Лекции по математическому анализу.

Александр Титилин

Содержание

1 Предел последовательности.

1.1 Окрестность точки.

Окрестность точки а - это произвольный открытый промежуток, содержащий точку а.

1.2 окрестность

$U_{\epsilon}(a) = (e - a; e + a)$

1.3 Определение предела. Геометрическое

Число a называют пределом последовательности (x_n) если в любой окрестности точки a, содержатся все члены x_n, начиная с некоторого.

1.4 Определение предела. Еще одно

a является пределом x_n, если в любой симметричной последовательности точки a содержатся все члены последовательности начиная с некоторого.

1.5 Определение предела, еще одно с кванторами, нормальное

a является пределом x_n, если

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : \mid x_n - a \mid < \epsilon \Leftrightarrow x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon).$$

1.6 Запись предела

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

1.7 Примеры

1. $a_n = 1$. Предел 1, так как все члены последовательности лежат в окрестности 1.

2. $a_n = \frac{1}{n}$ Предел 0. a,b концы окрестности . $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n \in (a, b)$. $n_0 =$ любое число $> \frac{1}{b}$

3. $x_n = \frac{n}{2n^2+1}$
   (a, b) - окрестность 0.

   $$\exists n_0 \forall n \geq n_0.$$

   Надо доказать, что $x_n < b$

   $$\frac{n}{n^2 + 1} < b.$$

4. $x_n = \frac{2n+1}{3n+2}$ Предел $\frac{2}{3}$

   $$\frac{2n + 1}{3n + 2} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}}.$$

1.8 Единственность предела

Теорема 1. *У сходящийся последовательности есть только 1 предел.*

$$x_n \to a \wedge x_n \to b \implies a = b.$$

Доказательство. Пусть $a < b$. Рассмотрим промежутки $(-\infty, \frac{a+b}{2})$ и $(\frac{a+b}{2}, +\infty)$. $a \in (-\infty, \frac{a+b}{2}) \wedge b \in (\frac{a+b}{2}, +\infty)$ Так как $x_n \to a$ $\exists n_0 \forall n \geq n_0 x_n \in (-\infty, \frac{a+b}{2}), \exists x_1 \forall n \geq n_1 x_n \in (\frac{a+b}{2}, +\infty), n_2 = \max(n_0, n_1)$ □

1.9 Ограниченные последовательности

$$\exists M \forall n \ x_n \leq M.$$

x_n Ограничена сверху.

Теорема 2. *Всякая сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. $x_n \to a$. Рассмотрим окрестность (a - 1,a + 1) ,точки a.

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 \ x_n \in (a-1, a+1).$$

$x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots$ - ограничена □

1.10 Предельный переход в неравенстве

Теорема 3. $(x_n), (y_n)$ *- последовательности такие, что*

$$\forall n : x_n \leq y_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Тогда $a \leq b$

Заметим, что неравенство, выволняется с некоторого n. В условии теоремы нельзя оба знака неравенства заменить на строгие.

Доказательство. От противного. Пусть наши последовательности, такие что $x_n \leq y_n \ \forall n, a > b$ Рассмотрим $(-\infty, \frac{a+b}{2}), (\frac{a+b}{2}, +\infty)$. Первый окресность b, второй окрестность точки a. Так как $x_n \to a$,то

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0 x_n \in (\frac{a+b}{2}, +\infty).$$

$$\exists n_1, \forall n \geq n_1 y_n \in (-\infty, \frac{a+b}{2}).$$

$$n_2 = \max n_0, n_1.$$

Тогда $n \geq n_2$ □

1.11 Теорема о сжатой последовательности.

Теорема 4. $(x_n), (y_n), (z_n)$ *- последовательности такие, что* $\forall\ n x_n \leq y_n \leq z_n$. *Пусть* $x_n \to a, z_n \to a$. *То* $y_n \to a$

Доказательство. Возьмем произвольную окрестность U точки a. Так как $x_n \to a$, то $\exists n_0\ \forall n > n_0 x_n \in U$. $z_n \to a\ \exists n_1 \forall n > n_1 z_n \in U . n_2 = \max{(n_0, n_1)}\ \forall n > n_2 x_n \in U z_n \in U$. Но $x_n \leq y_n \leq z_n$. Значит $y_n \in U$. □

1.12 Арифметические операции над последовательностями

1.12.1 Бесконечно малые последовательности

Последовательность называется бесконечно малой, если ее предел равен 0.

1.12.2

Теорема 5.

$$(x_n), a \in R$$

. Рассмотри последовательность $\alpha_n = x_n - a$. *Тогда* $x_n \to a \leftrightarrow (\alpha_n)$ *бесконечно малая.*

Доказательство.

$$\alpha_n \to 0 \leftrightarrow \forall \epsilon \exists n_0 \forall n \geq n_0 \mid \alpha_n \mid < \epsilon.$$

□

1.12.3 Сумма бесконечно малых последовательностей

Теорема 6. *Сумма бесконечно малых бесконечно малая.*

Доказательство.

$$\mid x_n + y_n \mid \leq \mid x_n \mid + \mid y_n \mid .$$

Возьмем $\forall \epsilon > 0$. Рассмотри $\frac{\epsilon}{2}$.
Так как $x_n \to 0,\ \exists n_1 \forall n \geq n_1, \mid x_n \mid < \frac{\epsilon}{2}$
$y_n \to 0, \exists n_2 \forall n > -n_2 \mid y_n \mid < \frac{\epsilon}{2}$

$$\mid x_n \mid + \mid y_n \mid < \epsilon.$$

□

1.12.4 Произведение бесконечно малой на ограниченную

Теорема 7. *(x_n) - бесконечно малая, (y_n) ограниченная $\to$ $(x_n y_n)$ бесконечно малая.*

Доказательство.

$$\exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \mid x_n \mid < \frac{\epsilon}{C}.$$

$$\exists C > 0 \forall n \mid y_n \mid < C.$$

$$\mid x_n y_n \mid = \mid x_n \mid\mid y_n \mid < \epsilon.$$

□

1.12.5 Теорема о пределе суммы последовательности

Теорема 8. *Если*

$x_n \to a.$

$$y_n \to b.$$

То

$$x_n + y_n \to a + b.$$

Доказательство. $\alpha_n = x_n - a$, $\beta_n = y_n - b$ бесконечно малые. Рассмотрим сумму этих последовательностей $(x_n + y_n) - (a + b) = \alpha_n + \beta_n$. Вторая сумма бесконечно малая, следовательно $x_n + y_n \to a + b$ □

1.12.6 Теорема о пределе произведения последовательностей

Теорема 9. *Если $x_n \to a, y_n \to b$ то $x_n y_n \to ab$*

$$x_n y_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n.$$

Три последних слагаемых бесконечно малые.

1.12.7 Теорема о пределе частного

Теорема 10. *Если $y_n \to b$, $\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \to 0$*

Доказательство.

$$\frac{b - y_n}{y_n - b} = (b - y_n)\frac{1}{b}\frac{1}{y_n}.$$

Достаточно доказать, что $\frac{1}{y_n}$ ограничена. □

Теорема 11. *Если $x_n \to a, y_n \to b, \forall n \; y_n \neq 0, b \neq_0$, тогда $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$*

1.12.8 Предел квадратного корня

Теорема 12. *$x_n \; \forall n \; x_n \geq 0 a \in R x_n \to a$ тогда $\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$*

2 Подпоследовательность

2.1 Определение

(x_n) - числовая последовательность. Выбираем любую строго возрастающую последовательность натуральных чисел $(n_1 < n_2 < n_3 \dots)$. Рассматриваем последовательность с элементами $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots x_{n_k} \dots$

2.2

Теорема 13. *Из всякой последовательности можно выбрать монотонную подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть x_n последовательность, у которой нет возрастающей подпоследовательности. Тогда докажем, что нее есть убывающая подпоследовательность. Если нет возрастающей подпоследовательность, то есть член, все члены с индексами больше него, строго меньше него. Назовем его x_{n_1}. Рассмотри такую подпоследовательность $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots,$ в ней нет возрастающей подпоследовательности (в противном случае она возрастающая). Раз это так, то в ней есть x_{n_2}, Такой что все члены раньше него меньше него. Мы построили убывающую последовательность. □

2.3 Теорема Вейерштрасса

Теорема 14. *Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

Доказательство. (x_n) возрастает. Пусть A - это множество значений последовтельности (x_n). $A \neq \emptyset$. A ограниченно сверху. Пусть $\alpha = \sup A$. По свойству супремума $\forall \epsilon > 0 \exists x_{n_0}$ такой что $\alpha - x_{n_0} < \epsilon$. Тогда $\forall n \geq n_0$ $\alpha - x_n < \epsilon \implies | x_n - \alpha | < \epsilon x_n \to \alpha$ Для убывающей самим надо. □

2.4 Принцип выбора

Теорема 15. *Из любой ограниченной последовательность, сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. В полслова. Пусть x_n - ограниченная последовательность. По теореме 13 есть монотонная подпоследовательность, по теореме 14 нужная подпоследовательность имеет предел.

Другое □

3 Примеры

1.
$$x_n = \frac{2n+5}{3n-7} = \frac{2+\frac{5}{n}}{3-\frac{7}{n}} \to \frac{2}{3}.$$

2.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

3.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

4.

$$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}.$$

Пусть $x_n \to a$.

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \to a.$$

$$a = \sqrt{2+a}.$$

$$a = 2.$$

Доказываем существание предела. Последовательность строго возрастает. Ограничена по теореме 14.

5.

$$x_n = \frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n_1} = 1-\frac{1}{n+1}.$$

6. $x_n = q^n$, если $\mid q \mid < 1$, то $x_n \to 0$. Нужно доказать, что $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \mid x_n \mid < \epsilon$

$$\mid q \mid^n < \epsilon.$$

$$n > \log_{|q|} \epsilon.$$

7. (x_n) последовательнось положительных чисел. Пусть $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to c < 1$. Тогда $x_n \to 0$

Следствие 15.1.

$$\mid q \mid < 1, q^n \to 0.$$

$$x_n = \mid q \mid^n \ \frac{x_{n+1}}{x_n} = \mid q \mid \to \mid q \mid < 1.$$

$$\mid q \mid^n \to 0.$$

Следствие 15.2.

$$x_n = \frac{a^n}{n!}.$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n+1}.$$

Следствие 15.3. $a > 1$

$$x_n = \frac{n^k}{a^n}.$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^k}{a} < 1.$$

Доказательство. 7

$$c < 1.$$

Рассмотри произвольное q, такое что $c < q < 1$. Рассмотрим промежуток $(-\infty, q)$, это окрстность точки c. Так как отношение стремится к c, то $\exists n_0 \forall n \geq n \frac{x_{n+1}}{x_n} \in (-\infty, q)$

$$\frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}} < q.$$

$$\frac{x_{n_0+2}}{x_{n_0+1}} < q.$$

$$\frac{x_{n_0+k}}{x_{n_0+k+1}} < q.$$

Перемножили все.

$$\frac{x_{n_0+k}}{x_{n_0}} < q^k.$$

$$0 < x_{n_0+k} < x_{n_0} * q^k.$$

По 1.11

$$x_{n_0+k} \to 0.$$

□

4 Неравенство Бернулли по индукции

$$(1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a).$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + a + na + na^2.$$

$$1 + a + na + na^2 > 1 + a + na.$$

5

Теорема 16. $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ *имеет предел.*

Доказательство. Докажем, что (x_n) возрастает.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{(n^2+2n)^{n+1}}{((n+1)^2)^{n+1}} * \frac{n+1}{n}.$$

$$(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1})^{n+1} * \frac{n+1}{n} = (1 - \frac{1}{n^2+2n+1}) * \frac{n+1}{n} > 1 - (n+1)\frac{1}{n^2+2n+1} * \frac{n+1}{n}.$$

$$= (1 - \frac{1}{n+1}) * \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n+1} * \frac{n+1}{n} = 1.$$

Докажем, что последовательность ограниченна сверху.

$$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k * 1 + \frac{1}{n}^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-k))}{n^k} * \frac{1}{k!}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots * (1 - \frac{k-1}{n}) * \frac{1}{k!} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots \frac{1}{n!} < .$$

$$< 1 + (1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \dots + (\frac{1}{n})^{n-1}) < 3.$$

По 14 последовательность имеет предел, назовем его e. □

6

$$x_n \to b.$$

$$a > 0, a \neq 1.$$

$$a^{x_n} \to a^b.$$

7

$$x_n > 0.$$

$$x_n \to b > 0.$$

$$\log_a x_n \to \log_a b.$$

8

$$\alpha > 0.$$

$$x_n \to b \implies x_n^\alpha \to b^\alpha.$$

9

Теорема 17.

$$|\sin x| = |x|.$$

Доказательство. При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ Картинку потом нарисую. □

10

Теорема 18.

$$x_n \to b \implies \sin x_n \to \sin a.$$

Доказательство.

$$\sin x_n - \sin a \to 0.$$

$$|\sin x_n - \sin a| = |\sin \frac{x_n - a}{2} \cos \frac{x_n + a}{2}| \le 2 \, |\frac{x_n - a}{2}| = |x_n - a| \, .$$

$$0 \le |\sin x_n - \sin a| \le |x_n - a| \, .$$

По 1.11 $\sin x_n \to \sin a$ □

11 Задачка

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n+3}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{2}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty} ((1 + \frac{2}{n+1})^{\frac{n+1}{2}})^{\frac{2n}{n+1}}.$$

Тупо 1 добавили и вычли.

12

$$(1 + \frac{1}{n})^n \to e.$$

$$x_n = \frac{1}{n} \to 0.$$

$$(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e.$$

13

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0.$$

14 Бесконечно большие последовательности

Попробуем дать точный смысл записи $x_n \to +\infty, x_n \to -\infty, x_n \to \infty$.

14.1

$$x_n \to +\infty \iff \forall C \; \exists n_0 \; \forall n \ge n_0 x_n > C.$$

14.2

$$x_n \to -\infty \iff \forall C \; \exists \; n_0 \; \forall n > n_0 \; x_n < C.$$

14.3

$$x_n \to \infty \iff | x_n | \to +\infty.$$

14.4

Теорема 19. *Пусть* (x_n) *такова, что* $\forall x_n \neq 0$, *тогда* (x_n) *- бесконечно большая* $\iff \frac{1}{x_n}$ *бесконечно малая.*

Доказательство.

$$x_n \to +\infty \iff \forall C \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; | x_n | > C.$$

$$\frac{1}{x_n} \to 0 \iff \forall \epsilon \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \frac{1}{| x_n |} < \epsilon.$$

$$| x_n | > \frac{1}{\epsilon}.$$

□

15 Расширеннная прямая

$\overline{R}$ - это $R \cup \{+\infty, -\infty\}$

$$-\infty < \infty.$$

$$a \in R, \; -\infty < a < +\infty.$$

16 Предел функций.

16.1 Предельная точка

$X \subset R, a \in X$. Точка a называется предельной точкой множества X, если в любой окрестности точки a, есть хотя бы одно число из X, отличное от a.

16.2

Теорема 20. *a - предельная точка множества* $D \iff$ *Если существует* (x_n) *точек множества* D *отличных от a, такая что* $x_n \to a$

Доказательство.

1. Пусть a предельная точка D. Смотрим промежуток $(a-1; a+1)$. Рассмотрим $x_1 \in (a-1; a+1), x_1 \neq a, x_1 \in D$. $x_2 \in (a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}), x_2 \neq a, x_2 \in D$. И так далее, мы построили последовательность такую, что $\forall x_n \in D, xx_n \neq a, a - \frac{1}{n} < x_n < a + \frac{1}{n}$. По 1.11 $x_n \to a$
2. Пусть (x_n) такова, что $x_n \in D, x_n \neq a, x_n \to a$. Взяли произвольну окрестностность a $\exists n_0 \; x_{n_0} \in U(a)$

□

16.2.1 Пример

Возьмем $D = [0;1)$. Найдем все его предельные точки. Это все точки из $[0;1)$

16.2.2 Пример

Возьмем за $D = [0;1) \cup \{2\}$.

16.3 Определение предела функции

Пусть $f : D \to R$, a - предельная точка множества D. Число A называется пределом функции f в точке a, если $\forall (x_n)$

$$\begin{cases} \forall x_n \neq a \\ \forall x_n \in D \\ x_n \to a \end{cases} \implies f(x_n) \to A.$$

16.4 Запись предела функции

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

16.5

Пусть $\lim_{x \to a} f(x) = A \wedge \lim_{x \to a} f(x) = B$

16.6

Теорема 21. *$f : D \to R$,a предельная точка множества D. U - окрестность точки a, тогда предел функции в точке существует $\iff$ существует предел на сужении $D \cap U$*

16.7 Теорема о предельном переходе в неравенстве

Теорема 22. *$f, g : D \to R$, a предельная точка множества D.*

$$\forall x \in D f(x) \leq f(x).$$

$$\exists \lim_{x \to a} f(x), \lim_{n \to a} g(x).$$

Тогда $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$

16.8

Теорема 1.11, но про пределы функции.

16.9 Теорема о пределе суммы, произведения и частного

Пусть $f, g : D \to R$,а предельна точка множества D. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} g(x) = b$ Тогда

1. $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$
2. $\lim_{x\to a} f(x) * g(x) = A * B$
3. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, g(x) \neq 0, B \neq 0$

17