Математическое моделирование

1 Основные понятия

Определение 1 *Модель – образ или прообраз какого либо объекта или системы объектов, используется в качестве аналога реальной системы.*

Определение 2 *Математическая модель – описание объекта на языке математики.*

Определение 3 *Математическое моделирование– средство исследования сложных систем и объектов различной природы на основе математической моделей.*

2 Требования

1. адекватность
2. конечность
3. полнота (информативность)
4. упрощенность
5. гибкость
6. приемлемая трудоемокость разработки

3 Этапы построения модели

1. Определение цели процесса моделирования
2. Изучение предметной области, выявить причинно-следственные связи, построить концептуальную модель
3. переход к формальному описанию
4. проверка адекватности
5. корректировка модели
6. применение модели. Проведение исследований и практическое использование.
7. уточнение улучшение модели

4 Классификация

1. Статические, Динамические модели;
2. Линейные, нелинейные;
3. Детерминированные, стотахстические;

5 Подходы к моделированию

1. Аналитический
2. Аналитико-эксперементальный
3. Экспериментальный

6 Статические модели

Мы связывает входы системы (независимые переменные) с выходами. Хотим построить функцию, которая их связывает.

6.1 Статические модели макроэкономичесих систем

6.1.1 Модель Леонтьева

1. В экономике n отраслений
2. каждая отрасль производит 1 вид продукции потребляет другие подукты
3. разные отрасли производят разные виды продукции

1. x_{ij} объем продукции, произведенный в отрасли i и потребляемой отраслью j
2. X_i валовый продукт отрасли i
3. Y_i конечный продукт отрасли i

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i,\ i = 1 \dots n \tag{1}$$

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \implies X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i \tag{2}$$

$$X = A \cdot X + Y \tag{3}$$

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y \tag{4}$$

Определение 4 (Продуктивность) *Матрица $A > 0$ называется **продуктивной** если для любого вектора $Y > 0$ существыует решение $X > 0$ уравнения $(E - A)X = Y$ В этом случае и модель Леонтьева называется продуктивной*

1. Если хотя бы для одного положительного вектора Y уравнение $X = AX + Y$ имеет неотрицательное решение X, том атрица A продуктивна
2. Для продуктивности матрицы необходимо и достаточно существование и неотрицательности матрицы $(E - A)^{-1}$
3. Неотрицательная квадратная матрица A продуктивна тогда и только тогда когда максимальное по модулю собственное число < 1

4. Неотрицателья матрица A продуктивна тогда и только тогла когда матрица

Определение 5 *Обратная матрица Леонтьева $B = (E - A)^{-1}$– матрица полных затрат. Элементы этой матрицы b_{ij} – количество продукции отрасли i используемое для производства единицы конечного продукта отрасли j*

6.2 Производственная Функция

Определение 6 *Производственная функция F – функция выражающая зависимость между затратами ресурсов и объемами выпуска*

1. $\overline{X}$ векор используемых ресурсов
2. $\overline{Y}$ объемы выпуска продукции каждого вида

6.3 Свойства неоклассических производственных функций

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ должна быть достаточно гладкой хотя бы дважды дифферинциру

Определение 7 (Производственная функция) *1. $F(X) = 0$,если $\exists x_i = 0$*

2. F возрастает по каждому аргументу $\frac{\partial F}{\partial x_i} > 0$

3. Выпуск по каждому аргументу неограничен

4. $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} < 0$

Определение 8 (Однородная функция)

$$F(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^\gamma (x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5}$$

Определение 9 (Линейная однородность)

$$F(\lambda X) = \lambda F(X) \tag{6}$$

1. Целевой показатель Y валовый внутренний продукт

1. K основные проиводственные фонды

2. L число занятых

$F(K, L)$ соответвует 7

$$Y = A * K^{\alpha} L^{\beta} \tag{7}$$

1. $A > 0$

2. $0 < \alpha < 1$

3. $0 < \beta < 1$

Это производственная функция Кобба-Дугласа

$$Y = AK^{\alpha} L^{\beta} \tag{8}$$

1. Для оценки будем использовать метод наименьших квадратов;

2. Потребуются исторические данные $(K_i, L_i, Y_i)_i^{i=M}$

$$\ln Y + \alpha + \alpha \ln K + \beta \ln L \tag{9}$$

Мы выполнили линерализацию

$$S(A, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{M} (\ln \alpha + \alpha \ln K_i + \beta \ln L_i - \ln Y_i)^2 \to \min \tag{10}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \ln A} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0 \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} 2 \sum_{i=1}^{M} (\ln A + \alpha \ln K_i + \beta \ln L_i - \ln Y_i) * 1 = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^{M} (\ln A + \alpha \ln K_i + \beta \ln L_i - \ln Y_i) * \ln K_i = 0 \\ 2 \sum_{i=1}^{M} (\ln A + \alpha \ln K_i + \beta \ln L_i - \ln Y_i) * \ln L_i = 0 \end{cases} \tag{12}$$

$$
\begin{cases}
M \ln A + \alpha \sum_{i=1}^{M} \ln K_i A + \beta \sum_{i=1}^{M} \ln L_i = \sum_{i=1}^{M} \ln Y_i \\
\ln A \sum_{i=1}^{M} \ln K_i + \alpha \sum_{i=1}^{M} \ln^2 K_i + \beta \sum_{i=1}^{M} \ln K_i \ln L_i = \sum_{i=1}^{M} \ln Y_i \ln K_i \\
\ln A \sum_{i=1}^{M} \ln L_i + \alpha \sum_{i=1}^{M} \ln K_i \ln L_i + \beta \sum_{i=1}^{M} \ln^2 L_i = \sum_{i=1}^{M} \ln Y_i \ln L_i
\end{cases} \tag{13}
$$

Рассмотрим такую

$$Y = AK^{\alpha} * L^{1-\alpha} \tag{14}$$

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + (1-\alpha) \ln L = \ln A + \alpha(\ln \frac{K}{L}) + \ln L \tag{15}$$

$$S(A, \alpha) = \sum_{i=1}^{M} (\ln A + \alpha \left(\frac{\ln K_i}{\ln L_i} \right) - \ln Y_i + \ln L)^2 \to \min \tag{16}$$

6.4 Изокванты

множество наборов при которых уровень производства не меняется.

$K - L$ изокватны – линии равного уровня выпуска продукции

$$c_1 = AK^{\alpha} * L^{\beta} \tag{17}$$

$$K^{\alpha} = \frac{c_1}{AL^{\beta}} \tag{18}$$

$$K = \left(\frac{c_1}{A} \right)^{\frac{1}{\alpha}} * L^{\frac{-\beta}{\alpha}} \tag{19}$$

7 Практика

две модели $\alpha + \beta = 1, \alpha + \beta \neq b$

1. Реализоать поиск A, α, β
2. Вывести таблцу
3. график зависимоти Y от K, исторические данные
4. построить 3 изокванты для $\alpha + \beta \neq 1$