Лекции по математическому анализу 3 семестр

1 Функции нескольких вещественных переменных

$$X \subset \mathbb{R}^n.$$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X.$$

$$x \to f(x).$$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2.$$

$$z = x^2 + 3y.$$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

2 Замкнутый промежуток в n-мерном пространстве

$$a = (a_1, \ldots, a_n).$$

$$b = (b_1, \ldots, b_n).$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n).$$

$$\forall i \; 1 \leq i \leq n \; a_i \leq x_i \leq b_i.$$

3 Окрестность

Окрестность точки – открытый шар с центром в этой точке

4 Внутренняя точка

$$X \subset \mathbb{R}^n.$$

$$a \in \mathbb{R}^n.$$

а называется внутренней точкой множества X, если $\exists r B(a, r) \subset X$

5 Внешняя точка

а называется внешней точкой по отношению к множеству X, если $\exists B(a, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus X$.

6 Граничная точка

Если любая граница точки содердит точки и из множества и не оттуда.

7 Обозначения шаров

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, a) < R\}.$$

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, a) \leq R\}.$$

Множество называется открытым, если всего его точки внутренние

8 Открытое множество

Множество A открыто в X, если

$$A = X \cap U.$$

U - открытое множество

Теорема 1. *Пересечение двух открытых множеств является открытым.*

Proof. Надо доказать, что все точки $U \cap V$ внутренние.

$$a \in X.$$

а внутренняя точка множетсва U, значит $\exists r_1 \; B(a, r_1) \subset U$
а внутренняя точка множетсва V, значит $\exists r_2 \; B(a, r_2) \subset V$

$$r = \min r_1, r_2.$$

$$B(a, r) \subset U \cap V.$$

$\square$

Теорема 2.

$$\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}.$$

$$U_\alpha \in R^n.$$

пусть $\forall \alpha \; U_\alpha$ *открытое тогда* $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ *открыто*

Теорема 3.

$$F \subset \mathbb{R}^n.$$

F *- замкнуто* $\iff \mathbb{R}^n \setminus F$ *- открытое*

Теорема 4. *1. пересечение любого числа замкнутых множеств являкется замкнуть*

2. объединение конечного числа замкунтых множеств замкнуто

Proof.

$$U_\alpha = \mathbb{R}^n \setminus F_\alpha.$$

Оно открытое

$$\mathbb{R}^n \setminus (\bigcap F_\alpha) = \cup(R_n \setminus F_\alpha) - -.$$

$\square$