Лекции по математическому анализу 3 семестр

1 Функции нескольких вещественных переменных

$$X \subset \mathbb{R}^n.$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X.$$

$$x \to f(x).$$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2.$$

$$z = x^2 + 3y.$$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

2 Замкнутый промежуток в n-мерном пространстве

$$a = (a_1, \ldots, a_n).$$

$$b = (b_1, \ldots, b_n).$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n).$$

$$\forall i \; 1 \leq i \leq n \; a_i \leq x_i \leq b_i.$$

3 Окрестность

Окрестность точки – открытый шар с центром в этой точке

4 Внутренняя точка

$$X \subset \mathbb{R}^n.$$

$$a \in \mathbb{R}^n.$$

а называется внутренней точкой множества X, если $\exists r B(a,r) \subset X$

5 Внешняя точка

а называется внешней точкой по отношению к множеству X, если $\exists B(a,r) \subset \mathbb{R}^n \setminus X$.

6 Граничная точка

Если любая граница точки содердит точки и из множества и не оттуда.

7 Обозначения шаров

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x,a) < R\}.$$

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x,a) \leq R\}.$$

Множество называется открытым, если всего его точки внутренние

8 Открытое множество

Множество A открыто в X, если

$$A = X \cap U.$$

U - открытое множество

Теорема 1. *Пересечение двух открытых множеств является открытым.*

Proof. Надо доказать, что все точки $U \cap V$ внутренние.

$$a \in X.$$

а внутренняя точка множетсва U, значит $\exists r_1 \; B(a, r_1) \subset U$
а внутренняя точка множетсва V, значит $\exists r_2 \; B(a, r_2) \subset V$

$$r = \min r_1, r_2.$$

$$B(a, r) \subset U \cap V.$$

□

Теорема 2.

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}.$$

$$U_\alpha \in R^n.$$

пусть $\forall \alpha \; U_\alpha$ *открытое тогда* $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ *открыто*

Теорема 3.

$$F \subset \mathbb{R}^n.$$

F *- замкнуто* $\iff$ $\mathbb{R}^n \setminus F$ *- открытое*

Теорема 4. *1. пересечение любого числа замкнутых множеств являкется замкнуть*

2. объединение конечного числа замкунтых множеств замкнуто

Proof.

$$U_\alpha = \mathbb{R}^n \setminus F_\alpha.$$

Оно открытое

$$\mathbb{R}^n \setminus (\bigcap F_\alpha) = \cup(R_n \setminus F_\alpha) - -.$$

□

9 Замыкание

Определение 1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Замыкание X, $\overline{X}$ наименьшее замкнутое множество, в котором лежит X.*

$$B(a, r).$$

$$\forall b \in B(a, r).$$

$$r_1 = r - d(a, b).$$

Рассмотрим $B(b, r_1)$, докажем, что $B(b, r_1) \subset B(a, r)$

$$\forall x \in B(b, r_1).$$

Нужно доказать, что $x \in B(a, r)$

$$d(x, a) < R.$$

Итак, $d(x, a) \leq d(x, b) + d(a, b)$

$$d(x, a) \leq d(x, b) + r - r_1.$$

10 Компактно

Определение 2.

$$X \subset \mathbb{R}^n.$$

X компактно, если замкнуто и ограничено

Определение 3. *Множетсво ограничено, если лежит в неком шаре.*

11 Предел в $\mathbb{R}^n$

Определение 4.

$$(x_n \to a).$$

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \, \forall n \geq n_0 d(x_n, a) \leq \epsilon.$$

Теорема 5 (о покоординатной сходимости). $(x^{(n)})$ *– последовательность точек в $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$*

$$x^{(n)} \to a \iff x_k^{(n)} \to a_k.$$

Proof. Для случая $n = 2$

$$(x_n, y_n), (a, b).$$

$$|x_n - a| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}.$$

$$|y_n - b| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}.$$

□

12 Упражнения

1. Пусть множество X замкнуто, тогда оно содержит все свои предельные точки. Верно ли обратное

13 Предел функции n переменных

$$X \subset \mathbb{R}^n.$$

$$V = abc.$$

$$X = \{(a, b, c) | a > 0, b > 0, c > 0\}.$$

$$x + y^2 + z^3 = 1.$$

Определение 5.

$$X \subset \mathbb{R}^n, f : X \to \mathbb{R}.$$

$$a \in \mathbb{R}^n.$$

a предельная точка множества X

$$A = \lim_{x \to a} f(x).$$

если

$$\forall (x^{(n)}) \begin{cases} (x^{(n)}) \in X \\ x^{(n)} \neq a \\ x^{(n)} \to a \end{cases}.$$

$$f(x^{(n)}) \to A.$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 d(x, a) < \delta \implies |f(x) - A| < \epsilon.$$

Теорема 6 (Вейрештрасса)**.** *Пусть* $X \subset \mathbb{R}^n, f : X \to \mathbb{R}$. f *непрерывна на* X f *принимает на X наименьшее и наибольшее значение*

14 Теоремы о непрерывных функциях

14.1 Связанное множество

Определение 6. *Путь в* $\mathbb{R}^n$ *– набор непрерывных функций* $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ *заданных на* $[a, b]$

Точка $x(a)$ *называется началом пути.* $x(b)$ *конечная точка пути. Множество всех точек* $x(t), t \in [a, b]$ *носитель пути.*

Определение 7. *Пусть* $X \subset \mathbb{R}^n$. *X называется связанным, если для любых точек* $p, q \in X$ *существует путь с началом* p *, концом* q*, носитель которого лежит в* X

15 Теорема Вейрштрасса

Теорема 7. *Пусть X – компактное подмножество $\mathbb{R}^n$, f функция заданная на X, и непрерывная во всех точках множества X. Тогда f принимает и наибольшее и наименьшее значение.*

Proof. Случай для $n = 1$

$$\forall x f(x) \neq M.$$

$$f(x) < M.$$

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq C.$$

$$M - f(x) \geq \frac{1}{C}.$$

$$M - \frac{1}{C} \geq f(x).$$

Пусть нет наибольшего значения

$$\exists x_1 f(x_1) > 1.$$

Исходный промежуток δ_1

$$\delta_1 \supset \delta_2.$$

$$x_2 \in \delta_2.$$

$$f(x_2) > 2.$$

$$f(x_n) > n.$$

$$\bigcup \delta = \{a\}.$$

$$x_n \to a.$$

$$x_n \in \delta_n, a \in \delta_n.$$

$$|\delta_n| = \frac{|\delta_1|}{2^{n-1}}.$$

$$|x_n - a| < \frac{|\delta_1|}{2^{n-1}} \to 0.$$

$$x_n \to a.$$

$$f(x_n) \to f(a).$$

Неограниченная посл чисел стремится к числу, какакя-то хуйня такого не бывает.

Теперь для функции 2 переменных Докажем что f ограничена сверху. Предположи это неправда, тогда $\exists x^{(1)} \in \Delta_1 \cap X, f(x^{(1)}) > 1$

$$\exists x_2 \in \Delta x_2 \cap X.$$

f неограниченна на $\Delta_2 \cap X, f(x^2) > 2$ по лемме 8 $\bigcap \Delta = \{a\}$ состоит из одной точки. Тогда последовательность $x^{(n)} \to a$

$$x^{(n)} \in \Delta.$$

$$d(x^n, a) \leq \sqrt{2}\text{размер}\Delta_n.$$

Дальше как и для функции одной переменной. □

Лемма 8 (О вложенных отрезках)**.**

$$n = 2.$$

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1, x_1 \in [a_1, b_1].$$

$$a_2 \leq x_2 \leq b_2, x_2 \in [a_2, b_2].$$

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2].$$

Дана последовательность вложенных замкнутых n мерных промежутков

$$\mathit{\Delta}_1 \supset \mathit{\Delta}_2 \supset .$$

$d(\mathit{\Delta})$ - длина наибольшей стороны

$$d(\mathit{\Delta}_n) \to 0.$$

Тогда в пересечение одна точка

Proof. Спроектируем все промежутки на ось абцисс, мы получим последовательность замкнутых вложенных промежутков, лежаших впромежутке $[a_1, b_1]$ таких что длины этих прожетков стремятся к 0, пересечение таких промежутков состоит из 1 точки α_1 Анлогично спроектировали эти промежутки на ось ординат, получили последовател замкнутых вложенных промежутков лежаших в $[a_2, b_2]$ по лемму о вложенных промежутках их пересечение состоит из одной точки α_2 Рассмотрим точку с координата α_1, α_2 □

16 Теорема Больцано

Теорема 9. *Пусть X связное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, пусть f непрерывная функция, заданная на X. Пусть p, q значения функции f, причем $p < q$. Тогда* $\forall r \in (p, q) \exists x \in X$, $f(x) = r$

17 Множество уровня

$$f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

$$f(x_1, \dots, x_n).$$

$$\{x \mid x \in X, f(x) = c\}.$$

18 Дифферинцирование нескольких переменных

Определение 8 (Производная по направлению)**.**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + l_1 h, y_0 + l_2 h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Пусть $\vec{l} = (0, 1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

частная производная по x

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Определение 9 (Градиент)**.**

$$\text{grad}\, f(x_0, y_0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial x}).$$

Определение 10 (точка экстренума (максимума))**.** (x_0, y_0) *- точка максимума, если* $\exists$ *окретсность U,* $\forall x \in U \;\, f(x) < f(x_0)$

Теорема 10 (Ферма)**.**

$$X \subset \mathbb{R}^2.$$

$$f : X \to \mathbb{R}.$$

(x_0, y_0) *внутренняя точка X. Пусть* $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x_0$

18.1 Пример

$$f(x, y) = x^2 + 2xy.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x = 0.$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

$$f(0, 0) = 0.$$

19 Условный экстренум

$$f(x_0 + h) - f(x_0) f'(x_0)h + o(h).$$

Определение 11 (Дифференцируемость функции)**.**

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ch + o(h).$$

Теорема 11 (О полном приращении)**.** *Пусть функция f задана на $X \subset \mathbb{R}^2$, а внутренняя точка X, $a = (x_0, y_0)$. Пусть f имеет частную производную во всех точках в некоторой окрестности точки a. Пусть эти частные производные непрерывны в точке a. Тогда вблизи точки a имеет место*

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \partial_x f(x_0,y_0)(x_0 - y_0) + \partial_y (x_0,y_0)(y - y_0) + \alpha(x,y)(x - x_0) + \beta(x,y)(y - y_0$$

α, β *бесконечно малые в* (x_0, y_0)

Proof. $\square$

Определение 12 (Дифференцируемость функции нескольких переменных)**.**