Лекции матан

Александр Титилин

Содержание

1 Второе определение предела

Определение 1 $f : D \to \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0 |f(x) - A| < \epsilon.$$

Выполняется вблизи точки a (в пересечении D и проколотой окрестноти точки a).

Тоже самое

Определение 2

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \begin{cases} x \in D \\ x \neq a \\ |x - a| < \delta \end{cases} \implies |f(x) - A| < \epsilon.$$

Равносильность этого определения докажем позже.

1.1 Примеры

1.1.1 Теорема об односторонних пределах

Рассмотрим $f\big|_{(\infty;a)\cap D}$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f\Big|_{(-\infty;a)\cap D}.$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f\Big|_{(a;+\infty)\cap D}.$$

$\forall \epsilon > 0 |f(a) - A| < \epsilon$ выполняется слева вблизи точки a.
$\forall \epsilon > 0 |f(a) - A| < \epsilon$ выполняется справа вблизи точки a.

2 Непрерывная функция

Определение 3 *$f : D \to \mathbb{R}, a \in D$, тогда*

1. *Если a не является предельной точкой множества D, то f по определению считается непрерывной в точкеа.*

2. *Если a предельная точка D,то f непрерывна, если*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Теорема 1 *$f : D \to \mathbb{R}, a \in D$. Следущие условия равносильны.*

1. *f непрерывна в точке a.*

2. $\forall (x_n) x_n \in D \wedge x_n \to a \implies f(x_n) \to f(a)$

3. $\forall \epsilon \exists \delta > 0$

$$\begin{cases} x \in D \\ |x - a| < \delta \end{cases} \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Доказательство

1. $1 \iff 2$

   (a) Если а не предельная точка.

   (b) Если а предельная точка. Возьмем $\forall (x_n)$ такую что, $x_n \in D \wedge x_n \to a$ Если в x_n только конечное число членов равных а,

Определение 4 *f непрерывна слева в точке a, если выполняется одно из условий*

1. $\forall (x_n)$

$$\begin{cases} x_n \in D \\ x_n \leq a \\ x_n \to a \end{cases} \implies f(x_n) \to f(a).$$

2. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta \forall x$

$$\begin{cases} x \in D \\ x \leq a \\ |x - a| < \delta \end{cases} \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

3. $f|_{(-infty;a] \cap D}$ *непрерывна в a.*

Теорема 2 *Пусть D промежуток и a внутренняя точка D. Тогда непрерывна точке a $\iff$ f непрерывна слева в точке a и непрерывна справа в точке a.*

3 Свойства непрерывных функций

Теорема 3 (О локальной ограниченности) *Пусть $f : D \to \mathbb{R}, a \in D$ Функция f непрерывна в точке a. Тогда существует такая окрестность U точки a, что $f|_{U \cap D}$ ограниченная функция. Коротко f ограничена вблизи точки a.*

Упраждение доказать это на языке последовательностей. Так как f непрерывна в точке a, то

$$\forall e > 0 |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Выполняется вблизи точки a, т.е

Теорема 4 (О локальном сохранении знака.) *$f : D \to \mathbb{R}, a \in D$. f непрерывна в a. Если $f(a) > a$, то и вблзи a выполняется $f(x) > 0$. Если $f(a) < 0$, то вблизи a выполняется $f(x) < 0$.*

Пусть $f(a) > 0$ $(f(a) < 0)$ Так как f непрерывна в точке a, то $\forall \epsilon > 0 |f(x) - f(a)| < \epsilon$ выполняется вблизи a

$$f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon.$$

Возьмем за $\epsilon = \frac{f(a)}{2}$.Тогда

$$\frac{f(a)}{2} < f(x).$$