Лекции по математическому анализу 3 семестр

1 Функции нескольких вещественных переменных

$$X \subset \mathbb{R}^n.$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X.$$

$$x \to f(x).$$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2.$$

$$z = x^2 + 3y.$$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

2 Замкнутый промежуток в n-мерном пространстве

$$a = (a_1, \ldots, a_n).$$

$$b = (b_1, \ldots, b_n).$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n).$$

$$\forall i \; 1 \leq i \leq n \; a_i \leq x_i \leq b_i.$$

3 Окрестность

Окрестность точки – открытый шар с центром в этой точке

4 Внутренняя точка

$$X \subset \mathbb{R}^n.$$

$$a \in \mathbb{R}^n.$$

а называется внутренней точкой множества X, если $\exists r B(a, r) \subset X$

5 Внешняя точка

а называется внешней точкой по отношению к множеству X, если $\exists B(a, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus X$.

6 Граничная точка

Если любая граница точки содердит точки и из множества и не оттуда.

7 Обозначения шаров

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, a) < R\}.$$

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, a) \leq R\}.$$

Множество называется открытым, если всего его точки внутренние

8 Открытое множество

Множество А открыто в X, если

$$A = X \cap U.$$

U - открытое множество

Теорема 1. *Пересечение двух открытых множеств является открытым.*

Proof. Надо доказать, что все точки $U \cap V$ внутренние.

$$a \in X.$$

а внутренняя точка множетсва U, значит $\exists r_1 \ B(a, r_1) \subset U$
а внутренняя точка множетсва V, значит $\exists r_2 \ B(a, r_2) \subset V$

$$r = \min r_1, r_2.$$

$$B(a, r) \subset U \cap V.$$

$\square$

Теорема 2.

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}.$$

$$U_\alpha \in R^n.$$

пусть $\forall \alpha \ U_\alpha$ *открытое тогда* $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ *открыто*

Теорема 3.

$$F \subset \mathbb{R}^n.$$

F - замкнуто $\iff \mathbb{R}^n \setminus F$ *- открытое*

Теорема 4. 1. *пересечение любого числа замкнутых множеств являкется замкнуть*

2. *объединение конечного числа замкунтых множеств замкнуто*

Proof.

$$U_\alpha = \mathbb{R}^n \setminus F_\alpha.$$

Оно открытое

$$\mathbb{R}^n \setminus (\bigcap F_\alpha) = \cup(R_n \setminus F_\alpha) - -.$$

$\square$

9 Замыкание

Определение 1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Замыкание X, $\overline{X}$ наименьшее замкнутое множество, в котором лежит X.*

$$B(a, r).$$

$$\forall b \in B(a, r).$$

$$r_1 = r - d(a, b).$$

Рассмотрим $B(b, r_1)$, докажем, что $B(b, r_1) \subset B(a, r)$

$$\forall x \in B(b, r_1).$$

Нужно доказать, что $x \in B(a, r)$

$$d(x, a) < R.$$

Итак, $d(x, a) \le d(x, b) + d(a, b)$

$$d(x, a) \le d(x, b) + r - r_1.$$

10 Компактно

Определение 2.

$$X \subset \mathbb{R}^n.$$

X компактно, если замкнуто и ограничено

Определение 3. *Множество ограничено, если лежит в неком шаре.*

11 Предел в $\mathbb{R}^n$

Определение 4.

$$(x_n \to a).$$

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \, \forall n \geq n_0 d(x_n, a) \leq \epsilon.$$

Теорема 5 (о покоординатной сходимости)**.** $(x^{(n)})$ *– последовательность точек в* $\mathbb{R}^n$*,* $a \in \mathbb{R}^n$

$$x^{(n)} \to a \iff x_k^{(n)} \to a_k.$$

Proof. Для случая $n = 2$

$$(x_n, y_n), (a, b).$$

$$|x_n - a| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}.$$

$$|y_n - b| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}.$$

□

12 Упражнения

1. Пусть множество X замкнуто, тогда оно содержит все свои предельные точки. Верно ли обратное

13 Предел функции n переменных

$$X \subset \mathbb{R}^n.$$

$$V = abc.$$

$$X = \{(a, b, c) | a > 0, b > 0, c > 0\}.$$

$$x + y^2 + z^3 = 1.$$

Определение 5.

$$X \subset \mathbb{R}^n, f : X \to \mathbb{R}.$$

$$a \in \mathbb{R}^n.$$

a предельная точка множества X

$$A = \lim_{x \to a} f(x).$$

если

$$\forall (x^{(n)}) \begin{cases} (x^{(n)}) \in X \\ x^{(n)} \neq a \\ x^{(n)} \to a \end{cases}.$$

$$f(x^{(n)}) \to A.$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 d(x, a) < \delta \implies |f(x) - A| < \epsilon.$$

Теорема 6 (Вейрештрасса)**.** *Пусть* $X \subset \mathbb{R}^n, f : X \to \mathbb{R}$. f *непрерывна на* X f *принимает на* X *наименьшее и наибольшее значение*