

Лекция по математическому анализу

Александр Титилин

18 октября 2022 г.

Содержание

1	Еще про пределы.	1
1.1	1

1 Еще про пределы.

Эти фразы эквивалентны

1. Неравенство $f(x) > 0$ выполняется вблизи точки a .
2. \exists окрестность точки a , такая что для всех x из нее выполняется $f(x) > 0$
3. $\exists \delta > 0 \forall x$ такой что $|x - a| < \delta$ выполняется неравенство $f(x) > 0$.

1.1

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

1. $\forall \epsilon$ неравенство $|f(x) - A| < \epsilon$ выполняется вблизи a для всех $x \neq a$
2. $\forall \epsilon > 0 \exists$ окрестность U точки a , такая что $\forall x \in U, x \neq a$ Выполняется $|f(x) - A| < \epsilon$
3. $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x$ $0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \epsilon$

Теорема 1 *Определения предела равносильны.*

1. От противного. Пусть $\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x$ такой что

$$\begin{cases} 0 < |x - a| < \delta \\ |f(x) - A| \geq \epsilon \end{cases}.$$

Пусть $\delta = 1 \exists x_1$

$$\begin{cases} 0 < |x_1 - a| < 1 \\ |f(x_1) - A| \geq \epsilon \end{cases}.$$

$\delta = \frac{1}{2} \exists x_2$

$$\begin{cases} 0 < |x_2 - a| < \frac{1}{2} \\ |f(x_2) - A| \geq \epsilon \end{cases}.$$

Мы построили последовательность со свойствами

$$\begin{cases} 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \\ |f(x_n) - A| > \epsilon \end{cases}.$$

2. Возьмем любую последовательность с такими свойствами

$$\begin{cases} x_n \in D \\ x_n \neq a \\ x_n \rightarrow a \end{cases}.$$

И докажем, что $f(x_n) \rightarrow A$

$$\forall \epsilon \exists n_0 \forall n > n_0 |f(x_n) - A| < \epsilon.$$

$$\forall \delta > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 |x_n - a| < \delta.$$