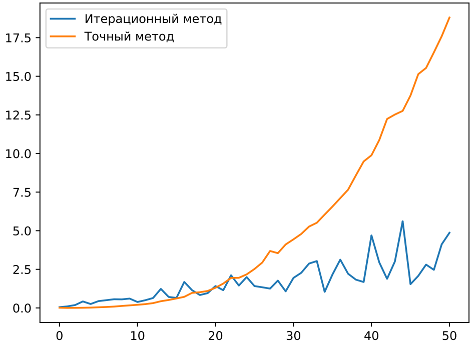

Рис. 2: Метод Якоби с компиляцией.

Время работы метода Гаусса-Зейделя

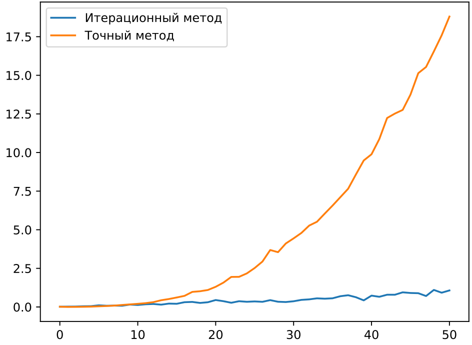

Рис. 3: Метод Гаусса-Зейделя без компиляции

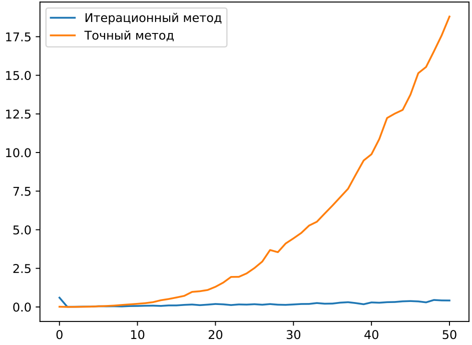

Рис. 4: Метод Гаусса-Зейделя с компиляцией

Время работы метода релаксации с параметром $\omega = 0.3$

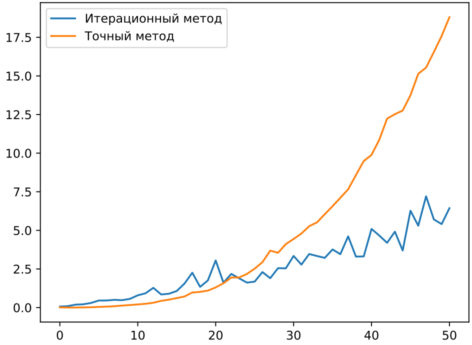

Рис. 5: Метод релаксации с параметром $\omega = 0.3$ без компиляции

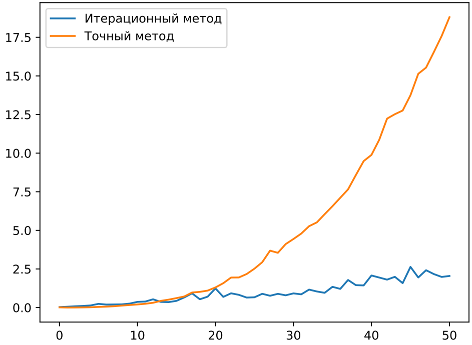

Рис. 6: Метод релаксации с параметром $\omega = 0.3$ с компиляцией

Время работы метода релаксации с параметром $\omega = 0.5$

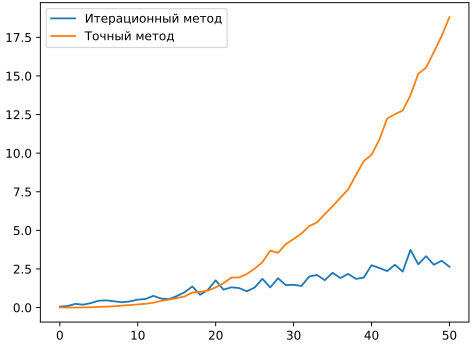

Рис. 7: Метод релаксации с параметром $\omega = 0.5$ без компиляции

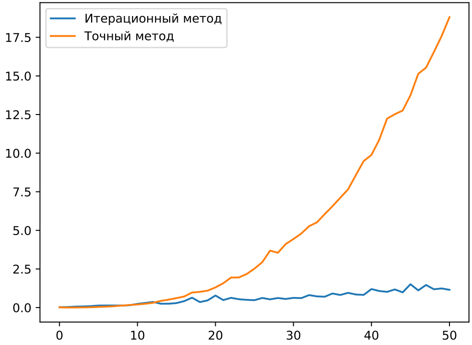

Рис. 8: Метод релаксации с параметром $\omega = 0.5$ с компиляцией

Время работы метода релаксации с параметром $\omega = 1.2$

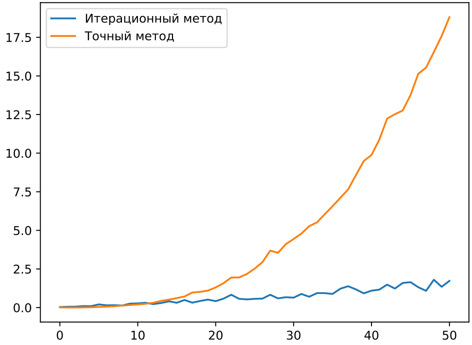

Рис. 9: Метод релаксации с параметром $\omega = 1.2$ без компиляции

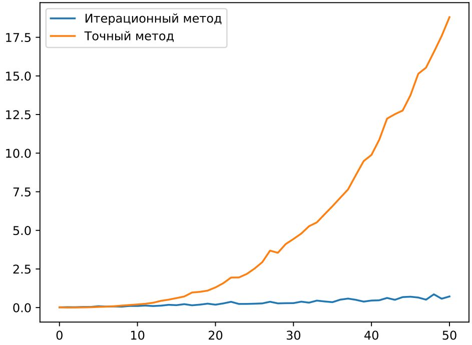

Рис. 10: Метод релаксации с параметром $\omega = 1.2$ с компиляцией

Сравнение точности

	Метод	Норма невязки
0	Якоби	1.8900931867067
1	Гаусса-Зейлделя	0.0157603155325
1	Гаусса-Зейлделя	0.0157603155325
2	Релаксации $\omega = 0.3$	1.5880457538610
3	Релаксации $\omega = 0.5$	1.1047433421861
4	Релаксации $\omega = 1.2$	0.0518924846586

Сравнение методов на случайных симметричных, положительно определенных матрицах

Сравнение производилось на случайно сгенерированных матрицах, порядка $k = 100, 200, \ldots, 2000$.

Время работы метода Гаусса-Зейделя

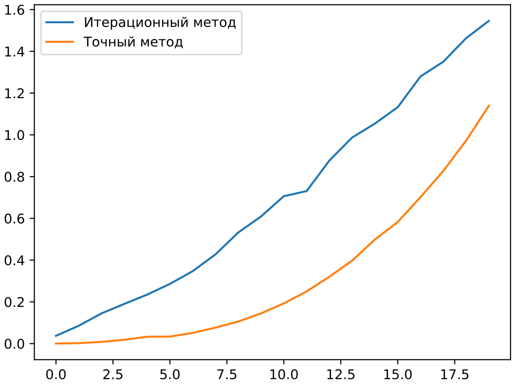

Рис. 11: Метод Гаусса-Зейделя

Время работы метода релаксации с параметром $\omega = 1.5$

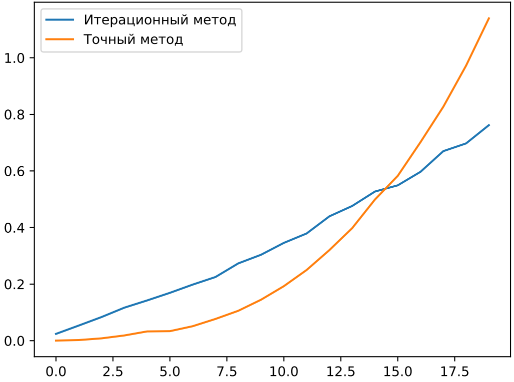

Рис. 12: Метод релаксации с параметром $\omega = 1.5$

Время работы метода Ричардсона

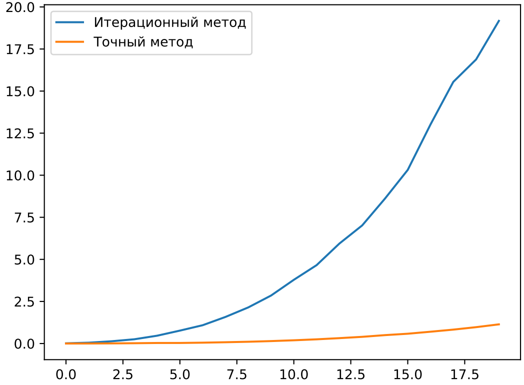

Рис. 13: Метод Ричардсона

Сравнение точности

	Метод	Норма невязки
0	Ричардсона	0.000000959
1	Гаусса-Зейлделя	0.000000492
2	Релаксации $\omega = 1.2$	0.000000297
3	Релаксации $\omega = 1.5$	0.000000224

Сравнение времени работы на матрицах Гилберта

Рассмотрим квадратную матрицу H порядка n, где:

$$H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, i = 1 \dots n, j = 1 \dots n.$$

Данная матрица называется матрицей Гилберта и является плохо обусловленной.

Время работы метода Ричардсона

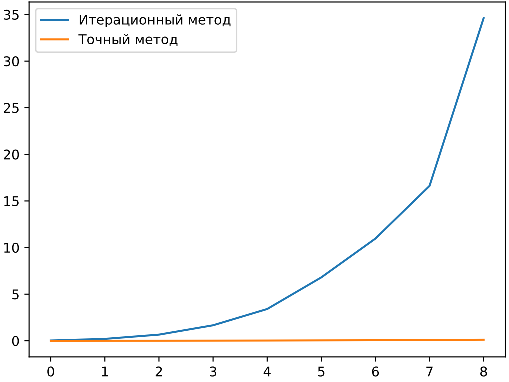

Рис. 14: Метод Ричардсона

Время работы метода Гаусса-Зейделя

Рис. 15: Метод Гаусса-Зейделя

Время работы метода релаксации с параметром $\omega = 1.5$

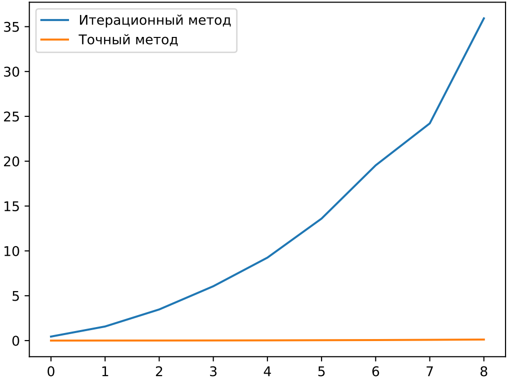

Рис. 16: Метод релаксации с параметром $\omega = 1.5$

Сравнение точности

	Метод	Норма невязки
0	Ричардсона	12937.317224710
1	Гаусса-Зейлделя	11304.976869722
2	Релаксации $\omega = 1.2$	11523.433887224
3	Релаксации $\omega = 1.5$	13225.191335815