Лекции по математическому анализу 3 семестр

1 Функции нескольких вещественных переменных

$$X \subset \mathbb{R}^n.$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X.$$

$$x \to f(x).$$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2.$$

$$z = x^2 + 3y.$$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

2 Замкнутый промежуток в n-мерном пространстве

$$a = (a_1, \ldots, a_n).$$

$$b = (b_1, \ldots, b_n).$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n).$$

$$\forall i \; 1 \leq i \leq n \; a_i \leq x_i \leq b_i.$$

3 Окрестность

Окрестность точки – открытый шар с центром в этой точке

4 Внутренняя точка

$$X \subset \mathbb{R}^n.$$

$$a \in \mathbb{R}^n.$$

а называется внутренней точкой множества X, если $\exists r B(a, r) \subset X$

5 Внешняя точка

а называется внешней точкой по отношению к множеству X, если $\exists B(a, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus X$.

6 Граничная точка

Если любая граница точки содердит точки и из множества и не оттуда.

7 Обозначения шаров

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, a) < R\}.$$

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, a) \leq R\}.$$

Множество называется открытым, если всего его точки внутренние

8 Открытое множество

Множество A открыто в X, если

$$A = X \cap U.$$

U - открытое множество

Теорема 1. *Пересечение двух открытых множеств является открытым.*

Proof. Надо доказать, что все точки $U \cap V$ внутренние.

$$a \in X.$$

a внутренняя точка множетсва U, значит $\exists r_1\ B(a, r_1) \subset U$
a внутренняя точка множетсва V, значит $\exists r_2\ B(a, r_2) \subset V$

$$r = \min r_1, r_2.$$

$$B(a, r) \subset U \cap V.$$

$\square$

Теорема 2.

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}.$$

$$U_\alpha \in R^n.$$

пусть $\forall \alpha\ U_\alpha$ *открытое тогда* $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ *открыто*

Теорема 3.

$$F \subset \mathbb{R}^n.$$

F *- замкнуто* $\iff$ $\mathbb{R}^n \setminus F$ *- открытое*

Теорема 4. 1. *пересечение любого числа замкнутых множеств являкется замкнуть*

2. *объединение конечного числа замкунтых множеств замкнуто*

Proof.

$$U_\alpha = \mathbb{R}^n \setminus F_\alpha.$$

Оно открытое

$$\mathbb{R}^n \setminus (\bigcap F_\alpha) = \cup(R_n \setminus F_\alpha) - -.$$

□

9 Замыкание

Определение 1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Замыкание X, $\overline{X}$ наименьшее замкнутое множество, в котором лежит X.*

$$B(a, r).$$

$$\forall b \in B(a, r).$$

$$r_1 = r - d(a, b).$$

Рассмотрим $B(b, r_1)$, докажем, что $B(b, r_1) \subset B(a, r)$

$$\forall x \in B(b, r_1).$$

Нужно доказать, что $x \in B(a, r)$

$$d(x, a) < R.$$

Итак, $d(x, a) \leq d(x, b) + d(a, b)$

$$d(x, a) \leq d(x, b) + r - r_1.$$

10 Компактно

Определение 2.

$$X \subset \mathbb{R}^n.$$

X компактно, если замкнуто и ограничено

Определение 3. *Множетсво ограничено, если лежит в неком шаре.*

11 Предел в $\mathbb{R}^n$

Определение 4.

$$(x_n \to a).$$

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \, \forall n \geq n_0 d(x_n, a) \leq \epsilon.$$

Теорема 5 (о покоординатной сходимости). $(x^{(n)})$ – *последовательность точек в* $\mathbb{R}^n$*,* $a \in \mathbb{R}^n$

$$x^{(n)} \to a \iff x_k^{(n)} \to a_k.$$

Proof. Для случая $n = 2$

$$(x_n, y_n), (a, b).$$

$$|x_n - a| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}.$$

$$|y_n - b| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2}.$$

□

12 Упражнения

1. Пусть множество X замкнуто, тогда оно содержит все свои предельные точки. Верно ли обратное

13 Предел функции n переменных

$$X \subset \mathbb{R}^n.$$

$$V = abc.$$

$$X = \{(a, b, c) | a > 0, b > 0, c > 0\}.$$

$$x + y^2 + z^3 = 1.$$

Определение 5.

$$X \subset \mathbb{R}^n, f : X \to \mathbb{R}.$$

$$a \in \mathbb{R}^n.$$

a предельная точка множества X

$$A = \lim_{x \to a} f(x).$$

если

$$\forall (x^{(n)}) \begin{cases} (x^{(n)}) \in X \\ x^{(n)} \neq a \\ x^{(n)} \to a \end{cases}.$$

$$f(x^{(n)}) \to A.$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 d(x, a) < \delta \implies |f(x) - A| < \epsilon.$$

Теорема 6 (Вейрештрасса)**.** *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n, f : X \to \mathbb{R}$. f непрерывна на X f принимает на X наименьшее и наибольшее значение*

14 Теоремы о непрерывных функциях

14.1 Связанное множество

Определение 6. *Путь в $\mathbb{R}^n$ – набор непрерывных функций $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ заданных на $[a, b]$*

Точка $x(a)$ называется началом пути. $x(b)$ конечная точка пути. Множество всех точек $x(t), t \in [a, b]$ носитель пути.

Определение 7. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. X называется связанным, если для любых точек $p, q \in X$ существует путь с началом p , концом q, носитель которого лежит в X*

15 Теорема Вейрштрасса

Теорема 7. *Пусть X – компактное подмножество $\mathbb{R}^n$, f функция заданная на X, и непрерывная во всех точках множества X. Тогда f принимает и наибольшее и наименьшее значение.*

Proof. Случай для $n = 1$

$$\forall x f(x) \neq M.$$

$$f(x) < M.$$

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq C.$$

$$M - f(x) \geq \frac{1}{C}.$$

$$M - \frac{1}{C} \geq f(x).$$

Пусть нет наибольшего значения

$$\exists x_1 f(x_1) > 1.$$

Исходный промежуток δ_1

$$\delta_1 \supset \delta_2.$$

$$x_2 \in \delta_2.$$

$$f(x_2) > 2.$$

$$f(x_n) > n.$$

$$\bigcup \delta = \{a\}.$$

$$x_n \to a.$$

$$x_n \in \delta_n, a \in \delta_n.$$

$$|\delta_n| = \frac{|\delta_1|}{2^{n-1}}.$$

$$|x_n - a| < \frac{|\delta_1|}{2^{n-1}} \to 0.$$

$$x_n \to a.$$

$$f(x_n) \to f(a).$$

Неограниченная посл чисел стремится к числу, какакя-то хуйня такого не бывает.

Теперь для функции 2 переменных Докажем что f ограничена сверху. Предположи это неправда, тогда $\exists x^{(1)} \in \Delta_1 \cap X, f(x^{(1)}) > 1$

$$\exists x_2 \in \Delta x_2 \cap X.$$

f неограниченна на $\Delta_2 \cap X, f(x^2) > 2$ по лемме 8 $\bigcap \Delta = \{a\}$ состоит из одной точки. Тогда последовательность $x^{(n)} \to a$

$$x^{(n)} \in \Delta.$$

$$d(x^n, a) \leq \sqrt{2}\text{размер}\Delta_n.$$

Дальше как и для функции одной переменной. □

Лемма 8 (О вложенных отрезках)**.**

$$n = 2.$$

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1, x_1 \in [a_1, b_1].$$

$$a_2 \leq x_2 \leq b_2, x_2 \in [a_2, b_2].$$

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2].$$

Дана последовательность вложенных замкнутых n мерных промежутков

$$\mathit{\Delta}_1 \supset \mathit{\Delta}_2 \supset .$$

$d(\mathit{\Delta})$ *- длина наибольшей стороны*

$$d(\mathit{\Delta}_n) \to 0.$$

Тогда в пересечение одна точка

Proof. Спроектируем все промежутки на ось абцисс, мы получим последовательность замкнутых вложенных промежутков, лежаших впромежутке $[a_1, b_1]$ таких что длины этих прожетков стремятся к 0, пересечение таких промежутков состоит из 1 точки α_1 Анлогично спроектировали эти промежутки на ось ординат, получили последовател замкнутых вложенных промежутков лежаших в $[a_2, b_2]$ по лемму о вложенных промежутках их пересечение состоит из одной точки α_2 Рассмотрим точку с координата α_1, α_2 □

16 Теорема Больцано

Теорема 9. *Пусть X связное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, пусть f непрерывная функция, заданная на X. Пусть p, q значения функции f, причем $p < q$. Тогда* $\forall r \in (p, q) \exists x \in X$, $f(x) = r$

17 Множество уровня

$$f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

$$f(x_1, \ldots, x_n).$$

$$\{x \mid x \in X, f(x) = c\}.$$

18 Дифферинцирование нескольких переменных

Определение 8 (Производная по направлению)**.**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + l_1 h, y_0 + l_2 h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Пусть $\vec{l} = (0, 1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

частная производная по x

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Определение 9 (Градиент)**.**

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial x}).$$

Определение 10 (точка экстренума (максимума))**.** (x_0, y_0) *- точка максимума, если* $\exists$ *окретсность U,* $\forall x \in U \ f(x) < f(x_0)$

Теорема 10 (Ферма)**.**

$$X \subset \mathbb{R}^2.$$

$$f : X \to \mathbb{R}.$$

(x_0, y_0) *внутренняя точка X. Пусть* $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x_0$

18.1 Пример

$$f(x, y) = x^2 + 2xy.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x = 0.$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

$$f(0, 0) = 0.$$

19 Условный экстренум

$$f(x_0+h)-f(x_0)f'(x_0)h+o(h).$$

Определение 11 (Дифференцируемость функции)**.**

$$f(x_0+h)-f(x_0)=ch+o(h).$$

Теорема 11 (О полном приращении)**.** *Пусть функция f задана на $X \subset \mathbb{R}^2$, а внутренняя точка X, $a=(x_0,y_0)$. Пусть f имеет частную производную во всех точках в некоторой окрестности точки a. Пусть эти частные производные непрерывны в точке а. Тогда вблизи точки а имеет место*

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\partial_x f(x_0,y_0)(x_0-y_0)+\partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)+\alpha(x,y)(x-x_0)+\beta(x,y)(y-$$

α,β *бесконечно малые в* (x_0,y_0)
Обозначим $h=x-x_0, k=y-y_0$

$$f(x_0+h)+g(x_0+k)=\partial_x f(x_0,y_0)h+\partial_y f(x_0,y_0)k+\alpha(h,k)h-\beta(h,k)k.$$

α,β *бесконечно малые в* $(0,0)$

Proof.

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=(f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k))+(f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0).$$

$$g(x)=f(x,y_0+k).$$

$$g(x_0+h)-g(x_0).$$

По теореме Лагранжа

$$g(x_0+h)-g(x_0)=g'(c)h=\partial_x f(c,y_0+h)h.$$

$$g(y)=f(x_0,y).$$

$$g(y_0+k)-g(y_0)=g'(d)k=\partial_y g(x_0,d)k.$$

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=.$$

$$\partial_x f(x_0,y_0)h+\partial_y f(x_0,y_0)k+(\partial_x f(x,y_0+k)-\partial_x f(x_0,y_0))h+(\partial_y f(c,y_0+k)=\partial_y f(x_0,y_0))k$$

□

Определение 12 (Дифференцируемость функции нескольких переменных)**.** *Пусть* $f : X \to \mathbb{R}$*,* $X \subset \mathbb{R}^2, a=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ *внутренняя* f *дифференцируема в точке* a *, если ,* $\exists A, B \in \mathbb{R}$ *и функции* $\alpha(x,y), \beta(x,y)$ *бесконечно малые в* (x_0,y_0) *и вблизи* (x_0,y_0) *имеет место равенство*

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+\alpha(x,y)(x-x_0)+\beta(x,y)(y-y_0).$$

Теорема 12. *Если f дифференцируема в* (x_0,y_0)*, то* $A=\partial_x f(x_0,y_0)$ *,* $B=\partial_y f(x_0,y_0)$

Proof. Подставим $y=y_0$

$$f(x,y_0)-f(x_0,y_0)=A(x-x_0)+\alpha(x,y_0)(x-x_0).$$

$$\forall x\neq x_0.$$

$$\frac{f(x-y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=A+\alpha(x,y_0).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0}(A+\alpha(x))=A.$$

□

Теорема 13.

$$f:X\to\mathbb{R}, a=(x_0,y_0)\in X, \vec{l}=(l_1,l_2), ||l||=1.$$

Пусть f дифференцируема в точке a, тогда $\exists\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}(a)$

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}(a)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)l_1+\frac{\partial f}{\partial y}(a)l_2.$$

$$\text{grad}\, f_{(x_0,y_0)} = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)).$$

Proof.

$$f(x_0 + hl_1, y + kl_2) - f(x_0, y_0) = .$$

□

20 Направление наибольшего возрастания функции

$$-||\vec{a}, \vec{b}|| \leq |(\vec{a}, \vec{b})| \leq ||\vec{a}||||\vec{b}||.$$

$\vec{l}$ направление наибольшего возрастания, если $\vec{l} = \frac{1}{||\,\text{grad}(f(x_0,y))||}\,\text{grad}(f(x_0, y_0)$

21

$$y'(3y^2) + y' + 1 = 0.$$

$$y'(3y^2 + 1) = -1.$$

$$y' = -\frac{1}{3y^2 + 1}.$$

$$y^3(-2) + y(-2) - 2 = 0.$$

$$y(-2) = 1.$$

22

$$y^2 + y - x = 0.$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4x}}{2}.$$

Теорема 14.

$$f : X \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

X – открытое множество.

$$x, y : I \to \mathbb{R}.$$

I – открытый промежуток

$$t \in T.$$

$$t \to x(t).$$

$$t \to y(t).$$

$$F(t) = f(x(t), y(t)).$$

Пусть $x(t), y(t)$ *дифференцируемы в точке* t_0*из I, f дифференцируема в точке* $(x(t_0), y(t_0))$

$$F'(t_0) = \partial_x f(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + \partial_y(x(t_0), y(t_0))y'(t_0).$$

Proof.

$$F'(x_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}.$$

$$F(t) - F(x_0) = f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0)).$$

□

Теорема 15.

$$f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

X - открытое множество, f дифференцируема на X*. Пусть* $(x_0, y_0), (x, y) \in X$

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \partial_x f(c_1, c_2)(x - x_0) + \partial_y f(c_1, c_2)(y - y_0).$$

Proof.

$$f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) - f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0).$$

□

Следствие 15.1. *Пусть X выпуклое. Пусть* $\partial_x f, \partial_y f$ *тождественно равны 0. Тогда f постоянна*

Следствие 15.2. *Пусть X область (открытое связное множество)*

23 К. 3.60

23.1

$$3u^2\partial_x u + 3y(u + x\partial_x u) = 0.$$

$$y^2\partial_x u + yu + yx\partial u = 0.$$

$$\partial_x u(u^2 + xy) = -yu.$$

$$3u^2\partial_y x.$$

23.2

$$\partial_x u e^u - y(x + x\partial_x u) = 0.$$

$$e^{u(1,0)} = 2.$$

$$u = \ln 2.$$

$$\partial_x u(e^u - yx) - yx = 0.$$

$$2\partial_x u = 0.$$

24

$$u + \ln(x + y + u) = 0.$$

$$u_x'(1 + u_x')\frac{1}{x + y + u} = 0.$$

$$u_y' + (1 + u_y')\frac{1}{x + y + u} = 0.$$

$$u_x' + \frac{1}{x + y + u} + \frac{u_x'}{x + y + u} = 0.$$

$$(1+\frac{1}{x+y+u})u'_x=-\frac{1}{x+y+u}.$$

$$u(1,-1)+\ln u(1,-1)=0.$$

$$t=u(1,-1).$$

$$t+\ln t=0.$$

25 Теорема о неявной функции

Теорема 16. *Пусть* $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$*,* U *окретсность точки* (x_0,y_0)*, пусть функция* $F:U\to\mathbb{R}$ *Пусть выполняются условия*

1. F *непрерывно дифференцируема в* U
2. $F(x_0,y_0)=0$
3. $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$

Тогда существует открытый промежуток $I_x\times I_y$*,* I_x *окретсность* x_0*,* I_y *окрестность* y_0

$$I_x=\{x||x-x_0|<\alpha\}.$$

$$I_y=\{y\mid |y-y_0|<\beta\}.$$

Которые лежат в U *и* $\exists f$ *заданная на* I_x *принимающая значения* I_y*, такая что* $f\in C^1(I_x)$ *(непрерывно дифференцируема на* I_x*),* $F(x,y)=0\iff y=f(x)$*, для* $x\in I_x$*,* $f'(x)=-\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))},\forall x\in I$

Proof. Пусть F непрерывно дифференцируема, т.е F'_x,F'_y непрерывны в (x_0,y_0), то $F'_y(x,y)>0$ для (x,y) вблизи (x_0,y_0). Рассмотрим $F(x,y_0-\beta$

$$\forall x\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)F(x,y_0-\beta)<0.$$

$$F(x_0,y_0+\beta)>0.$$

то сущестует $\alpha_2 \forall x \in (x_0 - \alpha_2, x_0 + \alpha_2), F(x, y_0 + \beta) > 0$ Пусть $\alpha = \min \alpha_1, \alpha_2$
Итак м построили $I_x \times I_y, I_x = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha), I_y = (x_0 - \beta, x_0 + \beta)$

$$F'_y(x, y) > 0, (x, y) \in Y.$$

F возрастает значит существует единственное значени y, такое что $F(x, y) = 0$
Нужно доказать, что f дифференцируема $(x_0 - \alpha; x + \alpha)$ $\square$

25.1 Пример

$$x^2 +^2 -1 = 0.$$

$$\exists U(x_0, y_0).$$

$$F(x, y) = 0.$$

Данная функция дифференциуема в точке (x_0, y_0)

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = \partial_x F(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y F(x_0, y_0)(y - y_0) + \dots.$$

$$(x_0, y_0) \in C.$$

$$\frac{\partial_x F(x_0, y_0)}{\partial_y F(x_0, y_0)} + \frac{y - y_0}{x - x_0} = 0.$$

26 К 62

$$u'_x - 4u - 4xu'_x = 0.$$

$$u'_y - 4xu'_y + 2y = 0.$$

$$u^3(1, -2) - 4u(1, -2) = 0.$$

$$u(1, -2) \in \{0, 2, -2\}.$$

27 Достаточное условие строгого экстренума

Теорема 17.

$$x^0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}.$$

$$U(x^{(0)}) - \textit{Окрестность}.$$

$$f : U(x^{(0)}) \to \mathbb{R}.$$

Пусть

$$f \in C^{(2)}(U(x^{(0)})).$$

По формуле Тейлора

$$f(x^{(0)} + h) = f(x^{(0)}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) h_i h_j + o(||h||^2).$$

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) h_i h_j.$$

Тогда

1. *если $Q(h)$ положительно определена, то $x^{(0)}$ точка строгого минимума.*
2. *Если $Q(h)$ отрицательно определена, то $x^{(0)}$ точка строгого максимума*
3. *если $Q(h)$ принимает значения разных знаков, то $x^{(0)}$ не является точкой экстренум*

Proof. 1. Пусть $h \neq 0$, x_0 критическая точка

$$f(x^{(0)}) + ||h^2||(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})(x_0)(\frac{h_i}{||h||}\frac{h_j}{||h||} + \alpha(h)).$$

$$\frac{t_i}{||h||} = t_i.$$

$$\sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} * t_i * t_j.$$

$$||t||\text{- } n\text{мерная сфера радиуса } 1.$$

Это множество компанктно

По т Вейрштрасса эта квадратичная форма принимает наибольшее и наименьшее значение

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} t_i t_j.$$

обозначили их m, M

$$0 < m \leq M.$$

Принимает наименьшее значение равное $\frac{1}{2}m$, тк $\alpha(h)$ бесконечное малое для всех h достаточно близких к 0 $|\alpha(h)| < 0$

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n}.$$

Следовательно для всех таких h

$$f(x_0^{(0)} + h) > f(x^{(0)}).$$

следовательно x^0 точка минимума

2. Аналогично

3. Пусть e_m та точка единичной сферы, в которой квадратичная форма принимает наименьшее значение

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x^{(0)}) t_i t_j.$$

e_M наибольшее значение. Хочу доказать, что в любой окружность $x^{(0)}$ есть значения и больше и меньше.

$$h = \lambda e_m.$$

$$f(x^0 + \lambda e_m) - f(x^{(0)}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x^{(0)}) \lambda\alpha_i \lambda\alpha_j + \alpha(||\lambda e_m||^2) = \frac{1}{2} \lambda^2 (\sum_{i,j}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$$

$\square$

28 Ищем критические точки на границах

Пусть (x_0, y_0) тогда экстренум $f(x,y)$ кривой $g(x,y) = 0$. Тогда $(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y$
колинерен $(g'x(x_0,y_0), g'_y(x_0,y_0))$

$$g(x,y) = 0 \implies y = \phi(x).$$

$$f(x,\phi(x))' = f'_x(x,\phi(x)) + f'_y(x,\phi(x))\phi'(x) = f'_x(x,\phi(x)) - f'_y(x,\phi(x))\frac{g'_x(x,\phi(x))}{g'_y(x,\phi(x))} = 0.$$

$$\frac{f'_x(x,\phi(x))}{f'_y(x,\phi(x))} = \frac{g'_x(x,\phi(x))}{g'_y(x.\phi(x))}.$$

29 Задача лагранжа

Есть кривая, есть функция

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(y).$$

$$L'_x = f'_x - \lambda g'_x = 0.$$

$$L'_y = f'_y - \lambda f'_y = 0.$$

$$L'_\lambda = -g(x,y) = 0.$$

30 Интеграл фнп

Определение 13 (Разбиение промежутка)**.** *Рассмотрим произвол*

Определение 14 (Интегральные суммы)**.** *Пусть* $I = [a,b] \times [c,d]$. *Рассмотрим произвольное разбиение отрезка* $[a,b] : a < x_1 < \dots < x_{n-1} < b$*, произвольное разбиение отрезка* $[c,d] : c < y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < d$. *Рассмотрим*

$$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j].$$

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

$$\mu_j \in [y_{j-1}, y_j].$$

$$(\xi_i, \mu_j) \text{оснащенное разбиение}.$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

$$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}.$$

$$S(f, (\tau, \xi)) = \sum f(\xi_i, \mu_j) \Delta x_i \Delta y_j.$$

30.1 Свойства интегральных сумм

1. $$S(\alpha f, (\tau, \xi)) = \sum \alpha f(\xi_i, \mu_j) \Delta x_i \Delta y_j.$$

2. $$f, g : I \to \mathbb{R}^2.$$

$$S(f + g, (\tau, \xi)) = \sum f(\xi_i, \mu_j) \Delta x_i \Delta y_j + g(\xi_i, \mu_j) \Delta x_i \Delta y_j.$$

3. $$f(x, y) \leq g(x, y) \forall x, y.$$

$$S(f, \tau, \xi) \leq S(g, \tau, \xi).$$

$$\lambda(\tau, \xi) - \text{наибольшая из сторон прямоугольника.}$$

Определение 15. *пусть функция f задана на двумерном промежутке* Π. *Число* I *называется интегралом по промежутку* Π, *если для любой последовательнсоти оснащенных разбиений, последовательность рангов стремится к 0 последоватлеьност частичных сумм стремится к* I

Теорема 18. *Если функция интегрируема, то она ограничена*

Proof. Пусть функция не ограничена сверху □

$$\int_{\Pi} f.$$

$$\int_\Pi f(x,y)dxdy.$$

$$\sum_{i=1,\dots n, j=1\dots m}.$$

31

$$\Delta_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j].$$

Ранг разбиения – наибольшая из длин промежутка разбиения.

Определение 16 (Оснащенное разбиение)**.** *Оснащенное разбиение - это разбиение в каждом промежутке которого выбрано по точке.*

$$(\tau, \xi).$$

Определение 17. *Пусть функция задана на промежутке* Π *пусть* (τ, ξ) *оснащенное разбиение промежутка Интегральной суммой функции* f *построенной для разбиение* (τ, ξ) *называется число*

$$S(f, (\tau, \xi)) = \sum_{i=1\dots n, j=1\dots m} f(\xi_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Определение 18 (Множество меры нуль)**.** *Пусть* $X \subset R^2$ *x имеет меру нуль, если* $\forall \epsilon > 0 \exists$ *последовательность промежутков* $\Pi_1, \Pi_2, \dots$

$$X \subset \bigcap \Pi.$$

сумма площадей этих P *меньше* ϵ

31.1 Упражнение

$$\cap, \cup, \setminus.$$

множетсв меры нуль есть множетсво меры нуль

$$A \subset B.$$

В имеет меру нуль, значит А имеет меру нуль

31.2 Упражнение

$$\partial.$$

граница

1. $\partial(A \cup B) \subset \partial(A) \cap \partial(B)$

31.3 Интеграл по промежутку

Пусть $(\tau^{(n)}, \xi^{(n)})$ последовательность оснащенных разбиений. Будем говорить, что эта последовательность измельчающаяся, если последовательность рангов

$$\lambda(\tau^{(n)}, \xi^{(n)}) \to 0.$$

Определение 19. *Пусть функция задана на промежутке* Π. *Функция* f *называется интегрируемой если*

$$\exists I \forall \textit{ измельчающийся последовательности} (\tau^{(n)}, \xi^{(n)}).$$

$$S(f, (\tau^{(n)}, \xi^{(n)})) \to I.$$

Если f интегрируема на множетстве Π I называется интегралом по промежутку P

$$I = \int\limits_{\Pi} f.$$

Другие обозначения

$$\int\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy.$$

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy.$$

$$\int\limits_{\Pi} f(x)dx \text{ x - вектор.}$$

31.4 Пример

$$\Pi = [a,b] \times [c,d].$$

$$f(x,y) = C.$$

$$\int\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = C(b-a)(d-c).$$

31.5 Пример

$$\Pi = [0,1] \times [0,1].$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, \text{хотя бы одно число иррационально} \\ 1, \text{оба рациональные} \end{cases}.$$

Докажем, что эта функция неинтегрируема Сравним два разбиения. Первое оснащение $\xi_{i,j}$ обе координаты рациональны, второе оснащение ξ'_{ij} одна из координат которых рациональна. Тогда

$$S(f,(\tau^{(n)},\xi_{ij})) = 1.$$

$$S(f,(\tau^{(n)},\xi')) = 0.$$

Множество всех интегрируемых функций на Π , $R(\Pi)$

31.6 Простейшие свойства интегралов

1.
$$\int\limits_{\Pi} \alpha f = \alpha \int\limits_{\Pi} f.$$

2. $f, g \in R(\Pi) \implies f + g \in R(\Pi)$

3. $f, g \in R(\pi) f \leq g \implies \int\limits_{\Pi} f \leq \int\limits_{\Pi} g$

4. $f \in R(\Pi) \iff$ множество точек разрыва имеет меру нуль

31.7 Допустимое мноежство

Определение 20. *Множество D называется допустимым, если его граница ∂D имеет меру 0*

31.7.1 Замечание

Множество D допустимо $\iff$

$$\forall \epsilon > 0 \exists M, N.$$

$M \subset D \subset N$, площаль N - площаль $M < \epsilon_2$

31.8 Определение интеграла по допустимому множеству

Лемма 19. *Пусть D допустимое множество, f функция заданная на D, пусть Π_1, Π_2*

$$D \subset \Pi_1, D \subset \Pi_2.$$

Рассмотрим функции $\overline{f_1}$

$$\overline{f_1} = \begin{cases} f(x,y), x \in \Pi_1 \\ 0, x \notin \Pi_1 \end{cases}.$$

$$\overline{f_2} = \begin{cases} f(x,y), x \in \Pi_2 \\ 0, x \notin \Pi_2 \end{cases}.$$

Тогда

$$\int\limits_{\Pi_1} \overline{f_1} = \int\limits_{\Pi_2} \overline{f_2}.$$

Proof. Рассмотрим $\Pi = \Pi_1 \cap \Pi_2$

$$\exists \int\limits_{\Pi} f \iff \exists \int\limits_{\Pi_1} f.$$

$$\overline{f(x,y)} = \begin{cases} f(x,y), (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \notin D \end{cases}.$$

$\overline{f}$ интегрируема на $\Pi \iff$ множество точек разрыва имеет меру 0,

$\overline{f_1}$ интегрируемо на $\Pi_1 \iff$ множество ее точек разрыва имеет меру 0. Докажем

$$\int\limits_{\Pi_1} \overline{f_1} = \int\limits_{\Pi} \overline{f}.$$

Тогда для вычисления интеграла можно рассмотреть какую нибудь одну измельчающую последовательность оснащенных разбиений. Тогда интегральная сумма каждого такого разбиения, совпадает с некоторой интегральной суммой функции □

Определение 21. *Пусть функциия f задана на допустимом множестве D, пусть Π произвольный промежуток, такой что $D \subset \Pi$ рассмотрим функцию $\overline{f}$ заданную на Π*

$$\overline{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), (x,y) \in D \\ f(x,y), (x,y) \notin D \end{cases}.$$

Функция f назывется интегрируемой на Π, и интеграл функции f по множеству D называется $\int\limits_{\Pi} \overline{f}$

31.9 Свойства интеграла по произвольному допустимому множеств

1. $f \in R(D) \iff \alpha f \in R(D) \wedge \int\limits_D \alpha f = \alpha \int\limits_D f$

2. $f, g \in R(D) \iff f + g \in R(D) \wedge \int\limits_D (f+g) = \int\limits_D f + \int\limits_D g$

3. $f \leq g$ на D $\iff \int\limits_D f \leq \int\limits_D g$

4. Пусть множество D имеет меру нуль, тогда $\int\limits_D f = 0$

5. Пусть D допустимое множество, $f, g \in R(D)$, пусть множество точек из D в которых $f(x,y) \neq g(x,y)$ имеет меру нуль, тогда $\int\limits_D f = \int\limits_D g$

Proof. 1. Самостоятельно

2. Пусть A множество точек разрыва f, B множество точек разрыв g. Множество точек разрыва $f+g$ лежит в $A \cup B$

$$\int\limits_D (f+g) = \int\limits_\Pi \overline{f+g} = \int\limits_\Pi \overline{f} + \int\limits_\Pi \overline{g}.$$

□

32 Доказательство свойства 4

Пусть $f \in R(D)$ Множество D имеет меру 0, тогда $\int\limits_D f = 0$

$$D \subset \Pi.$$

$$\overline{f} = \begin{cases} f(x,y), (x,y) \in D \\ 0, (x,y) \notin D \end{cases}.$$

$$\int\limits_D f = \int\limits_\Pi \overline{f} = \lim S(\overline{f}, (\tau^{(n)}, \xi^{(n)})).$$

для которых $\lambda(\tau^{(n)}) \to 0$
Известно, что $\overline{f} \in R(\Pi)$, то последовательность оснащенных разбиений, моно выбирать как хотим. D имеет меру нуль, то для кадого $t^{(n)}$ в любом промежутке разбиения. В прямоугольник Δ_{ij} выберем точку $\xi_{ij} \notin D$ Тогда

$$S(\overline{f}, (\tau^{(n)}, \xi^{(n)})) = \sum_{i,j} f(\xi_{ij})\text{площ}\Delta_{ij} = 0.$$

33 Доказательство свойства 5

$$f, g \in R(D).$$

Множество точек, где $f(x,y) \neq g(x,y)$ имеет меру нуль, то

$$\int\limits_D f = \int\limits_D g.$$

$$\int\limits_D f = \int\limits_D g \iff \int\limits_D (f - g) = 0.$$

34 Аддитивность

пусть D_1, D_2 допустимые множества

1. $D_1 \cup D_2$, $D_2 \cap D_1$ допустиыме множесва
2. $f \in R(D_1 \cup D_2) \iff f \in R(D_1), \in R(D_2) \implies f \in R(D_1 \cap D_2)$
3. $\int\limits_{D_1 \cup D_2} f = \int\limits_{D_1} f + \int\limits_{D_2} f - \int\limits_{D_1 \cap D_2} f$
4. Если $D_1 \cap D_2$ имеет меру 0, то

$$\int\limits_{D_1 \cup D_2} = \int\limits_{D_1} f + \int\limits_{D_2} f.$$

34.1 Доказательство

$$\partial(D_1 \cup D_2) \subset \partial D_1 \cup \partial D_2.$$

1.

2.

$$f \in R(D_1 \cup D_2) \iff D_1 \cup D_2 \text{ Допустимо.}$$

и множестсво точек разрыва имеет меру нуль

$$\begin{cases} f \in R(D_1) \\ f \in R(D_2) \end{cases} \iff \begin{cases} D_1, D_2 - -\text{Допустимы} \\ \text{Множество всех точек разрыва имеет меру нуль} \end{cases}.$$

3. Рассмотрим прямоугольник, содержащий как D_1, так и D_2 Строим следущие функции, $\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}, \overline{f}$

$$\overline{f} = \begin{cases} f, \text{на } D_1 \cup D_2 \\ 0 \end{cases}.$$

$$\overline{f_1} = \begin{cases} f, \text{на} D_1 \\ 0 \end{cases}$$

$$\overline{f} = \overline{f_1} + \overline{f_2} - \overline{f_3}.$$

Пусть $(x, y) \in \Pi$

(a) $(x, y) \notin D_1 \cap D_2$ все функции 0

(b) $(x, y) \in D_1 \wedge (x, y) \notin D_2$

$$\overline{f}(x, y) = f(x, y).$$

$$\overline{f_1(x, y)} = f(x, y).$$

$$\overline{f_2(x, y)} = 0.$$

$$\overline{f_3}(x, y) = 0.$$

Равенство выполнилось

$$\int\limits_{D_1 \cup D_2} f = \int\limits_{\Pi} \overline{f} = \int\limits_{\Pi} (\overline{f_1} + \overline{f_2} - \overline{f_3}) = \int\limits_{D_1} f + \int\limits_{D_2} f - \int\limits_{D_1 \cup D_2} f.$$

4.

35 Вычисление двойного интеграла

Пусть $f : \Pi \to \mathbb{R}$

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x,y)dy.$$

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{a}^{b} f(x,y)dx.$$

36

$$\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y^2}^{y+2} f(x,y).$$

37 Замечание