

# Лекции по математическому анализу.

Александр Титилин

## Содержание

<b>1</b>	<b>Предел последовательности.</b>	<b>3</b>
1.1	Окрестность точки. . . . .	3
1.2	окрестность . . . . .	3
1.3	Определение предела. Геометрическое . . . . .	3
1.4	Определение предела. Еще одно . . . . .	3
1.5	Определение предела, еще одно с кванторами, нормальное . .	3
1.6	Запись предела . . . . .	3
1.7	Примеры . . . . .	3
1.8	Единственность предела . . . . .	4
1.9	Ограниченные последовательности . . . . .	4
1.10	Предельный переход в неравенстве . . . . .	4
1.11	Теорема о сжатой последовательности. . . . .	4
1.12	Арифметические операции над последовательностями . . . . .	5
1.12.1	Бесконечно малые последовательности . . . . .	5
1.12.2	. . . . .	5
1.12.3	Сумма бесконечно малых последовательностей . . . . .	5
1.12.4	Произведение бесконечно малой на ограниченную . . . .	5
1.12.5	Теорема о пределе суммы последовательности . . . . .	6
1.12.6	Теорема о пределе произведения последовательностей	6
1.12.7	Теорема о пределе частного . . . . .	6
1.12.8	Предел квадратного корня . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Подпоследовательность</b>	<b>6</b>
2.1	Определение . . . . .	6
2.2	. . . . .	7
2.3	Теорема Вейерштрасса . . . . .	7
2.4	Принцип выбора . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Примеры</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Неравенство Бернулли по индукции</b>	<b>9</b>
<b>5</b>		<b>9</b>
<b>6</b>		<b>10</b>
<b>7</b>		<b>10</b>
<b>8</b>		<b>10</b>

<b>9</b>	<b>10</b>
<b>10</b>	<b>10</b>
<b>11 Задача</b>	<b>10</b>
<b>12</b>	<b>11</b>
<b>13</b>	<b>11</b>
<b>14 Бесконечно большие последовательности</b>	<b>11</b>
14.1 . . . . .	11
14.2 . . . . .	11
14.3 . . . . .	11
14.4 . . . . .	11
<b>15 Расширенная прямая</b>	<b>11</b>
<b>16 Предел функций.</b>	<b>12</b>
16.1 Предельная точка . . . . .	12
16.2 . . . . .	12
16.2.1 Пример . . . . .	12
16.2.2 Пример . . . . .	12
16.3 Определение предела функции . . . . .	12
16.4 Запись предела функции . . . . .	12
16.5 . . . . .	12
16.6 . . . . .	12
16.7 Теорема о предельном переходе в неравенстве . . . . .	13
16.8 . . . . .	13
16.9 Теорема о пределе суммы, произведения и частного . . . . .	13
<b>17 Композиция функций для вещественных функций</b>	<b>13</b>
17.1 Примеры . . . . .	13
<b>18 Предел композиции.</b>	<b>14</b>
18.1 Пример . . . . .	14
<b>19 Одностронние пределы.</b>	<b>14</b>
<b>20 Вычисление пределов</b>	<b>14</b>
20.1 . . . . .	14
<b>21 Сравнение роста функций</b>	<b>17</b>
21.1 . . . . .	17
<b>22 Другое определение предела.</b>	<b>17</b>
22.1 Примеры                      употребления                      термина                      "вблизи	17
22.1.1 . . . . .	17
22.1.2 . . . . .	17

# 1 Предел последовательности.

## 1.1 Окрестность точки.

Окрестность точки  $a$  - это произвольный открытый промежуток, содержащий точку  $a$ .

## 1.2 окрестность

$$U_\epsilon(a) = (a - \epsilon; a + \epsilon)$$

## 1.3 Определение предела. Геометрическое

Число  $a$  называют пределом последовательности  $(x_n)$  если в любой окрестности точки  $a$ , содержатся все члены  $x_n$ , начиная с некоторого.

## 1.4 Определение предела. Еще одно

$a$  является пределом  $x_n$ , если в любой симметричной последовательности точки  $a$  содержатся все члены последовательности начиная с некоторого.

## 1.5 Определение предела, еще одно с кванторами, нормальное

$a$  является пределом  $x_n$ , если

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |x_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon).$$

## 1.6 Запись предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

## 1.7 Примеры

1.  $a_n = 1$ . Предел 1, так как все члены последовательности лежат в окрестности 1.
2.  $a_n = \frac{1}{n}$  Предел 0.  $a, b$  концы окрестности.  $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n \in (a, b)$ .  
 $n_0 = \text{любое число} > \frac{1}{b}$
3.  $x_n = \frac{n}{2n^2+1}$   
 $(a, b)$  - окрестность 0.

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0.$$

Надо доказать, что  $x_n < b$

$$\frac{n}{n^2+1} < b.$$

4.  $x_n = \frac{2n+1}{3n+2}$  Предел  $\frac{2}{3}$

$$\frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}}.$$

## 1.8 Единственность предела

**Теорема 1.** У сходящейся последовательности есть только 1 предел.

$$x_n \rightarrow a \wedge x_n \rightarrow b \implies a = b.$$

*Доказательство.* Пусть  $a < b$ . Рассмотрим промежутки  $(-\infty, \frac{a+b}{2})$  и  $(\frac{a+b}{2}, +\infty)$ .  
 $a \in (-\infty, \frac{a+b}{2}) \wedge b \in (\frac{a+b}{2}, +\infty)$  Так как  $x_n \rightarrow a \exists n_0 \forall n \geq n_0 x_n \in (-\infty, \frac{a+b}{2})$ ,  $\exists x_1 \forall n \geq n_1 x_n \in (\frac{a+b}{2}, +\infty)$ ,  $n_2 = \max(n_0, n_1)$   $\square$

## 1.9 Ограниченные последовательности

$$\exists M \forall n x_n \leq M.$$

$x_n$  Ограничена сверху.

**Теорема 2.** Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

*Доказательство.*  $x_n \rightarrow a$ . Рассмотрим окрестность  $(a - 1, a + 1)$ , точки  $a$ .

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 x_n \in (a - 1, a + 1).$$

$x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots$  - ограничена  $\square$

## 1.10 Предельный переход в неравенстве

**Теорема 3.**  $(x_n), (y_n)$  - последовательности такие, что

$$\forall n : x_n \leq y_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b.$$

Тогда  $a \leq b$

Заметим, что неравенство, выводится с некоторого  $n$ . В условии теоремы нельзя оба знака неравенства заменить на строгие.

*Доказательство.* От противного. Пусть наши последовательности, такие что  $x_n \leq y_n \forall n, a > b$  Рассмотрим  $(-\infty, \frac{a+b}{2}), (\frac{a+b}{2}, +\infty)$ . Первый окрестность  $b$ , второй окрестность точки  $a$ . Так как  $x_n \rightarrow a$ , то

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0 x_n \in (\frac{a+b}{2}, +\infty).$$

$$\exists n_1, \forall n \geq n_1 y_n \in (-\infty, \frac{a+b}{2}).$$

$$n_2 = \max n_0, n_1.$$

Тогда  $n \geq n_2$   $\square$

## 1.11 Теорема о сжатой последовательности.

**Теорема 4.**  $(x_n), (y_n), (z_n)$  - последовательности такие, что  $\forall n x_n \leq y_n \leq z_n$ . Пусть  $x_n \rightarrow a, z_n \rightarrow a$ . То  $y_n \rightarrow a$

*Доказательство.* Возьмем произвольную окрестность  $U$  точки  $a$ . Так как  $x_n \rightarrow a$ , то  $\exists n_0 \forall n > n_0 x_n \in U$ .  $z_n \rightarrow a \exists n_1 \forall n > n_1 z_n \in U$ .  $n_2 = \max(n_0, n_1) \forall n > n_2 x_n \in U, z_n \in U$ . Но  $x_n \leq y_n \leq z_n$ . Значит  $y_n \in U$ .  $\square$

## 1.12 Арифметические операции над последовательностями

### 1.12.1 Бесконечно малые последовательности

Последовательность называется бесконечно малой, если ее предел равен 0.

### 1.12.2

**Теорема 5.**

$$(x_n), a \in \mathbb{R}$$

. Рассмотрим последовательность  $\alpha_n = x_n - a$ . Тогда  $x_n \rightarrow a \leftrightarrow (\alpha_n)$  бесконечно малая.

*Доказательство.*

$$\alpha_n \rightarrow 0 \leftrightarrow \forall \epsilon \exists n_0 \forall n \geq n_0 \mid \alpha_n \mid < \epsilon.$$

□

### 1.12.3 Сумма бесконечно малых последовательностей

**Теорема 6.** Сумма бесконечно малых бесконечно малая.

*Доказательство.*

$$\mid x_n + y_n \mid \leq \mid x_n \mid + \mid y_n \mid.$$

Возьмем  $\forall \epsilon > 0$ . Рассмотрим  $\frac{\epsilon}{2}$ .

Так как  $x_n \rightarrow 0$ ,  $\exists n_1 \forall n \geq n_1, \mid x_n \mid < \frac{\epsilon}{2}$   
 $y_n \rightarrow 0$ ,  $\exists n_2 \forall n > n_2 \mid y_n \mid < \frac{\epsilon}{2}$

$$\mid x_n \mid + \mid y_n \mid < \epsilon.$$

□

### 1.12.4 Произведение бесконечно малой на ограниченную

**Теорема 7.**  $(x_n)$  - бесконечно малая,  $(y_n)$  ограниченная  $\rightarrow (x_n y_n)$  бесконечно малая.

*Доказательство.*

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 \mid x_n \mid < \frac{\epsilon}{C}.$$

$$\exists C > 0 \forall n \mid y_n \mid < C.$$

$$\mid x_n y_n \mid = \mid x_n \mid \mid y_n \mid < \epsilon.$$

□

### 1.12.5 Теорема о пределе суммы последовательности

**Теорема 8.** Если

$$x_n \rightarrow a.$$

$$y_n \rightarrow b.$$

То

$$x_n + y_n \rightarrow a + b.$$

*Доказательство.*  $\alpha_n = x_n - a$ ,  $\beta_n = y_n - b$  бесконечно малы. Рассмотрим сумму этих последовательностей  $(x_n + y_n) - (a + b) = \alpha_n + \beta_n$ . Вторая сумма бесконечно мала, следовательно  $x_n + y_n \rightarrow a + b$   $\square$

### 1.12.6 Теорема о пределе произведения последовательностей

**Теорема 9.** Если  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow b$  то  $x_n y_n \rightarrow ab$

$$x_n y_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n.$$

Три последних слагаемых бесконечно малы.

### 1.12.7 Теорема о пределе частного

**Теорема 10.** Если  $y_n \rightarrow b$ ,  $\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \rightarrow 0$

*Доказательство.*

$$\frac{b - y_n}{y_n - b} = (b - y_n) \frac{1}{b} \frac{1}{y_n}.$$

Достаточно доказать, что  $\frac{1}{y_n}$  ограничена.  $\square$

**Теорема 11.** Если  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow b$ ,  $\forall n \ y_n \neq 0$ ,  $b \neq 0$ , тогда  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}$

### 1.12.8 Предел квадратного корня

**Теорема 12.**  $x_n \geq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x_n \rightarrow a$  тогда  $\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$

## 2 Подпоследовательность

### 2.1 Определение

$(x_n)$  - числовая последовательность. Выбираем любую строго возрастающую последовательность натуральных чисел  $(n_1 < n_2 < n_3 \dots)$ . Рассматриваем последовательность с элементами  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k} \dots$

## 2.2

**Теорема 13.** Из всякой последовательности можно выбрать монотонную подпоследовательность.

*Доказательство.* Пусть  $x_n$  последовательность, у которой нет возрастающей подпоследовательности. Тогда докажем, что нее есть убывающая подпоследовательность. Если нет возрастающей подпоследовательности, то есть член, все члены с индексами больше него, строго меньше него. Назовем его  $x_{n_1}$ . Рассмотрим такую подпоследовательность  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ , в ней нет возрастающей подпоследовательности (в противном случае она возрастающая). Раз это так, то в ней есть  $x_{n_2}$ , Такой что все члены раньше него меньше него. Мы построили убывающую последовательность.  $\square$

## 2.3 Теорема Вейерштрасса

**Теорема 14.** Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

*Доказательство.*  $(x_n)$  возрастает. Пусть  $A$  - это множество значений последовательности  $(x_n)$ .  $A \neq \emptyset$ .  $A$  ограничено сверху. Пусть  $\alpha = \sup A$ . По свойству супремума  $\forall \epsilon > 0 \exists x_{n_0}$  такой что  $\alpha - x_{n_0} < \epsilon$ . Тогда  $\forall n \geq n_0 \alpha - x_n < \epsilon \implies |x_n - \alpha| < \epsilon \implies x_n \rightarrow \alpha$  Для убывающей самим надо.  $\square$

## 2.4 Принцип выбора

**Теорема 15.** Из любой ограниченной последовательности, сходящаяся подпоследовательность.

*Доказательство.* В полслова. Пусть  $x_n$  - ограниченная последовательность. По теореме 13 есть монотонная подпоследовательность, по теореме 14 нужная подпоследовательность имеет предел.

Другое  $\square$

## 3 Примеры

1.

$$x_n = \frac{2n+5}{3n-7} = \frac{2+\frac{5}{n}}{3-\frac{7}{n}} \rightarrow \frac{2}{3}.$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

4.

$$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}.$$

Пусть  $x_n \rightarrow a$ .

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \rightarrow a.$$

$$a = \sqrt{2 + a}.$$

$$a = 2.$$

Доказываем существование предела. Последовательность строго возрастает. Ограничена по теореме 14.

5.

$$x_n = \frac{1}{1 * 2} + \frac{1}{2 * 3} + \frac{1}{3 * 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

6.  $x_n = q^n$ , если  $|q| < 1$ , то  $x_n \rightarrow 0$ . Нужно доказать, что  $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 |x_n| < \epsilon$

$$|q|^n < \epsilon.$$

$$n > \log_{|q|} \epsilon.$$

7.  $(x_n)$  последовательность положительных чисел. Пусть  $\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow c < 1$ . Тогда  $x_n \rightarrow 0$

**Следствие 15.1.**

$$|q| < 1, q^n \rightarrow 0.$$

$$x_n = |q|^n \frac{x_{n+1}}{x_n} = |q| \rightarrow |q| < 1.$$

$$|q|^n \rightarrow 0.$$

**Следствие 15.2.**

$$x_n = \frac{a^n}{n!}.$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n+1}.$$

**Следствие 15.3.**  $a > 1$

$$x_n = \frac{n^k}{a^n}.$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^k}{a} < 1.$$

*Доказательство.* 7

$$c < 1.$$

Рассмотри произвольное  $q$ , такое что  $c < q < 1$ . Рассмотрим промежуток  $(-\infty, q)$ , это окрестность точки  $c$ . Так как отношение стремится к  $c$ , то  $\exists n_0 \forall n \geq n_0 \frac{x_{n+1}}{x_n} \in (-\infty, q)$

$$\frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}} < q.$$

$$\frac{x_{n_0+2}}{x_{n_0+1}} < q.$$



$$\frac{x_{n_0+k}}{x_{n_0+k+1}} < q.$$

Перемножили все.

$$\frac{x_{n_0+k}}{x_{n_0}} < q^k.$$

$$0 < x_{n_0+k} < x_{n_0} * q^k.$$

По 1.11

$$x_{n_0+k} \rightarrow 0.$$

□

## 4 Неравенство Бернулли по индукции

$$(1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a).$$

$$(1+a)^{n+1} \geq 1+a+na+na^2.$$

$$1+a+na+na^2 > 1+a+na.$$

## 5

**Теорема 16.**  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  имеет предел.

*Доказательство.* Докажем, что  $(x_n)$  возрастает.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{(n^2+2n)^{n+1}}{((n+1)^2)^{n+1}} * \frac{n+1}{n}.$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} * \frac{n+1}{n} &= \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} * \frac{n+1}{n} > 1 - (n+1) \frac{1}{n^2+2n+1} * \frac{n+1}{n}. \\ &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) * \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n+1} * \frac{n+1}{n} = 1. \end{aligned}$$

Докажем, что последовательность ограничена сверху.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k * 1 + \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-k))}{n^k} * \frac{1}{k!}.$$

$$\sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots * \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) * \frac{1}{k!} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}.$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots \frac{1}{n!} < .$$

$$< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right) < 3.$$

По 14 последовательность имеет предел, назовем его  $e$ .

□

## 6

$$\begin{aligned}x_n &\rightarrow b. \\a &> 0, a \neq 1. \\a^{x_n} &\rightarrow a^b.\end{aligned}$$

## 7

$$\begin{aligned}x_n &> 0. \\x_n &\rightarrow b > 0. \\\log_a x_n &\rightarrow \log_a b.\end{aligned}$$

## 8

$$\begin{aligned}\alpha &> 0. \\x_n \rightarrow b &\implies x_n^\alpha \rightarrow b^\alpha.\end{aligned}$$

## 9

**Теорема 17.**

$$|\sin x| = |x|.$$

*Доказательство.* При  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  Картинку потом нарисую. □

## 10

**Теорема 18.**

$$x_n \rightarrow b \implies \sin x_n \rightarrow \sin a.$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}\sin x_n - \sin a &\rightarrow 0. \\|\sin x_n - \sin a| &= \left| \sin \frac{x_n - a}{2} \cos \frac{x_n + a}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x_n - a}{2} \right| = |x_n - a|. \\0 \leq |\sin x_n - \sin a| &\leq |x_n - a|.\end{aligned}$$

По 1.11  $\sin x_n \rightarrow \sin a$  □

## 11 Задача

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+3}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{2}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{2}} \right)^{\frac{2n}{n+1}}.$$

Тупо 1 добавили и вычли.

## 12

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e.$$

$$x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

$$(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \rightarrow e.$$

## 13

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0.$$

## 14 Бесконечно большие последовательности

Попробуем дать точный смысл записи  $x_n \rightarrow +\infty, x_n \rightarrow -\infty, x_n \rightarrow \infty$ .

### 14.1

$$x_n \rightarrow +\infty \iff \forall C \exists n_0 \forall n \geq n_0 x_n > C.$$

### 14.2

$$x_n \rightarrow -\infty \iff \forall C \exists n_0 \forall n > n_0 x_n < C.$$

### 14.3

$$x_n \rightarrow \infty \iff |x_n| \rightarrow +\infty.$$

### 14.4

**Теорема 19.** Пусть  $(x_n)$  такова, что  $\forall x_n \neq 0$ , тогда  $(x_n)$  - бесконечно большая  $\iff \frac{1}{x_n}$  бесконечно малая.

*Доказательство.*

$$x_n \rightarrow +\infty \iff \forall C \exists n_0 \forall n \geq n_0 |x_n| > C.$$

$$\frac{1}{x_n} \rightarrow 0 \iff \forall \epsilon \exists n_0 \forall n \geq n_0 \frac{1}{|x_n|} < \epsilon.$$

$$|x_n| > \frac{1}{\epsilon}.$$

□

## 15 Расширенная прямая

$\overline{\mathbb{R}}$  - это  $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

$$-\infty < \infty.$$

$$a \in \mathbb{R}, -\infty < a < +\infty.$$

## 16 Предел функций.

### 16.1 Предельная точка

$X \subset \mathbb{R}, a \in X$ . Точка  $a$  называется предельной точкой множества  $X$ , если в любой окрестности точки  $a$ , есть хотя бы одно число из  $X$ , отличное от  $a$ .

### 16.2

**Теорема 20.**  $a$  - предельная точка множества  $D \iff$  Если существует  $(x_n)$  точек множества  $D$  отличных от  $a$ , такая что  $x_n \rightarrow a$

*Доказательство.* 1. Пусть  $a$  предельная точка  $D$ . Смотрим промежуток  $(a-1; a+1)$ . Рассмотрим  $x_1 \in (a-1; a+1), x_1 \neq a, x_1 \in D$ .  $x_2 \in (a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}), x_2 \neq a, x_2 \in D$ . И так далее, мы построили последовательность такую, что  $\forall x_n \in D, x_n \neq a, a - \frac{1}{n} < x_n < a + \frac{1}{n}$ . По 1.11  $x_n \rightarrow a$

2. Пусть  $(x_n)$  такова, что  $x_n \in D, x_n \neq a, x_n \rightarrow a$ . Взяли произвольную окрестность  $a$   $\exists n_0 x_{n_0} \in U(a)$

□

#### 16.2.1 Пример

Возьмем  $D = [0; 1)$ . Найдем все его предельные точки. Это все точки из  $[0; 1)$

#### 16.2.2 Пример

Возьмем за  $D = [0; 1) \cup \{2\}$ .

### 16.3 Определение предела функции

Пусть  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  - предельная точка множества  $D$ . Число  $A$  называется пределом функции  $f$  в точке  $a$ , если  $\forall (x_n)$

$$\begin{cases} \forall x_n \neq a \\ \forall x_n \in D \\ x_n \rightarrow a \end{cases} \implies f(x_n) \rightarrow A.$$

### 16.4 Запись предела функции

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

### 16.5

Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \wedge \lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$

### 16.6

**Теорема 21.**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, a$  предельная точка множества  $D$ .  $U$  - окрестность точки  $a$ , тогда предел функции в точке существует  $\iff$  существует предел на сужении  $D \cap U$

## 16.7 Теорема о предельном переходе в неравенстве

**Теорема 22.**  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  предельная точка множества  $D$ .

$$\forall x \in D f(x) \leq g(x).$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

## 16.8

Теорема 1.11, но про пределы функции.

## 16.9 Теорема о пределе суммы, произведения и частного

Пусть  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  предельная точка множества  $D$ . Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$  Тогда

1.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = A + B$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) * g(x) = A * B$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, g(x) \neq 0, B \neq 0$

## 17 Композиция функций для вещественных функций

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$g : E \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$f(D) \subset E.$$

$$g \circ f = g(f(x)).$$

### 17.1 Примеры

$$F(x) = \sin^2 x.$$

$$f(x) = \sin x.$$

$$g(x) = x^2.$$

$$g \circ f = F.$$

$$f \circ g = \sin x^2.$$

## 18 Предел композиции.

**Теорема 23.**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть  $f(D) \subset E$ . предельная точка множества  $D$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ . Пусть  $b$  предельная точка множества  $E$  и  $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = c$ . Пусть выполняется одно из двух условий.

1.  $\exists U$  точки  $a$ , такая что  $\forall x \neq a \in U \cap D, f(x) \neq b$
2.  $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = g(b)$ .

Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$

*Доказательство.* Пусть 1 верно, мы хотим доказать, что  $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$   
Возьмем  $\forall (x_n)$  такую что  $x_n \in D, x_n \neq a, x_n \rightarrow a$

$$t_n = f(x_n).$$

$$t_n \rightarrow b.$$

Нужно проверить, что  $g(f(x_n)) \rightarrow c$ .

....

□

### 18.1 Пример

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}. \\ 3x = t. \\ \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin t}{t/3} = 3 \frac{\sin t}{t}. \end{aligned}$$

## 19 Одностронние пределы.

**Теорема 24.**  $D$  - промежуток,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  предельная точка.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  существует  $\iff$  оба односторонних предела существуют и они равны друг другу.

## 20 Вычисление пределов

### 20.1

$$\lim_{x \rightarrow c} a^x = a^c$$

*Доказательство.* 1.  $a > 1$

$$a^x - a^c = a^c(a^{x-c} - 1).$$

Докажем, что  $a^{x-c} - 1 \rightarrow 0, x \rightarrow c$

$$t = x - c.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (a^t - 1) = 0?.$$

Докажем, что  $a^{t_n} - 1 \rightarrow 0$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta \forall n \geq n_0 1 - \epsilon < a^{t_n} < 1 + \epsilon.$$

$$\log_a (1 - \epsilon) < t_n < \log_a (1 + \epsilon).$$

Рассмотрим промежуток  $(\log_a (1 - \epsilon); \log_a (1 + \epsilon))$

□

**Теорема 25.**  $\lim_{x \rightarrow c} \log_a x = \log_a c$

**Теорема 26.**  $\lim_{x \rightarrow c} x^a = c^a$

*Доказательство.*

$$x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow c} e^{a \ln x}.$$

$$g(x) = e^x.$$

$$f(x) = a \ln x.$$

По теореме 18  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = a \ln c$ .  $\lim_{x \rightarrow a \ln c} g(x) = g(a \ln c) = e^{a \ln c} = c^a$  □

**Теорема 27.**  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

*Доказательство.*  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

$$x_n = \frac{1}{t_n}, t_n \rightarrow +\infty.$$

$$(1 + \frac{1}{t_n})^{t_n} \rightarrow e??.$$

Докажем, что это справедливо для последовательностей, где  $t_n$ , по 28. Теперь в общем случае.

$(t_n)$  - любая последовательность  $\rightarrow +\infty$ . Нужно доказать, что  $(1 + \frac{1}{t_n})^{t_n} \rightarrow e$

$$[t_n] \leq t_n < [t_n] + 1.$$

$$\frac{1}{[t_n] + 1} < \frac{1}{t_n} \leq 1 \frac{1}{[t_n]}.$$

$$1 + \frac{1}{[t_n] + 1} < 1 + \frac{1}{t_n} \leq 1 + \frac{1}{[t_n]}.$$

$$(1 + \frac{1}{[t_n] + 1})^{t_n} < 1 + (\frac{1}{t_n})^{t_n} \leq (1 + \frac{1}{[t_n]})^{t_n}.$$

Докажем, что левый предел тоже  $e$ .

$$\forall (x_n) \text{ Такой что } \begin{cases} x_n > -1 \\ x_n < 0 \\ x_n \rightarrow 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим последовательность  $t_n = -\frac{1}{x_n} > 0, t_n \rightarrow 0$

$$(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = (1 - \frac{1}{t_n})^{-t_n} = (\frac{t_n}{t_n - 1})^{t_n} = (1 + \frac{1}{t_n - 1})^{t_n - 1} (1 + \frac{1}{t_n - 1}).$$

□

**Лемма 28.**  $f : (a, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть  $f(n) \rightarrow A$ . Тогда для  $\forall$  последовательность натуральных чисел  $t_n \rightarrow +\infty$  выполняется  $f(t_n) \rightarrow A$ .

*Доказательство.*  $\forall \epsilon > 0$  неравенство  $|f(n) - A| < \epsilon$  для почти всех натуральных чисел. Тогда  $\forall \epsilon > 0 \mid f(t_n) \rightarrow A \mid$

□

**Теорема 29.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

*Доказательство.*

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

□

**Теорема 30.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

*Доказательство.*

$$t = a^x + 1.$$

$$x = \log_a(1+t).$$

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{t}{\log_a 1+t}.$$

□

**Теорема 31.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

*Доказательство.*

$$(1+x)^\alpha - 1 = t.$$

$$\frac{t}{x} = \frac{t}{\ln(1+t)} * \frac{\ln(1+t)}{x} = \alpha.$$

□

**Теорема 32.**  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$

**Теорема 33.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

*Доказательство.* Пусть  $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

□



## 21 Сравнение роста функций

### 21.1

**Теорема 34.**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0.$$
$$a > 1, \alpha > 0.$$

*Доказательство.* Достаточно доказать для натурального логорифма, так как  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Мы знаем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0$

□

**Теорема 35.**  $|a| < 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

## 22 Другое определение предела.

**Определение 1.**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  предельная точка множества  $D$ .  $A$  называется пределом  $f$  точке  $a$ , если

$$\forall \epsilon > 0 |f(x) - A| < \epsilon.$$

Выполняется в некоторой проколотой окрестности точки  $a$  (т.е. окрестность точки  $a$  без  $a$ ).

### 22.1 Примеры употребления термина "вблизи"

#### 22.1.1

Неравенство  $x < 1$  выполняется вблизи 0.

#### 22.1.2

Неравенство  $\frac{x^2}{x} < 1$  выполняется вблизи 0.