# Лекции по дифференциальным уравнениям

## 1 Список литературы

1. Филиппов Лекции по обыкновенным ОДУ.

2. Филиппов Сборник задач по дифференциальным уравнениям

3. Петровский Лекции по ОДУ

4. Самойленко, Кривошея, Перестрюк. ДУ. Примеры и задачи.

5. Антидемидович

## 2 ДУ первого порядка

$$f(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

1. x - независимая переменная

2. $y(x)$ неизвестная функция

3. $y'(x)$ ее производная

Решить ДУ – найти $y(x)$

# 3 Примеры

1. $y'(x) = y(x)$

2. Найти $y(x)$ $y'(x) = f(x)$

# 4 ДУ n-го порядка

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}).$$

# 5 Ду разрешимое относительно производных

$$y' = f(x, y).$$

Будем заниматься только такими уравнениями

# 6 Модель экспонециального роста (эпидемий)

$$x(t) - \text{число бактерий}.$$

$$\dot{x}(t)\ x(t).$$

$$\dot{x} = kx.$$

$$x = Ce^{kt}, C \in \mathbb{R}.$$

Модель роста с учетом эффекта насыщения называется логистической моделью. Пусть $N$ – максмимальное количество особей.

$$\dot{x} = kx(N - x).$$

$$\dot{x} \text{ максимальная, при } x = \frac{N}{2}.$$

# 7 Интегрируемые дифференциальные уравнения перво порядка

Знакомимся с уравнениями, которые можем решить в явном виде.

## 7.1 Общие определения

**Определение 1.** *ДУ 1 порядка, разрешенным относительно производной называется уравнение вида*

$$y' = f(x, y).$$

*где $x$ независимая переменная, $y(x)$ искомая функция. Решить ДУ 1 $\iff$ найти $y(x)$. Будем считать $f : G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^2$, $G$ - связное и открытое множество В этой главе $f$ будет элементарной (школьной) функцией. Так же считается, что $G$ область опредления уравненияю*

**Определение 2.** *Функция $y = \phi(x)$ называется решением ДУ 1 на промежутку $< a, b >$, если выполнены 3 условия*

1. *$\phi \in C^1(< a, b >)$ дифференцируема один раз на $< a, b >$*
2. *Граф $\phi := \{(x, (\phi(x)) \mid x \in < a, b >\} \subset G$*
3. *$\phi'(x) \equiv f(x, \phi(x))$ на $< a, b >$*

**Определение 3.** *График решения называют интегральной кривой ДУ(1).*

### 7.1.1 Самый простой пример

$$y' = f(x).$$

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(s)ds + C, C \in \mathbb{R}.$$

Решений бесконечно много. Общее решение ДУ(1) имеет вид

$$y = \phi(x, C), C \in \mathbb{R}.$$

### 7.1.2 Задача Коши

Задано начальное значение решения.

**Определение 4.** *Задача Коши – называется задача следующего вида*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

*где,* $(x_0, y_0) \in G$ *Надо найти решения, которые удовлетворяют данному условию. Начальное условие означает, что график решения проходит через* $(x_0, y_0)$

**Определение 5.** *Говорят, что задача Коши 4 имеет единственное решение или* $(x_0, y_0)$ *есть точка единственности, если существует окрестность* $(x_0, y_0) \in U$, *такая что для любых двух интегральных кривых* $\Gamma_1, \Gamma_2$, *проходящих через точку* $(x_0, y_0)$ *выполняется* $\Gamma_1 \cap U = \Gamma_2 \cap U$ *(все интегральные кривые, проходящие* $(x_0, y_0)$ *совпадают в окрестности* $U$*). На языке епсилон-дельта*

$$\exists (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \forall \phi_1, \phi_2 \text{ Решения 4 } \phi_1 \equiv \phi_2 \text{ на } (x_1 - \delta, x_0 + \delta).$$

*Если имеет не единственное решение то* $\forall U$ *открестности найдутся 2 интегральные кривые различаются в окрестности.*

В дифференицальных уравнениях единственность понимаемся в локальном смысле.

### 7.1.3 Пример Пеано

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Преверяем 2 решения

$$\phi_1(x) = 0.$$

$$\phi_2(x) = x^3.$$

В любой окрестности $\phi_1 \neq \phi_2$

## 7.2 Уравнения с разделяющимся переменными

**Определение 6.** *УРП - уравнение вида $y' = f(x)g(y)$. Всегда предполагаем, что*

1. $f \in C < a, b >$
2. $g \in C < \alpha, \beta >$

$$G =< a, b > \times < \alpha, \beta > .$$

Как это решать придумал Якоб Бернулли.

### 7.2.1 Неформальный рецепт

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

### 7.2.2 Нормальное доказательство

**Теорема 1.**

$$f \in C(< a, b >).$$

$$g \in C(< \alpha, \beta >).$$

$$g(y) \neq 0 \forall y \in< \alpha, \beta > .$$

1. $H(y)$ *первообразная* $\frac{1}{g(y)}$
2. $F(x)$ *первообразная* $f(x)$

1. *Тогда формула из неформального рецепта задает общее решение и только его*

2. *$G = <a, b> \times <\alpha, \beta>$ – область существоавания и единственности, для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ задача задача Коши имеет единственное решение. И это решение задается формулами.*

$$H(x) = F(x) + H(y_0) - F(x_0).$$

*Proof.* Заметим, что $H'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0 \implies \exists H^{-1}$ Тогда получаем

$$y = H^{-1}(F(x) + C).$$

Формула 2 задает функции вида $y = y(x)$

1. Пусть $y = y(x)$ есть решение уравнения. Покажем, что оно вкладывается в формулу. $\exists C_0 : H(y(x)) - F(x) + C_0$

$$\frac{d}{dx}(H(y(x)) - F(x)) \equiv 0.$$

$$H'(y(x))y'(x) - F'(x) = 0.$$

$$\frac{1}{g(y(x))} * f(x)g(y(x)) - f(x) \equiv 0.$$

2. Теперь обратно

$$H(y(x)) \equiv F(x) + C.$$

   Продифференцировали

$$H'(y(x)) * y'(x) \equiv F'(x).$$

Берем произвольную точку из области $(x_0, y_0) \in G$

$$C \equiv H(y(x)) - F(x).$$

Подставим начальные условия из задачи коши

$$C = H(y(x_0)) - F(x_0) = H(y_0) - F(x_0).$$

Тоесть для любой точки из $G$ можно определить единственным образом $\square$

Ответ писать, надо даже если обратная функция не выражается в элементарных вроде $H(y) = y + \operatorname{arctg}(y)$), эта хрень считается ответом

$$H(y) - F(x) = C.$$

$$U(x, y) = H(y) - F(x).$$

$U$ – интеграл ДУ

**Определение 7.** *$U(x, y)$ называется интегралом ДУ, если выполняются следущие аксиомы (свойства)*

1. $U \in C^1$
2. $U'_y \neq 0$ *(производная по y не ноль)*
3. *U обращается в константу при подставлении решения ДУ.*

Все свойства выполняются для $U(x, y)$

**Определение 8** (Линия уровня)**.**

$$U^{-1}(c) = \{(x, y) \mid U(x, y) = c\}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $g(y) = 0$ Пусть $g(a) = 0 \implies$ стационарное решение

$$a' \equiv f(x)(g(a)).$$

**Теорема 2.** *Пусть $f \in C(< a, b >), g \in C^1(< \alpha, \beta >)$ Тогда все решения уравнения задаются совокупностью*

$$H(y) = F(x) + c.$$

$$g(y) = 0 \text{ *совокупность всех стационарных решений..*}$$

Эту хрень не доказываем, так как будет следовать из теоремы Пикара.

1. Пример Пеано
$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}.$$
$$y = 0.$$
решение
$$\int \frac{y'dy}{3y^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} * x^{1/3} * 3 + c = x^{\frac{1}{3}} + c.$$
$$y^{\frac{1}{3}} = x + c.$$
$$y = (x + c)^3.$$
$$\left[\begin{array}{c} y = 0 \\ y = (x + c)^3 \end{array}\right.$$
В точках $y = 0$ нарушается единственность, решения можно склеивать, получать новые, не из совокупности
$$y = \begin{cases} (x - c_1)^3, x < c_1 \\ 0, c_1 \leq x \leq c_2 \\ (x - c_2) < x > c_2 \end{cases}.$$
$g(y)$ не дифф в 0, условия теоремы 2 не выполняются.

2.
$$y' = y.$$
$y = 0$ решение
$$\int \frac{y'}{y} dy = \ln y + c.$$
$$\ln(|y|) = x + c.$$
$$|y| = e^{x+c}.$$
$$\left[\begin{array}{c} y = 0 \\ y = \pm c^x y e^c \end{array}\right.$$
$$c_1 = \pm e^c.$$

$$\left[\begin{aligned} y = 0 \\ y = C_1e^x, \forall c_1 \neq 0 \end{aligned}\right.$$

единственность не нарушена

# 8 Линейный уравнения (Неоднородное)

**Определение 9** (Линейное уравнение (неоднородное))**.**

$$y' = p(x)y + q(x).$$

**Определение 10** (Линейное однородное уравнение)**.**

$$y' = p(x)y.$$

Ввел эти уравнения И.Бернулли. Как решать Д.Бернулли. Рассмотрим вариант подстановки Бернулли, который в литературе называют метод вариации произвольной постоянной Лагранжа (метод Лагранжа).

## 8.1

Пусть $p, q \in C(< a, b >)$. Тогда правая часть $9$ $f(x, y) = p(x)y + q(x) \in C(G) G =< a, b > \times \mathbb{R}$ $G$ – область определения 9

**Теорема 3.** *Пусть $p, q$ непрерывны и есть только одно решение. Все решения линейного уравнения 9 задаются формулой*

$$y = e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt}(C + \int\limits_{x_0}^{x} q(s)e^{-\int\limits_{x_0}^{s} p(t)dt} ds) \tag{2}$$

$\forall (x_0, y_0) \in G$ *задача Коши имеет одно решение и оно задается формулой*

$$y = e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt}(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(s)e^{-\int\limits_{x_0}^{s} p(t)dt} ds) \tag{3}$$

### 8.1.1 Метод лагранжа

1. Берем однородное уравнение $y' = p(x)y$

2. Это уравнение с разделяющимися переменными. Умеем решать.

$$y = Ce^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt}.$$

3. В уравнение 9 замену переменных $y = ze^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt}$

4. Делаем замену переменных

$$(ze^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt})' = p(x)(ze^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt}) + q(x) \tag{4}$$

$$z'e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt} + z * e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt} p(x) = p(x)z^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt} + q(x).$$

$$z'e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt} = q(x).$$

$$z' = q(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt}.$$

Тупо найти первообразную.

$$z = \int\limits_{x_0}^{x} q(s)e^{-\int\limits_{x_0}^{s} p(t)dt} ds + C.$$

*Proof.* Сначала выводим формулу 2 Методом Лагранжа. Покажем, что $G$ область существования и единственности. Берем $\forall (x_0, y_0) \in G$. Надо показать, что существует только одно решение график, которого проходит через эту точку. В 2 подставим $(y_0, x_0)$

$$y_0 = e^{\int\limits_{x_0}^{x_0} p(t)dt}(C + \int\limits_{x_0}^{x_0} q(s)e^{-\int\limits_{x_0}^{s} p(t)dt}).$$

$$e^0 = 0.$$

Интеграл в скобках тоже 0, является решением $\square$

### 8.1.2 Какую замену переменных надо делать в ДУ

1. $G \subset \mathbb{R}^2$ поэтому замена $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$$(x, y) \to (x, z).$$
2. Биективность.
3. Замена должна сохранять гладкость (дифференцируемость)

### 8.1.3 Пример

$$y' = \frac{y}{x} + x.$$
$$G = \mathbb{R} \backslash \{x = 0\}.$$

1. $$y' = \frac{y}{x}.$$
   $y = 0$ решение
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}.$$
$$\ln |y| = \ln |x| + c = \ln C_1 |x|.$$
$$y = \pm C_1 x, c_2 = \pm c_1.$$
$$y = c_2 x.$$
2. Возвращаемся к ЛНУ
$$y = zx.$$
$$(zx)' = \frac{zx}{x} + x.$$
$$z'x + z = z + x.$$
$$z' = 1.$$

$$z = x + c.$$

$$y = (x + c)x.$$

## 8.2 Уравнения сводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

### 8.2.1 Однородные уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{5}$$

Такое уравнение называется однородным $\iff$ если не меняется при замене $(x, y) \to (\lambda x, \lambda y)$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{6}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}.$$

6 объединяет оба уравния

### 8.2.2 Пример

$$(x^2 - xy)dx + y^2 dy = 0.$$

$$y' = \frac{x^2 + xy}{y^2} = -(\frac{x}{y})^2 + \frac{x}{y}.$$

Пытаемся эту хуиту свести к $y' = g(\frac{y}{x})$

$$(x, y) \to (x, z).$$

$$(zx)' = g(z).$$

$$z' = \frac{g(z) - z}{x}.$$

### 8.2.3 Ф. 101

$$(x + 2y)dx - xdy = 0.$$

Попробуем замену $(x, y) \to (\lambda x, \lambda, y)$

$$\lambda^2(x + 2y)dx - \lambda^2 xdy = 0.$$

На лямбду сократили, уравнение однородно

$$(x, y) \to (x, z), y = zx.$$

$$(x + 2zx)dx0d(zx) = .$$

$$(x + 2zx)dx - x(zdx + xdz) = 0.$$

$x = 0$ реш вертикальная прямая

$$(1 + 2z)dx - xdz - zdx = 0c.$$

$$(1 + z)dx = xdz.$$

$z = -1 : y = -x$ да является решением, горизонтальная прямая

$$\ln|z + 1| = \ln|x| + c.$$

$$\ln|\frac{y}{x} + 1| = \ln|x| + c.$$

$$x = 0.$$

$$y = -x.$$

# 9 Уравнение в полных дифференцалах

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{7}$$

Это уравнение в полных дифференциалах

$$y' = f(x, y).$$

Такое уравнение можно переписать ввиде уравнения в полных дифферееенциалох

$$dy - f(x, y)dx = 0.$$

В уравнении 2 $x, y$ неравноправны

## 9.1 Пример

$$y' = \frac{1}{yx + y^2}.$$
$$\frac{dx}{dy} = yx + y^2.$$

уравнение линейное по $x$. Иногда полезно перевенуть уравнение

## 9.2 Смысл записи в полных дифференциалах

Для тех точек, где $N(x, y) \neq 0$ мы считаем что это уравнение тоже самое что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}.$$

Для тех точек, где $M(x, y) \neq 0$ пы считаем по определнию

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}.$$

Уравнение в полных дифференциалах это объедение такие уравнений.

Если $M = N = 0$ считаем что уравнение не определно и такие точки выкидыватся из области определения

**Определение 11.** $(x_0, , y_0)$ *такие что* $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) - 0$. *O*

$$M(x, \phi(x))x + N(x, \phi)d\phi(x) = (M(x, \phi(x))) + \phi'(x)N(x, \phi(x)))dx.$$

**Лемма 4.** *Пусть $u \in C^1(D)$ $\exists U'_x, U'_y \in C(G)$ хотя бы одна из частных производных не равняетчя 0, тогда $U(x, y) = 0$ задает регулярную кривую*

*Proof.*

$$\forall (x_0, y_0) : U(x_0, y_0) = 0.$$

$$(x_0, y_0) \in U^{-1}(0) := \{(x, y) \mid U(x, y) = 0\}.$$

Пусть $U'_y(x_0, y_0) \neq 0$ по теореме о неявной функции тогда $\exists! y = \phi(x)$ $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \phi \in C_1$ □

# 10 Уравнения, сводящиеся к однородным

## 10.1

$$y' = f(ax + by).$$

$$(x, y) \to (x, z),\ z = ax + by.$$

$$z' = a + by' = a + bf(ax + by) = a + bf(z).$$

### 10.1.1 Ф 65

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$$

$$(x, y) \to (x, z), z = 4x + 2y - 1.$$

$$z' = 4 + 2y' = 4 + 2\sqrt{z}.$$

$$\frac{dz}{d} = 4 + 2\sqrt{z}.$$

$$\frac{dz}{2 + 1\sqrt{z}} = 2dx.$$

$$\int \frac{dz}{2+\sqrt{z}}.$$

$$t = 2+\sqrt{z}.$$

$$z = (t-2)^2.$$

$$dz = 2(t-2)dt.$$

$$\int \frac{2(t-1)}{t}dt = t - 2\ln|t| = x + c.$$

$$2+\sqrt{z} - 2\ln(2+\sqrt{z}) = x + c.$$

$$2+\sqrt{(4x+2y-1)} - 2\ln(2+\sqrt{4x+2y-1}) = x + c.$$

## 10.2 Еще какаято ебанина

$$y' = f(\frac{a_1x+b_1y+c}{a_2x+b_2y+c_2}).$$

Если $c_1 = c_2 = 0$ такое уравнение является однородным. Каждая хуйня из дроби задает уравнение прямой. $(x_0, y_0)$ точка пересечения, нужен паралельный пернос, чтоб она стала $(0,0)$

$$(x,y) \to (u,v).$$

$$\begin{cases} u = x - x_0 \\ v = y - y_0 \end{cases}.$$

$$du = dx.$$

$$dv = dy.$$

$$\frac{dv}{du} = f(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}).$$

коэффициенты не меняются так как нормаль не меняется при параллельном переносе. Если прямые паралельны то

$$a_2 = ka_1.$$

$$b_2 = kb_1.$$

Задача сводитя к прошлой

### 10.2.1 Ф 118

$$y' = 2(\frac{y+2}{x+y-1})^2.$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} u = x - 3 \\ v = y + 2 \end{cases}.$$

$$\frac{dv}{du} = 2(\frac{v}{u+v})^2.$$

$$(u, v) \to (u, z).$$

$$v = zu.$$

$$(zu)' = u + uz' = 2(\frac{zu}{u+zu})^2 = 2(\frac{z}{1+z})^2.$$

## 10.3 ф 113

$$(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right).$$

$$(1, 2).$$

$$\begin{cases} u = x - 1 \\ v = u - 2 \end{cases}.$$

$$(2u - 4v)du + (u + v)dv = 0.$$

$$(u, v) \to (u, z).$$

$$v = zu.$$

$$(2u - 4zu)du + (u + uz)d(uz) = 0.$$

$$(2u - 4zu)du + u^2(1 + z)dz + u(z + z^2)du = 0.$$

$u = 0$ не реш

$$.$$

# 11

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Эта хуйня тоже самое что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} \wedge \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}.$$

$$y = \phi(x).$$

$$x = \psi(y).$$

$$U(x, y) = 0.$$

$$|U'_x| + |U'_y| \neq 0.$$

Неявное решение задания решения

**Определение 12.** *Пусть* $M, N \in C(G), G \subset \mathbb{R}^2, |M| + |N| \neq 0$ *в* $G$
*Пусть* $U \in C^1(G)$

*1.*
$$|U'_x| + |U'_y| \neq 0 \tag{8}$$

*2.*
$$U'_x N - U'_y M \equiv 0 \tag{9}$$

*Тогда* $U(x, y)$ *называется интегралом ДУ*

**Теорема 5.** *Пусть $U(x, y)$ интеграл дифференциального уравнения тогда*

1. *Формула $U(x, y) = c$ задает множество всех решений*

2. *$G$ область существования и единственности*

*Proof.* $\forall$ кривая задаваемая 1 удовлетворяет условиям леммы. Пусть $\gamma$ регулярная кривая, задааваема $U(x, y) = c$ , либо $U'_x \neq 0$, либо $U'_y \neq 0$

1. Пусть $U'_y \neq 0 \implies$

$$y = \phi(x).$$

$$U(x, \phi(x)) \equiv c.$$

$$\frac{d}{dx} U(x, \phi(x)) \equiv 0.$$

$$U'_x(x, \phi(x)) + U'_y(x, \phi(x))\phi'(x) \equiv 0.$$

$$\phi'(x) \equiv -\frac{U'_x(x, \phi(x))}{U'_y(x, \phi(x))}.$$

   Покажем,ч то $N(x, \phi(x)) \neq 0$. Предположим обратное

$$0 - U'_y M = 0.$$

   значит $M = 0$ получается полная фигня. Тогда

$$\frac{U'_x}{U'_y} \equiv \frac{M}{n}.$$

$$\phi'(x) = -\frac{M(x, \phi(x))}{N(x, \phi(x))}.$$

2. $U'_x \neq 0$

$$U(\psi(y), y) \equiv 0.$$

   Взяли производную

$$U'_x(\psi(y), y)\psi'(y) + U'_y(\psi(y), y) \equiv 0.$$

$$\psi = -\frac{U'_y(\phi, y)}{U'_x(\phi, y)}.$$

$$M(\psi(y), y) \neq 0.$$

$$\psi'(y) \equiv -\frac{N(\phi(y), y)}{M(\psi, y)}.$$

Теперь доказываем второй пункт. Берем $\forall(x_0, y_0) \in G$ и $\exists!$ решение, проходяшее через $(x_0, y_0)$

$$U(x, y) = C.$$

Если это решение локально представимо в виде $y = \phi(x)$, то $y_0 = \phi(x_0)$

$$U(x, \phi(x)) \equiv c.$$

$$U(x, y) = U(x, 0).$$

□

Перейдем к уравнениям в полных дифференциалах

# 12 УПД

**Определение 13.**

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

*Называется уравнением в полных дифференциалилах, если существует* $U \in C^1(G)$

$$M = U'_x.$$

$$N = U'_y.$$

**Теорема 6.** *Пусть уравнение в полных дифференциалах, тогда* $U$ *интеграл*

*Proof.*

1. $|U'_x| + |U'_y| = |M| + |N| \neq 0$ если оба ноль, то мы такое не рассматриваем
2. $U'_x N - U'_y M = MN - NM = 0$

□

**Следствие 6.1.** *Формула $U(x,y)=c$ все решения в обобщеном смысле*

**Следствие 6.2.** *$G$ - облатсь существования и единственности*

**Теорема 7** (Критерий УПД)**.** *Пусть $M,N\in C(G)$ , $\exists M'_y, N'_x \in C(G)$, Тогда*

1. *уравнение УПД $\iff M'_y \equiv N'_x$ (необходимое условие упд)*
2. *Если $G$ выпуклая прошлый пунк достаточное условие*

# 13 Обобщенно однородные уравния

$$y' = f(x,y).$$

$$(x,y)\to(\lambda x,\lambda y).$$

квазирастяжение

$$(x,y)\to(\lambda^\alpha x,\lambda^\beta y).$$

$$\begin{cases} x=\lambda^\alpha x_0 \\ y=\lambda^\beta x_0 \end{cases} \quad \lambda>0.$$

перейдем к уравнению в явной форме

$$\lambda = (\frac{x}{x_0})^{\frac{1}{\alpha}}.$$

$$y = (\frac{x}{x_0})^{\frac{\beta}{\alpha}} y_0.$$

Пусть $c=\frac{y_0}{x_0^{\frac{\beta}{\alpha}}}$

**Определение 14.** *Уравнение называется ООУ (Квази ОУ) , если существует*

$$2x^4yy'+y^4=4x^6.$$

$$x\to\lambda^\alpha x.$$

$$y\to\lambda^\beta y.$$

$$\lambda^{4\beta} = \lambda^{4\alpha}.$$

надо делать замену $z = \frac{y^\alpha}{x}$

# 14 Теорема

**Теорема 8.**

$$Mdx + Ndy = 0.$$

$$M, N \in C(G).$$

$$\exists M'_y, N'_x \in C(G).$$

*Тогда Уравнение упд* $\implies M'_y \equiv N'_x$
*Если* $G$ *– выпуклая то прошлое еще и достаточное условие.*

*Proof.* 1. Необходимость

Пусть уравнение упд значит

$$\begin{cases} M = U'_x \\ N = U'_y \end{cases}.$$

$$\begin{cases} M'_y = U''_{xy} \\ N'_x = U''_{yx} \end{cases}.$$

Значит $M'_y \equiv N'_x$

2. Достаточность

Ищем функцию $U(x, y)$ в явном виде.

$$\begin{cases} U'_x = M \\ U'_y = N \end{cases}.$$

Первое уравнение интегрируем по $x$, тогда

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y)ds + c(y).$$

Подбираем $c(y)$

$$(\int\limits_{x_0}^{x} M(s,y)ds + c(y))' = N(x,y).$$

$$(\int\limits_{x_0}^{x} M(s,x)ds)'_y + c'(y) = N(x,y).$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(s,y)sd = F(x,y).$$

$$F'(x,y)_y = \int\limits_{x_0}^{x} M'_y(s,y)ds.$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} M'_y(s,y)ds + c'(y) = N(x,y).$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} N'_x(s,y)ds + c'(y) = N(x,y).$$

$$N(x,y) - N(x_0,y) + c'(y) = N(x,y).$$

$$c'(y) = N(x_0,y).$$

$$c(y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt.$$

Без константы, тк нам надо найти тоько одну такую функцию.

$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(s,y)ds + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt.$$

$\square$

# 15 Общие теоремы для систем дифференциальных уравнений

## 15.1 Основные понятия

**Определение 15.** *Системой дифференциальных уравнений, разрешенных относительн старших производных, называется следущая система*

$$y_1^{(n_1)}(x) = f_1(x, y_1, y_1', y_1^{(n_1-1)}, y_2, \dots, y_2^{(n_2-1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{n_m-1}).$$

$$y_2^{(n_2)} = f_2(\textit{тоже самое что и прошлом}).$$

$$\dots.$$

$$y_m^{(n_m)} = f_m(\textit{тоже самое что и в прошлом}).$$

*где x независимая переменнная,* $y_1(x), \dots, y_m(x)$ *неизвестные функции. Решить систему, найти эти функциии. ,*$n_1, \dots, n_m$ *порядки старших производных*

$$n = n_1 + \dots + n_m \textit{ порядок сду.}$$

*Важные случаи*

1.
$$m = 1, n_1 = n.$$

   *Это диффур n-го порядка*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

2.
$$n_1 = \dots = n_m = 1, n = m.$$

*Нормальная система*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x_1, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x_1, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n' = f_n(x_1, y_1, \dots, y_n) \end{cases}.$$

**Лемма 9.** *Любая система дифференциальных уравний может быть записана в виде эквивалентной нормальной системы*

*Proof.* Начинаем с частного случая. Диффур n-го порядка записываем в виде нормальнс системы. ВВедем новые переменные $z_1, \dots, z_n$

$$\begin{cases} z_1 = y \\ z_2 = y' \\ \dots \\ z_n = y^{(n-1)} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} z_1' = y' = z_2 \\ z_2' = y'' = z_3 \\ \dots \\ z_n' = y^{(n)} = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{cases}.$$

Убедимся в сущ биекции между решениями. Если $y = \phi(x)$ тогда

$$z_1 = \phi(x), z_2 = \phi'(x), \dots, z_n = \phi^{(n-1)}(x).$$

Обратно

$$z_1 = \phi_1(x), \dots, z_n = \phi_n(x).$$

то $y = \phi'(x)$

$$\phi_{k+1}(x) = \phi_k'(x).$$

$$\phi_n' = \phi^{(n)}(x) = f(x, \phi_1, \dots, \phi_n) = f(x, \phi_1, \dots, \phi_1^{(n-1)}).$$

Теперь общий случай.

$$y_k, y_k', \dots, y_k^{(n_k-1)}.$$

берем в качестве новых переменнных $\square$

## 15.2 Векторная запись нормальной системы дифференциальных уравнений

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_{n(x)} \end{pmatrix}.$$

$$< a, b > \to \mathbb{R}^n.$$

$$y(x) \in C(< a, b >) := \forall y_k(x) \in C(< a, b >), k = 1 \dots n.$$

$$y(x) \in C^1(< a, b >) := \forall y_k \in C^1(< a, b >).$$

$$y'(x) := \begin{pmatrix} y'(x) \\ \dots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

$$\int\limits_a^b y(x)dx := \begin{pmatrix} \int\limits_a^b y_1(x)dx \\ \dots \\ \int\limits_a^b y_k(x)dx \end{pmatrix}.$$

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} f_1(x_1, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

$$y(x)' = f(x, y).$$

векторная система нормальной системы

Вводим переобозначения

$$x \to t.$$

$$y \to x\text{– это набор координат.}$$

$$y(x) \to x(t).$$

$$y' = \dot{x}.$$

$$\dot{x} = f(t, x).$$

$$G \subset \mathbb{R}^{n=1}.$$

$$f \in C(G).$$

**Определение 16.**

$$\phi(t) :< a, b >\to \mathbb{R}^n.$$

*называется решением нормальным решением если*

1.
$$\phi \in C^1(< a, b >).$$

2.
$$\Gamma_\phi \subset G.$$

3.
$$\dot{\phi(t)} \equiv f(t, \phi(t))\textit{на} < a, b > .$$

Задача Коши.

$$(t_0, x_0) \in F.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

## 15.3 Единственность решения задачи коши

$(t_0, x_0) \in G$ называется единсвтенной, если $\exists U(t_0, x_0)$ такая что любые две инетгральные кривые, проходящие через $t_0, x_0$ в этой окрестности $U$ совпадают.

# 16 Поле направлений. Ломанные направлений. Теорем Пеано

Рассматриваем нормальную систему диффуров

$$\dot{x} = f(t, x).$$

$$f : G \to \mathbb{R}^n.$$

$$G \subset \mathbb{R}^{n+1}\text{область}.$$

$$f \in C(G).$$

## 16.1 Поле направлений

$$(t_0, x_0) \in G.$$

Пусть $\phi(x_0) = t_0$ решение системы. Само решение $\phi$ неизвестно, но мы легко можем написать уравнение касательной к $\phi$ в $t_0$

$$x = \phi(t_0) + \dot{\phi}(t_0)(t - t_0).$$

$$\dot{\phi}(t_0) = f(t_0, \phi(t_0)) = f(t_0, x_0).$$

$$x = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0).$$

выписано в явном виде.

**Определение 17** (Поле направлений)**.** *Полем направлений называется отображения, которое* $\forall (t_0, x_0) \in G$ *сопоставляет касательную прямую, проходящую через эту точку.*

Ясно что $\phi$ будет решением $\iff$ в каждой своей точки касается прямой из поля направлений. Интегральные кривые в каждой точку поля направвний $\implies$ позволяет примерно рисовать их кривые.

## 16.2 Ломанные Эйлера

**Определение 18** (Ломанная Эйлера)**.** *Ломанной Эйлера называется любая ломанная, звенья которой, лежат на прямых из поля направлений. Апроксимация точной интегральной кривой.*

## 16.3 Алгоритм построения ломанной Эйлера

$$(t_0, x_0) \in G.$$

Строим лиоманную эйлера на $[t_0.T]$ в лево все аналогично.
Пусть N - число звеньев ребер

$$\frac{T - t_0}{N} = h \text{ Шаг.}$$

Пусть $t_k = t_0 + kh$ дробление отрезка $[t_0, T]$ $k = 0 \dots N$. Линия эйлера строится по реккурентному алгоритму по следущей схеме

$$l(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0), [t_0, t_1].$$

$$x_1 = l(t_1) = x_0 + f(t_0, x_0)h.$$

$$l(t) = x_1 + f(t_1, x_1))(t - t_1), [t_1, t_2].$$

$$x_2 = l(t_2).$$

Пусть Ломанная Эйлера построена на $[t_0, t_k], x_k = l(t_k)$

$$[t_{k_1}, t_{k+1}], l(t) = x_k + f(t_k, x_k)(t - t_k).$$

$$\begin{cases} t_{k+1} = t_k + h \\ x_{k+1} = x_k + f(t_k, x_k)h \end{cases}.$$

## 16.4 Теорема Пеано

**Теорема 10** (Пеано)**.** *Пусть* $f \in C(G)$ *тогда* $\forall (t_0, x_0) \in G$ *задача коши*

$$\dot{x} = f(t, x)x(t_0) = 0.$$

*имеет хотя бы одно решение (определенное на отрезке* $[t_0 - h, t_0 + h]$ *)*

Без доказательства

# 17 Интегральные уравнения

$$\dot{x} = f(t, x).$$

$$f : G \to \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

$$f \in C(G).$$

Рассмотрим следущее интегральное уравнение.

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(x, x(s))ds.$$

Решить это уравние означает найти $x(t)$

**Определение 19.** $\phi(t)$ *называется решением интегральное уравнения на* $< a, b >$

1. $\phi \in C(< a, b >)$
2. $\Gamma_\phi \subset G$
3. $\phi(t) \equiv x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds$ *на* $< a, b >$

**Теорема 11** (Об эквивалентность задачи Коши и интегральных уравнений)**.** $\phi(t)$ *будет решением задачи коши на промежутке* $\iff$ *она решение интегрального уравнения*

*Proof.* 1. (a) $\phi \in C^1 \implies \phi \in C$

(b) Все понятно

(c)

$$\dot{\phi}(t) \equiv f(t, \phi(t)) \implies \int\limits_{t_0}^{t} \dot{\phi}(s)dt = \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds.$$

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds.$$

2. $\phi \in C \implies f(s, \phi(s)) \in C \implies \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds \in C^1$

3. Понятно

4.

$$\phi(t) \equiv x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds \implies \phi \in C^1.$$

5.

$$\phi(t) \equiv x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds.$$

$$\dot{\phi}(x) \equiv 0 + f(t, \phi(t)).$$

Начальное условие $\phi(t_0) = x_0$

□

# 18 Условие Липщица

$$f : G \to \mathbb{R}^n.$$

$$G \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

**Определение 20.** *f удовлетворяет условию липшица по переменной x в области* $G$ *с константой* $L$

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in G.$$

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leq L||x_1 - x_2||.$$

### 18.1 Комментарий

f растет не быстрее линейной функции

**Лемма 12.** *для f выполняется условие липщица* $\iff f \in C_x^0(G)$

*Proof.*

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| < \epsilon.$$

$$\delta = \frac{\epsilon}{L}.$$

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leq L||x - x_2|| < \delta L.$$

□

**Определение 21** (Равномерная непрерывность)**.**

$$\forall\ \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon), \forall (t, x_1), (t, x_2) \in G||x_1 - x_2|| < \delta.$$

**Теорема 13.** *Пусть* $\exists f'_x \in C(G) \iff \forall$ *шара из* $G$*, для f выполняется условие липщица в B по x*

## 19 Теорема Пикара

$$\dot{x} = f(x).$$

Нормальная система дифференциальных уравнений

$$G \to \mathbb{R}^n.$$

$G$ область в $R_{t,x}^{n+1}$

**Теорема 14** (Пикара)**.** *Пусть* $f \in C(G), f \in Lip_x(G)$*, тогда*

$$\forall (t_0, x_0) \in G.$$

*Задача Коши*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

*имеет единственное решение, определенное на отрезке Пеано*

$$I = [t_0 - h, t_0 + h].$$

**Замечание 1.**

$$C_x^1 \implies Lip_x.$$

*В теореме Пикара можно писать*

$$f \in C, f \in C_x^1 (f'_x \in C).$$

*менее общая формулировка, но она удобна на практике*

## 19.1 Построение отрека Пеано

$G$ - открытое множество $\implies$ $(t_0, x_0) \in G$ вместе с открытым шаром шаром $B = R_r(t_0, x_0)$ Уменьшм $r$ , $\overline{B} \subset G$ (замкнутый шар). В $\overline{B}$ построим цилиндр

$$P := \{(t,x) \mid |t - t_0| \leq a, ||x - x_0|| \leq b\}.$$

Пусть $a, b$ малы $P \subset \overline{B}$. $P$ ограниченно и замкнуто. По теореме Вейштрасса (любая непрерывная функция на компакте достигает наибольшего значения).

$$\exists M = \max ||f(t,x)||.$$

$$h := \min a, \frac{b}{M}.$$

Считаем, что $M \neq 0$, если $M = 0 \implies f = 0$ все решается очень просто.

$$I := [t_0 - h, t_0 + h].$$

Отрезок Пеано определяется неоднозначно

## 19.2 Определение Пикаровских приближений

Заменим задачу коши на эквивалентное ей интегральное ураавнение

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Мы докажем, что именно интегральное уравние имеет единственное решение на отрезке Пеано $I$. Пикаровские приближения, $\phi_0(t), \phi_1(t), \ldots, \phi_t(t)$

$$\phi_0(t) = x_0.$$

$$\phi_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(x_0)(s))ds.$$

$$\ldots.$$

$$\phi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_k(s))ds.$$

## 19.3 Лемма

**Лемма 15.** *1. Все пикаровские приближения определены на* $I, \phi_k \in C(I)$

*2.* $\Gamma_{\phi_k} \subset P$

*Proof.* По индукци $k = 0$

$$\phi_0(t) = x_0.$$

все очевидно.

Переход $\phi_k \in C(i)$ и $\Gamma_{\phi_k} \subset P$

$$\phi_{k+1} := x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi_k(s))ds.$$

$$t \in I \iff |t - t_0| \leq h.$$

S между $t, t_0$

$$s \in I \implies .$$

$$\phi_k(s)\text{полн ogh}.$$

$$(s, \phi_k(s)) \in P \forall s \in I.$$

$$f(s, \phi_k(s)).$$

определена при

$$\forall s \in I \implies \int\limits_{t_0}^{t} f.$$

$$\forall t \in I \implies \phi_{k+1}(t)\text{опредлена}\forall t \in I.$$

Пункт 1 доказан

$$(t, \phi_{k+1}) \in P \forall t \in I.$$

$$\begin{cases} |t - t_0| \leq a \\ ||\phi_{k+1}(t) - x_0|| \leq b \end{cases}.$$

Проверим каждое из условий

1. $t \in I \iff |t - t_0| \leq h \leq a$
2. $||\phi_{k+1}(t) - x_0|| = ||\int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi_k)ds|| \leq \int\limits_{t_0}^{t} ||f(s, \phi_k(s))||ds \leq |\int\limits_{t_0}^{t} ||f(s, \phi_k(s))||ds| \leq M|\int\limits_{t_0}^{t} ds = M|t - t_0| \leq Mh = b$

$\square$