

Лекции по математическому анализу 3 семестр

1 Функции нескольких вещественных переменных

$$X \subset \mathbb{R}^n.$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X.$$

$$x \rightarrow f(x).$$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2.$$

$$z = x^2 + 3y.$$

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

2 Замкнутый промежуток в n-мерном пространстве

$$a = (a_1, \dots, a_n).$$

$$b = (b_1, \dots, b_n).$$

$$x = (x_1, \dots, x_n).$$

$$\forall i \ 1 \leq i \leq n \ a_i \leq x_i \leq b_i.$$

3 Окрестность

Окрестность точки – открытый шар с центром в этой точке

4 Внутренняя точка

$$X \subset \mathbb{R}^n.$$

$$a \in \mathbb{R}^n.$$

a называется внутренней точкой множества X , если $\exists r B(a, r) \subset X$

5 Внешняя точка

a называется внешней точкой по отношению к множеству X , если $\exists B(a, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus X$.

6 Граничная точка

Если любая граница точки содержит точки и из множества и не оттуда.

7 Обозначения шаров

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, a) < R\}.$$

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, a) \leq R\}.$$

Множество называется открытым, если всего его точки внутренние

8 Открытое множество

Множество A открыто в X , если

$$A = X \cap U.$$

U - открытое множество

Теорема 1. Пересечение двух открытых множеств является открытым.

Proof. Надо доказать, что все точки $U \cap V$ внутренние.

$$a \in X.$$

a внутренняя точка множества U , значит $\exists r_1 B(a, r_1) \subset U$

a внутренняя точка множества V , значит $\exists r_2 B(a, r_2) \subset V$

$$r = \min r_1, r_2.$$

$$B(a, r) \subset U \cap V.$$

□

Теорема 2.

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}.$$

$$U_\alpha \in \mathbb{R}^n.$$

пусть $\forall \alpha U_\alpha$ открытое тогда $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ открыто

Теорема 3.

$$F \subset \mathbb{R}^n.$$

F - замкнуто $\iff \mathbb{R}^n \setminus F$ - открытое

Теорема 4. 1. пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым

2. объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто

Proof.

$$U_\alpha = \mathbb{R}^n \setminus F_\alpha.$$

Оно открытое

$$\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcap F_\alpha \right) = \bigcup (\mathbb{R}^n \setminus F_\alpha) = \dots$$

□

9 Замыкание

Определение 1. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Замыкание X , \overline{X} наименьшее замкнутое множество, в котором лежит X .

$$B(a, r).$$

$$\forall b \in B(a, r).$$

$$r_1 = r - d(a, b).$$

Рассмотрим $B(b, r_1)$, докажем, что $B(b, r_1) \subset B(a, r)$

$$\forall x \in B(b, r_1).$$

Нужно доказать, что $x \in B(a, r)$

$$d(x, a) < R.$$

Итак, $d(x, a) \leq d(x, b) + d(a, b)$

$$d(x, a) \leq d(x, b) + r - r_1.$$

10 Компактно

Определение 2.

$$X \subset \mathbb{R}^n.$$

X компактно, если замкнуто и ограничено

Определение 3. Множество ограничено, если лежит в некоем шаре.

11 Предел в \mathbb{R}^n

Определение 4.

$$(x_n \rightarrow a).$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 d(x_n, a) \leq \epsilon.$$

Теорема 5 (о покоординатной сходимости). $(x^{(n)})$ – последовательность точек в \mathbb{R}^n , $a \in \mathbb{R}^n$

$$x^{(n)} \rightarrow a \iff x_k^{(n)} \rightarrow a_k.$$

Proof. Для случая $n = 2$

$$(x_n, y_n), (a, b).$$

$$|x_n - a| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}.$$

$$|y_n - b| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}.$$

□

12 Упражнения

1. Пусть множество X замкнуто, тогда оно содержит все свои предельные точки. Верно ли обратное

13 Предел функции n переменных

$$X \subset \mathbb{R}^n.$$

$$V = abc.$$

$$X = \{(a, b, c) | a > 0, b > 0, c > 0\}.$$

$$x + y^2 + z^3 = 1.$$

Определение 5.

$$X \subset \mathbb{R}^n, f : X \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$a \in \mathbb{R}^n.$$

a предельная точка множества X

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

если

$$\forall (x^{(n)}) \begin{cases} (x^{(n)}) \in X \\ x^{(n)} \neq a \\ x^{(n)} \rightarrow a \end{cases} .$$

$$f(x^{(n)}) \rightarrow A.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 d(x, a) < \delta \implies |f(x) - A| < \epsilon.$$

Теорема 6 (Вейрештрасса). Пусть $X \subset \mathbb{R}^n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$. f непрерывна на X f принимает на X наименьшее и наибольшее значение

14 Теоремы о непрерывных функциях

14.1 Связанное множество

Определение 6. Путь в \mathbb{R}^n – набор непрерывных функций $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ заданных на $[a, b]$

Точка $x(a)$ называется началом пути. $x(b)$ конечная точка пути. Множество всех точек $x(t), t \in [a, b]$ носитель пути.

Определение 7. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. X называется связанным, если для любых точек $p, q \in X$ существует путь с началом p , концом q , носитель которого лежит в X

15 Теорема Вейрштрасса

Теорема 7. Пусть X – компактное подмножество \mathbb{R}^n , f функция заданная на X , и непрерывная во всех точках множества X . Тогда f принимает и наибольшее и наименьшее значение.

Proof. Случай для $n = 1$

$$\forall x f(x) \neq M.$$

$$f(x) < M.$$

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq C.$$

$$M - f(x) \geq \frac{1}{C}.$$

$$M - \frac{1}{C} \geq f(x).$$

Пусть нет наибольшего значения

$$\exists x_1 f(x_1) > 1.$$

Исходный промежуток δ_1

$$\delta_1 \supset \delta_2.$$

$$x_2 \in \delta_2.$$

$$f(x_2) > 2.$$

$$f(x_n) > n.$$

$$\bigcup \delta = \{a\}.$$

$$x_n \rightarrow a.$$

$$x_n \in \delta_n, a \in \delta_n.$$

$$|\delta_n| = \frac{|\delta_1|}{2^{n-1}}.$$

$$|x_n - a| < \frac{|\delta_1|}{2^{n-1}} \rightarrow 0.$$

$$x_n \rightarrow a.$$

$$f(x_n) \rightarrow f(a).$$

Неограниченная последовательность чисел стремится к числу, какакая-то хуйня такого не бывает.

Теперь для функции 2 переменных Докажем что f ограничена сверху. Предположим это неправда, тогда $\exists x^{(1)} \in \Delta_1 \cap X, f(x^{(1)}) > 1$

$$\exists x_2 \in \Delta x_2 \cap X.$$

f неограниченна на $\Delta_2 \cap X, f(x^2) > 2$ по лемме $8 \cap \Delta = \{a\}$ состоит из одной точки. Тогда последовательность $x^{(n)} \rightarrow a$

$$x^{(n)} \in \Delta.$$

$$d(x^n, a) \leq \sqrt{2} \text{размер} \Delta_n.$$

Дальше как и для функции одной переменной. □

Лемма 8 (О вложенных отрезках).

$$n = 2.$$

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1, x_1 \in [a_1, b_1].$$

$$a_2 \leq x_2 \leq b_2, x_2 \in [a_2, b_2].$$

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2].$$

Дана последовательность вложенных замкнутых n мерных промежутков

$$\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$$

$d(\Delta)$ - длина наибольшей стороны

$$d(\Delta_n) \rightarrow 0.$$

Тогда в пересечение одна точка

Proof. Спроектируем все промежутки на ось абсцисс, мы получим последовательность замкнутых вложенных промежутков, лежащих в промежутке $[a_1, b_1]$ таких что длины этих промежутков стремятся к 0, пересечение таких промежутков состоит из 1 точки α_1 . Аналогично спроектировали эти промежутки на ось ординат, получили последовательность замкнутых вложенных промежутков лежащих в $[a_2, b_2]$ по лемме о вложенных промежутках их пересечение состоит из одной точки α_2 . Рассмотрим точку с координатами α_1, α_2 □

16 Теорема Больцано

Теорема 9. Пусть X связное подмножество пространства \mathbb{R}^n , пусть f непрерывная функция, заданная на X . Пусть p, q значения функции f , причем $p < q$. Тогда $\forall r \in (p, q) \exists x \in X, f(x) = r$

17 Множество уровня

$$f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$f(x_1, \dots, x_n).$$

$$\{x \mid x \in X, f(x) = c\}.$$

18 Дифференцирование нескольких переменных

Определение 8 (Производная по направлению).

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + l_1 h, y_0 + l_2 h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Пусть $\vec{l} = (0, 1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

частная производная по x

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Определение 9 (Градиент).

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Определение 10 (точка экстремума (максимума)). (x_0, y_0) - точка максимума, если \exists окрестность U , $\forall x \in U$ $f(x) < f(x_0)$

Теорема 10 (Ферма).

$$X \subset \mathbb{R}^2.$$

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}.$$

(x_0, y_0) внутренняя точка X . Пусть $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ и $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

18.1 Пример

$$f(x, y) = x^2 + 2xy.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x = 0.$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

$$f(0, 0) = 0.$$

19 Условный экстремум

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h).$$

Определение 11 (Дифференцируемость функции).

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ch + o(h).$$

Теорема 11 (О полном приращении). Пусть функция f задана на $X \subset \mathbb{R}^2$, a внутренняя точка X , $a = (x_0, y_0)$. Пусть f имеет частную производную во всех точках в некоторой окрестности точки a . Пусть эти частные производные непрерывны в точке a . Тогда вблизи точки a имеет место

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0) + \alpha(x, y)(x - x_0) + \beta(x, y)(y - y_0)$$

α, β бесконечно малые в (x_0, y_0)

Обозначим $h = x - x_0, k = y - y_0$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \partial_x f(x_0, y_0)h + \partial_y f(x_0, y_0)k + \alpha(h, k)h + \beta(h, k)k.$$

α, β бесконечно малые в $(0, 0)$

Proof.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = (f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)) + (f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)).$$

$$g(x) = f(x, y_0 + k).$$

$$g(x_0 + h) - g(x_0).$$

По теореме Лагранжа

$$g(x_0 + h) - g(x_0) = g'(c)h = \partial_x f(c, y_0 + k)h.$$

$$g(y) = f(x_0, y).$$

$$g(y_0 + k) - g(y_0) = g'(d)k = \partial_y g(x_0, d)k.$$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = .$$

$$\partial_x f(x_0, y_0)h + \partial_y f(x_0, y_0)k + (\partial_x f(x, y_0 + k) - \partial_x f(x_0, y_0))h + (\partial_y f(x, y_0 + k) - \partial_y f(x_0, y_0))k$$

□

Определение 12 (Дифференцируемость функции нескольких переменных). Пусть $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^2$, $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ внутренняя f дифференцируема в точке a , если, $\exists A, B \in \mathbb{R}$ и функции $\alpha(x, y), \beta(x, y)$ бесконечно малые в (x_0, y_0) и вблизи (x_0, y_0) имеет место равенство

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \alpha(x, y)(x - x_0) + \beta(x, y)(y - y_0).$$

Теорема 12. Если f дифференцируема в (x_0, y_0) , то $A = \partial_x f(x_0, y_0)$, $B = \partial_y f(x_0, y_0)$

Proof. Подставим $y = y_0$

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = A(x - x_0) + \alpha(x, y_0)(x - x_0).$$

$$\forall x \neq x_0.$$

$$\frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = A + \alpha(x, y_0).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (A + \alpha(x)) = A.$$

□

Теорема 13.

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}, a = (x_0, y_0) \in X, \vec{l} = (l_1, l_2), ||\vec{l}|| = 1.$$

Пусть f дифференцируема в точке a , тогда $\exists \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(a)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)l_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)l_2.$$

$$\text{grad } f_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Proof.

$$f(x_0 + hl_1, y_0 + kl_2) - f(x_0, y_0) = .$$

□

20 Направление наибольшего возрастания функции

$$-||\vec{a}, \vec{b}|| \leq |(\vec{a}, \vec{b})| \leq ||\vec{a}|| ||\vec{b}||.$$

\vec{l} направление наибольшего возрастания, если $\vec{l} = \frac{1}{||\text{grad}(f(x_0, y_0))||} \text{grad}(f(x_0, y_0))$

21

$$y'(3y^2) + y' + 1 = 0.$$

$$y'(3y^2 + 1) = -1.$$

$$y' = -\frac{1}{3y^2 + 1}.$$

$$y^3(-2) + y(-2) - 2 = 0.$$

$$y(-2) = 1.$$

22

$$y^2 + y - x = 0.$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4x}}{2}.$$

Теорема 14.

$$f : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

X – открытое множество.

$$x, y : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

I – открытый промежуток

$$t \in T.$$

$$t \rightarrow x(t).$$

$$t \rightarrow y(t).$$

$$F(t) = f(x(t), y(t)).$$

Пусть $x(t), y(t)$ дифференцируемы в точке t_0 из I , f дифференцируема в точке $(x(t_0), y(t_0))$

$$F'(t_0) = \partial_x f(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + \partial_y f(x(t_0), y(t_0))y'(t_0).$$

Proof.

$$F'(x_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}.$$

$$F(t) - F(x_0) = f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0)).$$

□

Теорема 15.

$$f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

X – открытое множество, f дифференцируема на X . Пусть $(x_0, y_0), (x, y) \in X$

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \partial_x f(c_1, c_2)(x - x_0) + \partial_y f(c_1, c_2)(y - y_0).$$

Proof.

$$f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) - f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0).$$

□

Следствие 15.1. Пусть X выпуклое. Пусть $\partial_x f, \partial_y f$ тождественно равны 0. Тогда f постоянна

Следствие 15.2. Пусть X область (открытое связное множество)

23 K. 3.60

23.1

$$3u^2\partial_x u + 3y(u + x\partial_x u) = 0.$$

$$y^2\partial_x u + yu + yx\partial u = 0.$$

$$\partial_x u(u^2 + xy) = -yu.$$

$$3u^2\partial_y x.$$

23.2

$$\partial_x u e^u - y(x + x\partial_x u) = 0.$$

$$e^{u(1,0)} = 2.$$

$$u = \ln 2.$$

$$\partial_x u(e^u - yx) - yx = 0.$$

$$2\partial_x u = 0.$$

24

$$u + \ln(x + y + u) = 0.$$

$$u'_x(1 + u'_x)\frac{1}{x + y + u} = 0.$$

$$u'_y + (1 + u'_y)\frac{1}{x + y + u} = 0.$$

$$u'_x + \frac{1}{x + y + u} + \frac{u'_x}{x + y + u} = 0.$$

$$(1 + \frac{1}{x+y+u})u'_x = -\frac{1}{x+y+u}.$$

$$u(1, -1) + \ln u(1, -1) = 0.$$

$$t = u(1, -1).$$

$$t + \ln t = 0.$$

25 Теорема о неявной функции

Теорема 16. Пусть $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, U окрестность точки (x_0, y_0) , пусть функция $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ Пусть выполняются условия

1. F непрерывно дифференцируема в U
2. $F(x_0, y_0) = 0$
3. $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$

Тогда существует открытый промежуток $I_x \times I_y$, I_x окрестность x_0 , I_y окрестность y_0

$$I_x = \{x \mid |x - x_0| < \alpha\}.$$

$$I_y = \{y \mid |y - y_0| < \beta\}.$$

Которые лежат в U и $\exists f$ заданная на I_x принимающая значения I_y , такая что $f \in C^1(I_x)$ (непрерывно дифференцируема на I_x), $F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$, для $x \in I_x$, $f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$, $\forall x \in I$

Proof. Пусть F непрерывно дифференцируема, т.е F'_x, F'_y непрерывны в (x_0, y_0) , то $F'_y(x, y) > 0$ для (x, y) вблизи (x_0, y_0) . Рассмотрим $F(x, y_0 - \beta)$

$$\forall x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) F(x, y_0 - \beta) < 0.$$

$$F(x_0, y_0 + \beta) > 0.$$

то существует $\alpha_2 \forall x \in (x_0 - \alpha_2, x_0 + \alpha_2), F(x, y_0 + \beta) > 0$ Пусть $\alpha = \min \alpha_1, \alpha_2$
Итак мы построили $I_x \times I_y, I_x = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha), I_y = (x_0 - \beta, x_0 + \beta)$

$$F'_y(x, y) > 0, (x, y) \in Y.$$

Если возрастает значит существует единственное значение y , такое что $F(x, y) = 0$
Нужно доказать, что f дифференцируема $(x_0 - \alpha; x_0 + \alpha)$ \square

25.1 Пример

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

$$\exists U(x_0, y_0).$$

$$F(x, y) = 0.$$

Данная функция дифференцируема в точке (x_0, y_0)

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = \partial_x F(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y F(x_0, y_0)(y - y_0) + \dots$$

$$(x_0, y_0) \in C.$$

$$\frac{\partial_x F(x_0, y_0)}{\partial_y F(x_0, y_0)} + \frac{y - y_0}{x - x_0} = 0.$$

26 К 62

$$u'_x - 4u - 4xu'_x = 0.$$

$$u'_y - 4xu'_y + 2y = 0.$$

$$u^3(1, -2) - 4u(1, -2) = 0.$$

$$u(1, -2) \in \{0, 2, -2\}.$$

27 Достаточное условие строгого экстремума

Теорема 17.

$$x^0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}.$$

$U(x^{(0)})$ – Окрестность.

$$f : U(x^{(0)}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Пусть

$$f \in C^{(2)}(U(x^{(0)})).$$

По формуле Тейлора

$$f(x^{(0)} + h) = f(x^{(0)}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) h_i h_j + o(\|h\|^2).$$

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) h_i h_j.$$

Тогда

1. если $Q(h)$ положительно определена, то $x^{(0)}$ точка строгого минимума.
2. Если $Q(h)$ отрицательно определена, то $x^{(0)}$ точка строгого максимума
3. если $Q(h)$ принимает значения разных знаков, то $x^{(0)}$ не является точкой экстремум

Proof. 1. Пусть $h \neq 0$, x_0 критическая точка

$$f(x^{(0)}) + \|h\|^2 \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \left(\frac{h_i}{\|h\|} \frac{h_j}{\|h\|} + \alpha(h) \right) \right).$$

$$\frac{t_i}{\|h\|} = t_i.$$

$$\sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} * t_i * t_j.$$

$||t||$ - n -мерная сфера радиуса 1.

Это множество компактно

По т Вейрштрасса эта квадратичная форма принимает наибольшее и наименьшее значение

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} t_i t_j.$$

обозначили их m, M

$$0 < m \leq M.$$

Принимает наименьшее значение равное $\frac{1}{2}m$, тк $\alpha(h)$ бесконечное малое для всех h достаточно близких к 0 $|\alpha(h)| < 0$

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n .$$

Следовательно для всех таких h

$$f(x_0^{(0)} + h) > f(x^{(0)}).$$

следовательно x^0 точка минимума

2. Аналогично

3. Пусть e_m та точка единичной сферы, в которой квадратичная форма принимает наименьшее значение

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x^{(0)}) t_i t_j.$$

e_M наибольшее значение. Хочу доказать, что в любой окрестность $x^{(0)}$ есть значения и больше и меньше.

$$h = \lambda e_m.$$

$$f(x^0 + \lambda e_m) - f(x^{(0)}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x^{(0)}) \lambda \alpha_i \lambda \alpha_j + \alpha(||\lambda e_m||^2) = \frac{1}{2} \lambda^2 \left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

28 Ищем критические точки на границах

Пусть (x_0, y_0) тогда экстремум $f(x, y)$ кривой $g(x, y) = 0$. Тогда $(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$ коллинеарен $(g'_x(x_0, y_0), g'_y(x_0, y_0))$

$$g(x, y) = 0 \implies y = \phi(x).$$

$$f(x, \phi(x))' = f'_x(x, \phi(x)) + f'_y(x, \phi(x))\phi'(x) = f'_x(x, \phi(x)) - f'_y(x, \phi(x)) \frac{g'_x(x, \phi(x))}{g'_y(x, \phi(x))} = 0.$$

$$\frac{f'_x(x, \phi(x))}{f'_y(x, \phi(x))} = \frac{g'_x(x, \phi(x))}{g'_y(x, \phi(x))}.$$

29 Задача лагранжа

Есть кривая, есть функция

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(y).$$

$$L'_x = f'_x - \lambda g'_x = 0.$$

$$L'_y = f'_y - \lambda f'_y = 0.$$

$$L'_\lambda = -g(x, y) = 0.$$

30 Интеграл фнп

Определение 13 (Разбиение промежутка). *Рассмотрим произвол*

Определение 14 (Интегральные суммы). *Пусть $I = [a, b] \times [c, d]$. Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[a, b] : a < x_1 < \dots < x_{n-1} < b$, произвольное разбиение отрезка $[c, d] : c < y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < d$. Рассмотрим*

$$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j].$$

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

$$\mu_j \in [y_{j-1}, y_j].$$

(ξ_i, μ_j) оснащенное разбиение.

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

$$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}.$$

$$S(f, (\tau, \xi)) = \sum f(\xi_i, \mu_j) \Delta x_i \Delta y_j.$$

30.1 Свойства интегральных сумм

1.

$$S(\alpha f, (\tau, \xi)) = \sum \alpha f(\xi_i, \mu_j) \Delta x_i \Delta y_j.$$

2.

$$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

$$S(f + g, (\tau, \xi)) = \sum f(\xi_i, \mu_j) \Delta x_i \Delta y_j + g(\xi_i, \mu_j) \Delta x_i \Delta y_j.$$

3.

$$f(x, y) \leq g(x, y) \forall x, y.$$

$$S(f, \tau, \xi) \leq S(g, \tau, \xi).$$

$\lambda(\tau, \xi)$ — наибольшая из сторон прямоугольника.

Определение 15. пусть функция f задана на двумерном промежутке Π . Число I называется интегралом по промежутку Π , если для любой последовательности оснащенных разбиений, последовательность рангов стремится к 0 последовательность частичных сумм стремится к I

Теорема 18. Если функция интегрируема, то она ограничена

Proof. Пусть функция не ограничена сверху □

$$\int_{\Pi} f.$$

$$\int_{\Pi} f(x, y) dx dy.$$

$$\sum_{i=1, \dots, n, j=1 \dots m}.$$

31

$$\Delta_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j].$$

Ранг разбиения – наибольшая из длин промежутка разбиения.

Определение 16 (Оснащенное разбиение). *Оснащенное разбиение - это разбиение в каждом промежутке которого выбрано по точке.*

$$(\tau, \xi).$$

Определение 17. Пусть функция задана на промежутке Π пусть (τ, ξ) оснащенное разбиение промежутка Интегральной суммой функции f построенной для разбиение (τ, ξ) называется число

$$S(f, (\tau, \xi)) = \sum_{i=1 \dots n, j=1 \dots m} f(\xi_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Определение 18 (Множество меры нуль). Пусть $X \subset R^2$ и имеет меру нуль, если $\forall \epsilon > 0 \exists$ последовательность промежутков Π_1, Π_2, \dots

$$X \subset \bigcap \Pi.$$

сумма площадей этих P меньше ϵ

31.1 Упражнение

$$\cap, \cup, \setminus.$$

множества меры нуль есть множество меры нуль

$$A \subset B.$$

В имеет меру нуль, значит А имеет меру нуль

31.2 Упражнение

$$\partial.$$

граница

$$1. \partial(A \cup B) \subset \partial(A) \cup \partial(B)$$

31.3 Интеграл по промежутку

Пусть $(\tau^{(n)}, \xi^{(n)})$ последовательность оснащенных разбиений. Будем говорить, что эта последовательность измельчающаяся, если последовательность рангов

$$\lambda(\tau^{(n)}, \xi^{(n)}) \rightarrow 0.$$

Определение 19. Пусть функция задана на промежутке Π . Функция f называется интегрируемой если

$$\exists I \forall \text{ измельчающийся последовательности } (\tau^{(n)}, \xi^{(n)}).$$

$$S(f, (\tau^{(n)}, \xi^{(n)})) \rightarrow I.$$

Если f интегрируема на множестве Π I называется интегралом по промежутку P

$$I = \int_{\Pi} f.$$

Другие обозначения

$$\int_{\Pi} f(x, y) dx dy.$$

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy.$$

$$\int_{\Pi} f(x) dx \text{ } x - \text{вектор}.$$

31.4 Пример

$$\Pi = [a, b] \times [c, d].$$

$$f(x, y) = C.$$

$$\int_{\Pi} f(x, y) dx dy = C(b - a)(d - c).$$

31.5 Пример

$$\Pi = [0, 1] \times [0, 1].$$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ хотя бы одно число иррационально} \\ 1, \text{ оба рациональные} \end{cases}.$$

Докажем, что эта функция неинтегрируема. Сравним два разбиения. Первое оснащение $\xi_{i,j}$ обе координаты рациональны, второе оснащение ξ'_{ij} одна из координат которых рациональна. Тогда

$$S(f, (\tau^{(n)}, \xi_{ij})) = 1.$$

$$S(f, (\tau^{(n)}, \xi')) = 0.$$

Множество всех интегрируемых функций на Π , $R(\Pi)$

31.6 Простейшие свойства интегралов

1.

$$\int_{\Pi} \alpha f = \alpha \int_{\Pi} f.$$

$$2. f, g \in R(\Pi) \implies f + g \in R(\Pi)$$

$$3. f, g \in R(\Pi) f \leq g \implies \int_{\Pi} f \leq \int_{\Pi} g$$

$$4. f \in R(\Pi) \iff \text{множество точек разрыва имеет меру нуль}$$

31.7 Допустимое множество

Определение 20. Множество D называется допустимым, если его граница ∂D имеет меру 0

31.7.1 Замечание

Множество D допустимо \iff

$$\forall \epsilon > 0 \exists M, N.$$

$M \subset D \subset N$, площадь N - площадь $M < \epsilon_2$

31.8 Определение интеграла по допустимому множеству

Лемма 19. Пусть D допустимое множество, f функция заданная на D , пусть Π_1, Π_2

$$D \subset \Pi_1, D \subset \Pi_2.$$

Рассмотрим функции \overline{f}_1

$$\overline{f}_1 = \begin{cases} f(x, y), x \in \Pi_1 \\ 0, x \notin \Pi_1 \end{cases}.$$

$$\overline{f_2} = \begin{cases} f(x, y), x \in \Pi_2 \\ 0, x \notin \Pi_2 \end{cases}.$$

Тогда

$$\int_{\Pi_1} \overline{f_1} = \int_{\Pi_2} \overline{f_2}.$$

Proof. Рассмотрим $\Pi = \Pi_1 \cap \Pi_2$

$$\exists \int_{\Pi} f \iff \exists \int_{\Pi_1} f.$$

$$\overline{f(x, y)} = \begin{cases} f(x, y), (x, y) \in D \\ 0, (x, y) \notin D \end{cases}.$$

\overline{f} интегрируема на $\Pi \iff$ множество точек разрыва имеет меру 0,

$\overline{f_1}$ интегрируемо на $\Pi_1 \iff$ множество ее точек разрыва имеет меру 0.

Докажем

$$\int_{\Pi_1} \overline{f_1} = \int_{\Pi} \overline{f}.$$

Тогда для вычисления интеграла можно рассмотреть какуюнибудь одну измельчающую последовательность оснащенных разбиений. Тогда интегральная сумма каждого такого разбиения, совпадает с некоторой интегральной суммой функции \square

Определение 21. Пусть функция f задана на допустимом множестве D , пусть Π произвольный промежуток, такой что $D \subset \Pi$ рассмотрим функцию \overline{f} заданную на Π

$$\overline{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), (x, y) \in D \\ f(x, y), (x, y) \notin D \end{cases}.$$

Функция f называется интегрируемой на Π , и интеграл функции f по множеству D называется $\int_{\Pi} \overline{f}$

31.9 Свойства интеграла по произвольному допустимому множеству

1. $f \in R(D) \iff \alpha f \in R(D) \wedge \int_D \alpha f = \alpha \int_D f$
2. $f, g \in R(D) \iff f + g \in R(D) \wedge \int_D (f + g) = \int_D f + \int_D g$
3. $f \leq g$ на $D \iff \int_D f \leq \int_D g$
4. Пусть множество D имеет меру нуль, тогда $\int_D f = 0$
5. Пусть D допустимое множество, $f, g \in R(D)$, пусть множество точек из D в которых $f(x, y) \neq g(x, y)$ имеет меру нуль, тогда $\int_D f = \int_D g$

Proof. 1. Самостоятельно

2. Пусть A множество точек разрыва f , B множество точек разрыв g . Множество точек разрыва $f + g$ лежит в $A \cup B$

$$\int_D (f + g) = \int_{\Pi} \overline{f + g} = \int_{\Pi} \overline{f} + \int_{\Pi} \overline{g}.$$

□

32 Доказательство свойства 4

Пусть $f \in R(D)$ Множество D имеет меру 0, тогда $\int_D f = 0$

$$D \subset \Pi.$$

$$\overline{f} = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}.$$

$$\int_D f = \int_{\Pi} \overline{f} = \lim S(\overline{f}, (\tau^{(n)}, \xi^{(n)})).$$

для которых $\lambda(\tau^{(n)}) \rightarrow 0$

Известно, что $\bar{f} \in R(\Pi)$, то последовательность оснащенных разбиений, можно выбирать как хотим. D имеет меру нуль, то для кадого $t^{(n)}$ в любом промежутке разбиения. В прямоугольник Δ_{ij} выберем точку $\xi_{ij} \notin D$ Тогда

$$S(\bar{f}, (\tau^{(n)}, \xi^{(n)})) = \sum_{i,j} f(\xi_{ij}) \text{площ} \Delta_{ij} = 0.$$

33 Доказательство свойства 5

$$f, g \in R(D).$$

Множество точек, где $f(x, y) \neq g(x, y)$ имеет меру нуль, то

$$\int_D f = \int_D g.$$

$$\int_D f = \int_D g \iff \int_D (f - g) = 0.$$

34 Аддитивность

пусть D_1, D_2 допустимые множества

1. $D_1 \cup D_2, D_2 \cap D_1$ допустимые множества
2. $f \in R(D_1 \cup D_2) \iff f \in R(D_1), \in R(D_2) \implies f \in R(D_1 \cap D_2)$
3. $\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f - \int_{D_1 \cap D_2} f$
4. Если $D_1 \cap D_2$ имеет меру 0, то

$$\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f.$$

34.1 Доказательство

$$\partial(D_1 \cup D_2) \subset \partial D_1 \cup \partial D_2.$$

1.

2.

$$f \in R(D_1 \cup D_2) \iff D_1 \cup D_2 \text{ Допустимо.}$$

и множество точек разрыва имеет меру нуль

$$\begin{cases} f \in R(D_1) \\ f \in R(D_2) \end{cases} \iff \begin{cases} D_1, D_2 - \text{Допустимы} \\ \text{Множество всех точек разрыва имеет меру нуль} \end{cases}.$$

3. Рассмотрим прямоугольник, содержащий как D_1 , так и D_2 Строим следующие функции, $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}, \overline{f}$

$$\overline{f} = \begin{cases} f, \text{ на } D_1 \cup D_2 \\ 0 \end{cases}.$$

$$\overline{f_1} = \begin{cases} f, \text{ на } D_1 \\ 0 \end{cases}$$

$$\overline{f} = \overline{f_1} + \overline{f_2} - \overline{f_3}.$$

Пусть $(x, y) \in \Pi$

(a) $(x, y) \notin D_1 \cap D_2$ все функции 0

(b) $(x, y) \in D_1 \wedge (x, y) \notin D_2$

$$\overline{f}(x, y) = f(x, y).$$

$$\overline{f_1}(x, y) = f(x, y).$$

$$\overline{f_2}(x, y) = 0.$$

$$\overline{f_3}(x, y) = 0.$$

Равенство выполнилось

$$\int_{D_1 \cup D_2} f = \int_{\Pi} \bar{f} = \int_{\Pi} (\bar{f}_1 + \bar{f}_2 - \bar{f}_3) = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f - \int_{D_1 \cup D_2} f.$$

4.

35 Вычисление двойного интеграла

Пусть $f : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

36

$$\int_0^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x, y).$$

37 Замечание

$$S(f, (\tau^{(n)}, \xi)) = \sum_{i=1 \dots n, j=1 \dots n} f(\xi_i, \mu_j) \Delta x_i \Delta y_j.$$

38 Полярные Координаты

(r, ϕ)

$$x = r \cos \phi.$$

$$y = r \sin \phi.$$

38.1 Пример

$$\iint_D y dx dy.$$

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 2x, x \geq y\}.$$

Как делать без полярных все понятно

Proof.

□

39 Замена переменной в определенном интеграле

Вспомним первый курс

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

Теорема 20. g непрерывно дифференцируемая (g' дифференцируема) g обратима

Теорема 21.

$$\iint_{D_{x,y}} .$$

$$\iint_{D_{u,v}} f(u, v) du dv.$$

$$(g_1, g_2)_{(x,y)} \rightarrow (g_1(x, y), g_2(x, y)).$$

$$\iint_D f(g_1(x, y), g_2(x, y)) |J| dx dy = \iint_{G_{u,v}} f(u, v) du dv.$$

$$(g_1, g_2) : D_{x,y} \rightarrow G_{u,v}.$$

$$(x, y) \rightarrow (g_1(x, y), g_2(x, y)).$$

$$J = \begin{vmatrix} \partial_x g_1 & \partial_y g_1 \\ \partial_x g_2 & \partial_y g_2 \end{vmatrix}.$$

$$du = \partial_x g_1 dx + \partial_y g_1 dy.$$

$$dv = \partial_x g_2 dx + \partial_y g_2 dy.$$

$$f : (x, y) \rightarrow (f_1(x, y), f_2(x, y)).$$

$$\overline{x_0} = (x_0, y_0).$$

$$\overline{h} = (h, kj).$$

$$f(\overline{x_0} + \overline{h}) - f(\overline{x_0}) = L(\overline{h}) + \dots$$

$$f_1(x_0+h,y_0+k)-f_1(x_0,y_0)=\partial_x f_1(x_0,y_0)h+\partial_y f_1(x_0,y_0)k+\dots$$

$$L(h,k)=\begin{pmatrix} \partial_x f_1(x_0,y_0)h+\partial_y f_1(x_0,y_0)k \\ \partial_x f_2(x_0,y_0)h+\partial_y f_2(x_0,y_0)k \end{pmatrix} =.$$

$$\begin{pmatrix} \partial_x f_1(x_0,y_0) & \partial_y f_1(x_0,y_0) \\ \partial_x f_2(x_0,y_0) & \partial_y f_2(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

$$\iint_D xy dx.$$

$$D = \{(x,y) \mid |x+2y| \geq 3, |x-y| \leq 3\}.$$

$$u=x+2y.$$

$$v=x-y.$$

$$J=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1-2=-3.$$

$$u-v=3y.$$

$$u+2v=3x.$$

$$xy=\frac{(u-v)(u+2v)}{9}.$$