Опты

1

Что мы не делали, все что не делается, предполагается что это делается наилучшим образом. Естественное поведение. Что значит наилучшим образом, мы должны установить цель. Эта цель должна быть достигнута наиболее эффективно.

Обычно в экономике это прибыль, быстрая реализация прибыли, минимализация вреда окружающей среде. Мы определяем критерий качества. Критериев может быть несколько. Мы должны выбрать переменные, понять их смысл, чтобы достигнуть максимально эффективно цели.

Окружающий мир ставит рамки (ограничены в финансах, энергии, площадь производства)

Gg Возникает следущая задача – реализовать проект наиболее качественно, не нарушая ограничений.

Нужно составить математическую модель. Не для всякой можно построить математическую модель. Мат модель надо строить аккуратно Определить главные и второстепенные элементы. Главные элементы – ограничения, критерий качества, переменные.

Вся эта бодяга появилась в середине прошлого века. В 38 году появился сиплекс метод (линейное программирование) единственная нобелевка по экономике в СССР. Тогда американцы строили мат модель военных действий, чтоб организовать снабжение максимально быстро (группа исследований военных операций). Задача расстановки радаров чтобы противник не мог подойти. Это первые 3 задачи нашего предмета.

Рассмотрим X – некий кортеж (вектор) переменных. Мы хотим найти X^* который является допустимым (удовлетворяет всем ограничениям) $X^* \in D$ и $f(X^*) \leq f(X)$ или $f(X^*) \geq f(X)$ для $\forall X \in D$, f целевая функция.

$$f(X^*, C) = \text{extr}_{X \in D} f(X, C) \tag{1}$$

Еще более короткая формулировкаа, C набор заданных параметров, которые не варьируются.

$$D = \{X \in \mathbb{R}^N \mid \phi_j(X, C) \leq, =, \geq b_j, j = 1 \dots M \wedge x_i \geq 0, i = 1, \dots N\} \tag{2}$$

ϕ ограничения ресурсов
M число ограничений, N число переменных
Выделяют отдельный класс ограничений, $x \in [a, b]$,$x \ <, > \ C$ геометрические ограничения заменяют $x_i \geq 0$. Так же $M < N$ (число ограничей меньше числа переменных)

1.1 Классификация по способу принятия решений (по инф наполне

1. статические
2. динамические

Мы только статические изучаем

1.2 Классификаия по типу целевой функции и по типу ограничений

1. Целевая функция и ограничения выражаются линейными зависимостями – мы говорим о линейном программировании.
2. Целевая функция квадратична, ограничения линейны – квадратичное программир
3. $f(x) = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_N(x_N)$ – сепарабельное программирование
4. Если переменные целые, то программирование целочисленное

5. Если целевая функция выпуклая, то это выпулкая задача оптимизации

Определение 1 (Унимодальная задача) *Задача у которой один экстренум*

2 Задача безусловной оптимизации

Есть целевая функция

$$F(X), X = (x_1, x_2, \dots, x_N), X \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^N \tag{3}$$

$$U_\epsilon(X), X \in \mathbb{R}^N : 0 < ||X - X'|| - ||\delta X|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_i')^2} < \epsilon \tag{4}$$

$$\delta X = (x_1 - x_1', \dots, x_N - x_N') \tag{5}$$

$$U_\epsilon(X) - \{X + \delta X\}\text{открытый шар} \tag{6}$$

Определение 2 (Точка локального экстремума)

$$\exists U_\epsilon(X^*) : f(X^*) \leq f(X) \textit{ или } f(X^*) \geq f(X) \tag{7}$$

Определение 3 (Локальный минимум максимум) *Значение целевой функции в точке экстремума*

Определение 4

$$X^* : \forall x \in D : f(X^*) \leq f(X) \textit{ или } f(X^*) \geq f(X) \tag{8}$$

$$f^* = \inf_{X \in \mathcal{D}} f(X) < f(X) \tag{9}$$

$$f^* = \sup_{X \in \mathcal{D}} f(X) > f(X) \tag{10}$$

2.1 Постановка задачи оптимизации

Пусть даны:

1. функция f с областью определения $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^N$

2. множество $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^N$

Требуется найти точку $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*) \in \mathcal{D}$ в которой функция достигает экстремального значения те

$$X^* : f(X^*) = \text{extr}_{x \in \mathcal{D}_{\{} \cap X \in \mathcal{D}} f(X) \tag{11}$$

1. Задача на безусловный экстренум $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\{} = \mathbb{R}^N$

2. Задача на условный экстремум

$$\mathcal{D}_{\{} \subset \mathbb{R}^N \tag{12}$$

   или

$$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N \tag{13}$$

$$\mathcal{D}_{\{} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset \tag{14}$$

$$\psi_j(X) \leq (, =, \geq) 0, j = 1 \ldots M \tag{15}$$

$$\mathcal{D} = \{X \in \mathbb{R}^N : \psi_j(X) \leq (, =, \geq)\, 0, j = 1 \ldots M\} \tag{16}$$

$$\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i \in [1, N] \text{или} x_i \geq 0 < i \in [1, N] \tag{17}$$

$$\mathcal{P} = \{X \in \mathbb{R}^N : a_i \leq x_i \leq b_i x_i \geq 0, i \in [k, N]\} \tag{18}$$

$$\mathcal{D} = \{X \in \mathbb{R}^N : \psi_j(X) \leq (, =, \geq)\, 0, j = 1 \ldots M, x \in \mathcal{P}\} \tag{19}$$

Определение 5 (Избыточное ограничение) *Избыточное ограничение является следствием других ограничений*

Может оказаться так что есть целевая функция и набор ограничений. Целевая функция имеет экремум, но он может оказаться за пределами области допустимых значений. Если экстренум на границе, то некоторые ограничения выполняются как строгие равенства, то ресурс соответсвующий этому ограничению называется дефицитным, ограничение активным, если нет равенства ресурс недефицитным, ограниичение пассивное.

Определение 6 (Стационарных точка) *Точка в которой производной равна нулю.*

Теорема 1 (Ферма, необходимое условие экстремума первого порядка) *Пусть функция задана на вещественной оси* $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ *и в некоторой точке* x^* *дифференцируем Если в этой точке локальный экстремум, то* $f'(x^*) = 0$

Доказательство.
$\delta x \geq 0$, $f(x \pm \delta x) = f(x^*) \pm f'(x^*)\delta x + o(\delta x)$
В ряд Тейлора разложили. x^* точка локального минимума

$$f(x - \delta x) - f(x^*) = -f'(x^*)\delta x \geq 0.$$

$$f(x + \delta x) - f(x^*) = -f'(x^*)\delta x \geq 0.$$

$$\begin{cases} f'(x^*) \geq 0 \\ f'(x^*) \leq 0 \end{cases}.$$

$$f(x^*) = 0.$$

Теорема 2 (Ферма, многомерный случай) *Пусть функция* $f(X)$ *задана на* $\mathbb{R}^N$. *Если в точке* X^* *локальный экстремум, то*

$$f'_{x_1} = 0, \dots f'_{x_N} = 0.$$

доказательство
X^* точка локального минимума функции $f(X)$

$$U_\epsilon(X^*).$$

$$f(X^*) \leq F(X).$$

Пример 1

$$f(X) = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^2.$$

$$f'_{x_i} = x_i = 0.$$

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

X^* точка минимума , если все коэфициенты положительные, максимума если отрицательны

Пример 2

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 6x_2^2.$$

$$X^* = (0, 0).$$

На множестве $\{x_1, 0\}$ $f(x_1, 0) = 5x_1^2$ возр

Пример 3

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^3 + (x_2 + 1)^2.$$

Теорема 3 (Необходимое условие экстремума второго порядка) *Пусть функция $f(x)$ задана на $\mathbb{R}$, и дважды непрерывно дифференциуема в некоторой окрестности $\mathcal{U}_\epsilon(x^*)$ Если в точке x^* имеется локальный минимум (максимум), вторая производная бдует неотрицательная (неположительная)*

Доказательство.

$$f(x^* + \delta x) = f(x^*) + f'(x^*)\delta x + \frac{1}{2} f''(x^*)(\delta x)^2 + o((\delta x)^2).$$

$$f(x^* + \delta x) - f(x^*) = \frac{1}{2} f''(x^*)(\delta x)^2.$$

Если x^* точка локального минимуму , то $f''(x^*) \geq 0$

Если x^* точка локального максимума , то $f''(x^*) \leq 0$

Определение 7 (Матрица Гессе)

$$H_{ij}(X) = (f''_{x_i x_j}) \tag{20}$$

Определение 8 *Квадрантная матрица называется положительно определеннойб положительно полоопределенной, отрицательно определенной, отцательно полуопред*

$$Q(X) = XAX'.$$

$Q > 0, Q \geq 0, < 0, Q \leq 0$

Теорема 4 (Критерий Сильвестра) 1. *Если все угловые миноры положительны положительно определенные*

2. *Кс*

Теорема 5 (Необходимое условие экстренума второго порядка) *$f(X)$ задана на $\mathbb{R}^N$, дважды непрерывно дифференцируема в некоторой области $U_\epsilon(X^*)$ если в точке X^* имеет локальный минимум (максимум), то вычисленная в эттой точке матрица гессе неотрицательно (неположительно определена)*

Теорема 6 *Рассмотрим функцию $f(x), x \in \mathbb{R}$ предположм, что x^* стационарная точка, $f'(x^*) = 0$ в окрестности которой существует непрерывная производная второго порядка если в тчоке x^* выполняется условие*

1. *$f''(x^*) > 0, x^*$ точка локального минимума*

2. *$f''(x^*) < 0, x^*$ точка локального максимума*

Теорема 7

Определение 9 *Для функции $f(X)$ определенной на $\mathbb{R}^N$ вектор единичной длины задает*

1. *направление убывания $w^\downarrow \in \mathbb{R}^N$*

2. *направление возрастания $w^\uparrow \in \mathbb{R}^N$*

если при всех достаточно малх $\alpha > 0$ выполняется неравенство

1.

$$f(X' + aw^\downarrow) < f(X').$$

2. $f(X' + \alpha w^{\uparrow} > f(X')$

Теорема 8 *Пусть фукнция $f(X)$ дифференцируема в точке $X' \in \mathbb{R}^N$*

1. *Если вектор $\vec{w} \in \mathbb{R}^N$ удовлетворяет условию*

$$grad\ f(X')\vec{w} <> 0.$$

то $\vec{w}$ принадлежиет множеству направний убываний

$$f(X' + \alpha\vec{w}) = f(X') + grad\ f(X') * a\vec{w} + o(\alpha).$$

3 Классическая задача условной оптимизации

Определение 10 *Задача классическая, если ограничения заданы равенством.*

$$X^* : f(X^*) = \text{extr}_{X \in \mathcal{D}} f(X) \tag{21}$$

Определение 11 *Вектор $v \in \mathbb{R}^N$ задает* ***возможное направление*** *в точке $X \in \mathcal{D}$ на множестве возможных значений, если при всех достаточно малых $\alpha > 0$ точка $X' = X + \alpha v$ принадлежит $\mathcal{D}$,$X' \in \mathcal{D}$*

Множество возможных направлений $\mathcal{V}_X \subseteq \mathbb{R}^N$

Теорема 9 *Если X^* является точкой локального минимума (максимума), то*

$$\mathcal{W}^{\uparrow(\downarrow)} \cap \mathcal{V}_X = \emptyset \tag{22}$$

Пусть 22 неверна, $\mathcal{W}^{\uparrow} \cap \mathcal{V}_X \neq 0$

$$\exists R \in W^{\uparrow}.$$

$$f(X^* + \alpha r) > f(X^*), X^* + \alpha r \in \mathcal{D}.$$

Невозможно смещение из точки локального мин которое приводит к уменьшению целевой функции и не выходит за пределы целевой области

Теорема 10 (Вейерштрасса) *Пусть $\mathcal{D}$ замкунутое ограниченное множество и $f(X)$ непрерывная функция. Тогда на $\mathcal{D}$ существуют точки глобального минимума и максимума*

Если внутренних точек локального экстремума нет, то экстремальное значение может достигаться только на границе области.

Лемма 11 *Если область допустимых значений определямая системо равенств, содержит некоторую точку X' и ее окретсность $U_\epsilon(X'), X' \in \mathcal{D}, U_\epsilon(X') \in \mathcal{D}$, nj*

$$M < n.$$

При этом функции задающие ограничения дифференцируемаые

$$\psi(X' + \delta X) = \psi_j(X') + \text{grad}\psi_j(X')\delta X + o(||\delta X||).$$

$$\psi(X' + \delta X) = \psi(X') = 0.$$

$$\text{grad}\psi_j * \delta X = 0, j = 1 \dots M.$$

Это линейная система уравнений относительно δX Это меньще $N < M$

Лемма 12 *Предположим, что область допустимых значений, содержит хотя бы одну точку, если $M < N$ и якобиан $J(X')$ составленный из функций $\psi_J(X)$ имеет в этой точке ранг, равный M то область Допустимых значений $\mathcal{D}$ вместе со своей точкой X' содержит некоторую непустую окрестность*

$$\psi(X' + \delta X) = grad\, \psi_j(X') * \delta X + o(||\delta X||).$$

В классической задаче оптимизации число ограничений строго меньше числа переменн

Определение 12 *Допустимой окрестностью $U_\epsilon^D(X)$ точки X называется ее окрестн целиком содержащаяся в допустимом множестве $\mathcal{D}$*

4 Метод множителей Лагранжа

Определение 13

$$L(\Lambda, \lambda_0, X) = \lambda_0 f(X) + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \psi_j(X) \tag{23}$$

$$L(\Lambda, \lambda_0, X) = \lambda_0 f(X) - \sum_{j}^{M} \lambda_j \psi_j(X) \tag{24}$$

Теорема 13 (правило множителей Лагранжа) *Пусть в окрестности $U_\epsilon(X^*) \subset \mathcal{D}$ точки $X^* \in \mathbb{R}^N$*

1. *функции $f(X)$, $\psi(X)$, $j = 1 \dots M$ непрерывно диццеренцируемы*
2. *hранг матрцы Якоби в точке X^* равен M*

Если X^* точка локального оптимума задачи то существуют такие неравные одновремено нулю вектор Λ^* и параметр λ_0^* что точка $(\Lambda^*, j_1, X^*$ является стационарн точки задачи на безусловный экстремум

Пусть $X^* \in \mathcal{D}$ точка эстремума задачи X^* стационарная точка Функции Лагранжа, все частные производные равны 0 Нужно рассмотреть 2 случая $\lambda_0 = 0$, $\lambda_0 = 1$, $\lambda_0 \neq 0$ система содержит $N + M$ неизвестных, $\lambda_0 = 0$ $\Lambda = 0$ задачи не имеет смысла

Найдем вторую производную функции Лагранжа

$$H(\Lambda, X) = \begin{pmatrix} 0 & J(X) \\ J^T(X) & L''_{XX}(\Lambda, X) \end{pmatrix} \tag{25}$$

Теорема 14 (Необходимое услове экстремума второго порядка) *Пусть в окрестнос $U_\epsilon(X^*) \subset \mathcal{D}$*

1. *функции $f(X), \psi_j(X), j = 1 \dots M$ дважды непрерывно дифференцируемы*
2. *Ранг матрицы Якоби J равен M*

Тогда X^*

5 Интерпретаця множителей Лагранжа

$$X^* : f(X^*) = \text{extr}_{X \in D} f(X) \tag{26}$$

$$D = \{X \in \mathbb{R}^N \mid \phi_j(X) = b_j\} \tag{27}$$

$$L(\Lambda, X) = f(X) - \sum_{j=1}^{M} \lambda_j(\phi_j(X) - b_j) \tag{28}$$

$$\frac{\partial L(\Lambda, X)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \frac{\partial \phi_j(X)}{\partial_i} = 0 \tag{29}$$

Пусть $X^* = (x_1^*, \dots x_{N)}^*$ является точкой условного экстремума $f(X)$ $f(X^*0, \phi_j(X^*)$ рассматриваем как функции параметров b_j

$$x_i^* = x_1(b_1, \dots, b_M) \tag{30}$$

$$f(X^*) = f(X^*(b_1 \dots b_M)) \tag{31}$$

$$\phi_j(X^*) = \phi_j(X^*(b_1 \dots b_M)) \tag{32}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial b_k}\right|_{X^*} = \sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{X^*} \frac{dx_1}{x_k} \tag{33}$$

5.1 Оценка точности апроксимации

тут рассматриваем точность, из-за разложения в ряд Тейлора

Оценим точность апроксимации $\delta f(X)$

5.2 Анализ чувствительности методом Якоби

$$D = \{X \in \mathbb{R}^N \mid \phi_J(X) = b_j, j = 1 \dots M\} \subset \mathbb{R}^N \tag{34}$$

$$\delta B = (\delta b_1, \dots \delta b_M) \tag{35}$$

$$\text{Rank}\, \mathbf{J}(X) = M \tag{36}$$

$$\delta X = (\delta S, \delta Z) \tag{37}$$

$$\delta f(X) = \mathbf{grad}_S\, f(X)\delta S^T + \mathbf{grad}_Z\, f(X)\delta Z^T \tag{38}$$

$$\delta \phi_j(X) = \delta b_j \tag{39}$$

$$\mathbf{J}(X)\delta S^T + \mathbf{C}\delta S^T \tag{40}$$

$$\delta f(X) = \mathbf{grad}_S\, f(X)\mathbf{J}_0^{-1}(X)\delta B^T + \mathbf{grad}_{(*)}\, f(X)\Delta Z^T \tag{41}$$

$$\delta f(X^*) = \mathbf{grad}_S\, f(X^*)\mathbf{J}_0^{-1}(X^*)\delta B^T \tag{42}$$

$$\frac{\delta f(X^*)}{\delta B^T} = \mathbf{grad}_S\, f(X^*)\mathbf{J}_0^{-1}(X^*) \tag{43}$$

6 Линейное программирование

Целевая функция линейна, ограничения линейные равенства или неравенства.

Пример 4 (Задача о пищевом рационе) *Есть набор питания $P_1, \ldots P_N$, стоимостью $c_1 \ldots c_N$ за единицу продукта. Пусть весовая едтгтца каждого продукта содержит a_{i1} белка, a_{i2} жиров, a_{i3} углеводов, a_{i4}, a_{i5}, a_{i6} Нужно приобрести такое количесвто продуктов, чтоб их стоимость была минимальна, а составленый рацион соедержал $b_j j = 1 \ldots 6$ жиров и прочего (гдето равенства, где то $\leq$)*

Это можно записать в виде таблицы

$$X = (x_1 \ldots x_n) \tag{44}$$

Количества продуктов

$$f(X) = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i \to \min \tag{45}$$

Целевая функция

$$\sum_{i=1}^{N} a_{i1} x_i \geq b_1 \tag{46}$$

Задали ограничения . Естественные ограничения $x_i \geq 0, i = 1 \ldots N$

Пример 5 (Распределение ресурсов) *1. $P_1, P_2, \ldots, P_N$ продукция*

2. $R_1, R_2, \ldots R_M$ *сырье в количестве* $b_1, b_2, \ldots b_M$

3. *стоимость едницы ресурсов* $d_1 \ldots d_M$
   Сколько надо выпустить продукции чтобы получить максимум прибыль

$$f(X) = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i - \sum_{i=1}^{N} \left(c_i - \sum_{j=1}^{M} a_{ji} dj \right) x_i \to \max \tag{47}$$

Пример 6 (Загрузка оборудования) *Есть три типа станков* N_1, N_2, N_3 *станки производят 6 видов продукции* $P_j, j = 1 \ldots 6$. P_j *приносит доод* c_j. *План* $\geq b_j$ *продукции* P_j