Лекции по дифференциальным уравнениям

1 Список литературы

1. Филиппов Лекции по обыкновенным ОДУ.
2. Филиппов Сборник задач по дифференциальным уравнениям
3. Петровский Лекции по ОДУ
4. Самойленко, Кривошея, Перестрюк. ДУ. Примеры и задачи.
5. Антидемидович

2 ДУ первого порядка

$$f(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

1. x - независимая переменная
2. $y(x)$ неизвестная функция
3. $y'(x)$ ее производная

Решить ДУ – найти $y(x)$

3 Примеры

1. $y'(x) = y(x)$

2. Найти $y(x)$ $y'(x) = f(x)$

4 ДУ n-го порядка

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}).$$

5 Ду разрешимое относительно производных

$$y' = f(x, y).$$

Будем заниматься только такими уравнениями

6 Модель экспонециального роста (эпидемий)

$$x(t) - \text{число бактерий}.$$

$$\dot{x}(t)\ x(t).$$

$$\dot{x} = kx.$$

$$x = Ce^{kt}, C \in \mathbb{R}.$$

Модель роста с учетом эффекта насыщения называется логистической моделью. Пусть N – максмимальное количество особей.

$$\dot{x} = kx(N - x).$$

$$\dot{x} \text{ максимальная, при } x = \frac{N}{2}.$$

7 Интегрируемые дифференциальные уравнения перво порядка

Знакомимся с уравнениями, которые можем решить в явном виде.

7.1 Общие определения

Определение 1. *ДУ 1 порядка, разрешенным относительно производной называется уравнение вида*

$$y' = f(x, y).$$

где x независимая переменная, $y(x)$ искомая функция. Решить ДУ 1 $\iff$ найти $y(x)$. Будем считать $f : G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^2$, G - связное и открытое множество В этой глае f будет элементарной (школьной) функцией. Так же считается, что G область опредления уравнениюю

Определение 2. *Функция $y = \phi(x)$ называется решением ДУ 1 на промежутку $< a, b >$, если выполнены 3 условия*

1. *$\phi \in C^1(< a, b >)$ дифференцируема один раз на $< a, b >$*
2. *Граф $\phi := \{(x, (\phi(x)) \mid x \in < a, b >\} \subset G$*
3. *$\phi'(x) \equiv f(x, \phi(x))$ на $< a, b >$*

Определение 3. *График решения называют интегральной кривой ДУ(1).*

7.1.1 Самый простой пример

$$y' = f(x).$$

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(s)ds + C, C \in \mathbb{R}.$$

Решений бесконечно много. Общее решение ДУ(1) имеет вид

$$y = \phi(x, C), C \in \mathbb{R}.$$

7.1.2 Задача Коши

Задано начальное значение решения.

Определение 4. *Задача Коши – называется задача следующего вида*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

где, $(x_0, y_0) \in G$ *Надо найти решения, которые удовлетворяют данному условию. Начальное условие означает, что график решения проходит через* (x_0, y_0)

Определение 5. *Говорят, что задача Коши 4 имеет единственное решение или* (x_0, y_0) *есть точка единственности, если существует окрестность* $(x_0, y_0) \in U$*, такая что для любых двух интегральных кривых* Γ_1, Γ_2*, проходящих через точку* (x_0, y_0) *выполняется* $\Gamma_1 \cap U = \Gamma_2 \cap U$ *(все интегральные кривые, проходящие* (x_0, y_0) *совпадают в окрестности* U*). На языке епсилон-дельта*

$$\exists (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \forall \phi_1, \phi_2 \text{ Решения 4 } \phi_1 \equiv \phi_2 \text{ на } (x_1 - \delta, x_0 + \delta).$$

Если имеет не единственное решение то $\forall U$ *открестности найдутся 2 интегральные кривые различаются в окрестности.*

В дифференицальных уравнениях единственность понимаемся в локальном смысле.

7.1.3 Пример Пеано

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Преверяем 2 решения

$$\phi_1(x) = 0.$$

$$\phi_2(x) = x^3.$$

В любой окрестности $\phi_1 \neq \phi_2$

7.2 Уравнения с разделяющимся переменными

Определение 6. *УРП - уравнение вида $y' = f(x)g(y)$. Всегда предполагаем, что*

1. $f \in C < a, b >$
2. $g \in C < \alpha, \beta >$

$$G =< a, b > \times < \alpha, \beta > .$$

Как это решать придумал Якоб Бернулли.

7.2.1 Неформальный рецепт

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

7.2.2 Нормальное доказательство

Теорема 1.

$$f \in C(< a, b >).$$

$$g \in C(< \alpha, \beta >).$$

$$g(y) \neq 0 \forall y \in < \alpha, \beta > .$$

1. $H(y)$ *первообразная* $\frac{1}{g(y)}$
2. $F(x)$ *первообразная* $f(x)$

1. *Тогда формула из неформального рецепта задает общее решение и только его*

2. *$G =< a, b > \times < \alpha, \beta >$ – область существоавания и единственности, для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ задача задача Коши имеет единственное решение. И это решение задается формулами.*

$$H(x) = F(x) + H(y_0) - F(x_0).$$

Proof. Заметим, что $H'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0 \implies \exists H^{-1}$ Тогда получаем

$$y = H^{-1}(F(x) + C).$$

Формула 2 задает функции вида $y = y(x)$

1. Пусть $y = y(x)$ есть решение уравнения. Покажем, что оно вкладывается в формулу. $\exists C_0 : H(y(x)) - F(x) + C_0$

$$\frac{d}{dx}(H(y(x)) - F(x)) \equiv 0.$$

$$H'(y(x))y'(x) - F'(x) = 0.$$

$$\frac{1}{g(y(x))} * f(x)g(y(x)) - f(x) \equiv 0.$$

2. Теперь обратно

$$H(y(x)) \equiv F(x) + C.$$

   Продифференцировали

$$H'(y(x)) * y'(x) \equiv F'(x).$$

Берем произвольную точку из области $(x_0, y_0) \in G$

$$C \equiv H(y(x)) - F(x).$$

Подставим начальные условия из задачи коши

$$C = H(y(x_0)) - F(x_0) = H(y_0) - F(x_0).$$

Тоесть для любой точки из G можно определить единственным образом $\square$

Ответ писать, надо даже если обратная функция не выражается в элементарных вроде $H(y) = y + \operatorname{arctg}(y))$, эта хрень считается ответом

$$H(y) - F(x) = C.$$

$$U(x, y) = H(y) - F(x).$$

U – интеграл ДУ

Определение 7. *$U(x, y)$ называется интегралом ДУ, если выполняются следущие аксиомы (свойства)*

1. $U \in C^1$
2. $U'_y \neq 0$ *(производная по y не ноль)*
3. *U обращается в константу при подставлении решения ДУ.*

Все свойства выполняются для $U(x, y)$

Определение 8 (Линия уровня)**.**

$$U^{-1}(c) = \{(x, y) \mid U(x, y) = c\}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $g(y) = 0$ Пусть $g(a) = 0 \implies$ стационарное решение

$$a' \equiv f(x)(g(a)).$$

Теорема 2. *Пусть $f \in C(< a, b >), g \in C^1(< \alpha, \beta >)$ Тогда все решения уравнения задаются совокупностью*

$$H(y) = F(x) + c.$$

$$g(y) = 0 \text{ *совокупность всех стационарных решений..*}$$

Эту хрень не доказываем, так как будет следовать из теоремы Пикара.

1. Пример Пеано

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}.$$

$$y = 0.$$

решение

$$\int \frac{y'dy}{3y^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} * x^{1/3} * 3 + c = x^{\frac{1}{3}} + c.$$

$$y^{\frac{1}{3}} = x + c.$$

$$y = (x + c)^3.$$

$$\left[\begin{array}{c} y = 0 \\ y = (x + c)^3 \end{array}\right.$$

В точках $y = 0$ нарушается единственность, решения можно склеивать, получать новые, не из совокупности

$$y = \begin{cases} (x - c_1)^3, x < c_1 \\ 0, c_1 \le x \le c_2 \\ (x - c_2) < x > c_2 \end{cases}.$$

$g(y)$ не дифф в 0, условия теоремы 2 не выполняются.

2.

$$y' = y.$$

$y = 0$ решение

$$\int \frac{y'}{y} dy = \ln y + c.$$

$$\ln(|y|) = x + c.$$

$$|y| = e^{x+c}.$$

$$\left[\begin{array}{c} y = 0 \\ y = \pm c^x y e^c \end{array}\right.$$

$$c_1 = \pm e^c.$$

$$\left[\begin{array}{c} y = 0 \\ y = C_1 e^x, \forall c_1 \neq 0 \end{array}\right.$$

единственность не нарушена

8 Линейный уравнения (Неоднородное)

Определение 9 (Линейное уравнение (неоднородное))**.**

$$y' = p(x)y + q(x).$$

Определение 10 (Линейное однородное уравнение)**.**

$$y' = p(x)y.$$

Ввел эти уравнения И.Бернулли. Как решать Д.Бернулли. Рассмотрим вариант подстановки Бернулли, который в литературе называют метод вариации произвольной постоянной Лагранжа (метод Лагранжа).

8.1

Пусть $p, q \in C(< a, b >)$. Тогда правая часть 9 $f(x,y) = p(x)y + q(x) \in C(G) G =< a, b > \times \mathbb{R}$ G – область определения 9

Теорема 3. *Пусть p, q непрерывны и есть только одно решение. Все решения линейного уравнения 9 задаются формулой*

$$y = e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt} (C + \int\limits_{x_0}^{x} q(s) e^{-\int\limits_{x_0}^{s} p(t)dt} ds) \tag{2}$$

$\forall (x_0, y_0) \in G$ *задача Коши имеет одно решение и оно задается формулой*

$$y = e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt} (y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(s) e^{-\int\limits_{x_0}^{s} p(t)dt} ds) \tag{3}$$

8.1.1 Метод лагранжа

1. Берем однородное уравнение $y' = p(x)y$

2. Это уравнение с разделяющимися переменными. Умеем решать.

$$y = Ce^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt}.$$

3. В уравнение 9 замену переменных $y = ze^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt}$

4. Делаем замену переменных

$$(ze^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt})' = p(x)(ze^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt}) + q(x) \tag{4}$$

$$z'e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt} + z * e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt} p(x) = p(x)z^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt} + q(x).$$

$$z'e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt} = q(x).$$

$$z' = q(x)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)dt}.$$

Тупо найти первообразную.

$$z = \int\limits_{x_0}^{x} q(s)e^{-\int\limits_{x_0}^{s} p(t)dt} ds + C.$$

Proof. Сначала выводим формулу 2 Методом Лагранжа. Покажем, что G область существования и единственности. Берем $\forall(x_0, y_0) \in G$. Надо показать, что существует только одно решение график, которого проходит через эту точку. В 2 подставим (y_0, x_0)

$$y_0 = e^{\int\limits_{x_0}^{x_0} p(t)dt}(C + \int\limits_{x_0}^{x_0} q(s)e^{-\int\limits_{x_0}^{s} p(t)dt}).$$

$$e^0 = 0.$$

Интеграл в скобках тоже 0, является решением $\square$

8.1.2 Какую замену переменных надо делать в ДУ

1. $G \subset \mathbb{R}^2$ поэтому замена $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \to (x, z).$$

2. Биективность.

3. Замена должна сохранять гладкость (дифференцируемость)

8.1.3 Пример

$$y' = \frac{y}{x} + x.$$
$$G = \mathbb{R} \backslash \{x = 0\}.$$

1.
$$y' = \frac{y}{x}.$$

   $y = 0$ решение
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}.$$
$$\ln |y| = \ln |x| + c = \ln C_1 |x|.$$
$$y = \pm C_1 x, c_2 = \pm c_1.$$
$$y = c_2 x.$$

2. Возвращаемся к ЛНУ
$$y = zx.$$
$$(zx)' = \frac{zx}{x} + x.$$
$$z'x + z = z + x.$$
$$z' = 1.$$

$$z = x + c.$$

$$y = (x + c)x.$$

8.2 Уравнения сводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

8.2.1 Однородные уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{5}$$

Такое уравнение называется однородным $\iff$ если не меняется при замене $(x, y) \to (\lambda x, \lambda y)$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{6}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}.$$

6 объединяет оба уравния

8.2.2 Пример

$$(x^2 - xy)dx + y^2 dy = 0.$$

$$y' = \frac{x^2 + xy}{y^2} = -(\frac{x}{y})^2 + \frac{x}{y}.$$

Пытаемся эту хуиту свести к $y' = g(\frac{y}{x})$

$$(x, y) \to (x, z).$$

$$(zx)' = g(z).$$

$$z' = \frac{g(z) - z}{x}.$$

8.2.3 Ф. 101

$$(x+2y)dx - xdy = 0.$$

Попробуем замену $(x, y) \to (\lambda x, \lambda, y)$

$$\lambda^2(x+2y)dx - \lambda^2 xdy = 0.$$

На лямбду сократили, уравнение однородно

$$(x, y) \to (x, z), y = zx.$$

$$(x+2zx)dx0d(zx) = .$$

$$(x+2zx)dx - x(zdx + xdz) = 0.$$

$x = 0$ реш вертикальная прямая

$$(1+2z)dx - xdz - zdx = 0c.$$

$$(1+z)dx = xdz.$$

$z = -1 : y = -x$ да является решением, горизонтальная прямая

$$\ln|z+1| = \ln|x| + c.$$

$$\ln|\frac{y}{x} + 1| = \ln|x| + c.$$

$$x = 0.$$

$$y = -x.$$

9 Уравнение в полных дифференцалах

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{7}$$

Это уравнение в полных дифференциалах

$$y' = f(x, y).$$

Такое уравнение можно переписать ввиде уравнения в полных диффереенциалох

$$dy - f(x, y)dx = 0.$$

В уравнении 2 x, y неравноправны

9.1 Пример

$$y' = \frac{1}{yx + y^2}.$$

$$\frac{dx}{dy} = yx + y^2.$$

уравнение линейное по x. Иногда полезно перевенуть уравнение

9.2 Смысл записи в полных дифференциалах

Для тех точек, где $N(x, y) \neq 0$ мы считаем что это уравнение тоже самое что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}.$$

Для тех точек, где $M(x, y) \neq 0$ пы считаем по определнию

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}.$$

Уравнение в полных дифференциалах это объедение такие уравнений.

Если $M = N = 0$ считаем что уравнение не определно и такие точки выкидыватся из области определения

Определение 11. $(x_0, , y_0)$ *такие что* $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) - 0.$ *O*

$$M(x,\phi(x))x + N(x,\phi)d\phi(x) = (M(x,\phi(x))) + \phi'(x)N(x,\phi(x)))dx.$$

Лемма 4. *Пусть* $u \in C^1(D)$ $\exists U'_x, U'_y \in C(G)$ *хотя бы одна из частных производных не равняетчя 0, тогда* $U(x,y) = 0$ *задает регулярную кривую*

Proof.

$$\forall (x_0,y_0) : U(x_0,y_0) = 0.$$

$$(x_0,y_0) \in U^{-1}(0) := \{(x,y) \mid U(x,y) = 0\}.$$

Пусть $U'_y(x_0,y_0) \neq 0$ по теореме о неявной функции тогда $\exists! y = \phi(x)$ $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \phi \in C_1$ □

10 Уравнения, сводящиеся к однородным

10.1

$$y' = f(ax+by).$$

$$(x,y) \to (x,z),\ z = ax+by.$$

$$z' = a + by' = a + bf(ax+by) = a + bf(z).$$

10.1.1 Ф 65

$$y' = \sqrt{4x+2y-1}.$$

$$(x,y) \to (x,z), z = 4x+2y-1.$$

$$z' = 4 + 2y' = 4 + 2\sqrt{z}.$$

$$\frac{dz}{d} = 4 + 2\sqrt{z}.$$

$$\frac{dz}{2+1\sqrt{z}} = 2dx.$$

$$\int \frac{dz}{2+\sqrt{z}}.$$

$$t = 2+\sqrt{z}.$$

$$z = (t-2)^2.$$

$$dz = 2(t-2)dt.$$

$$\int \frac{2(t-1)}{t}dt = t - 2\ln|t| = x + c.$$

$$2+\sqrt{z} - 2\ln(2+\sqrt{z}) = x + c.$$

$$2+\sqrt{(4x+2y-1)} - 2\ln(2+\sqrt{4x+2y-1}) = x + c.$$

10.2 Еще какаято ебанина

$$y' = f(\frac{a_1x+b_1y+c}{a_2x+b_2y+c_2}).$$

Если $c_1 = c_2 = 0$ такое уравнение является однородным. Каждая хуйня из дроби задает уравнение прямой. (x_0, y_0) точка пересечения, нужен паралельный пернос, чтоб она стала $(0, 0)$

$$(x, y) \to (u, v).$$

$$\begin{cases} u = x - x_0 \\ v = y - y_0 \end{cases}.$$

$$du = dx.$$

$$dv = dy.$$

$$\frac{dv}{du} = f(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}).$$

коэфициенты не меняются так как нормаль не меняется при параллельном переносе. Если прямые паралельны то

$$a_2 = ka_1.$$

$$b_2 = kb_1.$$

Задача сводитя к прошлой

10.2.1 Ф 118

$$y' = 2(\frac{y+2}{x+y-1})^2.$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} u = x - 3 \\ v = y + 2 \end{cases}.$$

$$\frac{dv}{du} = 2(\frac{v}{u+v})^2.$$

$$(u, v) \to (u, z).$$

$$v = zu.$$

$$(zu)' = u + uz' = 2(\frac{zu}{u+zu})^2 = 2(\frac{z}{1+z})^2.$$

10.3 ф 113

$$(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right).$$

$$(1, 2).$$

$$\begin{cases} u = x - 1 \\ v = u - 2 \end{cases}.$$

$$(2u - 4v)du + (u + v)dv = 0.$$

$$(u, v) \to (u, z).$$

$$v = zu.$$

$$(2u - 4zu)du + (u + uz)d(uz) = 0.$$

$$(2u - 4zu)du + u^2(1 + z)dz + u(z + z^2)du = 0.$$

$u = 0$ не реш

$$.$$

11

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Эта хуйня тоже самое что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)} \wedge \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}.$$

$$y = \phi(x).$$

$$x = \psi(y).$$

$$U(x, y) = 0.$$

$$|U'_x| + |U'_y| \neq 0.$$

Неявное решение задания решения

Определение 12. *Пусть* $M, N \in C(G), G \subset \mathbb{R}^2, |M| + |N| \neq 0$ *в* G
Пусть $U \in C^1(G)$

1. $$|U'_x| + |U'_y| \neq 0 \tag{8}$$

2. $$U'_x N - U'_y M \equiv 0 \tag{9}$$

Тогда $U(x, y)$ *называется интегралом ДУ*

Теорема 5. *Пусть $U(x, y)$ интеграл дифференциального уравнения тогда*

1. *Формула $U(x, y) = c$ задает множество всех решений*
2. *G область существования и единственности*

Proof. $\forall$ кривая задаваемая 1 удовлетворяет условиям леммы. Пусть γ регулярная кривая, задааваема $U(x, y) = c$, либо $U'_x \neq 0$, либо $U'_y \neq 0$

1. Пусть $U'_y \neq 0 \implies$
$$y = \phi(x).$$
$$U(x, \phi(x)) \equiv c.$$
$$\frac{d}{dx} U(x, \phi(x)) \equiv 0.$$
$$U'_x(x, \phi(x)) + U'_y(x, \phi(x))\phi'(x) \equiv 0.$$
$$\phi'(x) \equiv -\frac{U'_x(x, \phi(x))}{U'_y(x, \phi(x))}.$$
Покажем,ч то $N(x, \phi(x)) \neq 0$. Предположим обратное
$$0 - U'_y M = 0.$$
значит $M = 0$ получается полная фигня. Тогда
$$\frac{U'_x}{U'_y} \equiv \frac{M}{n}.$$
$$\phi'(x) = -\frac{M(x, \phi(x))}{N(x, \phi(x))}.$$
2. $U'_x \neq 0$
$$U(\psi(y), y) \equiv 0.$$
Взяли производную
$$U'_x(\psi(y), y)\psi'(y) + U'_y(\psi(y), y) \equiv 0.$$

$$\psi = -\frac{U'_y(\phi, y)}{U'_x(\phi, y)}.$$

$$M(\psi(y), y) \neq 0.$$

$$\psi'(y) \equiv -\frac{N(\phi(y), y)}{M(\psi, y)}.$$

Теперь доказываем второй пункт. Берем $\forall(x_0, y_0) \in G$ и $\exists!$ решение, проходяшее через (x_0, y_0)

$$U(x, y) = C.$$

Если это решение локально представимо в виде $y = \phi(x)$, то $y_0 = \phi(x_0)$

$$U(x, \phi(x)) \equiv c.$$

$$U(x, y) = U(x, 0).$$

□

Перейдем к уравнениям в полных дифференциалах

12 УПД

Определение 13.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Называется уравнением в полных дифференциалилах, если существует $U \in C^1(G)$

$$M = U'_x.$$

$$N = U'_y.$$

Теорема 6. *Пусть уравнение в полных дифференциалах, тогда* U *интеграл*

Proof.

1. $|U'_x| + |U'_y| = |M| + |N| \neq 0$ если оба ноль, то мы такое не рассматриваем
2. $U'_x N - U'_y M = MN - NM = 0$

□

Следствие 6.1. *Формула $U(x, y) = c$ все решения в обобщеном смысле*

Следствие 6.2. *G - облатсь существования и единственности*

Теорема 7 (Критерий УПД)**.** *Пусть $M, N \in C(G)$, $\exists M'_y, N'_x \in C(G)$, Тогда*

1. *уравнение УПД $\iff M'_y \equiv N'_x$ (необходимое условие упд)*
2. *Если G выпуклая прошлый пунк достаточное условие*

13 Обобщенно однородные уравния

$$y' = f(x, y).$$

$$(x, y) \to (\lambda x, \lambda y).$$

квазирастяжение

$$(x, y) \to (\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y).$$

$$\begin{cases} x = \lambda^\alpha x_0 \\ y = \lambda^\beta x_0 \end{cases} \quad \lambda > 0.$$

перейдем к уравнению в явной форме

$$\lambda = (\frac{x}{x_0})^{\frac{1}{\alpha}}.$$

$$y = (\frac{x}{x_0})^{\frac{\beta}{\alpha}} y_0.$$

Пусть $c = \frac{y_0}{x_0^{\frac{\beta}{\alpha}}}$

Определение 14. *Уравнение называется ООУ (Квази ОУ) , если существует*

$$2x^4yy' + y^4 = 4x^6.$$

$$x \to \lambda^\alpha x.$$

$$y \to \lambda^\beta y.$$

$$\lambda^{4\beta} = \lambda^{4\alpha}.$$

надо делать замену $z = \frac{y^\alpha}{x}$

14 Теорема

Теорема 8.

$$Mdx + Ndy = 0.$$

$$M, N \in C(G).$$

$$\exists M'_y, N'_x \in C(G).$$

Тогда Уравнение упд $\implies M'_y \equiv N'_x$
Если G *– выпуклая то прошлое еще и достаточное условие.*

Proof. 1. Необходимость

Пусть уравнение упд значит

$$\begin{cases} M = U'_x \\ N = U'_y \end{cases}.$$

$$\begin{cases} M'_y = U''_{xy} \\ N'_x = U''_{yx} \end{cases}.$$

Значит $M'_y \equiv N'_x$

2. Достаточность

Ищем функцию $U(x, y)$ в явном виде.

$$\begin{cases} U'_x = M \\ U'_y = N \end{cases}.$$

Первое уравнение интегрируем по x, тогда

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y)ds + c(y).$$

Подбираем $c(y)$
$$(\int\limits_{x_0}^{x} M(s,y)ds + c(y))' = N(x,y).$$
$$(\int\limits_{x_0}^{x} M(s,x)ds)'_y + c'(y) = N(x,y).$$
$$\int\limits_{x_0}^{x} M(s,y)sd = F(x,y).$$
$$F'(x,y)_y = \int\limits_{x_0}^{x} M'_y(s,y)ds.$$
$$\int\limits_{x_0}^{x} M'_y(s,y)ds + c'(y) = N(x,y).$$
$$\int\limits_{x_0}^{x} N'_x(s,y)ds + c'(y) = N(x,y).$$
$$N(x,y) - N(x_0,y) + c'(y) = N(x,y).$$
$$c'(y) = N(x_0,y).$$
$$c(y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt.$$
Без константы, тк нам надо найти тоько одну такую функцию.
$$U(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(s,y)ds + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt.$$
$\square$

15 Общие теоремы для систем дифференциальных уравнений

15.1 Основные понятия

Определение 15. *Системой дифференциальных уравнений, разрешенных относительн старших производных, называется следущая система*

$$y_1^{(n_1)}(x) = f_1(x, y_1, y_1', y_1^{(n_1-1)}, y_2, \dots, y_2^{(n_2-1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{n_m-1}).$$

$$y_2^{(n_2)} = f_2(\textit{тоже самое что и прошлом}).$$

$$\dots.$$

$$y_m^{(n_m)} = f_m(\textit{тоже самое что и в прошлом}).$$

где x независимая переменнная, $y_1(x), \dots, y_m(x)$ *неизвестные функции. Решить систему, найти эти функциии.* ,$n_1, \dots, n_m$ *порядки старших производных*

$$n = n_1 + \dots + n_m \textit{ порядок сду}.$$

Важные случаи

1.

$$m = 1, n_1 = n.$$

Это диффур n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

2.

$$n_1 = \dots = n_m = 1, n = m.$$

Нормальная система

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x_1, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x_1, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ y_n' = f_n(x_1, y_1, \dots, y_n) \end{cases}.$$

Лемма 9. *Любая система дифференциальных уравний может быть записана в виде эквивалентной нормальной системы*

Proof. Начинаем с частного случая. Диффур n-го порядка записываем в виде нормально системы. ВВедем новые переменные $z_1, \dots, z_n$

$$\begin{cases} z_1 = y \\ z_2 = y' \\ \dots \\ z_n = y^{(n-1)} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} z_1' = y' = z_2 \\ z_2' = y'' = z_3 \\ \dots \\ z_n' = y^{(n)} = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{cases}.$$

Убедимся в сущ биекции между решениями. Если $y = \phi(x)$ тогда

$$z_1 = \phi(x), z_2 = \phi'(x), \dots, z_n = \phi^{(n-1)}(x).$$

Обратно

$$z_1 = \phi_1(x), \dots, z_n = \phi_n(x).$$

то $y = \phi'(x)$

$$\phi_{k+1}(x) = \phi_k'(x).$$

$$\phi_n' = \phi^{(n)}(x) = f(x, \phi_1, \dots, \phi_n) = f(x, \phi_1, \dots, \phi_1^{(n-1)}).$$

Теперь общий случай.

$$y_k, y_k', \dots, y_k^{(n_k-1)}.$$

берем в качестве новых переменнных $\square$

15.2 Векторная запись нормальной системы дифференциальных уравнений

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \dots \\ y_{n(x)} \end{pmatrix}.$$

$$< a, b > \to \mathbb{R}^n.$$

$$y(x) \in C(< a, b >) := \forall y_k(x) \in C(< a, b >), k = 1 \dots n.$$

$$y(x) \in C^1(< a, b >) := \forall y_k \in C^1(< a, b >).$$

$$y'(x) := \begin{pmatrix} y'(x) \\ \dots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

$$\int_a^b y(x)dx := \begin{pmatrix} \int_a^b y_1(x)dx \\ \dots \\ \int_a^b y_k(x)dx \end{pmatrix}.$$

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} f_1(x_1, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

$$y(x)' = f(x, y).$$

векторная система нормальной системы

Вводим переобозначения

$$x \to t.$$

$$y \to x\text{– это набор координат.}$$

$$y(x) \to x(t).$$

$$y' = \dot{x}.$$

$$\dot{x} = f(t, x).$$

$$G \subset \mathbb{R}^{n=1}.$$

$$f \in C(G).$$

Определение 16.

$$\phi(t) :< a, b >\to \mathbb{R}^n.$$

называется решением нормальным решением если

1. $$\phi \in C^1(< a, b >).$$

2. $$\Gamma_\phi \subset G.$$

3. $$\dot{\phi(t)} \equiv f(t, \phi(t))\textit{на} < a, b > .$$

Задача Коши.

$$(t_0, x_0) \in F.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

15.3 Единственность решения задачи коши

$(t_0, x_0) \in G$ называется единсвтенной, если $\exists U(t_0, x_0)$ такая что любые две инетгральные кривые, проходящие через t_0, x_0 в этой окрестности U совпадают.

16 Поле направлений. Ломанные направлений. Теорем Пеано

Рассматриваем нормальную систему диффуров

$$\dot{x} = f(t, x).$$

$$f : G \to \mathbb{R}^n.$$

$$G \subset \mathbb{R}^{n+1}\text{область}.$$

$$f \in C(G).$$

16.1 Поле направлений

$$(t_0, x_0) \in G.$$

Пусть $\phi(x_0) = t_0$ решение системы. Само решение ϕ неизвестно, но мы легко можем написать уравнение касательной к ϕ в t_0

$$x = \phi(t_0) + \dot{\phi}(t_0)(t - t_0).$$

$$\dot{\phi}(t_0) = f(t_0, \phi(t_0)) = f(t_0, x_0).$$

$$x = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0).$$

выписано в явном виде.

Определение 17 (Поле направлений)**.** *Полем направлений называется отображения, которое* $\forall (t_0, x_0) \in G$ *сопоставляет касательную прямую, проходящую через эту точку.*

Ясно что ϕ будет решением $\iff$ в каждой своей точки касается прямой из поля направлений. Интегральные кривые в каждой точку поля направвний $\implies$ позволяет примерно рисовать их кривые.

16.2 Ломанные Эйлера

Определение 18 (Ломанная Эйлера)**.** *Ломанной Эйлера называется любая ломанная, звенья которой, лежат на прямых из поля направлений. Апроксимация точной интегральной кривой.*

16.3 Алгоритм построения ломанной Эйлера

$$(t_0, x_0) \in G.$$

Строим лиоманную эйлера на $[t_0.T]$ в лево все аналогично.
Пусть N - число звеньев ребер

$$\frac{T - t_0}{N} = h \text{ Шаг.}$$

Пусть $t_k = t_0 + kh$ дробление отрезка $[t_0, T]$ $k = 0 \dots N$. Линия эйлера строится по реккурентному алгоритму по следущей схеме

$$l(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0), [t_0, t_1].$$

$$x_1 = l(t_1) = x_0 + f(t_0, x_0)h.$$

$$l(t) = x_1 + f(t_1, x_1))(t - t_1), [t_1, t_2].$$

$$x_2 = l(t_2).$$

Пусть Ломанная Эйлера построена на $[t_0, t_k], x_k = l(t_k)$

$$[t_{k_1}, t_{k+1}], l(t) = x_k + f(t_k, x_k)(t - t_k).$$

$$\begin{cases} t_{k+1} = t_k + h \\ x_{k+1} = x_k + f(t_k, x_k)h \end{cases}.$$

16.4 Теорема Пеано

Теорема 10 (Пеано)**.** *Пусть* $f \in C(G)$ *тогда* $\forall (t_0, x_0) \in G$ *задача коши*

$$\dot{x} = f(t, x)x(t_0) = 0.$$

имеет хотя бы одно решение (определенное на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$ *)*

Без доказательства

17 Интегральные уравнения

$$\dot{x} = f(t, x).$$

$$f : G \to \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

$$f \in C(G).$$

Рассмотрим следущее интегральное уравнение.

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(x, x(s))ds.$$

Решить это уравние означает найти $x(t)$

Определение 19. $\phi(t)$ *называется решением интегральное уравнения на* $< a, b >$

1. $\phi \in C(< a, b >)$
2. $\Gamma_\phi \subset G$
3. $\phi(t) \equiv x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds$ *на* $< a, b >$

Теорема 11 (Об эквивалентность задачи Коши и интегральных уравнений)**.** $\phi(t)$ *будет решением задачи коши на промежутке* $\iff$ *она решение интегрального уравнения*

Proof.

1. (a) $\phi \in C^1 \implies \phi \in C$

   (b) Все понятно

   (c)
$$\dot{\phi}(t) \equiv f(t, \phi(t)) \implies \int\limits_{t_0}^{t} \dot{\phi}(s)dt = \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds.$$
$$\phi(t) - \phi(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds.$$

2. $\phi \in C \implies f(s, \phi(s)) \in C \implies \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds \in C^1$

3. Понятно

4. $$\phi(t) \equiv x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds \implies \phi \in C^1.$$

5. $$\phi(t) \equiv x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds.$$
$$\dot{\phi}(x) \equiv 0 + f(t, \phi(t)).$$

   Начальное условие $\phi(t_0) = x_0$

$\square$

18 Условие Липщица

$$f : G \to \mathbb{R}^n.$$
$$G \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Определение 20. *f удовлетворяет условию липшица по переменной x в области G с константой L*

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in G.$$

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leq L||x_1 - x_2||.$$

18.1 Комментарий

f растет не быстрее линейной функции

Лемма 12. *для f выполняется условие липщица* $\iff$ $f \in C_x^0(G)$

Proof.

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| < \epsilon.$$

$$\delta = \frac{\epsilon}{L}.$$

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leq L||x - x_2|| < \delta L.$$

□

Определение 21 (Равномерная непрерывность)**.**

$$\forall\, \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon), \forall (t, x_1), (t, x_2) \in G||x_1 - x_2|| < \delta.$$

Теорема 13. *Пусть* $\exists f'_x \in C(G) \iff \forall$ *шара из* G*, для f выполняется условие липщица в B по x*

19 Теорема Пикара

$$\dot{x} = f(x).$$

Нормальная система дифференциальных уравнений

$$G \to \mathbb{R}^n.$$

G область в $R_{t,x}^{n+1}$

Теорема 14 (Пикара)**.** *Пусть* $f \in C(G), f \in Lip_x(G)$*, тогда*

$$\forall (t_0, x_0) \in G.$$

Задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

имеет единственное решение, определенное на отрезке Пеано

$$I = [t_0 - h, t_0 + h].$$

Замечание 1.

$$C_x^1 \implies Lip_x.$$

В теореме Пикара можно писать

$$f \in C, f \in C_x^1 (f'_x \in C).$$

менее общая формулировка, но она удобна на практике

19.1 Построение отрека Пеано

G - открытое множество $\implies$ $(t_0, x_0) \in G$ вместе с открытым шаром шаром $B = R_r(t_0, x_0)$ Уменьшм r , $\overline{B} \subset G$ (замкнутый шар). В $\overline{B}$ построим цилиндр

$$P := \{(t,x) \mid |t - t_0| \leq a, ||x - x_0|| \leq b\}.$$

Пусть a, b малы $P \subset \overline{B}$. P ограниченно и замкнуто. По теореме Вейштрасса (любая непрерывная функция на компакте достигает наибольшего значения).

$$\exists M = \max ||f(t,x)||.$$

$$h := \min a, \frac{b}{M}.$$

Считаем, что $M \neq 0$, если $M = 0 \implies f = 0$ все решается очень просто.

$$I := [t_0 - h, t_0 + h].$$

Отрезок Пеано определяется неоднозначно

19.2 Определение Пикаровских приближений

Заменим задачу коши на эквивалентное ей интегральное ураавнение

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Мы докажем, что именно интегральное уравние имеет единственное решение на отрезке Пеано I. Пикаровские приближения, $\phi_0(t), \phi_1(t), \ldots, \phi_t(t)$

$$\phi_0(t) = x_0.$$

$$\phi_1(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi(x_0)(s))ds.$$

$$\ldots.$$

$$\phi_{k+1}(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi_k(s))ds.$$

19.3 Лемма

Лемма 15. *1. Все пикаровские приближения определены на $I, \phi_k \in C(I)$*

2. $\Gamma_{\phi_k} \subset P$

Proof. По индукци $k = 0$

$$\phi_0(t) = x_0.$$

все очевидно.

Переход $\phi_k \in C(i)$ и $\Gamma_{\phi_k} \subset P$

$$\phi_{k+1} := x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi_k(s))ds.$$

$$t \in I \iff |t - t_0| \leq h.$$

S между t, t_0 Определение

$$s \in I \implies .$$

$$\phi_k(s)\text{полн ogh}.$$

$$(s, \phi_k(s)) \in P \forall s \in I.$$

$$f(s, \phi_k(s)).$$

определена при

$$\forall s \in I \implies \int\limits_{t_0}^{t} f.$$

$$\forall t \in I \implies \phi_{k+1}(t)\text{опредлена}\forall t \in I.$$

Пункт 1 доказан

$$(t, \phi_{k+1}) \in P \forall t \in I.$$

$$\begin{cases} |t - t_0| \leq a \\ ||\phi_{k+1}(t) - x_0|| \leq b \end{cases}.$$

Проверим каждое из условий

1. $t \in I \iff |t - t_0| \leq h \leq a$
2. $||\phi_{k+1}(t) - x_0|| = ||\int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi_k)ds|| \leq \int\limits_{t_0}^{t} ||f(s, \phi_k(s))||ds \leq |\int\limits_{t_0}^{t} ||f(s, \phi_k(s))||ds| \leq M|\int\limits_{t_0}^{t} ds = M|t - t_0| \leq Mh = b$

$\square$

По условию $f \in Lip_x(G)$

$$\exists L \geq 0 \forall (t, x_1), (t, x_2) \in G.$$

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leq L||x_1 - x_2||.$$

Лемма 16. *Справедлива следущая оценка* $||\phi_k(t) = \phi_{k-1}(t)|| \leq \frac{M}{L}\frac{L^k|t-t_0|^k}{k!} \forall k = 1, 2, \cdots \forall t \in I$, *I отрезок Пеано*

Proof. По индукции

$k = 1$ $||\phi_1(t) - \phi_0(t)|| = ||\int\limits_{t_0}^{t} f(s, x)ds|| \leq |\int\limits_{t_0}^{t} ||f(s, x_0)||ds| \leq M|\int\limits_{t_0}^{t} ds| = M|t - t_0|$

$$\frac{M}{L}\frac{L|t - t_0|}{1!}.$$

$$M = \max_p ||f||.$$

Переход $k \to k + 1$

$$||\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)|| = ||(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi_k(s)ds) - (x_0 - \int\limits_{t_0}^{t} f(s, \phi_{k-1}(s))ds)).$$

$$||\int\limits_{t_0}^{t} (f(s, \phi_k(s)) - f(s, \phi_{k-1}(s)))ds|| \leq |\int\limits_{t_0}^{t} ||(f(s, \phi_k(s)) - f(s, \phi_{k-1}(s)))||ds|.$$

По условию липшица

$$\leq |\int\limits_{t_0}^{t} L||\phi_k(s) - \phi_{k-1}(s)||ds| \leq L|\int\limits_{t_0}^{t} \frac{M}{L}\frac{L^k|s - t_0|^k}{k!}ds| = \frac{M}{L}\frac{L^{k+1}}{k!}|\int\limits_{t_0}^{t} |s - t_0|^k ds| = \frac{|t - t_0}{k +}$$

1. если $t \geq t_0 \iff s \geq t_0$ все моули сняли с +

$$\int\limits_{t_0}^{t} (s - t_0)^k ds = \frac{(s - t_0)^{k+1}}{k + 1} = \frac{(t - t_0)^{k_1}}{k + 1} - 0.$$

2. дальше самостоятельно

Таким образом
$$||\phi_{k_1}(t) - \phi_k(t)|| \leq \frac{M}{L} \frac{L^{k+1}|t-t_0|^{k+1}}{k_1!(k+1)}.$$

$\square$

19.4 Равномерная сходимость пикаровских приближений

19.4.1 Напоминание

$$\phi_k(t) \to \phi(t), k \to \infty.$$

Сходится **поточечно**,

$$\forall t \in I \iff \forall t \in I \forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon, t) : \forall k \geq N : ||\phi_k(t) - \phi(t)|| < \epsilon.$$

Если $N = N(\epsilon)$, то такая сходимость называется равномерной

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \forall\ k \geq nt \in I\ ||\phi_k(t) - \phi(t)|| < \epsilon.$$

Альтернативный вариант

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall \geq 0 \sup_{t \in I} ||\phi_k(t) - \phi(t)|| < \epsilon.$$

$$\phi_k(t) \rightrightarrows \phi(t), t \in I, k \to \infty.$$

19.4.2 ФАКТ

Пусть $\phi_k(t) \in C(I), \phi_k \rightrightarrows \phi, k \to \infty \implies \phi(t) \in C(I)$

19.4.3 ФАКТ

Пусть $\phi_k \rightrightarrows \phi(t), I=[a,b], k \to \infty \iff$

$$\int\limits_a^b \phi_k(t)dt \to \int\limits_a^b \phi(t)dt.$$

Лемма 17. *$\{\phi_k\}$ равномерно сходится на I*

$$S = \phi_0 + (\phi_1 - \phi_0) + \dots.$$

$$S_n T = \sum_{k=0}^{n} \Delta_k(t) = \phi_n(t).$$

$\{\phi_k\}$ Равномерно сходится $\iff$ $S_k(t)$ равномерно схоится $\iff$ S равномерно сходи

Существует критерий Вейрштрасса схоимости функционального ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k(t).$$

мажориуется сходимым положительным числовым рядом $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, то ряд сходится равномерно

Лемма 18. *lemma Пусть $\phi(t) = \lim_{k\to\infty} \phi_k(t)$*
$\phi(t)$ есть решение интегрального уравнения 2

Proof. 1. $\phi \in C(I)$ реально

2. $\Gamma_\phi \subset\subset G$

$$(t, \phi_k(t)) \in P \forall t \in I.$$

$$(t, \phi_k(t)) \to (t, \phi(t)) \iff (t, \phi(t)) \in P.$$

3. $\phi(t) \equiv x + \int\limits_t^t f(s, \phi(s))ds$

$$\phi_{k+1}(t) \rightrightarrows \phi(t).$$

Покажем, что

$$\int\limits_{t_0}^{t} f(s,\phi_k(s))ds \rightrightarrows \int\limits_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))ds.$$

$$\sup_{t\in I} ||\int\limits_{t_0}^{t} f(s,\phi_k(s))ds - \int\limits_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))ds|| \to 0???????.$$

$$||\int\limits_{t_0}^{t} f(s,\phi_k(s))ds - \int\limits_{t_0}^{t} f(s,\phi(s))ds|| \le |\int\limits_{t_0}^{t} ||f(s,\phi_k) - d(s,\phi)||ds| \le L|\int\limits_{t_0}^{t} ||\phi_k(s)-$$

$$L|\int\limits_{t_0}^{t} ||\phi_k(s)-\phi(s)||ds| \le L\int\limits_{t_0}^{t} \sup_I ||\phi_k(s)-\phi(s)||ds \le L\sup_I ||\phi_k(s)-\phi(s)||*|t-t_0|$$

$$L\sup_I ||\phi_k(t)-\phi(t)||.$$

□

Лемма 19 (Неравенство Грондолла)**.** *Пусть* $u(t) :< a,b >\to \mathbb{R}$*,* $u(t) \ge 0,\ u(t) \in C(< a,b >)$

$$\exists \alpha,\beta \ge 0 : 0 \le u(t) \le \alpha + \beta|\int\limits_{t_0}^{t} u(s)ds|.$$

$$\Longrightarrow .$$

$$0 \le u(t) \le \alpha e^{\beta|t-t_0|}\ \forall t \in< a,b > .$$

Proof. Мы рассмотрим только случай только $t \ge t_0$

$$0 \le u(t) \le \alpha + \beta\int\limits_{t_0}^{t} u(s)ds.$$

$$v(t)\alpha + \beta\int\limits_{t_0}^{t} u(s)ds.$$

v интегрируема и дифференицруема

$$\dot{v}(t) = \beta u(t) \leq \beta v(t).$$

$$v(t_0) = \alpha_0.$$

$$\begin{cases} \dot{v} = \beta v \\ v(t_0) = \alpha \end{cases}.$$

$$v(t) = \alpha e^{\beta(t-t_0)}.$$

$$v(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)}???.$$

$$\frac{d}{dt}(v(t)e^{-\beta(t-t_0)}) \leq 0????.$$

$$\frac{d}{dt}(v(t)e^{-\beta(t-t_0)}) = \dot{v}(t)e^{-\beta(t-t_0)} + v(t)(-\beta)e^{-\beta(t-t_0)} \leq v(t)e^{-\beta(t-t_0)} \mid_{t=t_0} = v(t)e^0 = \alpha.$$

□

Следствие 19.1. *Если* $\alpha = 0$

$$0 \leq u(t) < \beta|\int_{t_0}^{t} u(s)ds| \iff u = 0.$$

Лемма 20. *Пусть 2 решения задачи коши, определенные на общем про мещщутку, тогда* $\phi_1 = \phi_2$ *на* $< a, b >$

Proof.

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leq L||x_1 - x_2||.$$

$$||\phi_1(t) - \phi_2(t)|| = ||x_0 + \int_{t_1}^{t} f(s, \phi_1(s))ds - -(x_0 + \int_{t_1}^{t} f(s, \phi_2(s))ds)|| = .$$

$$u(t) = ||\phi_1(t) - \phi_2(t)||.$$

$$u(t) \leq L|\int_{t_0}^{t} u(s)ds|.$$

$\alpha = 0, \beta = L$

$$u(t) = 0, t \in < a, b > \iff \phi_1 = \phi_2.$$

$\square$

19.5 Переформулировка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Т Пикара для ДУ n-го порядка. Пусть f непрерывна в область G, $f \in LIP_{y_1,\dots,y_n}$ G облать существование и единственноть

$$(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \in G.$$

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_1^0 \\ y'(x_0) = y_1^0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0 \end{cases}.$$

Имеет ! решение, определенное на отрезке Пеано $[x_0 - h, x_0 + h]$

Следствие 20.1.

$$f \in C^1_{y_1,\dots,y_n} \implies f \in LIP_{y_1,\dots,y_n}.$$

19.6 228

$$(x+1)y'' = y + \sqrt{y}.$$

$$y'' = \frac{y + \sqrt{y}}{x+1}.$$

$$y(x_0) = y_1^0.$$

$$y'(x_0) = y_2^0.$$

$$G_{\exists!} = \{(x, y, y') \,|x \neq -1, y > 0, y' \in \mathbb{R}\}.$$

$$y > 0, \sqrt{y} \notin C^1.$$

20 Понятие о продолжимости

20.1 Пример

Рассмотри задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ x(0) = 1 \end{cases}.$$

$$x = e^t.$$

Определение 22. *Решение $\phi(t)$ определенное на $< a, b >$ продолжимо вправо из a, b если $\exists$ решение ψ, опр на $< a, b_1 >, b_1 > b$ и $\phi = \psi$ на $< a, b >$, ψ продолжение решения ϕ*

В теореме пикара меется максимально продолжанное решение. Договоренность, в дальнейшем под решением понимается только максимально продолженное решение

21 Линейный системы и уравнения

21.1 Теорема существования и единственности

Определение 23 (Линейная система дифференциальных уравнений)**.** *ЛСДУ – следущая нормальня нормальная система*

$$\dot{x} = A(t)x + f(t).$$

$$x \in \mathbb{R}^n.$$

$$A \in M_{n\times n}.$$

$$f(t) - (n \times 1).$$

Если $f(t) \equiv 0$ *то линейная система называется однородной, иначе неоднородная*

$$f(t) : (a, b) \to \mathbb{R}^n.$$

$$f(t) \in C(a; b) \iff \textit{каждая скалярная компонента непрерывная функция}.$$

$$A(t) : (a, b) \to M^{n \times n}.$$

$$A(t) \in C(a, b) \iff \textit{каждая скалярная компонента непрерывная функция}.$$

Правая часть $F(t, x) = A(t)x + f(t)$

$$F : G \to R^n.$$

$$G = (a, b) \times R^n \textit{ Область определения системы}.$$

Ясно , что $F \in C(G)$

Теорема 21 (Существование и единственность)**.** *Пусть* $A(t) \in C(a, b), f(t) \in C(a, b)$*, тогда* G *область существования и единственности задача Коши*

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

имеет единственное решение, при этом максимальный промежуток существования любого решения есть (a, b)

Proof. Про максимальный промежуток принимаем на веру. Из т. Пикара $F(t, x)x$ непрерывно диффереенцируема по x, тк $F'_x = A(t)$ непрерывна. По т сязи дифф и липшица. F удовлетворяет условию Липщица $\square$

21.2 Линейные уравния n-го порядка

Определение 24 (ЛДУ n-го порядка)**.**

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i)} = f(t).$$

$$a_k \in C(a,b).$$

$$x(t) \text{ *Неизвестная функция*}.$$

$$f(t) \in C(a,b).$$

Если $f \equiv 0$ *однородное, иначе неоднородное*

Теорема 22 (существование и единственность)**.** *Пусть* $a_k(t) \in C(a,b)$

21.3 Линейные однородные системы

$$\dot{x} = A(t)x, A(t) \in C(a,b), G = (a,b) \times \mathbb{R}^n.$$

M^0 множество всех решений системы

Теорема 23 (о множестве всех решений системы)**.** *1. Пусть* $\phi_1(t), \phi_2(t)$ *- 2 решения тогда их линейная комбинация есть есть решение*

2. M^0 *линейное пространство*

Proof.

$$\dot{\phi}_{1,2} = A * \phi_{1,2}.$$

$$(c_1\phi_1 + c_2\phi_2)' = c_1\dot{\phi_1} + c_2\dot{\phi_2}.$$

$$c_1 A\phi_1 + c_2 A\phi_2 = A(c_1\phi_1 + c_2\phi_2).$$

Множество всех дифференцируемых функций. решения же подпространсство □

Лемма 24 (Критерий линейной независимости)**.** *Пусть* $\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t)$ *линейно независимы как функции тогда и только тогда гда* $(\phi(t_0), \ldots, \phi_m(t_0))$ *линейно независимы как вектора в* R^n

Proof. мы будем доказывать, что зависимы как функции, когда их значения линейно зависимы как вектора.
Берем произвольную точку $t_0 \in (a, b)$ $\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)$ л.з

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i = 0.$$

t_0 подставили все круто.
В обрратную сторону

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(t_0) = 0.$$

Рассмотрим

$$\psi(t) := \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(t).$$

это решение. Посмотрим какую задачу коши решает эта функция в t_0

$$\psi(t_0) = 0.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(t_0) = 0 \end{cases}.$$

Но у такой задачи есть тривиальное решене $x = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(t) = 0.$$

□

Теорема 25 (Теорема о Базисе, о ФСР)**.** *Любые n лнз решения образуют ФСР n порядок системы*

Proof. Пусть $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ лнз решения. Проверяем, что любое решение представляется в виде

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_k(t).$$

$\square$

Следствие 25.1. $\dim M^0 = n$

Следствие 25.2. *ФСР (базис) сущестует всегда, тоесть для ЛОС модно указать n ЛНЗ решений*

$$e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} k, k = 1, \dots, n.$$

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots a_1(t) \dots + a_1(t) \dots (x) + a_0(t)(x) = 0.$$

Теорема 26. *Любая линейная комбинация решений ЛОУ есть решение ЛОУ*

Лемма 27. *Пусть $\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)$ – решения ЛОУ. Тогда $\phi_n, \dots, \phi_m$ Лнз как функции $\Longleftrightarrow$*

$$\begin{pmatrix} \phi(t_0) \\ \dot{\phi}(t_0) \\ \dots \phi_1^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} \phi_n(t_0) \\ \dot{\phi}_n(t_0) \\ \dots \\ \phi^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}.$$

ЛНЗ как векторы в $\mathbb{R}^n$

Теорема 28 (Лиувиля-Остроградского)**.**

$$W(t) = W(t_0)e^{\int\limits_{t_0}^{t} a_{n-1}(s)ds}.$$

Теорема 29. *Любые n лнз решеня образуют базис в M^0*