

# Лекции по дифференциальным уравнениям

## 1 Список литературы

1. Филиппов Лекции по обыкновенным ОДУ.
2. Филиппов Сборник задач по дифференциальным уравнениям
3. Петровский Лекции по ОДУ
4. Самойленко, Кривошея, Перестрюк. ДУ. Примеры и задачи.
5. Антидемович

## 2 ДУ первого порядка

$$f(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

1.  $x$  - независимая переменная
2.  $y(x)$  неизвестная функция
3.  $y'(x)$  ее производная

Решить ДУ – найти  $y(x)$

### 3 Примеры

1.  $y'(x) = y(x)$
2. Найти  $y(x)$   $y'(x) = f(x)$

### 4 ДУ n-го порядка

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

### 5 Ду разрешимое относительно производных

$$y' = f(x, y).$$

Будем заниматься только такими уравнениями

### 6 Модель экспоненциального роста (эпидемий)

$x(t)$  — число бактерий.

$$\dot{x}(t) x(t).$$

$$\dot{x} = kx.$$

$$x = Ce^{kt}, C \in \mathbb{R}.$$

Модель роста с учетом эффекта насыщения называется логистической моделью. Пусть  $N$  — максимимальное количество особей.

$$\dot{x} = kx(N - x).$$

$$\dot{x} \text{ максимальная, при } x = \frac{N}{2}.$$

## 7 Интегрируемые дифференциальные уравнения первого порядка

Знакомимся с уравнениями, которые можем решить в явном виде.

### 7.1 Общие определения

**Определение 1.** ДУ 1 порядка, разрешенным относительно производной называется уравнение вида

$$y' = f(x, y).$$

где  $x$  независимая переменная,  $y(x)$  искомая функция. Решить ДУ 1  $\iff$  найти  $y(x)$ . Будем считать  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G \subset \mathbb{R}^2$ ,  $G$  - связное и открытое множество. В этой главе  $f$  будет элементарной (школьной) функцией. Так же считается, что  $G$  область определения уравнения

**Определение 2.** Функция  $y = \phi(x)$  называется решением ДУ 1 на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , если выполнены 3 условия

1.  $\phi \in C^1(\langle a, b \rangle)$  дифференцируема один раз на  $\langle a, b \rangle$
2. Граф  $\phi := \{(x, (\phi(x))) \mid x \in \langle a, b \rangle\} \subset G$
3.  $\phi'(x) \equiv f(x, \phi(x))$  на  $\langle a, b \rangle$

**Определение 3.** График решения называют интегральной кривой ДУ(1).

#### 7.1.1 Самый простой пример

$$y' = f(x).$$

$$y = \int_{x_0}^x f(s)ds + C, C \in \mathbb{R}.$$

Решений бесконечно много. Общее решение ДУ(1) имеет вид

$$y = \phi(x, C), C \in \mathbb{R}.$$

### 7.1.2 Задача Коши

Задано начальное значение решения.

**Определение 4.** *Задача Коши – называется задача следующего вида*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

где,  $(x_0, y_0) \in G$  Надо найти решения, которые удовлетворяют данному условию. Начальное условие означает, что график решения проходит через  $(x_0, y_0)$

**Определение 5.** *Говорят, что задача Коши 4 имеет единственное решение или  $(x_0, y_0)$  есть точка единственности, если существует окрестность  $(x_0, y_0) \in U$ , такая что для любых двух интегральных кривых  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , проходящих через точку  $(x_0, y_0)$  выполняется  $\Gamma_1 \cap U = \Gamma_2 \cap U$  (все интегральные кривые, проходящие  $(x_0, y_0)$  совпадают в окрестности  $U$ ). На языке епсилон-дельта*

$$\exists(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \forall \phi_1, \phi_2 \text{ Решения 4 } \phi_1 \equiv \phi_2 \text{ на } (x_1 - \delta, x_0 + \delta).$$

*Если имеет не единственное решение то  $\forall U$  открестности найдутся 2 интегральные кривые различаются в окрестности.*

В дифференциальных уравнениях единственность понимаем в локальном смысле.

### 7.1.3 Пример Пеано

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Проверяем 2 решения

$$\phi_1(x) = 0.$$

$$\phi_2(x) = x^3.$$

В любой окрестности  $\phi_1 \neq \phi_2$

## 7.2 Уравнения с разделяющимися переменными

**Определение 6.** УРП - уравнение вида  $y' = f(x)g(y)$ . Всегда предполагаем, что

1.  $f \in C < a, b >$
2.  $g \in C < \alpha, \beta >$

$$G = < a, b > \times < \alpha, \beta > .$$

Как это решать придумал Якоб Бернулли.

### 7.2.1 Неформальный рецепт

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

### 7.2.2 Нормальное доказательство

**Теорема 1.**

$$f \in C(< a, b >).$$

$$g \in C(< \alpha, \beta >).$$

$$g(y) \neq 0 \forall y \in < \alpha, \beta > .$$

1.  $H(y)$  первообразная  $\frac{1}{g(y)}$
2.  $F(x)$  первообразная  $f(x)$

1. Тогда формула из неформального рецепта задает общее решение и только его

2.  $G = \langle a, b \rangle \times \langle \alpha, \beta \rangle$  – область существования и единственности, для любой точки  $(x_0, y_0) \in G$  задача Коши имеет единственное решение. И это решение задается формулами.

$$H(x) = F(x) + H(y_0) - F(x_0).$$

*Proof.* Заметим, что  $H'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0 \implies \exists H^{-1}$  Тогда получаем

$$y = H^{-1}(F(x) + C).$$

Формула 2 задает функции вида  $y = y(x)$

1. Пусть  $y = y(x)$  есть решение уравнения. Покажем, что оно вкладывается в формулу.  $\exists C_0 : H(y(x)) - F(x) + C_0$

$$\frac{d}{dx}(H(y(x)) - F(x)) \equiv 0.$$

$$H'(y(x))y'(x) - F'(x) = 0.$$

$$\frac{1}{g(y(x))} * f(x)g(y(x)) - f(x) \equiv 0.$$

2. Теперь обратно

$$H(y(x)) \equiv F(x) + C.$$

Продифференцировали

$$H'(y(x)) * y'(x) \equiv F'(x).$$

Берем произвольную точку из области  $(x_0, y_0) \in G$

$$C \equiv H(y(x)) - F(x).$$

Подставим начальные условия из задачи Коши

$$C = H(y(x_0)) - F(x_0) = H(y_0) - F(x_0).$$

То есть для любой точки из  $G$  можно определить единственным образом

□

Ответ писать, надо даже если обратная функция не выражается в элементарных вроде  $H(y) = y + \arctg(y)$ , эта хрень считается ответом

$$H(y) - F(x) = C.$$

$$U(x, y) = H(y) - F(x).$$

$U$  – интеграл ДУ

**Определение 7.**  $U(x, y)$  называется интегралом ДУ, если выполняются следующие аксиомы (свойства)

1.  $U \in C^1$
2.  $U'_y \neq 0$  (производная по  $y$  не ноль)
3.  $U$  обращается в константу при подставлении решения ДУ.

Все свойства выполняются для  $U(x, y)$

**Определение 8** (Линия уровня).

$$U^{-1}(c) = \{(x, y) \mid U(x, y) = c\}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда  $g(y) = 0$  Пусть  $g(a) = 0 \implies$  стационарное решение

$$a' \equiv f(x)(g(a)).$$

**Теорема 2.** Пусть  $f \in C(< a, b >), g \in C^1(< \alpha, \beta >)$  Тогда все решения уравнения задаются совокупностью

$$H(y) = F(x) + c.$$

$g(y) = 0$  совокупность всех стационарных решений..

Эту хрень не доказываем, так как будет следовать из теоремы Пикара.

## 1. Пример Пеано

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}.$$

$$y = 0.$$

решение

$$\int \frac{y' dy}{3y^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} * x^{1/3} * 3 + c = x^{\frac{1}{3}} + c.$$

$$y^{\frac{1}{3}} = x + c.$$

$$y = (x + c)^3.$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = (x + c)^3 \end{cases}$$

В точках  $y = 0$  нарушается единственность, решения можно склеивать, получать новые, не из совокупности

$$y = \begin{cases} (x - c_1)^3, x < c_1 \\ 0, c_1 \leq x \leq c_2 \\ (x - c_2)^3, x > c_2 \end{cases}.$$

$g(y)$  не дифф в 0, условия теоремы 2 не выполняются.

2.

$$y' = y.$$

$y = 0$  решение

$$\int \frac{y'}{y} dy = \ln y + c.$$

$$\ln(|y|) = x + c.$$

$$|y| = e^{x+c}.$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \pm e^{x+c} \end{cases}$$

$$c_1 = \pm e^c.$$



$$\begin{cases} y = 0 \\ y = C_1 e^x, \forall C_1 \neq 0 \end{cases}$$

единственность не нарушена

## 8 Линейный уравнения (Неоднородное)

**Определение 9** (Линейное уравнение (неоднородное)).

$$y' = p(x)y + q(x).$$

**Определение 10** (Линейное однородное уравнение).

$$y' = p(x)y.$$

Ввел эти уравнения И.Бернулли. Как решать Д.Бернулли. Рассмотрим вариант подстановки Бернулли, который в литературе называют метод вариации произвольной постоянной Лагранжа (метод Лагранжа).

### 8.1

Пусть  $p, q \in C(< a, b >)$ . Тогда правая часть 9  $f(x, y) = p(x)y + q(x) \in C(G)$   $G = < a, b > \times \mathbb{R}$   $G$  – область определения 9

**Теорема 3.** Пусть  $p, q$  непрерывны и есть только одно решение. Все решения линейного уравнения 9 задаются формулой

$$y = e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} \left( C + \int_{x_0}^x q(s) e^{-\int_{x_0}^s p(t)dt} ds \right) \quad (2)$$

$\forall (x_0, y_0) \in G$  задача Коши имеет одно решение и оно задается формулой

$$y = e^{\int_{x_0}^x p(t)dt} \left( y_0 + \int_{x_0}^x q(s) e^{-\int_{x_0}^s p(t)dt} ds \right) \quad (3)$$

### 8.1.1 Метод лагранжа

1. Берем однородное уравнение  $y' = p(x)y$
2. Это уравнение с разделяющимися переменными. Умеем решать.

$$y = C e^{\int_{x_0}^x p(t) dt}.$$

3. В уравнение 9 замену переменных  $y = z e^{\int_{x_0}^x p(t) dt}$
4. Делаем замену переменных

$$(z e^{\int_{x_0}^x p(t) dt})' = p(x)(z e^{\int_{x_0}^x p(t) dt}) + q(x) \quad (4)$$

$$z' e^{\int_{x_0}^x p(t) dt} + z * e^{\int_{x_0}^x p(t) dt} p(x) = p(x) z e^{\int_{x_0}^x p(t) dt} + q(x).$$

$$z' e^{\int_{x_0}^x p(t) dt} = q(x).$$

$$z' = q(x) e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}.$$

Тупо найти первообразную.

$$z = \int_{x_0}^x q(s) e^{-\int_{x_0}^s p(t) dt} ds + C.$$

*Proof.* Сначала выводим формулу 2 Методом Лагранжа. Покажем, что  $G$  область существования и единственности. Берем  $\forall (x_0, y_0) \in G$ . Надо показать, что существует только одно решение график, которого проходит через эту точку. В 2 подставим  $(y_0, x_0)$

$$y_0 = e^{\int_{x_0}^{x_0} p(t) dt} (C + \int_{x_0}^{x_0} q(s) e^{-\int_{x_0}^s p(t) dt} ds).$$

$$e^0 = 0.$$

Интеграл в скобках тоже 0, является решением



### 8.1.2 Какую замену переменных надо делать в ДУ

1.  $G \subset \mathbb{R}^2$  поэтому замена  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \rightarrow (x, z).$$

2. Биективность.

3. Замена должна сохранять гладкость (дифференцируемость)

### 8.1.3 Пример

$$y' = \frac{y}{x} + x.$$

$$G = \mathbb{R} \setminus \{x = 0\}.$$

- 1.

$$y' = \frac{y}{x}.$$

$y = 0$  решение

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}.$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c = \ln C_1 |x|.$$

$$y = \pm C_1 x, c_2 = \pm c_1.$$

$$y = c_2 x.$$

2. Возвращаемся к ЛНУ

$$y = zx.$$

$$(zx)' = \frac{zx}{x} + x.$$

$$z'x + z = z + x.$$

$$z' = 1.$$

$$z = x + c.$$

$$y = (x + c)x.$$

## 8.2 Уравнения сводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

### 8.2.1 Однородные уравнения

$$y' = f(x, y) \quad (5)$$

Такое уравнение называется однородным  $\iff$  если не меняется при замене  $(x, y) \rightarrow (\lambda x, \lambda y)$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (6)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}.$$

6 объединяет оба уравнения

### 8.2.2 Пример

$$(x^2 - xy)dx + y^2dy = 0.$$

$$y' = \frac{x^2 + xy}{y^2} = -\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y}.$$

Пытаемся эту хуиту свести к  $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$

$$(x, y) \rightarrow (x, z).$$

$$(zx)' = g(z).$$

$$z' = \frac{g(z) - z}{x}.$$

### 8.2.3 Ф. 101

$$(x + 2y)dx - xdy = 0.$$

Попробуем замену  $(x, y) \rightarrow (\lambda x, \lambda, y)$

$$\lambda^2(x + 2y)dx - \lambda^2xdy = 0.$$

На лямбду сократили, уравнение однородно

$$(x, y) \rightarrow (x, z), y = zx.$$

$$(x + 2zx)dx - x d(zx) = 0.$$

$$(x + 2zx)dx - x(zdx + xdz) = 0.$$

$x = 0$  реш вертикальная прямая

$$(1 + 2z)dx - xdz - zdx = 0.$$

$$(1 + z)dx = xdz.$$

$z = -1 : y = -x$  да является решением, горизонтальная прямая

$$\ln |z + 1| = \ln |x| + c.$$

$$\ln \left| \frac{y}{x} + 1 \right| = \ln |x| + c.$$

$$x = 0.$$

$$y = -x.$$

## 9 Уравнение в полных дифференциалах

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{7}$$

Это уравнение в полных дифференциалах

$$y' = f(x, y).$$

Такое уравнение можно переписать в виде уравнения в полных дифференциалах

$$dy - f(x, y)dx = 0.$$

В уравнении 2  $x, y$  неравноправны

## 9.1 Пример

$$y' = \frac{1}{yx + y^2}.$$

$$\frac{dx}{dy} = yx + y^2.$$

уравнение линейное по  $x$ . Иногда полезно перевернуть уравнение

## 9.2 Смысл записи в полных дифференциалах

Для тех точек, где  $N(x, y) \neq 0$  мы считаем что это уравнение тоже самое что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}.$$

Для тех точек, где  $M(x, y) \neq 0$  мы считаем по определению

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}.$$

Уравнение в полных дифференциалах это объединение таких уравнений.

Если  $M = N = 0$  считаем что уравнение не определено и такие точки выкидываются из области определения

**Определение 11.**  $(x_0, y_0)$  такие что  $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$ .  $O$

$$M(x, \phi(x))x + N(x, \phi)d\phi(x) = (M(x, \phi(x))) + \phi'(x)N(x, \phi(x))dx.$$

**Лемма 4.** Пусть  $u \in C^1(D) \exists U'_x, U'_y \in C(G)$  хотя бы одна из частных производных не равняется 0, тогда  $U(x, y) = 0$  задает регулярную кривую

*Proof.*

$$\forall (x_0, y_0) : U(x_0, y_0) = 0.$$

$$(x_0, y_0) \in U^{-1}(0) := \{(x, y) \mid U(x, y) = 0\}.$$

Пусть  $U'_y(x_0, y_0) \neq 0$  по теореме о неявной функции тогда  $\exists! y = \phi(x) \ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \phi \in C_1$  □

## 10 Уравнения, сводящиеся к однородным

### 10.1

$$y' = f(ax + by).$$

$$(x, y) \rightarrow (x, z), \ z = ax + by.$$

$$z' = a + by' = a + bf(ax + by) = a + bf(z).$$

#### 10.1.1 Ф 65

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$$

$$(x, y) \rightarrow (x, z), \ z = 4x + 2y - 1.$$

$$z' = 4 + 2y' = 4 + 2\sqrt{z}.$$

$$\frac{dz}{d} = 4 + 2\sqrt{z}.$$

$$\frac{dz}{2 + 1\sqrt{z}} = 2dx.$$

$$\int \frac{dz}{2 + \sqrt{z}}.$$

$$t = 2 + \sqrt{z}.$$

$$z = (t - 2)^2.$$

$$dz = 2(t - 2)dt.$$

$$\int \frac{2(t - 1)}{t} dt = t - 2 \ln |t| = x + c.$$

$$2 + \sqrt{z} - 2 \ln (2 + \sqrt{z}) = x + c.$$

$$2 + \sqrt{(4x + 2y - 1)} - 2 \ln (2 + \sqrt{4x + 2y - 1}) = x + c.$$

## 10.2 Еще какаято ебанина

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Если  $c_1 = c_2 = 0$  такое уравнение является однородным. Каждая хуйня из дроби задает уравнение прямой.  $(x_0, y_0)$  точка пересечения, нужен параллельный перенос, чтоб она стала  $(0, 0)$

$$(x, y) \rightarrow (u, v).$$

$$\begin{cases} u = x - x_0 \\ v = y - y_0 \end{cases}.$$

$$du = dx.$$

$$dv = dy.$$

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right).$$

коэффициенты не меняются так как нормаль не меняется при параллельном переносе. Если прямые параллельны то

$$a_2 = ka_1.$$

$$b_2 = kb_1.$$



Задача сводится к прошлой

### 10.2.1    $\Phi$ 118

$$y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} u = x - 3 \\ v = y + 2 \end{cases}.$$

$$\frac{dv}{du} = 2\left(\frac{v}{u+v}\right)^2.$$

$$(u, v) \rightarrow (u, z).$$

$$v = zu.$$

$$(zu)' = u + uz' = 2\left(\frac{zu}{u+zu}\right)^2 = 2\left(\frac{z}{1+z}\right)^2.$$

### 10.3    $\Phi$ 113

$$(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right).$$

$$(1, 2).$$

$$\begin{cases} u = x - 1 \\ v = u - 2 \end{cases}.$$

$$(2u - 4v)du + (u + v)dv = 0.$$

$$(u, v) \rightarrow (u, z).$$

$$v = zu.$$

$$(2u - 4zu)du + (u + uz)d(uz) = 0.$$

$$(2u - 4zu)du + u^2(1 + z)dz + u(z + z^2)du = 0.$$

$u = 0$  не реш

.

## 11

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Эта хуйня тоже самое что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} \wedge \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}.$$

$$y = \phi(x).$$

$$x = \psi(y).$$

$$U(x, y) = 0.$$

$$|U'_x| + |U'_y| \neq 0.$$

Неявное решение задания решения

**Определение 12.** Пусть  $M, N \in C(G)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^2$ ,  $|M| + |N| \neq 0$  в  $G$   
Пусть  $U \in C^1(G)$

1.

$$|U'_x| + |U'_y| \neq 0 \tag{8}$$

2.

$$U'_x N - U'_y M \equiv 0 \tag{9}$$

Тогда  $U(x, y)$  называется интегралом ДУ

**Теорема 5.** Пусть  $U(x, y)$  интеграл дифференциального уравнения тогда

1. Формула  $U(x, y) = c$  задает множество всех решений

2.  $G$  область существования и единственности

*Proof.*  $\forall$  кривая задаваемая 1 удовлетворяет условиям леммы. Пусть  $\gamma$  регулярная кривая, задаваемая  $U(x, y) = c$ , либо  $U'_x \neq 0$ , либо  $U'_y \neq 0$

1. Пусть  $U'_y \neq 0 \implies$

$$y = \phi(x).$$

$$U(x, \phi(x)) \equiv c.$$

$$\frac{d}{dx}U(x, \phi(x)) \equiv 0.$$

$$U'_x(x, \phi(x)) + U'_y(x, \phi(x))\phi'(x) \equiv 0.$$

$$\phi'(x) \equiv -\frac{U'_x(x, \phi(x))}{U'_y(x, \phi(x))}.$$

Покажем, что  $N(x, \phi(x)) \neq 0$ . Предположим обратное

$$0 - U'_y M = 0.$$

значит  $M = 0$  получается полная фигня. Тогда

$$\frac{U'_x}{U'_y} \equiv \frac{M}{n}.$$

$$\phi'(x) = -\frac{M(x, \phi(x))}{N(x, \phi(x))}.$$

2.  $U'_x \neq 0$

$$U(\psi(y), y) \equiv 0.$$

Взяли производную

$$U'_x(\psi(y), y)\psi'(y) + U'_y(\psi(y), y) \equiv 0.$$

$$\psi = -\frac{U'_y(\phi, y)}{U'_x(\phi, y)}.$$

$$M(\psi(y), y) \neq 0.$$

$$\psi'(y) \equiv -\frac{N(\phi(y), y)}{M(\psi, y)}.$$

Теперь доказываем второй пункт. Берем  $\forall (x_0, y_0) \in G$  и  $\exists!$  решение, проходящее через  $(x_0, y_0)$

$$U(x, y) = C.$$

Если это решение локально представимо в виде  $y = \phi(x)$ , то  $y_0 = \phi(x_0)$

$$U(x, \phi(x)) \equiv c.$$

$$U(x, y) = U(x, 0).$$

□

Перейдем к уравнениям в полных дифференциалах

## 12 УПД

**Определение 13.**

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Называется уравнением в полных дифференциалах, если существует  $U \in C^1(G)$

$$M = U'_x.$$

$$N = U'_y.$$

**Теорема 6.** Пусть уравнение в полных дифференциалах, тогда  $U$  интеграл

*Proof.* 1.  $|U'_x| + |U'_y| = |M| + |N| \neq 0$  если оба ноль, то мы такое не рассматриваем

$$2. U'_x N - U'_y M = MN - NM = 0$$

□

**Следствие 6.1.** Формула  $U(x, y) = c$  все решения в обобщенном смысле

**Следствие 6.2.**  $G$  - область существования и единственности

**Теорема 7** (Критерий УПД). Пусть  $M, N \in C(G)$ ,  $\exists M'_y, N'_x \in C(G)$ , Тогда

1. уравнение УПД  $\iff M'_y \equiv N'_x$  (необходимое условие упд)
2. Если  $G$  выпуклая прошлый пункт достаточное условие

## 13 Обобщенно однородные уравнения

$$y' = f(x, y).$$

$$(x, y) \rightarrow (\lambda x, \lambda y).$$

квазирастяжение

$$(x, y) \rightarrow (\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y).$$

$$\begin{cases} x = \lambda^\alpha x_0 \\ y = \lambda^\beta x_0 \end{cases} \quad \lambda > 0.$$

перейдем к уравнению в явной форме

$$\lambda = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

$$y = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} y_0.$$

Пусть  $c = \frac{y_0}{x_0^{\frac{\beta}{\alpha}}}$

**Определение 14.** Уравнение называется ООУ (Квази ОУ), если существует

$$2x^4yy' + y^4 = 4x^6.$$

$$x \rightarrow \lambda^\alpha x.$$

$$y \rightarrow \lambda^\beta y.$$

$$\lambda^{4\beta} = \lambda^{4\alpha}.$$

надо делать замену  $z = \frac{y^\alpha}{x}$

## 14 Теорема

**Теорема 8.**

$$Mdx + Ndy = 0.$$

$$M, N \in C(G).$$

$$\exists M'_y, N'_x \in C(G).$$

Тогда Уравнение упд  $\implies M'_y \equiv N'_x$

Если  $G$  – выпуклая то прошлое еще и достаточное условие.

*Proof.* 1. Необходимость

Пусть уравнение упд значит

$$\begin{cases} M = U'_x \\ N = U'_y \end{cases}.$$

$$\begin{cases} M'_y = U''_{xy} \\ N'_x = U''_{yx} \end{cases}.$$

Значит  $M'_y \equiv N'_x$

2. Достаточность

Ищем функцию  $U(x, y)$  в явном виде.

$$\begin{cases} U'_x = M \\ U'_y = N \end{cases}.$$

Первое уравнение интегрируем по  $x$ , тогда

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y) ds + c(y).$$

Подбираем  $c(y)$

$$\left(\int_{x_0}^x M(s, y) ds + c(y)\right)' = N(x, y).$$

$$\left(\int_{x_0}^x M(s, x) ds\right)'_y + c'(y) = N(x, y).$$

$$\int_{x_0}^x M(s, y) ds = F(x, y).$$

$$F'(x, y)_y = \int_{x_0}^x M'_y(s, y) ds.$$

$$\int_{x_0}^x M'_y(s, y) ds + c'(y) = N(x, y).$$

$$\int_{x_0}^x N'_x(s, y) ds + c'(y) = N(x, y).$$

$$N(x, y) - N(x_0, y) + c'(y) = N(x, y).$$

$$c'(y) = N(x_0, y).$$

$$c(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, t) dt.$$

Без константы, тк нам надо найти тоько одну такую функцию.

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y) ds + \int_{y_0}^y N(x_0, t) dt.$$

□

# 15 Общие теоремы для систем дифференциальных уравнений

## 15.1 Основные понятия

**Определение 15.** Системой дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старших производных, называется следующая система

$$y_1^{(n_1)}(x) = f_1(x, y_1, y_1', y_1^{(n_1-1)}, y_2, \dots, y_2^{(n_2-1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(n_m-1)}).$$

$$y_2^{(n_2)} = f_2(\text{тоже самое что и в прошлом}).$$

....

$$y_m^{(n_m)} = f_m(\text{тоже самое что и в прошлом}).$$

где  $x$  независимая переменная,  $y_1(x), \dots, y_m(x)$  неизвестные функции. Решить систему, найти эти функции.  $n_1, \dots, n_m$  порядки старших производных

$$n = n_1 + \dots + n_m \text{ порядок сду.}$$

*Важные случаи*

1.

$$m = 1, n_1 = n.$$

Это диффур  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

2.

$$n_1 = \dots = n_m = 1, n = m.$$



### Нормальная система

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x_1, y_1, \dots, y_n) \\ y'_2 = f_2(x_1, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ y'_n = f_n(x_1, y_1, \dots, y_n) \end{cases}.$$

**Лемма 9.** Любая система дифференциальных уравнений может быть записана в виде эквивалентной нормальной системы

*Proof.* Начинаем с частного случая. Диффур  $n$ -го порядка записываем в виде нормальной системы. Введем новые переменные  $z_1, \dots, z_n$

$$\begin{cases} z_1 = y \\ z_2 = y' \\ \dots \\ z_n = y^{(n-1)} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} z'_1 = y' = z_2 \\ z'_2 = y'' = z_3 \\ \dots \\ z'_n = y^{(n)} = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{cases}.$$

Убедимся в сущ биекции между решениями. Если  $y = \phi(x)$  тогда

$$z_1 = \phi(x), z_2 = \phi'(x), \dots, z_n = \phi^{(n-1)}(x).$$

Обратно

$$z_1 = \phi_1(x), \dots, z_n = \phi_n(x).$$

то  $y = \phi(x)$

$$\phi_{k+1}(x) = \phi'_k(x).$$

$$\phi'_n = \phi^{(n)}(x) = f(x, \phi_1, \dots, \phi_n) = f(x, \phi_1, \dots, \phi_1^{(n-1)}).$$

Теперь общий случай.

$$y_k, y'_k, \dots, y_k^{(n_k-1)}.$$

берем в качестве новых переменных

□

## 15.2 Векторная запись нормальной системы дифференциальных уравнений

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{pmatrix}.$$

$$< a, b > \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

$$y(x) \in C(< a, b >) := \forall y_k(x) \in C(< a, b >), k = 1 \dots n.$$

$$y(x) \in C^1(< a, b >) := \forall y_k \in C^1(< a, b >).$$

$$y'(x) := \begin{pmatrix} y'_1(x) \\ \dots \\ y'_n(x) \end{pmatrix}.$$

$$\int_a^b y(x) dx := \begin{pmatrix} \int_a^b y_1(x) dx \\ \dots \\ \int_a^b y_n(x) dx \end{pmatrix}.$$

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

$$y(x)' = f(x, y).$$

векторная система нормальной системы

Вводим переобозначения

$$x \rightarrow t.$$

$y \rightarrow x$  — это набор координат.

$$y(x) \rightarrow x(t).$$

$$y' = \dot{x}.$$

$$\dot{x} = f(t, x).$$

$$G \subset \mathbb{R}^{n=1}.$$

$$f \in C(G).$$

**Определение 16.**

$$\phi(t) : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

называется решением нормальным решением если

1.

$$\phi \in C^1(\langle a, b \rangle).$$

2.

$$\Gamma_\phi \subset G.$$

3.

$$\dot{\phi}(t) \equiv f(t, \phi(t)) \text{ на } \langle a, b \rangle.$$

Задача Коши.

$$(t_0, x_0) \in F.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

### 15.3 Единственность решения задачи Коши

$(t_0, x_0) \in G$  называется единственной, если  $\exists U(t_0, x_0)$  такая что любые две интегральные кривые, проходящие через  $t_0, x_0$  в этой окрестности  $U$  совпадают.

## 16 Поле направлений. Ломанные направлений. Теорема Пеано

Рассматриваем нормальную систему диффузов

$$\dot{x} = f(t, x).$$

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

$$G \subset \mathbb{R}^{n+1} \text{ область.}$$

$$f \in C(G).$$

### 16.1 Поле направлений

$$(t_0, x_0) \in G.$$

Пусть  $\phi(t_0) = x_0$  решение системы. Само решение  $\phi$  неизвестно, но мы легко можем написать уравнение касательной к  $\phi$  в  $t_0$

$$x = \phi(t_0) + \dot{\phi}(t_0)(t - t_0).$$

$$\dot{\phi}(t_0) = f(t_0, \phi(t_0)) = f(t_0, x_0).$$

$$x = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0).$$

выписано в явном виде.

**Определение 17** (Поле направлений). *Поле направлений называется отображением, которое  $\forall (t_0, x_0) \in G$  сопоставляет касательную прямую, проходящую через эту точку.*

Ясно что  $\phi$  будет решением  $\iff$  в каждой своей точке касается прямой из поля направлений. Интегральные кривые в каждой точке поля направлений  $\implies$  позволяет примерно рисовать их кривые.

## 16.2 Ломанные Эйлера

**Определение 18** (Ломанная Эйлера). *Ломанной Эйлера называется любая ломанная, звенья которой, лежат на прямых из поля направлений. Аппроксимация точной интегральной кривой.*

## 16.3 Алгоритм построения ломанной Эйлера

$$(t_0, x_0) \in G.$$

Строим ломанную эйлера на  $[t_0, T]$  в лево все аналогично.

Пусть  $N$  - число звеньев ребер

$$\frac{T - t_0}{N} = h \text{ Шаг.}$$

Пусть  $t_k = t_0 + kh$  дробление отрезка  $[t_0, T]$   $k = 0 \dots N$ . Линия эйлера строится по рекуррентному алгоритму по следующей схеме

$$l(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0), [t_0, t_1].$$

$$x_1 = l(t_1) = x_0 + f(t_0, x_0)h.$$

$$l(t) = x_1 + f(t_1, x_1)(t - t_1), [t_1, t_2].$$

$$x_2 = l(t_2).$$

Пусть Ломанная Эйлера построена на  $[t_0, t_k], x_k = l(t_k)$

$$[t_k, t_{k+1}], l(t) = x_k + f(t_k, x_k)(t - t_k).$$

$$\begin{cases} t_{k+1} = t_k + h \\ x_{k+1} = x_k + f(t_k, x_k)h \end{cases}.$$

## 16.4 Теорема Пеано

**Теорема 10 (Пеано).** Пусть  $f \in C(G)$  тогда  $\forall (t_0, x_0) \in G$  задача Коши

$$\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0.$$

имеет хотя бы одно решение (определенное на отрезке  $[t_0 - h, t_0 + h]$  )

Без доказательства

## 17 Интегральные уравнения

$$\dot{x} = f(t, x).$$

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

$$f \in C(G).$$

Рассмотрим следующее интегральное уравнение.

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x, x(s)) ds.$$

Решить это уравнение означает найти  $x(t)$

**Определение 19.**  $\phi(t)$  называется решением интегрального уравнения на  $\langle a, b \rangle$

1.  $\phi \in C(\langle a, b \rangle)$
2.  $\Gamma_\phi \subset G$
3.  $\phi(t) \equiv x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds$  на  $\langle a, b \rangle$

**Теорема 11 (Об эквивалентности задачи Коши и интегральных уравнений).**  $\phi(t)$  будет решением задачи Коши на промежутке  $\iff$  она решение интегрального уравнения

*Proof.* 1. (a)  $\phi \in C^1 \implies \phi \in C$

(b) Все понятно

(c)

$$\dot{\phi}(t) \equiv f(t, \phi(t)) \implies \int_{t_0}^t \dot{\phi}(s) dt = \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds.$$

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds.$$

$$2. \phi \in C \implies f(s, \phi(s)) \in C \implies \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds \in C^1$$

3. Понятно

4.

$$\phi(t) \equiv x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds \implies \phi \in C^1.$$

5.

$$\phi(t) \equiv x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds.$$

$$\dot{\phi}(x) \equiv 0 + f(t, \phi(t)).$$

Начальное условие  $\phi(t_0) = x_0$

□

## 18 Условие Липшица

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

$$G \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

**Определение 20.**  $f$  удовлетворяет условию липшица по переменной  $x$  в области  $G$  с константой  $L$

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in G.$$

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|.$$

## 18.1 Комментарий

$f$  растет не быстрее линейной функции

**Лемма 12.** для  $f$  выполняется условие липшица  $\iff f \in C_x^0(G)$

*Proof.*

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| < \epsilon.$$

$$\delta = \frac{\epsilon}{L}.$$

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x - x_2\| < \delta L.$$

□

**Определение 21** (Равномерная непрерывность).

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon), \forall (t, x_1), (t, x_2) \in G \|x_1 - x_2\| < \delta.$$

**Теорема 13.** Пусть  $\exists f'_x \in C(G) \iff \forall$  шара из  $G$ , для  $f$  выполняется условие липшица в  $B$  по  $x$