Матстата

1

Открыть старый канспект, повторить распределения, несобственные интегралы.

2 Отступление матан. Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(y) = \int\limits_0^{+\infty} t^{y-1}e^{-t}dt, \tag{1}$$
$$f(t) = t^{y-1}e^{-t} \tag{2}$$

Рассмотрим $t^{y+1}e^{-t} = \frac{t^{y+1}}{et} \to 0$, при $t \to +\infty \implies \exists A : \forall t \geq A \; t^{y+1}e^{-t} < 1 \implies f(t) = t^{y-1}e^{-t} < \frac{1}{t^2}$

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt = \int\limits_0^{A} f(t)dt + \int\limits_A^{+\infty} f(t)dt = I_1 + I_2.$$

I_2 сходится при $\forall y \in \mathbb{R}$, по первому признаку сравнения с $\int\limits_A^{+\infty} g(t)dt, g(t) = \frac{1}{tst}$

Рассмотрим I_1 при $y < 1$ это несобственный интеграл

$$t^{y-1}e^{-t} < t^{y-1}.$$

$\int\limits_0^A \frac{dt}{t^{1-y}}$ сходится при $y > 0$, $1 - y < 1$

Вывод. При $y > 0$ $\Gamma(y) = \int\limits_0^{+\infty} t^{y-1}e^{-1}dt$

Без доказательства для $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = 2^{-n}\sqrt{\pi}(2n - 1)!! \tag{3}$$

$$\Gamma(y + 1) \int\limits_0^{+\infty} t^y e^{-t}dt - \int\limits_0^{+\infty} t^y de^{-t} = -t^y e^{-t} \mid_0^{+\infty} + y \int\limits_0^{+\infty} y^{-1}e^{-t}dt = 0 + y\Gamma(y) \tag{4}$$

$$\Gamma(y + 1) = y\Gamma(y) \tag{5}$$

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}dt = -e^{-t} \mid_0^{+\infty} \tag{6}$$

$$\Gamma(2) = 1 * \Gamma(1) = 1 \tag{7}$$

$$\Gamma(3) = 2 * \Gamma(2) = 2 \tag{8}$$

$$\Gamma(n + 1) = n! \tag{9}$$

Можно показать, что Гамма функция дифференцируема

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2}) \implies \Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\Gamma(\frac{1}{2}) \tag{10}$$

Но

$$\Gamma(0) = +\infty, \int\limits_0^A t^{-1}e^{-t} = \int\limits_0^A \frac{dt}{t^{et}} \tag{11}$$

По второму признаку сравнения это расходится

$$\lim_{t\to 0+0} \frac{1}{te^t} : \frac{1}{t} = \lim_{t\to 0+0} 1 \in (0; +\infty).$$

Вывод. Γ функцию можно продолжить на $\mathbb{R}^-$ ккроме целых точек

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} \tag{12}$$

Мы расшили понтие числа сочений

$$C_\alpha^\beta = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^- \tag{13}$$

3 Закон распределения Лапласа (двойное экспонициальн распределение)

Он применяетс для моделирования обработки сигналов, в моделировании биологических процессов, экономике и финансах

Это распределние НСВ X с плотностью

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, x \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \tag{14}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda x}, x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x} \end{cases} \tag{15}$$

$$x \leq 0, F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\lambda}{2} e^{\lambda t} dt = \frac{1}{2} e^{\lambda t} \mid_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2}(e^{\lambda x} - 0) \tag{16}$$

$$x > 0 = F(0) + \int\limits_0^x \tag{17}$$

из вида $f(x) : Mo(X) = Me(X) = M(X) = 0$

$$D(X) = M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 * \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} dx = \dots = (-x^2 + \frac{2}{\lambda} x + \frac{2}{\lambda^2}) e^{-\lambda x} \mid_0^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} \tag{20}$$

4 Распредение Вейбула

Это распределение имеют времена безотказной работы технческих устройтв. В таких значениях важной характеристикой является интенсивность отказа $k(t)$

$$k(t) = -\frac{[P(X \geq t)]'}{P(X \geq t)}, k(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \tag{21}$$

Получили диффур. Это УРП, решаем элементарно

$$k(t) = \frac{y'}{1 - y} \tag{22}$$

$$k(t)dt = \frac{dt}{1 - y} \tag{23}$$

$$-\int k(t)dt + C = \ln(1 - y) \tag{24}$$

$$y = 1 - e^{-\int k(t)dt + C} \tag{25}$$

$$y(0) = 0 \implies y = 1 - e^{-\int\limits_0^x k(t)dt} \tag{26}$$

Во многих случаях график $k(t)$ имеет следущий вид

1. период обкатки
2. период нормальной эксплуатации
3. период старения

Рассмотрим класс степенных зависимостей $k(t) = \lambda\alpha t^{‘-1‘}$ где $\lambda > 0, \alpha > 0$ некоторые числовые параметры. Периодам 1,2,3 отвечают $\alpha < 1, \alpha = 1, \alpha > 1$ соответственно

Функция распеделения

$$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{0}{x}\lambda\alpha t^{\alpha-1}dt} = 1 - e^{\lambda t^\alpha} \mid_0^x = 1 - e^{-\lambda x^\alpha} \tag{27}$$

Плотность

$$f_X(x)(F_X(x))' = \lambda\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}} \tag{28}$$

При $a = 1$ получим $E(\lambda)$, при $\alpha = 2$ получим распределениие Рэлея $f(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2}$

4.1 Числовые характеристики Распределения Вейбулла

$$M(X) = \lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Gamma(1+\frac{1}{\alpha}) \tag{29}$$

$$M(X) = \int\limits_0^{+\infty} x\alpha * \lambda x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}dx = \int\limits_0^{+\infty} \lambda^{-\frac{1}{\alpha}}t^{\frac{1}{\alpha}}e^{-t}dt = \lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Gamma(1+\frac{1}{\alpha}) \tag{30}$$

$$M(X^2) = \lambda^{-\frac{-2}{\alpha}}\Gamma(1+\frac{2}{\alpha}) \implies D(X) = \lambda^{-\frac{2}{\alpha}}(\Gamma(1+\frac{2}{\alpha}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\alpha})) \tag{31}$$

$$\mathrm{Me}(X) = (\frac{1}{\lambda}\ln 2)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{32}$$

$$Mo(X) = \begin{cases} 0, \alpha \leq 1 \\ (\frac{\alpha-1}{\lambda\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}, \alpha > 1 \end{cases} \qquad f'(x) = 0 \tag{33}$$

5 Гамма-распеделение

Оно используется для описание времен безотказной работы различных техническ устройств

Его имеет НСВ $X = \gamma(a, b)$ с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases} \tag{34}$$

где $a > 0$ параметр формы, $b > 0$ параметр масштаба

5.1 Свойства

1. $b * \gamma(a,b) = \gamma(a,1)$

$$f_{\alpha X+\beta}(x) = f_X(\frac{x-b}{a}) * \frac{1}{|a|} \implies .$$

$$f_{b\gamma(a,b)}(x) = f_{\gamma_{a,b}}(\frac{x}{b})\frac{1}{b} = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\frac{x^{a-1}}{b^{a-1}} * e^{-b\frac{x}{b}} * \frac{1}{b} = \frac{1}{\Gamma(a)}x^{\alpha-1}e^{-x} = f_{\gamma(a,1)}(x).$$

2. Если случайные величины независимы

3. $a = \frac{m}{2}, b = \frac{1}{2}$ получм χ^2_m,$a = 1$ получим экспонициальное

5.2 Функция распределение

$$F_{\gamma(a,b)})(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int\limits_0^{bx}\tau^{a-1}e^{-\tau} \tag{35}$$

5.3 Числовые Характеристики

$$M(\gamma(a,b)) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\int\limits_0^{+\infty} x{*}x^{a-1}e^{-bx}dx =_{t=bx} \frac{b^a}{\Gamma(a)}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^a}{b^a}e^{-t}{*}\frac{dt}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{b\Gamma(a)} = \frac{a\Gamma(a)}{b\Gamma(a)} = \frac{a}{b} \tag{36}$$

$$D(\gamma(a,b)) = \frac{a(a+1)}{b^2} - (\frac{a}{b})^2 = \frac{a}{b^2} \tag{37}$$

$$Mo = \frac{a-1}{b}, a \geq 1 \tag{38}$$

$$f'(x) = 0 \tag{39}$$