Лекции по математическому анализу.

Александр Титилин

Содержание

1 Предел последовательности.

1.1 Окрестность точки.

Окрестность точки a - это произвольный открытый промежуток, содержащий точку a.

1.2 окрестность

$U_\epsilon(a) = (e - a; e + a)$

1.3 Определение предела. Геометрическое

Число a называют пределом последовательности (x_n) если в любой окрестности точки a, содержатся все члены x_n, начиная с некоторого.

1.4 Определение предела. Еще одно

a является пределом x_n, если в любой симметричной последовательности точки a содержатся все члены последовательности начиная с некоторого.

1.5 Определение предела, еще одно с кванторами, нормальное

а является пределом x_n, если

$$\forall\epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : \mid x_n - a \mid < \epsilon \Leftrightarrow x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon).$$

1.6 Запись предела

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

1.7 Примеры

1. $a_n = 1$. Предел 1, так как все члены последовательности лежат в окрестности 1.
2. $a_n = \frac{1}{n}$ Предел 0. a,b концы окрестности . $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n \in (a, b)$. $n_0 =$ любое число $> \frac{1}{b}$
3. $x_n = \frac{n}{2n^2+1}$
   (a, b) - окрестность 0.
   $$\exists n_0 \forall n \geq n_0.$$
   Надо доказать, что $x_n < b$
   $$\frac{n}{n^2+1} < b.$$
4. $x_n = \frac{2n+1}{3n+2}$ Предел $\frac{2}{3}$
   $$\frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}.$$

1.8 Единственность предела

Теорема 1. *У сходящийся последовательности есть только 1 предел.*

$$x_n \to a \wedge x_n \to b \implies a = b.$$

Доказательство. Пусть $a < b$. Рассмотрим промежутки $(-\infty, \frac{a+b}{2})$ и $(\frac{a+b}{2}, +\infty)$. $a \in (-\infty, \frac{a+b}{2}) \wedge b \in (\frac{a+b}{2}, +\infty)$ Так как $x_n \to a$ $\exists n_0 \forall n \geq n_0 x_n \in (-\infty, \frac{a+b}{2}), \exists x_1 \forall n \geq n_1 x_n \in (\frac{a+b}{2}, +\infty), n_2 = \max(n_0, n_1)$ □

1.9 Ограниченные последовательности

$$\exists M \forall n \; x_n \leq M.$$

x_n Ограничена сверху.

Теорема 2. *Всякая сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. $x_n \to a$. Рассмотрим окрестность (a - 1,a + 1) ,точки a.

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 \; x_n \in (a-1, a+1).$$

$x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots$ - ограничена □

1.10 Предельный переход в неравенстве

Теорема 3. $(x_n), (y_n)$ *- последовательности такие, что*

$$\forall n : x_n \leq y_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Тогда $a \leq b$

Заметим, что неравенство, выволняется с некоторого n. В условии теоремы нельзя оба знака неравенства заменить на строгие.

Доказательство. От противного. Пусть наши последовательности, такие что $x_n \leq y_n\ \forall n, a > b$ Рассмотрим $(-\infty, \frac{a+b}{2}), (\frac{a+b}{2}, +\infty)$. Первый окресность b, второй окрестность точки a. Так как $x_n \to a$,то

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0 x_n \in (\frac{a+b}{2}, +\infty).$$

$$\exists n_1, \forall n \geq n_1 y_n \in (-\infty, \frac{a+b}{2}).$$

$$n_2 = \max n_0, n_1.$$

Тогда $n \geq n_2$ □

1.11 Теорема о сжатой последовательности.

Теорема 4. $(x_n), (y_n), (z_n)$ *- последовательности такие, что* $\forall\ n x_n \leq y_n \leq z_n$. *Пусть* $x_n \to a, z_n \to a$. *То* $y_n \to a$

Доказательство. Возьмем произвольную окрестность U точки a. Так как $x_n \to a$, то $\exists n_0\ \forall n > n_0 x_n \in U$. $z_n \to a\ \exists n_1 \forall n > n_1 z_n \in U. n_2 = \max{(n_0, n_1)}\ \forall n > n_2 x_n \in U z_n \in U$. Но $x_n \leq y_n \leq z_n$. Значит $y_n \in U$. □

1.12 Арифметические операции над последовательностями

1.12.1 Бесконечно малые последовательности

Последовательность называется бесконечно малой, если ее предел равен 0.

1.12.2

Теорема 5.

$$(x_n), a \in \mathbb{R}$$

. Рассмотри последовательность $\alpha_n = x_n - a$. *Тогда* $x_n \to a \leftrightarrow (\alpha_n)$ *бесконечно малая.*

Доказательство.

$$\alpha_n \to 0 \leftrightarrow \forall \epsilon \exists n_0 \forall n \geq n_0 \mid \alpha_n \mid < \epsilon.$$

□

1.12.3 Сумма бесконечно малых последовательностей

Теорема 6. *Сумма бесконечно малых бесконечно малая.*

Доказательство.
$$\mid x_n + y_n \mid \leq \mid x_n \mid + \mid y_n \mid .$$

Возьмем $\forall \epsilon > 0$. Рассмотри $\frac{\epsilon}{2}$.
Так как $x_n \to 0,\ \exists n_1 \forall n \geq n_1, \mid x_n \mid < \frac{\epsilon}{2}$
$y_n \to 0, \exists n_2 \forall n > -n_2 \mid y_n \mid < \frac{\epsilon}{2}$

$$\mid x_n \mid + \mid y_n \mid < \epsilon.$$

□

1.12.4 Произведение бесконечно малой на ограниченную

Теорема 7. (x_n) *- бесконечно малая,* (y_n) *ограниченная* $\to$ $(x_n y_n)$ *бесконечно малая.*

Доказательство.
$$\exists n_0\ \forall n \geq n_0 \mid x_n \mid < \frac{\epsilon}{C}.$$
$$\exists C > 0 \forall n \mid y_n \mid < C.$$
$$\mid x_n y_n \mid = \mid x_n \mid \mid y_n \mid < \epsilon.$$

□

1.12.5 Теорема о пределе суммы последовательности

Теорема 8. *Если*

$x_n \to a.$
$$y_n \to b.$$

То
$$x_n + y_n \to a + b.$$

Доказательство. $\alpha_n = x_n - a$, $\beta_n = y_n - b$ бесконечно малые. Рассмотрим сумму этимх последовательностей $(x_n + y_n) - (a + b) = \alpha_n + \beta_n$. Вторая сумма бесконечно малая, следовательно $x_n + y_n \to a + b$ □

1.12.6 Теорема о пределе произведения последовательностей

Теорема 9. *Если* $x_n \to a, y_n \to b$ *то* $x_n y_n \to ab$

$$x_n y_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n.$$

Три последних слагаемых бесконечно малые.

1.12.7 Теорема о пределе частного

Теорема 10. *Если* $y_n \to b$, $\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \to 0$

Доказательство.

$$\frac{b - y_n}{y_n - b} = (b - y_n)\frac{1}{b}\frac{1}{y_n}.$$

Достаточно доказать, что $\frac{1}{y_n}$ ограничена. □

Теорема 11. *Если* $x_n \to a, y_n \to b, \forall n\ y_n \neq 0, b \neq_0$, *тогда* $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$

1.12.8 Предел квадратного корня

Теорема 12. $x_n\ \forall n\ x_n \geq 0 a \in \mathbb{R} x_n \to a$ *тогда* $\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$

2 Подпоследовательность

2.1 Определение

(x_n) - числовая последовательность. Выбираем любую строго возрастающую последовательность натуральных чисел $(n_1 < n_2 < n_3 \dots)$. Рассматриваем последовательность с элементами $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots x_{n_k} \dots$

2.2

Теорема 13. *Из всякой последовательности можно выбрать монотонную подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть x_n последовательность, у которой нет возрастающей подпоследовательности. Тогда докажем, что нее есть убывающая подпоследовательность. Если нет возрастающей подпоследовательность, то есть член, все члены с индексами больше него, строго меньше него. Назовем его x_{n_1}. Рассмотри такую подпоследовательность $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$, в ней нет возрастающей подпоследовательности (в противном случае она возрастающая). Раз это так, то в ней есть x_{n_2}, Такой что все члены раньше него меньше него. Мы построили убывающую последовательность. □

2.3 Теорема Вейерштрасса

Теорема 14. *Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

Доказательство. (x_n) возрастает. Пусть A - это множество значений последовтельности (x_n). $A \neq \emptyset$. A ограниченно сверху. Пусть $\alpha = \sup A$. По свойству супремума $\forall \epsilon > 0 \exists x_{n_0}$ такой что $\alpha - x_{n_0} < \epsilon$. Тогда $\forall n \geq n_0\ \alpha - x_n < \epsilon \implies |\ x_n - \alpha\ | < \epsilon x_n \to \alpha$ Для убывающей самим надо. □

2.4 Принцип выбора

Теорема 15. *Из любой ограниченной последовательность, сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. В полслова. Пусть x_n - ограниченная последовательность. По теореме 13 есть монотонная подпоследовательность, по теореме 14 нужная подпоследовательность имеет предел.

Другое □

3 Примеры

1. $$x_n = \frac{2n+5}{3n-7} = \frac{2+\frac{5}{n}}{3-\frac{7}{n}} \to \frac{2}{3}.$$

2. $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

3. $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

4. $$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}.$$

   Пусть $x_n \to a$.

   $$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \to a.$$

   $$a = \sqrt{2+a}.$$

   $$a = 2.$$

   Доказываем существание предела. Последовательность строго возрастает. Ограничена по теореме 14.

5. $$x_n = \frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n_1} = 1-\frac{1}{n+1}.$$

6. $x_n = q^n$, если $\mid q \mid < 1$, то $x_n \to 0$. Нужно доказать, что $\forall\epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \mid x_n \mid < \epsilon$

   $$\mid q \mid^n < \epsilon.$$

   $$n > \log_{|q|}\epsilon.$$

7. (x_n) последовательнось положительных чисел. Пусть $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to c < 1$. Тогда $x_n \to 0$

Следствие 15.1.

$$| q |< 1, q^n \to 0.$$

$$x_n =| q |^n \ \frac{x_{n+1}}{x_n} =| q |\to| q |< 1.$$

$$| q |^n\to 0.$$

Следствие 15.2.

$$x_n = \frac{a^n}{n!}.$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n+1}.$$

Следствие 15.3. $a > 1$

$$x_n = \frac{n^k}{a^n}.$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^k}{a} < 1.$$

Доказательство. 7

$$c < 1.$$

Рассмотри произвольное q, такое что $c < q < 1$. Рассмотрим промежуток $(-\infty, q)$, это окрстность точки c. Так как отношение стремится к c, то $\exists n_0 \forall n \geq n \frac{x_{n+1}}{x_n} \in (-\infty, q)$

$$\frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}} < q.$$

$$\frac{x_{n_0+2}}{x_{n_0+1}} < q.$$

$$\frac{x_{n_0+k}}{x_{n_0+k+1}} < q.$$

Перемножили все.

$$\frac{x_{n_0+k}}{x_{n_0}} < q^k.$$

$$0 < x_{n_0+k} < x_{n_0} * q^k.$$

По 1.11

$$x_{n_0+k} \to 0.$$

□

4 Неравенство Бернулли по индукции

$$(1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a).$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + a + na + na^2.$$

$$1 + a + na + na^2 > 1 + a + na.$$

5

Теорема 16. *$x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ имеет предел.*

Доказательство. Докажем, что (x_n) возрастает.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{(n^2+2n)^{n+1}}{((n+1)^2)^{n+1}} * \frac{n+1}{n}.$$

$$(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1})^{n+1} * \frac{n+1}{n} = (1-\frac{1}{n^2+2n+1}) * \frac{n+1}{n} > 1-(n+1)\frac{1}{n^2+2n+1} * \frac{n+1}{n}.$$

$$= (1-\frac{1}{n+1}) * \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n+1} * \frac{n+1}{n} = 1.$$

Докажем, что последовательность ограниченна сверху.

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k * 1 + \frac{1}{n}^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-k))}{n^k} * \frac{1}{k!}.$$

$$\sum_{k=0}^{n}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\dots*(1-\frac{k-1}{n}) * \frac{1}{k!} < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

$$= 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\dots\frac{1}{n!} < .$$

$$< 1+(1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\dots+(\frac{1}{n})^{n-1}) < 3.$$

По 14 последовательность имеет предел, назовем его e. □

6

$$x_n \to b.$$

$$a > 0, a \neq 1.$$

$$a^{x_n} \to a^b.$$

7

$$x_n > 0.$$

$$x_n \to b > 0.$$

$$\log_a x_n \to \log_a b.$$

8

$$\alpha > 0.$$

$$x_n \to b \implies x_n^\alpha \to b^\alpha.$$

9

Теорема 17.

$$\mid \sin x \mid = \mid x \mid .$$

Доказательство. При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ Картинку потом нарисую. □

10

Теорема 18.

$$x_n \to b \implies \sin x_n \to \sin a.$$

Доказательство.

$$\sin x_n - \sin a \to 0.$$

$$\mid \sin x_n - \sin a \mid = \mid \sin \frac{x_n - a}{2} \cos \frac{x_n + a}{2} \mid \leq 2 \mid \frac{x_n - a}{2} \mid = |x_n - a \mid .$$

$$0 \leq \mid \sin x_n - \sin a \mid \leq \mid x_n - a \mid .$$

По 1.11 $\sin x_n \to \sin a$ □

11 Задачка

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n+3}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{2}{n+1})^n = \lim_{n\to\infty} ((1 + \frac{2}{n+1})^{\frac{n+1}{2}})^{\frac{2n}{n+1}}.$$

Тупо 1 добавили и вычли.

12

$$(1 + \frac{1}{n})^n \to e.$$

$$x_n = \frac{1}{n} \to 0.$$

$$(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e.$$

13

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0.$$

14 Бесконечно большие последовательности

Попробуем дать точный смысл записи $x_n \to +\infty, x_n \to -\infty, x_n \to \infty$.

14.1

$$x_n \to +\infty \iff \forall C \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 x_n > C.$$

14.2

$$x_n \to -\infty \iff \forall C \; \exists \; n_0 \; \forall n > n_0 \; x_n < C.$$

14.3

$$x_n \to \infty \iff \mid x_n \mid \to +\infty.$$

14.4

Теорема 19. *Пусть* (x_n) *такова, что* $\forall x_n \neq 0$, *тогда* (x_n) *- бесконечно большая* $\iff \frac{1}{x_n}$ *бесконечно малая.*

Доказательство.

$$x_n \to +\infty \iff \forall C \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \mid x_n \mid > C.$$

$$\frac{1}{x_n} \to 0 \iff \forall \epsilon \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \frac{1}{\mid x_n \mid} < \epsilon.$$

$$\mid x_n \mid > \frac{1}{\epsilon}.$$

□

15 Расширенная прямая

$\overline{\mathbb{R}}$ - это $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

$$-\infty < \infty.$$

$$a \in \mathbb{R}, \; -\infty < a < +\infty.$$

16 Предел функций.

16.1 Предельная точка

$X \subset \mathbb{R}, a \in X$. Точка a называется предельной точкой множества X, если в любой окрестности точки a, есть хотя бы одно число из X, отличное от a.

16.2

Теорема 20. *a - предельная точка множества* $D \iff$ *Если существует* (x_n) *точек множества* D *отличных от a, такая что* $x_n \to a$

Доказательство.

1. Пусть a предельная точка D. Смотрим промежуток $(a-1; a+1)$. Рассмотрим $x_1 \in (a-1; a+1), x_1 \neq a, x_1 \in D$. $x_2 \in (a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}), x_2 \neq a, x_2 \in D$. И так далее, мы построили последовательность такую, что $\forall x_n \in D, xx_n \neq a, a - \frac{1}{n} < x_n < a + \frac{1}{n}$. По 1.11 $x_n \to a$

2. Пусть (x_n) такова, что $x_n \in D, x_n \neq a, x_n \to a$. Взяли произвольну окрестностность a $\exists n_0 \; x_{n_0} \in U(a)$

□

16.2.1 Пример

Возьмем $D = [0; 1)$. Найдем все его предельные точки. Это все точки из $[0; 1)$

16.2.2 Пример

Возьмем за $D = [0; 1) \cup \{2\}$.

16.3 Определение предела функции

Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, a - предельная точка множества D. Число A называется пределом функции f в точке a, если $\forall (x_n)$

$$\begin{cases} \forall x_n \neq a \\ \forall x_n \in D \\ x_n \to a \end{cases} \implies f(x_n) \to A.$$

16.4 Запись предела функции

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

16.5

Пусть $\lim_{x \to a} f(x) = A \wedge \lim_{x \to a} f(x) = B$

16.6

Теорема 21. *$f : D \to \mathbb{R}$,a предельная точка множества D. U - окрестность точки a, тогда предел функции в точке существует $\iff$ существует предел на сужении $D \cap U$*

16.7 Теорема о предельном переходе в неравенстве

Теорема 22. *$f, g : D \to \mathbb{R}$, a предельная точка множества D.*

$$\forall x \in D f(x) \leq f(x).$$

$$\exists \lim_{x \to a} f(x), \lim_{n \to a} g(x).$$

Тогда $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$

16.8

Теорема 1.11, но про пределы функции.

16.9 Теорема о пределе суммы, произведения и частного

Пусть $f, g : D \to \mathbb{R}$,a предельна точка множества D. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} g(x) = b$ Тогда

1. $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$
2. $\lim_{x\to a} f(x) * g(x) = A * B$
3. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, g(x) \neq 0, B \neq 0$

17 Композиция функций для вещественных функций

$$f : D \to \mathbb{R}.$$
$$g : E \to \mathbb{R}.$$
$$f(D) \subset E.$$
$$g \circ f = g(f(x)).$$

17.1 Примеры

$$F(x) = \sin^2 x.$$
$$f(x) = \sin x.$$
$$g(x) = x^2.$$
$$g \circ f = F.$$
$$f \circ g = \sin x^2.$$

18 Предел композиции.

Теорема 23. *$f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$. Пусть $f(D) \subset E$. предлеьная точка множества D и $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Пусть b предельная точка множества E и $\lim_{t\to b} g(t) = c$. Пусть выполняется одно из двух условий.*

1. *$\exists U$ точки a, такая что $\forall x \neq a \in U \cap D, f(x) \neq b$*
2. *$\lim_{t\to b} g(t) = g(b)$.*

Тогда $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$

Доказательство. Пусть 1 верно, мы хотим доказать, что $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$ Возьмем $\forall(x_n)$ такую что $x_n \in D, x_a \neq ax_n \to a$

$$t_n = f(x_n).$$
$$t_n \to b.$$

Нужно проверить, что $g(f(x_n)) \to c$.

$$\ldots.$$

□

18.1 Пример

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}.$$

$$3x = t.$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin t}{t/3} = 3\frac{\sin t}{t}.$$

19 Однострнние пределы.

Теорема 24. *D - промежуток, $f : D \to \mathbb{R}$, a предельная точка. $\lim_{x \to a} f(x)$ сущесвтует $\iff$ оба односторонних предела существуют и они равны друг другу.*

20 Вычисление пределов

20.1

$\lim_{x \to c} a^x = a^c$

Доказательство. 1. $a > 1$

$$a^x - a^c = a^c(a^{x-c} - 1).$$

Докажем, что $a^{x-c} - 1 \to 0, x \to c$

$$t = x - c.$$

$$\lim_{t \to 0}(a^t - 1) = 0?.$$

Докажем, что $a^{t_n} - 1 \to 0$

$$\forall \epsilon > 0 \exists o \forall n \geq n_0 1 - \epsilon < a^{t_n} < 1 + \epsilon.$$

$$\log_a (1 - \epsilon) < t_n < \log_a (1 + \epsilon).$$

Рассcмотрим промежуток $(\log_a (1 - \epsilon); \log_a (1 + \epsilon))$

□

Теорема 25. $\lim_{x \to c} \log_a x = \log_a c$

Теорема 26. $\lim_{x \to c} x^a = c^a$

Доказательство.

$$x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}.$$

$$\lim_{x \to c} e^{a \ln x}.$$

$$g(x) = e^x.$$

$$f(x) = a \ln x.$$

По теореме 18 $\lim_{x \to c} f(x) = a \ln c$. $\lim_{x \to a \ln c} g(x) = g(a \ln c) = e^{a \ln c} = c^a$ □

Теорема 27. $\lim_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

Доказательство. $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$x_n = \frac{1}{t_n}, t_n \to +\infty.$$

$$(1+\frac{1}{t_n})^{t_n} \to e??.$$

Докажем, что это справедливо для последовательностей, где t_n состоит из натуральных чисел, по 28. Теперь в общем случае.

(t_n) - любая последовательность $\to +\infty$. Нужно доказать, что $(1+\frac{1}{t_n})^{t_n} \to e$

$$[t_n] \le t_n < [t_n] + 1.$$

$$\frac{1}{[t_n]+1} < \frac{1}{t_n} \le 1\frac{1}{[t_n]}.$$

$$1 + \frac{1}{[t_n]+1} < 1 + \frac{1}{t_n} \le 1 + \frac{1}{[t_n]}.$$

$$(1+\frac{1}{[t_n]+1})^{t_n} < 1 + (\frac{1}{t_n})^{t_n} \le (1+\frac{1}{[t_n]})^{t_n}.$$

Докажем, что левый предел тоже e.

$$\forall (x_n) \text{ Такой что } \begin{cases} x_n > -1 \\ x_n < 0 \\ x_n \to 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим последовательность $t_n = -\frac{1}{x_n} > 0, t_n \to 0$

$$(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = (1-\frac{1}{t_n})^{-t_n} = (\frac{t_n}{t_n - 1})^{t_n} = (1+\frac{1}{t_n-1})^{t_n-1}(1+\frac{1}{t_n-1}).$$

□

Лемма 28. *$f : (a, +\infty] \to \mathbb{R}$. Пусть $f(n) \to A$. Тогда для $\forall$ последовательность натуральных чисел $t_n \to +\infty$ выполняется $f(t_n) \to A$.*

Доказательство. $\forall \epsilon > 0$ неравенство $|f(n) = a| < \epsilon$ для почти всех натуральных чисел. Тогда $\forall \epsilon > 0 \mid f(t_n) \to A \mid$

□

Теорема 29. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Доказательство.

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

□

Теорема 30. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

Доказательство.

$$t = a^x + 1.$$

$$x = \log_a(1+t).$$

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{t}{\log_a 1 + t}.$$

□

Теорема 31. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$

Доказательство.

$$(1+x)^\alpha - 1 = t.$$

$$\frac{t}{x} = \frac{t}{\ln(1+t)} * \frac{\ln(1+t)}{x} = \alpha.$$

□

Теорема 32. $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$

Теорема 33. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Доказательство. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

□

21 Сравнение роста функций

21.1

Теорема 34.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0.$$

$$a > 1, \alpha > 0.$$

Доказательство. Досточно доказать для натурального логорифма, так как $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Мы знаем, что $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0$ □

Теорема 35. $\mid a \mid < 1, \lim_{x\to+\infty} a^x = 0$

22 Другое определение предела.

Определение 1. $f : D \to \mathbb{R}$, *a предельная точка множества D. A называется пределом f точке a, если*

$$\forall\epsilon > 0 |f(x) - A| < \epsilon.$$

Выполняется в некоторой проколотой окрестности точки a (т.е открестноть точки a без a).

22.1 Примеры употребления термина "вблизи"

22.1.1

Неравенство $x < 1$ выполняется вблизи 0.

22.1.2

Неравенство $\frac{x^2}{x} < 1$ выполняется вблизи 0.

23 Непрерывная функция

f называется непрерывной в точке a.

1. Если a предельная точка множества D $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
2. иначе f непрерывна в точке a

$f : D \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке a, если

$$\forall x_n \begin{cases} x_n \in D \\ x_n \to a \end{cases} .$$

выполняется $f(x_n) \to f(a)$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

$$|f(x) - A| < \epsilon \iff f(x) \in (A - \epsilon; A + \epsilon).$$

f непрерывна в a, если $\forall$ окрестность V точки $f(a)$ Найдется такая окрестность U точки a, такая что множество значений f на U лежит в V.

24 Арифметические действия над непрерывными функциями

Теорема 36.

$$f, g : D \to \mathbb{R}, a \in D.$$

f и g непрерывны в точке a. Тогда

1. *$f + g$ непрерывна в точке a.*
2. *fg непрерывна в точке a.*
3. *$\forall x \in D g(x) \neq 0$ то $\frac{f}{g}$ непрерывны в точке a.*

Теорема 37.

$$f : D \to \mathbb{R}.$$

$$g : E \to \mathbb{R}.$$

$$f(D) \subset E.$$

Пусть $a \in D$, f непрерывна в точке a, g непрерывна в точке $f(a)$. Тогда $f \circ g$ непрерывна в точке a.

Доказательство. Если а изолированная точка, то по определению. Если а предельная точка вычисляем предел композиции.

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(f(a)).$$

$$x_n \to a.$$

f непрерывна в a, $f(x_n) \to f(a)$
g непрерывна в $f(a)$, $g(f(x_n)) \to f(a)$ □

25 Разрыв первого рода

Если односторонниие пределы конечные числа и не равны друг другу - функция имеет разрыв первого рода.

26 Разрыв второго рода

Если один из односторонних пределов бесконечность или не существует, то функция имеет разрыв второго рода.

27

Теорема 38. *Если функция задана на промежутке и непрерывна в каждой точке промежутка, то и обратная функция непрерывна.*

28 Теорема Больцано

Теорема 39 (О промежуточном значении)**.** *Пусть функция f задана на промежутке и непрерывна, тогда множеством значений функции является промедуток.*

$$\forall a, b \in D \ \forall C.$$

C лежит между $f(a)$ и $f(b)$ Тогда $\exists c \in [a, b]$, что $f(c) = C$

Доказательство. Достаточно доказать, что $\forall a, b \in D$ таких, что $a < b$ и $f(a) \neq f(b)$ $\forall C$ строго между $f(a), f(b)$. $\exists c$, таких , что $a < c < b$ и $f(c) = C$. Начнем с частного случая.

1. Пусть $f(a) < 0, f(b) > 0$, тогда $\exists c \in (a, b)$, такой, что $f(c) = 0$

   f принимает на разных концах, разных знаков, на левом отрцательное на правом положительное. Обозначим их A_1, B_1. Делим промежуток пополам, либо значение в середине ноль, либо делим снова и так далее.

2. Пусть $f(a) < f(b)$, $f(a) < c < f(b)$ Рассмотрим новую функцию, $g(x) = f(x) - C$

   $$g(a) = f(a) - C < 0.$$

   $$g(b) = f(b) - C > 0.$$

   По пункту 1, $\exists c$ $a < c < b$ $g(c) = 0 f(c) = c$

□

29 Теорема Вейрештрасса

Теорема 40 (о наименьшем и наибольшем значении.). *Пусть функции f задана на ограниченном замкнутом промежутке и непрерывна, тогда функция принимает на этом промежутке наибольшее и наименьшее значение.*

Доказательство. Пусть f не ограниченна сверху, тогда $\forall n \exists x_n f(x_n) > n$. Получили последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots$ ограничена, из любой ограниченной можно выбрать сходящуюся подпоследовательность , ее предел равен C. Рассматриваем последовательность $f(x_1), f(x_2), f(x_3) \to C$.

$$n_1 < n_2 < \dots.$$

$$f(x_1) > n_1.$$

$$f(x_2) > n_2.$$

Докажем, что у f есть наибольшее значение, f ограничено сверху. Пусть $C = \sup\{f(x) \mid x \in [a;b]\}$. Нужно доказать $\exists x_0 \in [a;b]$, такое что $f(x_0) = C$

Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{1}{C - f(x)}$. Она непрерывная на отрезке $[a;b]$. $\exists M \forall x \in [a,b] g(x) < M$

$$\frac{1}{C - f(x)} < M.$$

$$f(x) < C - \frac{1}{M}.$$

Противоречие, так как C супремум. □

30 Дифференциальное исчисление.

30.1 Определение касательной.

Определение 2 (Производная).

$$f : D \to \mathbb{R}.$$

$$a \in D.$$

Рассмотрим функцию, заданую на $D \backslash \{a\}$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Касательной к графику f в точке с абциссой a называется прямая, проходящая через эту точку и имеющия коэффициет $f'(a)$

30.2 Производная

$$x - a = h.$$

$$x = h + a.$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

31 Дифференцируемсть

Определение 3 (Дифферинцируемая функция)**.**

$$f : D \to \mathbb{R}, a \in D.$$

f называют дифференцируемой в точке a, если $\exists C$ и функция α, заданная в некоторой окрестности нуля. α задана на множестве все чисел h таких что $a + h \in D$ и $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$

$$f(a + h) - f(a) = ch + \alpha(h)h.$$

Теорема 41.

$$f : D \to \mathbb{R}, a \in D.$$

Тогда f дифференцируема в точке $a \iff f$ имеет в точке a конечную производную.

Доказательство. 1. $\to$

$$f(a + h) - f(a) = ch + \alpha(h)h.$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) + f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}(C + \alpha(h)) = C.$$

2. $\leftarrow$ Пусть имеет в точке a конечную производную

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a) = \alpha(h).$$

$$\alpha(0) = 0.$$

Можно считать, что равна чему угодно.

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a) + \alpha(h).$$

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a) + \alpha(a)h.$$

□

$$a + h = x.$$

$$f(x) - f(a) = c(x - a) + \alpha(x - a)(x - a).$$

$$\alpha(x - a) = \beta(x).$$

$$\lim_{x\to a} \beta(x) = 0.$$

$$f(x) - f(a) = c(x - a) + \beta(x)(x - a) = (x - a)(c + \beta(x)).$$

$$c + \beta(x) = \phi(x).$$

$$f(x) - f(a) = \phi(x)(x - a).$$

$$\beta(a) = \alpha(0) = 0.$$

$$\phi(a) = c.$$

$$\lim_{x \to a} \phi(x) = c.$$

$$\lim_{x \to a} \phi(x) = \phi(a).$$

Мы доказали, что если а дифференцируема в точке а, то существует функция, которая непрерывна в точке а, такая, что равенство

$$f(x) - f(a) = \phi(x)(x - a).$$

$$\phi(a) = f'(a).$$

31.1 Упражнение

Пусть существует ϕ, заданаая на множестве D, такая что ϕ непрерывна в точке а и имеет место равенство $f(x) - f(a) = \phi(x)(x - a)$ и пусть $\phi(a) = c$. Тогда f дифференцируема в точке а и $f'(a) = c$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \phi(x) = \phi(a) = c.$$

31.2

$$f : D \to \mathbb{R}.$$

Следущие условия равносильны

1. f имеет в точке а конечную производную $f'(a)$
2. f дифференцируема в точке а
3. Существует функция ϕ заданная на D, такая что $f(x) - f(a) = \phi(x)(x - a)$. ϕнепрерывна

Теорема 42.

$$f : D \to \mathbb{R}, \in D.$$

Если f дифференцируема в точке а, то она непрерывна.

Доказательство.

$$f(x) - f(a) = \phi(x)(x - a).$$

$$f(x) = f(a) + \phi(x)(x - a).$$

Константа + непрерывная функция. □

31.3 Производная суммы

Теорема 43.

$$f, g : D \to \mathbb{R}, a \in D.$$

f, g дифференцируемы в точке a. Тогда $f + g$ дифференцируема в точке a и $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

Доказательство.

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \alpha(h)h.$$

$$g(a+h) - g(a) = g'(a) * h + \beta(h)h.$$

$$(f+g)(a+h) - (f+g)(a) = (f'(a) + g'(a))h + (\alpha(h) + \beta(h))h.$$

□

Доказательство.

$$f(x) - f(a) = \phi(x)(x-a).$$

ϕ непрерывна в точке a.

$$g(x) - g(a) = \psi(x)(x-a).$$

$$(f+g)(x) - (f+g)(a) = (\phi(x) + \psi(x))(x-a).$$

$f+g$ дифференцируемы в точке a и $f'(a) + g'(a) = \phi(a) + \psi(a) = f'(a) + f'(a)$ □

Теорема 44.

$$(fg)'(a) = f'(a)g(x) + f(a)g'(a).$$

Первым способом самим

Доказательство.

$$f(x) = f(a) + \phi(x)(x-a).$$

$$g(x) = g(a) + \psi(x)(x-a).$$

$$(fg)(x) = f(a)g(a) + f(a)(\psi(x))(x-a) + g(a)\psi(x)(x-a) + \phi(x)\psi(x)(x-a)^2.$$

$$(fg)(x) - (fg)(a) = (f(a)\psi(x) + g(a)\phi(x) + \phi(x)\psi(x)(x-a))(x-a).$$

□

Теорема 45 (О производной композиции)**.**

$$f : D \to \mathbb{R}.$$

$$g : E \to \mathbb{R}.$$

$$f(D) \subset E.$$

Пусть $a \in D, b = f(a) \in E$. f дифферинцируема в точке a, g дифферинцируема в точке b. Тогда $g \circ f$ дифференцируема в точке a.

$$(g \circ f)'(a) = f'(b) * f'(a).$$

Доказательство. Так f дифф в точке a, то $f(x) - f(a) = \phi(x)(x-a)$ Так как g диф в точке a, то $g(y) - g(b) = \psi(y)(y-b)$

$$\phi(a) = f'(a).$$

$$\psi(b) = g'(b).$$

$$(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) = g(f(x)) - g(f(a)) = \psi(f(x))(f(x) - f(a))) - (\psi \circ f)(x) * \phi(x)(x-a).$$

□

31.4 Примеры

1.
$$f(x) = \sin x.$$
$$f'(x) = \cos x.$$
$$h(x) = \sin 3x = f(g(x)).$$
$$g(x) = 3x.$$
$$h'(x) = f'(g(x)) * g'(x).$$
$$h' = 3\cos 3x.$$

2.
$$h(x) = \sin(x^2 + 5x).$$
$$h'(x) = \cos x^2 + 5x(2x + 5).$$

31.5 Теорема о производной частного

Теорема 46. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}, g : D \to \mathbb{R}, a \in D$, $g \neq 0$ Обе функции дифференцируемы в точке a, тогда $\frac{f}{g}$ дифф в точке a и*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(a)g(a) - f(a)f'(a)}{g^2(a)}.$$

Доказательство. 1.
$$g(x) = x, f(x) = 1.$$
$$(\frac{f}{g})'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = -\lim_{x\to a} \frac{1}{ax} = -\frac{1}{a^2}.$$

2.
$$\frac{1}{g} = h \circ g.$$
$$(\frac{1}{g})'(a) = (h \circ g)(a) = h'(g(a)) * g'(a) = -\frac{1}{g^2(a)}g'(a).$$

3.
$$\frac{f}{g} = f * \frac{1}{g}.$$

□

31.6 Производная обратной функции.

Теорема 47.

$$f : D \to \mathbb{R}.$$

f обратима.

$$f'(a) \neq 0, b = f(a).$$

Обратная функция к f непрерывна в точке b.

$$f^{-1}(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Доказательство.

$$(f^-1)(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\frac{(f(x) - f(y))}{x - a}} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Примеры

$$f(x) = \sin x, f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

$$(f^{-1})(b) = \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\cos(\arcsin b)} = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}}.$$

$$\cos^2(\arcsin b) = 1 - \sin^2 \arcsin b = 1 - b^2.$$

$$\cos(\arcsin b) = \sqrt{1 - b^2}.$$

31.7 Вычисление производных.

1. $f(x) = C$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0.$$

2. $f(x) = x^\alpha$, $x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} = \lim_{x \to a} = \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x - a}.$$

$$x - a = h.$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(a + h)^\alpha - a^\alpha}{h} = \lim_{h \to 0} a^\alpha (\frac{(\frac{a+h}{a})^\alpha - 1}{h}).$$

$$t = \frac{h}{a}.$$

$$a^\alpha \lim_{t \to 0} \frac{(1 + t)^\alpha - 1}{t} * \frac{1}{a} = \alpha * a^{\alpha - 1}.$$

3.

$$f(x) = a^x.$$

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{c+h} - a^c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^c * a^h - a^c}{h}.$$

$$a^c \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^c \ln a.$$

4.
$$f(x) = \log_a x.$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \frac{\log_a (1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x \ln a}.$$

5.
$$f(x) = \ln(-x).$$
$$f'(x) = \frac{1}{-x} * -1 = \frac{1}{x}.$$

6.
$$f(x) = \sin x.$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x + h - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos x + \frac{h}{2}}{h} = \cos x.$$

7.
$$f(x) = \cos x.$$
$$f(x) = \sin (\frac{\pi}{2} - x).$$
$$f'(x) = -\cos (\frac{\pi}{2} - x) = -\sin x.$$

8.
$$f(x) = \operatorname{tg} x.$$
$$(\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

9.
$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

10.
$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

11.
$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

32 Гиперболические функции

1. Гиперболический синус
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$
2. Гиперболический косинус
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
3. Гиперболический тангенс
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$
$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x.$$
$$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x.$$

32.1 Точки экстремума

Определение 4 (Точка экстреммума)**.**

$$f : D \to \mathbb{R}.$$

$$a \in D.$$

1. *а называется точкой строгого минимума функции f, если существует окрестность U точки а, лежащая в D, такая что $\forall x \in U, x \neq a, f(x) > f(a)$*

2. *точкой минимума функции f, если $\forall x \in U, x \neq a, f(x) \geq f(a)$*

3. *точкой строгого максиума, если $\forall x \in U f(x) < f(a)$*

4. *точка называется точкой экстренума, если она является точкой максимума или минимума.*

5. *точка называется точкой строгого экстренума, если она являестя точкой строгого максимума или точкой строгого минимума.*

Теорема 48 (Теорема Ферма)**.** *а точка экстренума функции f. Если f дифференцируема в точке а, то $f'(x) = 0$*

Доказательство. Доказательство проведем в случае, когда а, точка максимума. $\exists U$ окрестность точки а, такое, что $\forall x \in U\ f(x) \leq f(a)$.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$$f(x) - f(a) \leq 0.$$

Если $x > a$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

□