

Лекции по математическому анализу.

Александр Титилин

Содержание

1	Предел последовательности.	3
1.1	Окрестность точки.	3
1.2	окрестность	3
1.3	Определение предела. Геометрическое	3
1.4	Определение предела. Еще одно	3
1.5	Определение предела, еще одно с кванторами, нормальное . .	3
1.6	Запись предела	4
1.7	Примеры	4
1.8	Единственность предела	4
1.9	Ограниченные последовательности	4
1.10	Предельный переход в неравенстве	5
1.11	Теорема о сжатой последовательности.	5
1.12	Арифметические операции над последовательностями	5
1.12.1	Бесконечно малые последовательности	5
1.12.2	5
1.12.3	Сумма бесконечно малых последовательностей	6
1.12.4	Произведение бесконечно малой на ограниченную	6
1.12.5	Теорема о пределе суммы последовательности	6
1.12.6	Теорема о пределе произведения последовательностей	6
1.12.7	Теорема о пределе частного	7
1.12.8	Предел квадратного корня	7
2	Подпоследовательность	7
2.1	Определение	7
2.2	7
2.3	Теорема Вейерштрасса	7
2.4	Принцип выбора	8
3	Примеры	8
4	Неравенство Бернулли по индукции	9
5		10
6		10
7		10
8		10

9	11
10	11
11 Задача	11
12	11
13	11
14 Бесконечно большие последовательности	11
14.1	11
14.2	12
14.3	12
14.4	12
15 Расширенная прямая	12
16 Предел функций.	12
16.1 Предельная точка	12
16.2	12
16.2.1 Пример	13
16.2.2 Пример	13
16.3 Определение предела функции	13
16.4 Запись предела функции	13
16.5	13
16.6	13
16.7 Теорема о предельном переходе в неравенстве	13
16.8	13
16.9 Теорема о пределе суммы, произведения и частного	14
17 Композиция функций для вещественных функций	14
17.1 Примеры	14
18 Предел композиции.	14
18.1 Пример	15
19 Одностронние пределы.	15
20 Вычисление пределов	15
20.1	15
21 Сравнение роста функций	17
21.1	17
22 Другое определение предела.	17
22.1 Примеры	18
22.1.1	18
22.1.2	18
23 Непрерывная функция	18

24 Арифметические действия над непрерывными функциями	18
25 Разрыв первого рода	19
26 Разрыв второго рода	19
27	19
28 Теорема Больцано	19
29 Теорема Вейрештрасса	20
30 Дифференциальное исчисление.	20
30.1 Определение касательной.	20
30.2 Производная	20
31 Дифференцируемость	21
31.1 Упражнение	22
31.2	22
31.3 Производная суммы	22

1 Предел последовательности.

1.1 Окрестность точки.

Окрестность точки a - это произвольный открытый промежуток, содержащий точку a .

1.2 окрестность

$$U_\epsilon(a) = (a - \epsilon; a + \epsilon)$$

1.3 Определение предела. Геометрическое

Число a называют пределом последовательности (x_n) если в любой окрестности точки a , содержатся все члены x_n , начиная с некоторого.

1.4 Определение предела. Еще одно

a является пределом x_n , если в любой симметричной последовательности точки a содержатся все члены последовательности начиная с некоторого.

1.5 Определение предела, еще одно с кванторами, нормальное

a является пределом x_n , если

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |x_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon).$$

1.6 Запись предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

1.7 Примеры

1. $a_n = 1$. Предел 1, так как все члены последовательности лежат в окрестности 1.
2. $a_n = \frac{1}{n}$ Предел 0. a, b концы окрестности. $\exists n_0 \forall n \geq n_0 : x_n \in (a, b)$.
 $n_0 = \text{любое число} > \frac{1}{b}$
3. $x_n = \frac{n}{2n^2+1}$
 (a, b) - окрестность 0.

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0.$$

Надо доказать, что $x_n < b$

$$\frac{n}{n^2+1} < b.$$

4. $x_n = \frac{2n+1}{3n+2}$ Предел $\frac{2}{3}$

$$\frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}}.$$

1.8 Единственность предела

Теорема 1. У сходящейся последовательности есть только 1 предел.

$$x_n \rightarrow a \wedge x_n \rightarrow b \implies a = b.$$

Доказательство. Пусть $a < b$. Рассмотрим промежутки $(-\infty, \frac{a+b}{2})$ и $(\frac{a+b}{2}, +\infty)$.
 $a \in (-\infty, \frac{a+b}{2}) \wedge b \in (\frac{a+b}{2}, +\infty)$ Так как $x_n \rightarrow a \exists n_0 \forall n \geq n_0 x_n \in (-\infty, \frac{a+b}{2})$, $\exists n_1 \forall n \geq n_1 x_n \in (\frac{a+b}{2}, +\infty)$, $n_2 = \max(n_0, n_1)$ \square

1.9 Ограниченные последовательности

$$\exists M \forall n x_n \leq M.$$

x_n Ограничена сверху.

Теорема 2. Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. $x_n \rightarrow a$. Рассмотрим окрестность $(a-1, a+1)$, точки a .

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0 x_n \in (a-1, a+1).$$

$x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots$ - ограничена \square

1.10 Пределный переход в неравенстве

Теорема 3. $(x_n), (y_n)$ - последовательности такие, что

$$\forall n : x_n \leq y_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b.$$

Тогда $a \leq b$

Заметим, что неравенство, выводится с некоторого n . В условии теоремы нельзя оба знака неравенства заменить на строгие.

Доказательство. От противного. Пусть наши последовательности, такие что $x_n \leq y_n \forall n, a > b$ Рассмотрим $(-\infty, \frac{a+b}{2}), (\frac{a+b}{2}, +\infty)$. Первый окрестность b , второй окрестность точки a . Так как $x_n \rightarrow a$, то

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0 x_n \in (\frac{a+b}{2}, +\infty).$$

$$\exists n_1, \forall n \geq n_1 y_n \in (-\infty, \frac{a+b}{2}).$$

$$n_2 = \max n_0, n_1.$$

Тогда $n \geq n_2$

□

1.11 Теорема о сжатой последовательности.

Теорема 4. $(x_n), (y_n), (z_n)$ - последовательности такие, что $\forall n x_n \leq y_n \leq z_n$. Пусть $x_n \rightarrow a, z_n \rightarrow a$. То $y_n \rightarrow a$

Доказательство. Возьмем произвольную окрестность U точки a . Так как $x_n \rightarrow a$, то $\exists n_0 \forall n > n_0 x_n \in U$. $z_n \rightarrow a \exists n_1 \forall n > n_1 z_n \in U$. $n_2 = \max(n_0, n_1) \forall n > n_2 x_n \in U, z_n \in U$. Но $x_n \leq y_n \leq z_n$. Значит $y_n \in U$. □

1.12 Арифметические операции над последовательностями

1.12.1 Бесконечно малые последовательности

Последовательность называется бесконечно малой, если ее предел равен 0.

1.12.2

Теорема 5.

$$(x_n), a \in \mathbb{R}$$

. Рассмотрим последовательность $\alpha_n = x_n - a$. Тогда $x_n \rightarrow a \leftrightarrow (\alpha_n)$ бесконечно малая.

Доказательство.

$$\alpha_n \rightarrow 0 \leftrightarrow \forall \epsilon \exists n_0 \forall n \geq n_0 |\alpha_n| < \epsilon.$$

□

1.12.3 Сумма бесконечно малых последовательностей

Теорема 6. *Сумма бесконечно малых бесконечно малая.*

Доказательство.

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|.$$

Возьмем $\forall \epsilon > 0$. Рассмотрим $\frac{\epsilon}{2}$.

Так как $x_n \rightarrow 0$, $\exists n_1 \forall n \geq n_1, |x_n| < \frac{\epsilon}{2}$

$y_n \rightarrow 0, \exists n_2 \forall n > n_2, |y_n| < \frac{\epsilon}{2}$

$$|x_n| + |y_n| < \epsilon.$$

□

1.12.4 Произведение бесконечно малой на ограниченную

Теорема 7. (x_n) - бесконечно малая, (y_n) ограниченная $\rightarrow (x_n y_n)$ бесконечно малая.

Доказательство.

$$\exists n_0 \forall n \geq n_0, |x_n| < \frac{\epsilon}{C}.$$

$$\exists C > 0 \forall n, |y_n| < C.$$

$$|x_n y_n| = |x_n| |y_n| < \epsilon.$$

□

1.12.5 Теорема о пределе суммы последовательности

Теорема 8. *Если*

$$x_n \rightarrow a.$$

$$y_n \rightarrow b.$$

То

$$x_n + y_n \rightarrow a + b.$$

Доказательство. $\alpha_n = x_n - a$, $\beta_n = y_n - b$ бесконечно малые. Рассмотрим сумму этих последовательностей $(x_n + y_n) - (a + b) = \alpha_n + \beta_n$. Вторая сумма бесконечно малая, следовательно $x_n + y_n \rightarrow a + b$ □

1.12.6 Теорема о пределе произведения последовательностей

Теорема 9. *Если $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b$ то $x_n y_n \rightarrow ab$*

$$x_n y_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n.$$

Три последних слагаемых бесконечно малые.

1.12.7 Теорема о пределе частного

Теорема 10. Если $y_n \rightarrow b$, $\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \rightarrow 0$

Доказательство.

$$\frac{b - y_n}{y_n - b} = (b - y_n) \frac{1}{b} \frac{1}{y_n}.$$

Достаточно доказать, что $\frac{1}{y_n}$ ограничена. □

Теорема 11. Если $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$, $\forall n \ y_n \neq 0, b \neq 0$, тогда $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}$

1.12.8 Предел квадратного корня

Теорема 12. $x_n \forall n \ x_n \geq 0, a \in \mathbb{R} \ x_n \rightarrow a$ тогда $\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$

2 Подпоследовательность

2.1 Определение

(x_n) - числовая последовательность. Выбираем любую строго возрастающую последовательность натуральных чисел $(n_1 < n_2 < n_3 \dots)$. Рассматриваем последовательность с элементами $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k} \dots$

2.2

Теорема 13. Из всякой последовательности можно выбрать монотонную подпоследовательность.

Доказательство. Пусть x_n последовательность, у которой нет возрастающей подпоследовательности. Тогда докажем, что нее есть убывающая подпоследовательность. Если нет возрастающей подпоследовательности, то есть член, все члены с индексами больше него, строго меньше него. Назовем его x_{n_1} . Рассмотрим такую подпоследовательность $x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \dots$, в ней нет возрастающей подпоследовательности (в противном случае она возрастающая). Раз это так, то в ней есть x_{n_2} , Такой что все члены раньше него меньше него. Мы построили убывающую последовательность. □

2.3 Теорема Вейерштрасса

Теорема 14. Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Доказательство. (x_n) возрастает. Пусть A - это множество значений последовательности (x_n) . $A \neq \emptyset$. A ограничено сверху. Пусть $\alpha = \sup A$. По свойству супремума $\forall \epsilon > 0 \exists x_{n_0}$ такой что $\alpha - x_{n_0} < \epsilon$. Тогда $\forall n \geq n_0 \ \alpha - x_n < \epsilon \implies |x_n - \alpha| < \epsilon \ x_n \rightarrow \alpha$ Для убывающей самым надо. □

2.4 Принцип выбора

Теорема 15. Из любой ограниченной последовательности, сходящаяся подпоследовательность.

Доказательство. В полслова. Пусть x_n - ограниченная последовательность. По теореме 13 есть монотонная подпоследовательность, по теореме 14 нужная подпоследовательность имеет предел.

Другое

□

3 Примеры

1.

$$x_n = \frac{2n+5}{3n-7} = \frac{2+\frac{5}{n}}{3-\frac{7}{n}} \rightarrow \frac{2}{3}.$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

4.

$$x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}.$$

Пусть $x_n \rightarrow a$.

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} \rightarrow a.$$

$$a = \sqrt{2+a}.$$

$$a = 2.$$

Доказываем существование предела. Последовательность строго возрастает. Ограничена по теореме 14.

5.

$$x_n = \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

6. $x_n = q^n$, если $|q| < 1$, то $x_n \rightarrow 0$. Нужно доказать, что $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 |x_n| < \epsilon$

$$|q|^n < \epsilon.$$

$$n > \log_{|q|} \epsilon.$$

7. (x_n) последовательность положительных чисел. Пусть $\frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow c < 1$. Тогда $x_n \rightarrow 0$

Следствие 15.1.

$$\begin{aligned} |q| < 1, q^n \rightarrow 0. \\ x_n = |q|^n \frac{x_{n+1}}{x_n} = |q| \rightarrow |q| < 1. \\ |q|^n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следствие 15.2.

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{a^n}{n!}. \\ \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{a}{n+1}. \end{aligned}$$

Следствие 15.3. $a > 1$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{n^k}{a^n}. \\ \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(1 + \frac{1}{n})^k}{a} < 1. \end{aligned}$$

Доказательство. 7

$$c < 1.$$

Рассмотри произвольное q , такое что $c < q < 1$. Рассмотрим промежуток $(-\infty, q)$, это окрестность точки c . Так как отношение стремится к c , то $\exists n_0 \forall n \geq n \frac{x_{n+1}}{x_n} \in (-\infty, q)$

$$\begin{aligned} \frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}} &< q. \\ \frac{x_{n_0+2}}{x_{n_0+1}} &< q. \\ \frac{x_{n_0+k}}{x_{n_0+k+1}} &< q. \end{aligned}$$

Перемножили все.

$$\begin{aligned} \frac{x_{n_0+k}}{x_{n_0}} &< q^k. \\ 0 < x_{n_0+k} &< x_{n_0} * q^k. \end{aligned}$$

По 1.11

$$x_{n_0+k} \rightarrow 0.$$

□

4 Неравенство Бернулли по индукции

$$\begin{aligned} (1+a)^n(1+a) &\geq (1+na)(1+a). \\ (1+a)^{n+1} &\geq 1+a+na+na^2. \\ 1+a+na+na^2 &> 1+a+na. \end{aligned}$$

5

Теорема 16. $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ имеет предел.

Доказательство. Докажем, что (x_n) возрастает.

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{(n^2+2n)^{n+1}}{((n+1)^2)^{n+1}} * \frac{n+1}{n}. \\ \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} * \frac{n+1}{n} &= \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} * \frac{n+1}{n} > 1 - (n+1) \frac{1}{n^2+2n+1} * \frac{n+1}{n}. \\ &= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) * \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n+1} * \frac{n+1}{n} = 1.\end{aligned}$$

Докажем, что последовательность ограничена сверху.

$$\begin{aligned}x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k * 1 + \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{n^k} * \frac{1}{k!}. \\ \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots * \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) * \frac{1}{k!} &< \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots \frac{1}{n!} < . \\ &< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right) < 3.\end{aligned}$$

По 14 последовательность имеет предел, назовем его e . □

6

$$\begin{aligned}x_n &\rightarrow b. \\ a > 0, a &\neq 1. \\ a^{x_n} &\rightarrow a^b.\end{aligned}$$

7

$$\begin{aligned}x_n &> 0. \\ x_n &\rightarrow b > 0. \\ \log_a x_n &\rightarrow \log_a b.\end{aligned}$$

8

$$\begin{aligned}\alpha &> 0. \\ x_n \rightarrow b &\implies x_n^\alpha \rightarrow b^\alpha.\end{aligned}$$

9

Теорема 17.

$$|\sin x| \leq |x|.$$

Доказательство. При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ Картинку потом нарисую. □

10

Теорема 18.

$$x_n \rightarrow b \implies \sin x_n \rightarrow \sin a.$$

Доказательство.

$$\sin x_n - \sin a \rightarrow 0.$$

$$|\sin x_n - \sin a| = \left| \sin \frac{x_n - a}{2} \cos \frac{x_n + a}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x_n - a}{2} \right| = |x_n - a|.$$

$$0 \leq |\sin x_n - \sin a| \leq |x_n - a|.$$

По 1.11 $\sin x_n \rightarrow \sin a$ □

11 Задача

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{2}} \right)^{\frac{2n}{n+1}}.$$

Тупо 1 добавили и вычли.

12

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow e.$$

$$x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

$$\left(1 + x_n \right)^{\frac{1}{x_n}} \rightarrow e.$$

13

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0.$$

14 Бесконечно большие последовательности

Попробуем дать точный смысл записи $x_n \rightarrow +\infty, x_n \rightarrow -\infty, x_n \rightarrow \infty$.

14.1

$$x_n \rightarrow +\infty \iff \forall C \exists n_0 \forall n \geq n_0 x_n > C.$$

14.2

$$x_n \rightarrow -\infty \iff \forall C \exists n_0 \forall n > n_0 \ x_n < C.$$

14.3

$$x_n \rightarrow \infty \iff |x_n| \rightarrow +\infty.$$

14.4

Теорема 19. Пусть (x_n) такова, что $\forall x_n \neq 0$, тогда (x_n) - бесконечно большая $\iff \frac{1}{x_n}$ бесконечно малая.

Доказательство.

$$x_n \rightarrow +\infty \iff \forall C \exists n_0 \forall n \geq n_0 \ |x_n| > C.$$

$$\frac{1}{x_n} \rightarrow 0 \iff \forall \epsilon \exists n_0 \forall n \geq n_0 \ \frac{1}{|x_n|} < \epsilon.$$

$$|x_n| > \frac{1}{\epsilon}.$$

□

15 Расширенная прямая

$\overline{\mathbb{R}}$ - это $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

$$-\infty < \infty.$$

$$a \in \mathbb{R}, \quad -\infty < a < +\infty.$$

16 Предел функций.

16.1 Предельная точка

$X \subset \mathbb{R}, a \in X$. Точка a называется предельной точкой множества X , если в любой окрестности точки a , есть хотя бы одно число из X , отличное от a .

16.2

Теорема 20. a - предельная точка множества $D \iff$ Если существует (x_n) точек множества D отличных от a , такая что $x_n \rightarrow a$

Доказательство. 1. Пусть a предельная точка D . Смотрим промежуток $(a-1; a+1)$. Рассмотрим $x_1 \in (a-1; a+1), x_1 \neq a, x_1 \in D$. $x_2 \in (a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2}), x_2 \neq a, x_2 \in D$. И так далее, мы построили последовательность такую, что $\forall x_n \in D, x_n \neq a, a - \frac{1}{n} < x_n < a + \frac{1}{n}$. По 1.11 $x_n \rightarrow a$

2. Пусть (x_n) такова, что $x_n \in D, x_n \neq a, x_n \rightarrow a$. Взяли произвольную окрестность $a \exists n_0 \ x_{n_0} \in U(a)$

□

16.2.1 Пример

Возьмем $D = [0; 1)$. Найдем все его предельные точки. Это все точки из $[0; 1)$

16.2.2 Пример

Возьмем за $D = [0; 1) \cup \{2\}$.

16.3 Определение предела функции

Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a - предельная точка множества D . Число A называется пределом функции f в точке a , если $\forall (x_n)$

$$\begin{cases} \forall x_n \neq a \\ \forall x_n \in D \\ x_n \rightarrow a \end{cases} \implies f(x_n) \rightarrow A.$$

16.4 Запись предела функции

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

16.5

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \wedge \lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$

16.6

Теорема 21. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a предельная точка множества D . U - окрестность точки a , тогда предел функции в точке существует \iff существует предел на сужении $D \cap U$

16.7 Теорема о предельном переходе в неравенстве

Теорема 22. $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, a предельная точка множества D .

$$\forall x \in D f(x) \leq g(x).$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

16.8

Теорема 1.11, но про пределы функции.

16.9 Теорема о пределе суммы, произведения и частного

Пусть $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, a предельная точка множества D . Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ Тогда

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = A + B$
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) * g(x) = A * B$
3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, g(x) \neq 0, B \neq 0$

17 Композиция функций для вещественных функций

$$\begin{aligned} f &: D \rightarrow \mathbb{R}. \\ g &: E \rightarrow \mathbb{R}. \\ f(D) &\subset E. \\ g \circ f &= g(f(x)). \end{aligned}$$

17.1 Примеры

$$\begin{aligned} F(x) &= \sin^2 x. \\ f(x) &= \sin x. \\ g(x) &= x^2. \\ g \circ f &= F. \\ f \circ g &= \sin x^2. \end{aligned}$$

18 Предел композиции.

Теорема 23. $f : D \rightarrow \mathbb{R}, g : E \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $f(D) \subset E$. предельная точка множества D и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Пусть b предельная точка множества E и $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = c$. Пусть выполняется одно из двух условий.

1. $\exists U$ точки a , такая что $\forall x \neq a \in U \cap D, f(x) \neq b$
2. $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = g(b)$.

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$

Доказательство. Пусть 1 верно, мы хотим доказать, что $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$
Возьмем $\forall(x_n)$ такую что $x_n \in D, x_n \neq a, x_n \rightarrow a$

$$\begin{aligned} t_n &= f(x_n). \\ t_n &\rightarrow b. \end{aligned}$$

Нужно проверить, что $g(f(x_n)) \rightarrow c$.

....

□

18.1 Пример

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}.$$
$$3x = t.$$
$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin t}{t/3} = 3 \frac{\sin t}{t}.$$

19 Односторонние пределы.

Теорема 24. D - промежуток, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a предельная точка. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существует \iff оба односторонних предела существуют и они равны друг другу.

20 Вычисление пределов

20.1

$$\lim_{x \rightarrow c} a^x = a^c$$

Доказательство. 1. $a > 1$

$$a^x - a^c = a^c(a^{x-c} - 1).$$

Докажем, что $a^{x-c} - 1 \rightarrow 0, x \rightarrow c$

$$t = x - c.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (a^t - 1) = 0?.$$

Докажем, что $a^{t_n} - 1 \rightarrow 0$

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 1 - \epsilon < a^{t_n} < 1 + \epsilon.$$

$$\log_a(1 - \epsilon) < t_n < \log_a(1 + \epsilon).$$

Рассмотрим промежуток $(\log_a(1 - \epsilon); \log_a(1 + \epsilon))$

□

Теорема 25. $\lim_{x \rightarrow c} \log_a x = \log_a c$

Теорема 26. $\lim_{x \rightarrow c} x^a = c^a$

Доказательство.

$$x^a = e^{\ln x^a} = e^{a \ln x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow c} e^{a \ln x}.$$

$$g(x) = e^x.$$

$$f(x) = a \ln x.$$

По теореме 18 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = a \ln c$. $\lim_{x \rightarrow a \ln c} g(x) = g(a \ln c) = e^{a \ln c} = c^a$ □

Теорема 27. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

Доказательство. $\lim_{x \rightarrow 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$x_n = \frac{1}{t_n}, t_n \rightarrow +\infty.$$

$$(1 + \frac{1}{t_n})^{t_n} \rightarrow e??.$$

Докажем, что это справедливо для последовательностей, где t_n состоит из натуральных чисел, по 28. Теперь в общем случае.

(t_n) - любая последовательность $\rightarrow +\infty$. Нужно доказать, что $(1 + \frac{1}{t_n})^{t_n} \rightarrow e$

$$[t_n] \leq t_n < [t_n] + 1.$$

$$\frac{1}{[t_n] + 1} < \frac{1}{t_n} \leq 1 \frac{1}{[t_n]}.$$

$$1 + \frac{1}{[t_n] + 1} < 1 + \frac{1}{t_n} \leq 1 + \frac{1}{[t_n]}.$$

$$(1 + \frac{1}{[t_n] + 1})^{t_n} < 1 + (\frac{1}{t_n})^{t_n} \leq (1 + \frac{1}{[t_n]})^{t_n}.$$

Докажем, что левый предел тоже e .

$$\forall (x_n) \text{ Такой что } \begin{cases} x_n > -1 \\ x_n < 0 \\ x_n \rightarrow 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим последовательность $t_n = -\frac{1}{x_n} > 0, t_n \rightarrow 0$

$$(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = (1 - \frac{1}{t_n})^{-t_n} = (\frac{t_n}{t_n - 1})^{t_n} = (1 + \frac{1}{t_n - 1})^{t_n - 1} (1 + \frac{1}{t_n - 1}).$$

□

Лемма 28. $f : (a, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $f(n) \rightarrow A$. Тогда для \forall последовательности натуральных чисел $t_n \rightarrow +\infty$ выполняется $f(t_n) \rightarrow A$.

Доказательство. $\forall \epsilon > 0$ неравенство $|f(n) - A| < \epsilon$ для почти всех натуральных чисел. Тогда $\forall \epsilon > 0 \mid f(t_n) \rightarrow A \mid$

□

Теорема 29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Доказательство.

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

□

Теорема 30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

Доказательство.

$$\begin{aligned} t &= a^x + 1. \\ x &= \log_a (1 + t). \\ \frac{a^x - 1}{x} &= \frac{t}{\log_a 1 + t}. \end{aligned}$$

□

Теорема 31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha - 1 &= t. \\ \frac{t}{x} &= \frac{t}{\ln(1+t)} * \frac{\ln(1+t)}{x} = \alpha. \end{aligned}$$

□

Теорема 32. $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$

Теорема 33. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Доказательство. Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \sin x &< x < \operatorname{tg} x. \\ 1 &< \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

□

21 Сравнение роста функций

21.1

Теорема 34.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} &= 0. \\ a &> 1, \alpha > 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Достаточно доказать для натурального логорифма, так как $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Мы знаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0$

□

Теорема 35. $|a| < 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

22 Другое определение предела.

Определение 1. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, a предельная точка множества D . A называется пределом f точке a , если

$$\forall \epsilon > 0 |f(x) - A| < \epsilon.$$

Выполняется в некоторой проколотой окрестности точки a (т.е. окрестность точки a без a).

22.1 Примеры употребления термина "вблизи"

22.1.1

Неравенство $x < 1$ выполняется вблизи 0.

22.1.2

Неравенство $\frac{x^2}{x} < 1$ выполняется вблизи 0.

23 Непрерывная функция

f называется непрерывной в точке a .

1. Если a предельная точка множества D $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
2. иначе f непрерывна в точке a

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке a , если

$$\forall x_n \begin{cases} x_n \in D \\ x_n \rightarrow a \end{cases}.$$

выполняется $f(x_n) \rightarrow f(a)$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

$$|f(x) - A| < \epsilon \iff f(x) \in (A - \epsilon; A + \epsilon).$$

f непрерывна в a , если \forall окрестность V точки $f(a)$ Найдется такая окрестность U точки a , такая что множество значений f на U лежит в V .

24 Арифметические действия над непрерывными функциями

Теорема 36.

$$f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in D.$$

f и g непрерывны в точке a . Тогда

1. $f + g$ непрерывна в точке a .
2. fg непрерывна в точке a .
3. $\forall x \in D g(x) \neq 0$ то $\frac{f}{g}$ непрерывны в точке a .

Теорема 37.

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$g : E \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$f(D) \subset E.$$

Пусть $a \in D$, f непрерывна в точке a , g непрерывна в точке $f(a)$. Тогда $f \circ g$ непрерывна в точке a .

Доказательство. Если a изолированная точка, то по определению. Если a предельная точка вычисляем предел композиции.

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(f(a)).$$

$$x_n \rightarrow a.$$

f непрерывна в a , $f(x_n) \rightarrow f(a)$
 g непрерывна в $f(a)$, $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a))$

□

25 Разрыв первого рода

Если односторонние пределы конечные числа и не равны друг другу - функция имеет разрыв первого рода.

26 Разрыв второго рода

Если один из односторонних пределов бесконечность или не существует, то функция имеет разрыв второго рода.

27

Теорема 38. Если функция задана на промежутке и непрерывна в каждой точке промежутка, то и обратная функция непрерывна.

28 Теорема Больцано

Теорема 39 (О промежуточном значении). Пусть функция f задана на промежутке и непрерывна, тогда множеством значений функции является промежуток.

$$\forall a, b \in D \quad \forall C.$$

C лежит между $f(a)$ и $f(b)$ Тогда $\exists c \in [a, b]$, что $f(c) = C$

Доказательство. Достаточно доказать, что $\forall a, b \in D$ таких, что $a < b$ и $f(a) \neq f(b) \quad \forall C$ строго между $f(a), f(b)$. $\exists c$, таких, что $a < c < b$ и $f(c) = C$. Начнем с частного случая.

1. Пусть $f(a) < 0, f(b) > 0$, тогда $\exists c \in (a, b)$, такой, что $f(c) = 0$
 f принимает на разных концах, разных знаков, на левом отрицательное на правом положительное. Обозначим их A_1, B_1 . Делим промежуток пополам, либо значение в середине ноль, либо делим снова и так далее.
2. Пусть $f(a) < f(b)$, $f(a) < c < f(b)$ Рассмотрим новую функцию, $g(x) = f(x) - C$

$$g(a) = f(a) - C < 0.$$

$$g(b) = f(b) - C > 0.$$

По пункту 1, $\exists c \ a < c < b \ g(c) = 0 \ f(c) = c$

□

29 Теорема Вейрштрасса

Теорема 40 (о наименьшем и наибольшем значении.). Пусть функции f задана на ограниченном замкнутом промежутке и непрерывна, тогда функция принимает на этом промежутке наибольшее и наименьшее значение.

Доказательство. Пусть f не ограничена сверху, тогда $\forall n \exists x_n f(x_n) > n$. Получили последовательность x_1, x_2, x_3, \dots ограничена, из любой ограниченной можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, ее предел равен C . Рассматриваем последовательность $f(x_1), f(x_2), f(x_3) \rightarrow C$.

$$n_1 < n_2 < \dots$$

$$f(x_1) > n_1.$$

$$f(x_2) > n_2.$$

Докажем, что у f есть наибольшее значение, f ограничено сверху. Пусть $C = \sup \{f(x) \mid x \in [a; b]\}$. Нужно доказать $\exists x_0 \in [a; b]$, такое что $f(x_0) = C$

Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{1}{C-f(x)}$. Она непрерывная на отрезке $[a; b]$. $\exists M \forall x \in [a, b] g(x) < M$

$$\frac{1}{C-f(x)} < M.$$

$$f(x) < C - \frac{1}{M}.$$

Противоречие, так как C супремум. □

30 Дифференциальное исчисление.

30.1 Определение касательной.

Определение 2 (Производная).

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$a \in D.$$

Рассмотрим функцию, заданную на $D \setminus \{a\}$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Касательной к графику f в точке с абсциссой a называется прямая, проходящая через эту точку и имеющая коэффициент $f'(a)$

30.2 Производная

$$x - a = h.$$

$$x = h + a.$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

31 Дифференцируемость

Определение 3 (Дифференцируемая функция).

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in D.$$

f называют дифференцируемой в точке a , если $\exists C$ и функция α , заданная в некоторой окрестности нуля. α задана на множестве все чисел h таких что $a + h \in D$ и $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$

$$f(a + h) - f(a) = ch + \alpha(h)h.$$

Теорема 41.

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in D.$$

Тогда f дифференцируема в точке $a \iff f$ имеет в точке a конечную производную.

Доказательство. 1. \rightarrow

$$f(a + h) - f(a) = ch + \alpha(h)h.$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (C + \alpha(h)) = C.$$

2. \leftarrow Пусть f имеет в точке a конечную производную

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a) = \alpha(h).$$

$$\alpha(0) = 0.$$

Можно считать, что α равна чему угодно.

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a) + \alpha(h).$$

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a) + \alpha(h)h.$$

□

$$a + h = x.$$

$$f(x) - f(a) = c(x - a) + \alpha(x - a)(x - a).$$

$$\alpha(x - a) = \beta(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0.$$

$$f(x) - f(a) = c(x - a) + \beta(x)(x - a) = (x - a)(c + \beta(x)).$$

$$c + \beta(x) = \phi(x).$$

$$f(x) - f(a) = \phi(x)(x - a).$$

$$\beta(a) = \alpha(0) = 0.$$

$$\begin{aligned}\phi(a) &= c. \\ \lim_{x \rightarrow a} \phi(x) &= c. \\ \lim_{x \rightarrow a} \phi(x) &= \phi(a).\end{aligned}$$

Мы доказали, что если f дифференцируема в точке a , то существует функция, которая непрерывна в точке a , такая, что равенство

$$f(x) - f(a) = \phi(x)(x - a).$$

$$\phi(a) = f'(a).$$

31.1 Упражнение

Пусть существует ϕ , заданная на множестве D , такая что ϕ непрерывна в точке a и имеет место равенство $f(x) - f(a) = \phi(x)(x - a)$ и пусть $\phi(a) = c$. Тогда f дифференцируема в точке a и $f'(a) = c$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = \phi(a) = c.$$

31.2

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

Следующие условия равносильны

1. f имеет в точке a конечную производную $f'(a)$
2. f дифференцируема в точке a
3. Существует функция ϕ заданная на D , такая что $f(x) - f(a) = \phi(x)(x - a)$. ϕ непрерывна

Теорема 42.

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in D.$$

Если f дифференцируема в точке a , то она непрерывна.

Доказательство.

$$f(x) - f(a) = \phi(x)(x - a).$$

$$f(x) = f(a) + \phi(x)(x - a).$$

Константа + непрерывная функция. □

31.3 Производная суммы

Теорема 43.

$$f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, a \in D.$$

f, g дифференцируемы в точке a . Тогда $f + g$ дифференцируема в точке a и $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

Доказательство.

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \alpha(h)h.$$

$$g(a+h) - g(a) = g'(a)h + \beta(h)h.$$

$$(f+g)(a+h) - (f+g)(a) = (f'(a) + g'(a))h + (\alpha(h) + \beta(h))h.$$

□

Доказательство.

$$f(x) - f(a) = \phi(x)(x-a).$$

ϕ непрерывна в точке a .

$$g(x) - g(a) = \psi(x)(x-a).$$

$$(f+g)(x) - (f+g)(a) = (\phi(x) + \psi(x))(x-a).$$

$f+g$ дифференцируемы в точке a и $f'(a) + g'(a) = \phi(a) + \psi(a) = f'(a) + g'(a)$ □

Теорема 44.

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Первым способом самим

Доказательство.

$$f(x) = f(a) + \phi(x)(x-a).$$

$$g(x) = g(a) + \psi(x)(x-a).$$

$$(fg)(x) = f(a)g(a) + f(a)\psi(x)(x-a) + g(a)\phi(x)(x-a) + \phi(x)\psi(x)(x-a)^2.$$

$$(fg)(x) - (fg)(a) = (f(a)\psi(x) + g(a)\phi(x) + \phi(x)\psi(x)(x-a))(x-a).$$

□