

# ОПТЫ

## 1

Что мы не делали, все что не делается, предполагается что это делается наилучшим образом. Естественное поведение. Что значит наилучшим образом, мы должны установить цель. Эта цель должна быть достигнута наиболее эффективно.

Обычно в экономике это прибыль, быстрая реализация прибыли, минимализация вреда окружающей среде. Мы определяем критерий качества. Критериев может быть несколько. Мы должны выбрать переменные, понять их смысл, чтобы достигнуть максимально эффективно цели.

Окружающий мир ставит рамки (ограничены в финансах, энергии, площадь производства)

Gg Возникает следующая задача – реализовать проект наиболее качественно, не нарушая ограничений.

Нужно составить математическую модель. Не для всякой можно построить математическую модель. Мат модель надо строить аккуратно Определить главные и второстепенные элементы. Главные элементы – ограничения, критерий качества, переменные.

Вся эта бодяга появилась в середине прошлого века. В 38 году появился симплекс метод (линейное программирование) единственная нобелевка по экономике в СССР. Тогда американцы строили мат модель военных действий, чтоб организовать снабжение максимально быстро (группа исследований военных операций). Задача расстановки радаров чтобы противник не мог подойти. Это первые 3 задачи нашего предмета.

Рассмотрим  $X$  – некий кортеж (вектор) переменных. Мы хотим найти  $X^*$  который является допустимым (удовлетворяет всем ограничениям)  $X^* \in D$  и  $f(X^*) \leq f(X)$  или  $f(X^*) \geq f(X)$  для  $\forall X \in D$ ,  $f$  целевая функция.

$$f(X^*, C) = \text{extr}_{X \in D} f(X, C) \quad (1)$$

Еще более короткая формулировка,  $C$  набор заданных параметров, которые не варьируются.

$$D = \{X \in \mathbb{R}^N \mid \phi_j(X, C) \leq, =, \geq b_j, j = 1 \dots M \wedge x_i \geq 0, i = 1, \dots N\} \quad (2)$$

$\phi$  ограничения ресурсов

$M$  число ограничений,  $N$  число переменных

Выделяют отдельный класс ограничений,  $x \in [a, b]$ ,  $x <, > C$  геометрические ограничения заменяют  $x_i \geq 0$ . Так же  $M < N$  (число ограничений меньше числа переменных)

## 1.1 Классификация по способу принятия решений (по инф наполне

1. статические
2. динамические

Мы только статические изучаем

## 1.2 Классификация по типу целевой функции и по типу ограничений

1. Целевая функция и ограничения выражаются линейными зависимостями – мы говорим о линейном программировании.
2. Целевая функция квадратична, ограничения линейны – квадратичное программирование
3.  $f(x) = f_1(x_1)f_2(x_2) \dots f_N(x_N)$  – сепарабельное программирование
4. Если переменные целые, то программирование целочисленное

5. Если целевая функция выпуклая, то это выпуклая задача оптимизации

**Определение 1 (Унимодальная задача)** *Задача у которой один экстремум*

## 2 Задача безусловной оптимизации

Есть целевая функция

$$F(X), X = (x_1, x_2, \dots, x_N), X \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^N \quad (3)$$

$$U_\epsilon(X), X \in \mathbb{R}^N : 0 < \|X - X'\| - \|\delta X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - x'_i)^2} < \epsilon \quad (4)$$

$$\delta X = (x_1 - x'_1, \dots, x_N - x'_N) \quad (5)$$

$$U_\epsilon(X) - \{X + \delta X\} \text{открытый шар} \quad (6)$$

**Определение 2 (Точка локального экстремума)**

$$\exists U_\epsilon(X^*) : f(X^*) \leq f(X) \text{ или } f(X^*) \geq f(X) \quad (7)$$

**Определение 3 (Локальный минимум максимум)** *Значение целевой функции в точке экстремума*

**Определение 4**

$$X^* : \forall x \in D : f(X^*) \leq f(X) \text{ или } f(X^*) \geq f(X) \quad (8)$$

$$f^* = \inf_{X \in \mathcal{D}} f(X) < f(X) \quad (9)$$

$$f^* = \sup_{X \in \mathcal{D}} f(X) > f(X) \quad (10)$$

### 2.1 Постановка задачи оптимизации

Пусть даны:

1. функция  $f$  с областью определения  $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^N$
2. множество  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^N$

Требуется найти точку  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*) \in \mathcal{D}$  в которой функция достигает экстремального значения те

$$X^* : f(X^*) = \text{extr}_{x \in \mathcal{D}_f \cap X \in \mathcal{D}} f(X) \quad (11)$$

1. Задача на безусловный экстремум  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^N$
2. Задача на условный экстремум

$$\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^N \quad (12)$$

или

$$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N \quad (13)$$

$$\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D} \neq \emptyset \quad (14)$$

$$\psi_j(X) \leq (, =, \geq) 0, j = 1 \dots M \quad (15)$$

$$\mathcal{D} = \{X \in \mathbb{R}^N : \psi_j(X) \leq (, =, \geq) 0, j = 1 \dots M\} \quad (16)$$

$$\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i \in [1, N] \text{ или } x_i \geq 0 < i \in [1, N] \quad (17)$$

$$\mathcal{P} = \{X \in \mathbb{R}^N : a_i \leq x_i \leq b_i, x_i \geq 0, i \in [k, N]\} \quad (18)$$

$$\mathcal{D} = \{X \in \mathbb{R}^N : \psi_j(X) \leq (, =, \geq) 0, j = 1 \dots M, x \in \mathcal{P}\} \quad (19)$$

**Определение 5 (Избыточное ограничение)** Избыточное ограничение является следствием других ограничений

Может оказаться так что есть целевая функция и набор ограничений. Целевая функция имеет экремум, но он может оказаться за пределами области допустимых значений. Если экстремум на границе, то некоторые ограничения выполняются как строгие равенства, то ресурс соответствующий этому ограничению называется дефицитным, ограничение активным, если нет равенства ресурс недефицитным, ограниичение пассивное.

**Определение 6 (Стационарных точка)** Точка в которой производной равна нулю.

**Теорема 1 (Ферма, необходимое условие экстремума первого порядка)** Пусть функция задана на вещественной оси  $\mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  и в некоторой точке  $x^*$  дифференцируем. Если в этой точке локальный экстремум, то  $f'(x^*) = 0$

Доказательство.

$$\delta x \geq 0, f(x \pm \delta x) = f(x^*) \pm f'(x^*)\delta x + o(\delta x)$$

В ряд Тейлора разложили.  $x^*$  точка локального минимума

$$f(x - \delta x) - f(x^*) = -f'(x^*)\delta x \geq 0.$$

$$f(x + \delta x) - f(x^*) = f'(x^*)\delta x \geq 0.$$

$$\begin{cases} f'(x^*) \geq 0 \\ f'(x^*) \leq 0 \end{cases}.$$

$$f'(x^*) = 0.$$

**Теорема 2 (Ферма, многомерный случай)** Пусть функция  $f(X)$  задана на  $\mathbb{R}^N$ . Если в точке  $X^*$  локальный экстремум, то

$$f'_{x_1} = 0, \dots, f'_{x_N} = 0.$$

доказательство

$X^*$  точка локального минимума функции  $f(X)$

$$U_\epsilon(X^*).$$

$$f(X^*) \leq f(X).$$

**Пример 1**

$$f(X) = \sum_{i=1}^N a_i x_i^2.$$

$$f'_{x_i} = x_i = 0.$$

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$X^*$  точка минимума , если все коэффициенты положительные, максимума если отрицательны

### Пример 2

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 6x_2^2.$$

$$X^* = (0, 0).$$

На множестве  $\{x_1, 0\}$   $f(x_1, 0) = 5x_1^2$  возр

### Пример 3

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^3 + (x_2 + 1)^2.$$

**Теорема 3 (Необходимое условие экстремума второго порядка)** Пусть функция  $f(x)$  задана на  $\mathbb{R}$ , и дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности  $\mathcal{U}_\epsilon(x^*)$  Если в точке  $x^*$  имеется локальный минимум (максимум), вторая производная бдует неотрицательная (неположительная)

Доказательство.

$$f(x^* + \delta x) = f(x^*) + f'(x^*)\delta x + \frac{1}{2}f''(x^*)(\delta x)^2 + o((\delta x)^2).$$

$$f(x^* + \delta x) - f(x^*) = \frac{1}{2}f''(x^*)(\delta x)^2.$$

Если  $x^*$  точка локального минимума , то  $f''(x^*) \geq 0$

Если  $x^*$  точка локального максимума , то  $f''(x^*) \leq 0$

### Определение 7 (Матрица Гессе)

$$H_{ij}(X) = (f''_{x_i x_j}) \quad (20)$$

**Определение 8** Квадратная матрица называется положительно определенной, положительно полуопределенной, отрицательно определенной, отрицательно полуопределенной

$$Q(X) = XAX'.$$

$$Q > 0, Q \geq 0, Q < 0, Q \leq 0$$

**Теорема 4 (Критерий Сильвестра)** 1. Если все угловые миноры положительно положительно определенные

2. Кс

**Теорема 5 (Необходимое условие экстремума второго порядка)**  $f(X)$  задана на  $\mathbb{R}^N$ , дважды непрерывно дифференцируема в некоторой области  $U_\epsilon(X^*)$  если в точке  $X^*$  имеет локальный минимум (максимум), то вычисленная в этой точке матрица гессе неотрицательно (неположительно определена)

**Теорема 6** Рассмотрим функцию  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  предположим, что  $x^*$  стационарная точка,  $f'(x^*) = 0$  в окрестности которой существует непрерывная производная второго порядка если в точке  $x^*$  выполняется условие

1.  $f''(x^*) > 0$ ,  $x^*$  точка локального минимума
2.  $f''(x^*) < 0$ ,  $x^*$  точка локального максимума

**Теорема 7**

**Определение 9** Для функции  $f(X)$  определенной на  $\mathbb{R}^N$  вектор единичной длины задает

1. направление убывания  $w^\downarrow \in \mathbb{R}^N$
2. направление возрастания  $w^\uparrow \in \mathbb{R}^N$

если при всех достаточно малх  $\alpha > 0$  выполняется неравенство

1.

$$f(X' + \alpha w^\downarrow) < f(X').$$

$$2. f(X' + \alpha w^\uparrow) > f(X')$$

**Теорема 8** Пусть функция  $f(X)$  дифференцируема в точке  $X' \in \mathbb{R}^N$

1. Если вектор  $\vec{w} \in \mathbb{R}^N$  удовлетворяет условию

$$\text{grad } f(X')\vec{w} < 0.$$

то  $\vec{w}$  принадлежит множеству направлений убываний

$$f(X' + \alpha\vec{w}) = f(X') + \text{grad } f(X') * \alpha\vec{w} + o(\alpha).$$

### 3 Классическая задача условной оптимизации

**Определение 10** Задача классическая, если ограничения заданы равенством.

$$X^* : f(X^*) = \text{extr}_{X \in \mathcal{D}} f(X) \quad (21)$$

**Определение 11** Вектор  $v \in \mathbb{R}^N$  задает **возможное направление** в точке  $X \in \mathcal{D}$  на множестве возможных значений, если при всех достаточно малых  $\alpha > 0$  точка  $X' = X + \alpha v$  принадлежит  $\mathcal{D}, X' \in \mathcal{D}$

Множество возможных направлений  $\mathcal{V}_X \subseteq \mathbb{R}^N$

**Теорема 9** Если  $X^*$  является точкой локального минимума (максимума), то

$$\mathcal{W}^{\uparrow(\downarrow)} \cap \mathcal{V}_X = \emptyset \quad (22)$$

Пусть 22 неверна,  $\mathcal{W}^\uparrow \cap \mathcal{V}_X \neq \emptyset$

$$\exists R \in \mathcal{W}^\uparrow.$$

$$f(X^* + \alpha r) > f(X^*), X^* + \alpha r \in \mathcal{D}.$$

Невозможно смещение из точки локального минимума которое приводит к уменьшению целевой функции и не выходит за пределы целевой области



**Теорема 10 (Вейерштрасса)** Пусть  $\mathcal{D}$  замкнутое ограниченное множество и  $f(X)$  непрерывная функция. Тогда на  $\mathcal{D}$  существуют точки глобального минимума и максимума

Если внутренних точек локального экстремума нет, то экстремальное значение может достигаться только на границе области.

**Лемма 11** Если область допустимых значений определяемая системо равенств, содержит некоторую точку  $X'$  и ее окрестность  $U_\epsilon(X')$ ,  $X' \in \mathcal{D}$ ,  $U_\epsilon(X') \in \mathcal{D}$ , и

$$M < n.$$

При этом функции задающие ограничения дифференцируемые

$$\psi(X' + \delta X) = \psi_j(X') + \text{grad} \psi_j(X') \delta X + o(\|\delta X\|).$$

$$\psi(X' + \delta X) = \psi(X') = 0.$$

$$\text{grad} \psi_j * \delta X = 0, j = 1 \dots M.$$

Это линейная система уравнений относительно  $\delta X$  Это меньше  $N < M$

**Лемма 12** Предположим, что область допустимых значений, содержит хотя бы одну точку, если  $M < N$  и якобиан  $J(X')$  составленный из функций  $\psi_j(X)$  имеет в этой точке ранг, равный  $M$  то область Допустимых значений  $\mathcal{D}$  вместе со своей точкой  $X'$  содержит некоторую непустую окрестность

$$\psi(X' + \delta X) = \text{grad} \psi_j(X') * \delta X + o(\|\delta X\|).$$

В классической задаче оптимизации число ограничений строго меньше числа переменных

**Определение 12** Допустимой окрестностью  $U_\epsilon^D(X)$  точки  $X$  называется ее окрестность целиком содержащаяся в допустимом множестве  $\mathcal{D}$

## 4 Метод множителей Лагранжа

### Определение 13

$$L(\Lambda, \lambda_0, X) = \lambda_0 f(X) + \sum_{j=1}^M \lambda_j \psi_j(X) \quad (23)$$

$$L(\Lambda, \lambda_0, X) = \lambda_0 f(X) - \sum_j^M \lambda_j \psi_j(X) \quad (24)$$

**Теорема 13 (правило множителей Лагранжа)** Пусть в окрестности  $U_\epsilon(X^*) \subset \mathcal{D}$  точки  $X^* \in \mathbb{R}^N$

1. функции  $f(X)$ ,  $\psi(X)$ ,  $j = 1 \dots M$  непрерывно дифференцируемы
2. ранг матрицы Якоби в точке  $X^*$  равен  $M$

Если  $X^*$  точка локального оптимума задачи то существуют такие неравные одновременно нулю вектор  $\Lambda^*$  и параметр  $\lambda_0^*$  что точка  $(\Lambda^*, j_1, X^*$  является стационарной точкой задачи на безусловный экстремум

Пусть  $X^* \in \mathcal{D}$  точка экстремума задачи  $X^*$  стационарная точка Функции Лагранжа, все частные производные равны 0 Нужно рассмотреть 2 случая  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_0 = 1$ ,  $\lambda_0 \neq 0$  система содержит  $N + M$  неизвестных,  $\lambda_0 = 0$   $\Lambda = 0$  задачи не имеет смысла

Найдем вторую производную функции Лагранжа

$$H(\Lambda, X) = \begin{pmatrix} 0 & J(X) \\ J^T(X) & L''_{XX}(\Lambda, X) \end{pmatrix} \quad (25)$$

**Теорема 14 (Необходимое условие экстремума второго порядка)** Пусть в окрестности  $U_\epsilon(X^*) \subset \mathcal{D}$

1. функции  $f(X)$ ,  $\psi_j(X)$ ,  $j = 1 \dots M$  дважды непрерывно дифференцируемы
2. Ранг матрицы Якоби  $J$  равен  $M$

Тогда  $X^*$

## 5 Интерпретация множителей Лагранжа

$$X^* : f(X^*) = \text{extr}_{X \in D} f(X) \quad (26)$$

$$D = \{X \in \mathbb{R}^N \mid \phi_j(X) = b_j\} \quad (27)$$

$$L(\Lambda, X) = f(X) - \sum_{j=1}^M \lambda_j (\phi_j(X) - b_j) \quad (28)$$

$$\frac{\partial L(\Lambda, X)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{\partial \phi_j(X)}{\partial x_i} = 0 \quad (29)$$

Пусть  $X^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$  является точкой условного экстремума  $f(X)$ . Рассмотрим  $f(X^*)$  как функции параметров  $b_j$

$$x_i^* = x_i(b_1, \dots, b_M) \quad (30)$$

$$f(X^*) = f(X^*(b_1, \dots, b_M)) \quad (31)$$

$$\phi_j(X^*) = \phi_j(X^*(b_1, \dots, b_M)) \quad (32)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial b_k} \right|_{X^*} = \sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{X^*} \frac{dx_i}{db_k} \quad (33)$$

### 5.1 Оценка точности аппроксимации

тут рассматриваем точность, из-за разложения в ряд Тейлора  
Оценим точность аппроксимации  $\delta f(X)$

### 5.2 Анализ чувствительности методом Якоби

$$D = \{X \in \mathbb{R}^N \mid \phi_j(X) = b_j, j = 1 \dots M\} \subset \mathbb{R}^N \quad (34)$$

$$\delta B = (\delta b_1, \dots, \delta b_M) \quad (35)$$

$$\text{Rank } \mathbf{J}(X) = M \quad (36)$$

$$\delta X = (\delta S, \delta Z) \quad (37)$$

$$\delta f(X) = \mathbf{grad}_S f(X) \delta S^T + \mathbf{grad}_Z f(X) \delta Z^T \quad (38)$$

$$\delta \phi_j(X) = \delta b_j \quad (39)$$

$$\mathbf{J}(X) \delta S^T + \mathbf{C} \delta S^T \quad (40)$$

$$\delta f(X) = \mathbf{grad}_S f(X) \mathbf{J}_0^{-1}(X) \delta B^T + \mathbf{grad}_{(*)} f(X) \Delta Z^T \quad (41)$$

$$\delta f(X^*) = \mathbf{grad}_S f(X^*) \mathbf{J}_0^{-1}(X^*) \delta B^T \quad (42)$$

$$\frac{\delta f(X^*)}{\delta B^T} = \mathbf{grad}_S f(X^*) \mathbf{J}_0^{-1}(X^*) \quad (43)$$

## 6 Линейное программирование

Целевая функция линейна, ограничения линейные равенства или неравенства.

**Пример 4 (Задача о пищевом рационе)** *Есть набор питания  $P_1, \dots, P_N$ , стоимость  $c_1 \dots c_N$  за единицу продукта. Пусть весовая едтгтца каждого продукта содержит  $a_{i1}$  белка,  $a_{i2}$  жиров,  $a_{i3}$  углеводов,  $a_{i4}, a_{i5}, a_{i6}$  Нужно приобрести такое количество продуктов, чтоб их стоимость была минимальна, а составленный рацион соедержал  $b_j, j = 1 \dots 6$  жиров и прочего (гдето равенства, где то  $\leq$ )*

*Это можно записать в виде таблицы*

$$X = (x_1 \dots x_n) \quad (44)$$

*Количества продуктов*

$$f(X) = \sum_{i=1}^N c_i x_i \rightarrow \min \quad (45)$$

*Целевая функция*

$$\sum_{i=1}^N a_{i1} x_i \geq b_1 \quad (46)$$

*Задали ограничения . Естественные ограничения  $x_i \geq 0, i = 1 \dots N$*

**Пример 5 (Распределение ресурсов)** *1.  $P_1, P_2, \dots, P_N$  продукция*

2.  $R_1, R_2, \dots, R_M$  сырье в количестве  $b_1, b_2, \dots, b_M$

3. стоимость единицы ресурсов  $d_1 \dots d_M$

Сколько надо выпустить продукции чтобы получить максимум прибыль

$$f(X) = \sum_{i=1}^N c_i x_i - \sum_{i=1}^N \left( c_i - \sum_{j=1}^M a_{ji} d_j \right) x_i \rightarrow \max \quad (47)$$

**Пример 6 (Загрузка оборудования)** Есть три типа станков  $N_1, N_2, N_3$  станки производят 6 видов продукции  $P_j, j = 1 \dots 6$ .  $P_j$  приносит доход  $c_j$ . План  $\geq b_j$  продукции  $P_j$

**Пример 7** Целевое программирование

1. На  $M$  станках изготавливают  $N$  видов изделий  $P_i$

2. Прибыль в расчете на одно изделие  $c_i$

3. станок можем использовать по 5 часов. Если больше то продляем на  $\Delta t$  часов.

4.  $d_j$  цена сверхурочных работ в час