Матстата

1

Открыть старый канспект, повторить распределения, несобственные интегралы.

2 Отступление матан. Гамма-функция Эйлера

$$\Gamma(y) = \int\limits_0^{+\infty} t^{y-1}e^{-t}dt, \tag{1}$$

$$f(t) = t^{y-1}e^{-t} \tag{2}$$

Рассмотрим $t^{y+1}e^{-t} = \frac{t^{y+1}}{et} \to 0$, при $t \to +\infty \implies \exists A : \forall t \geq A\ t^{y+1}e^{-t} < 1 \implies f(t) = t^{y-1}e^{-t} < \frac{1}{t^2}$

$$\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt = \int\limits_0^{A} f(t)dt + \int\limits_A^{+\infty} f(t)dt = I_1 + I_2.$$

I_2 сходится при $\forall y \in \mathbb{R}$, по первому признаку сравнения с $\int\limits_A^{+\infty} g(t)dt, g(t) = \frac{1}{tst}$

Рассмотрим I_1 при $y < 1$ это несобственный интеграл

$$t^{y-1}e^{-t} < t^{y-1}.$$

$\int\limits_0^A \frac{dt}{t^{1-y}}$ сходится при $y > 0$, $1 - y < 1$

Вывод. При $y > 0$ $\Gamma(y) = \int\limits_0^{+\infty} t^{y-1} e^{-1} dt$

Без доказательства для $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = 2^{-n} \sqrt{\pi} (2n - 1)!! \tag{3}$$

$$\Gamma(y + 1) \int\limits_0^{+\infty} t^y e^{-t} dt - \int\limits_0^{+\infty} t^y de^{-t} = -t^y e^{-t} \mid_0^{+\infty} + y \int\limits_0^{+\infty} y^{-1} e^{-t} dt = 0 + y\Gamma(y) \tag{4}$$

$$\Gamma(y + 1) = y\Gamma(y) \tag{5}$$

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \mid_0^{+\infty} \tag{6}$$

$$\Gamma(2) = 1 * \Gamma(1) = 1 \tag{7}$$

$$\Gamma(3) = 2 * \Gamma(2) = 2 \tag{8}$$

$$\Gamma(n + 1) = n! \tag{9}$$

Можно показать, что Гамма функция дифференцируема

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2}) \implies \Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\Gamma(\frac{1}{2}) \tag{10}$$

Но

$$\Gamma(0) = +\infty, \int\limits_0^A t^{-1} e^{-t} = \int\limits_0^A \frac{dt}{t^{et}} \tag{11}$$

По второму признаку сравнения это расходится

$$\lim_{t \to 0+0} \frac{1}{te^t} : \frac{1}{t} = \lim_{t \to 0+0} 1 \in (0; +\infty).$$

Вывод. Γ функцию можно продолжить на $\mathbb{R}^-$ ккроме целых точек

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} \tag{12}$$

Мы расшили понтие числа сочений

$$C_\alpha^\beta = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^- \tag{13}$$

3 Закон распределения Лапласа (двойное экспонициальн распределение)

Он применяетс для моделирования обработки сигналов, в моделировании биологических процессов, экономике и финансах

Это распределние НСВ X с плотностью

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, x \in \mathbb{R}, \lambda > 0 \tag{14}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda x}, x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x} \end{cases} \tag{15}$$

$$x \leq 0, F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\lambda}{2} e^{\lambda t} dt = \frac{1}{2} e^{\lambda t} \mid_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2}(e^{\lambda x} - 0) \tag{16}$$

$$x > 0 = F(0) + \int\limits_{0}^{x} \tag{17}$$

из вида $f(x) : Mo(X) = Me(X) = M(X) = 0$

$$D(X) = M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = 2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 * \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} dx = \cdots = (-x^2 + \frac{2}{\lambda}x + \frac{2}{\lambda^2})e^{-\lambda x} \mid_0^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} \tag{20}$$

4 Распредение Вейбула

Это распредение имеют времена безотказной работы технческих устройтв. В таких значениях важной характеристикой является интенсивность отказа $k(t)$

$$k(t) = -\frac{[P(X \geq t)]'}{P(X \geq t)}, k(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \tag{21}$$

Получили диффур. Это УРП, решаем элементарно

$$k(t) = \frac{y'}{1 - y} \tag{22}$$

$$k(t)dt = \frac{dt}{1 - y} \tag{23}$$

$$-\int k(t)dt + C = \ln(1 - y) \tag{24}$$

$$y = 1 - e^{-\int k(t)dt + C} \tag{25}$$

$$y(0) = 0 \implies y = 1 - e^{-\int\limits_0^x k(t)dt} \tag{26}$$

Во многих случаях график $k(t)$ имеет следущий вид

1. период обкатки
2. период нормальной эксплуатации
3. период старения

Рассмотрим класс степенных зависимостей $k(t) = \lambda\alpha t^{`-1`}$ где $\lambda > 0, \alpha > 0$ некоторые числовые параметры. Периодам 1,2,3 отвечают $\alpha < 1, \alpha = 1, \alpha > 1$ соответственно

Функция распеделения

$$F_X(x) = 1 - e^{-\frac{0}{x}\lambda\alpha t^{\alpha-1}dt} = 1 - e^{\lambda t^{\alpha}} \mid_0^x = 1 - e^{-\lambda x^{\alpha}} \tag{27}$$

Плотность

$$f_X(x)(F_X(x))' = \lambda\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^\alpha} \tag{28}$$

При $a = 1$ получим $E(\lambda)$, при $\alpha = 2$ получим распределениие Рэлея $f(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2}$

4.1 Числовые характеристики Распределения Вейбулла

$$M(X) = \lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Gamma(1+\frac{1}{\alpha}) \tag{29}$$

$$M(X) = \int\limits_0^{+\infty} x\alpha * \lambda x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^\alpha}dx = \int\limits_0^{+\infty} \lambda^{-\frac{1}{\alpha}}t^{\frac{1}{\alpha}}e^{-t}dt = \lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\Gamma(1+\frac{1}{\alpha}) \tag{30}$$

$$M(X^2) = \lambda^{-\frac{-2}{\alpha}}\Gamma(1+\frac{2}{\alpha}) \implies D(X) = \lambda^{-\frac{2}{\alpha}}(\Gamma(1+\frac{2}{\alpha}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\alpha})) \tag{31}$$

$$\mathrm{Me}(X) = (\frac{1}{\lambda}\ln 2)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{32}$$

$$Mo(X) = \begin{cases} 0, \alpha \leq 1 \\ (\frac{\alpha-1}{\lambda\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}, \alpha > 1 \end{cases} \qquad f'(x) = 0 \tag{33}$$

5 Гамма-распеделение

Оно используется для описание времен безотказной работы различных техническ устройств

Его имеет НСВ $X = \gamma(a, b)$ с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases} \tag{34}$$

где $a > 0$ параметр формы, $b > 0$ параметр масштаба

5.1 Свойства

1. $b * \gamma(a,b) = \gamma(a,1)$

$$f_{\alpha X+\beta}(x) = f_X(\frac{x-b}{a}) * \frac{1}{|a|} \implies .$$

$$f_{b\gamma(a,b)}(x) = f_{\gamma_{a,b}}(\frac{x}{b})\frac{1}{b} = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\frac{x^{a-1}}{b^{a-1}} * e^{-b\frac{x}{b}} * \frac{1}{b} = \frac{1}{\Gamma(a)}x^{\alpha-1}e^{-x} = f_{\gamma(a,1)}(x).$$

2. Если случайные величины независимы

3. $a = \frac{m}{2}, b = \frac{1}{2}$ получм χ^2_m,$a = 1$ получим экспонициальное

5.2 Функция распределение

$$F_{\gamma(a,b)})(x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int\limits_0^{bx} \tau^{a-1}e^{-\tau} \tag{35}$$

5.3 Числовые Характеристики

$$M(\gamma(a,b)) = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\int\limits_0^{+\infty} x{*}x^{a-1}e^{-bx}dx =_{t=bx} \frac{b^a}{\Gamma(a)}\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^a}{b^a}e^{-t}{*}\frac{dt}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{b\Gamma(a)} = \frac{a\Gamma(a)}{b\Gamma(a)} = \frac{a}{b} \tag{36}$$

$$D(\gamma(a,b)) = \frac{a(a+1)}{b^2} - (\frac{a}{b})^2 = \frac{a}{b^2} \tag{37}$$

$$Mo = \frac{a-1}{b}, a \geq 1 \tag{38}$$

$$f'(x) = 0 \tag{39}$$

6 Некоторые другие законы

6.1 Распределение Парето

$$f(x) + \frac{\alpha}{c_0}(\frac{c_0}{x})^{\alpha+1}, x \geq c_0, \alpha > 0, c_0 > 0 \tag{40}$$

Связано с налогами (доход превосходит c_0)

$$F(x) = 1 - \left(\frac{c_0}{x}\right)^{\alpha} \tag{41}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x * f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{c_0}\left(\frac{c_0}{x}\right)^{\alpha} = \int\limits_{c_0}^{+\infty} \frac{\alpha}{c_0}(\frac{c_0}{x})^{\alpha} = \frac{\alpha}{c_0}(\lim_{x\to\infty}) \tag{42}$$

$$M(x^2) = \frac{\alpha}{c_0} * c^{\alpha+1} \int\limits_{c_0}^{+\infty} (x)^{-\alpha-1}dx = \alpha c^{\alpha} \ \frac{1}{-\alpha} x^{-\alpha}\Big|_{c_0}^{+\infty} \tag{43}$$

$$1 - (\frac{c_0}{x})^{\alpha} = \frac{1}{2} \tag{44}$$

$$x^{\alpha} = 2c_0^{\alpha} \tag{45}$$

6.2 Рапределение Коши

$$f(x) = \frac{c}{\pi(c^2 + (x-\alpha)^2)}, x \in \mathbb{R} \tag{46}$$

$$\int \frac{c}{\pi(c^2 + (x-\alpha)^2)} d(x-\alpha) = \frac{c}{\pi}\left(\frac{1}{c}\arctan\frac{x-\alpha}{c}\right) + c = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{x-\alpha}{c} + c \tag{47}$$

6.3 Свойства устойчивости рапределения Коши

1. Если случайная величина X распределена по закону Коши с параметрами c, α , тогда $Y = b_0 + b_1 X$ имеет распределение с параметрами $c' = |b_1|c$, $\alpha' = b_1\alpha + b_0$

$$f_{aX+b}(x) = f_X\left(\frac{x-b}{a}\right) * \frac{1}{|a|} \tag{48}$$

2. Если есть независимые случайно расределенные случанйые величины $X_1, \ldots, X_n$ имееют распределение Коши, то $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Доказать дома $n = 2, c = 1, \alpha = 0$

6.4 Распределения Рэлея

$$f(x) = \begin{cases} 2\lambda x e^{-\lambda x^2}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0) \tag{49}$$

$$\int 2\lambda x e^{-\lambda x^2} dx = \int \lambda e^{-\lambda x^2} dx^2 = -e^{-\lambda x^2} + C \tag{50}$$

$$\int\limits_0^x f(x) = -e^{-\lambda x^2} + 1 \tag{51}$$

$$F(X) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^2} x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \tag{52}$$

$$f(x)' = 2\lambda(e^{-\lambda x^2} + x * (-\lambda 2x * e^{-\lambda x^2})) = 2\lambda(e^{-\lambda x^2} - 2\lambda x^2 * e^{-\lambda x^2}) = \\ 2\lambda * e^{-\lambda x^2}(1 - 2\lambda x^2) \tag{53}$$

$y = 0$ горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$

$$\int 2\lambda x^2 e^{-1} \tag{54}$$

6.5 Распредления для статов

6.5.1 Распределение хи квадрат с m степенями свободы

Определение 1. *Пусть случайные величны* $X_1, X_2, \ldots, X_m \sim N(0,1)$ *и независимы* $Z = \sum_{i=1}^{M} X_i^2$

$$\chi_m^2 \tag{55}$$

$$f_{\chi_m^2}(x) = 0, x < 0 \tag{56}$$

$$f_{\chi_m^2}(x) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{M}{2})}x \tag{57}$$

$$M(\chi_M^2) = m, D(\chi_m^2) = 2m \tag{58}$$

6.6 Распеределение Стьюдента с m степенями свободы

Определение 2. *Случайнык величины* $X_0 \ldots X_m \sim N(0,1)$ *и независимы*

$$Z = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i^2}} \tag{59}$$

$$Z = t_m \tag{60}$$

$$f_{t_m}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi m}}\frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} * \left(1 + \frac{x^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}} \tag{61}$$

Это четная унимодальная $(Mo(t_m) = 0)$ функция

$$t_m = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{\chi_m^2}{m}}} \tag{62}$$

$$M(t_m) = Mo(t_m) = me(t_m) = 0 \tag{63}$$

$$D(t_m) = \frac{m}{m-2}, m > 2 \tag{64}$$

6.6.1 Распределение Фишера-Снедекора

$$F(m_1, m_2) \tag{65}$$

Определение 3. *Даны случайные величины* $X_1, X_2, \dots X_{m_1}, Y_1, Y_2, \dots, Y_{m_2} \sim N(0,1)$

$$Z = \frac{\frac{1}{m_1}\sum_{i=1}^{m_1} X_i^{m_1}}{\frac{1}{m_2}\sum_{i=1}^{m_2} Y_i^2} \tag{66}$$

$$f_{F_{m_1,m_2}}(x) = \frac{\Gamma(\frac{m_1+m_2}{2}) * m_1^{\frac{m_1}{2}} * m_2^{\frac{m_2}{2}}}{\Gamma(\frac{m_1}{2})\Gamma(\frac{m_2}{2})} * \frac{x^{\frac{m_1}{2}-1}}{(m_1x+m_2)^{\frac{m_1+m_2}{2}}} \tag{67}$$

$$f_{F_{m_1,m_2}}(x) = 0, x < 0 \tag{68}$$

$$F_{m_1,m_2} = \frac{\frac{1}{m_1}\chi^2_{m_1}}{\frac{1}{m_2}\chi^2_{m_2}} \tag{69}$$

$$\frac{1}{F_{m_1,m_2}} \sim F_{m_2,m_1} \tag{70}$$

$$M(F_{m_1,m_2}) = \frac{m_2}{m_2-1} \tag{71}$$

$$D(m_1,m_2) = \frac{2m_2^2(m_1+m_2-2)}{m_1(m_2-2)^2(m_2-4)} \tag{72}$$

$$Mo(F_{m_1,m_2}) = \frac{(m_1-2)m_2}{m_1(m_2+2)} \tag{73}$$

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots \omega_j\}$

$$P(\omega_{i_1}, \dots \omega_{i_n}) = \prod_{j=1}^{n} p_{i_j} \tag{74}$$

Рассмотрим последоваельность случайных зависимых величин

Введем дискретное время t и случайную величину $\xi_t(\omega)$ значение которой определяют в каком состояни находился объек во время t в любой следущий момент времени объект может сменить состояние

7 Определение цеи Маркова

Определение 4. *Состояния объекта в момент t характеризуется ограниченной памятью*

$$P(\xi_t = j \mid \xi_1 = 1, \xi_{t-1} = i) = P(\xi_t = j | \xi_{t-1} = i) \tag{75}$$

Это зависимость марковского типа. Такие зависиости наываются цепями Маркова

Если дополнительно предположить что $p_{ij}^{(1)} = P(\xi_t = j \mid \xi_{t-1} = i)$ независят от t то такая цепь называется однородной

Определение 5. *Последоватльеность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots$ любая из которых может принимать конечное число значений $x_1^0, \ldots_j^0$ называется однородной цепь Маркова, если*

$$P(\xi_1 = x_{i_1}^0 \ldots \xi_t = x_{i_t}^0) \tag{76}$$

Замечание 1. *В общем случае можно рассмотреть дискретное вероятностное простанство с счетным множеством исходов*

Теорема 1. *1.* $\sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_t} p_{i_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{t-1} i_t} = 0$

7.1 Основные характеристики цепей Маркова

Исходные характеристики

1. вектор вероятностей начального распределения $p = (p_1, p_2, \ldots, p_j)^T$
2. Матрица P переходных веоятностей p_{ij}

Производные характеристики

1. Вероятность перехода из состояния i в состояние j за t тактов времени:

$$p_{ij}^{(t)} = \sum_{q=1}^{J} p_{iq}^{(t-1)} p_{qj} \tag{77}$$

Если обозначить P^q матрица перехода за q шагов то эта формула в матричнос виде

$$P^{(t)} = P^{(t-1)} p \tag{78}$$

$$P^{(t)} = P^t \tag{79}$$

2. Безуслованя веростноять $p_j^{(t)}$ того, что объект в момент времени t находится в состоянии k:

$$p_j^t = \sum_{i=1}^{j} p_i p_{ij}^{(t-1)} \tag{80}$$

   вероятность $p_{ij}^{(t-1)}$ образуют j-ый столбец матрицы $P^{(t-1)}$

3. Вероятность первого возарвщения объекта в заданное состояние обозначается

$$f_{jj}^t A = P\left(\xi_{t+1} = j; \xi_t \neq j; \xi_{t-1} \neq j \ldots \xi_2 \neq j \mid \xi_i = j\right) \tag{81}$$

   Вероятность первого возвращаения в состояние j через t шагов

$$f_{jj}^{(t)} = \sum_{t=1}^{\infty} f_j j^{(t)} \tag{82}$$

   Вероятность того что объект когда нибудь вернется в состояние j

$$\mu_{jj} = \sum_{t=1}^{\infty} t f_{jj}^{(t)} \tag{83}$$

   среднее время первого возвращения в состояние j при условии $f_{jj} = 1$

7.2 Классификация состоянийи

Определение 6. *Состояние j называется достижимым из состояни j< если* $\exists t_0 \geq 1$ $p_{ij}^{(t_0)} > 0$

Определение 7. *Состояние i называют поглощающим если из него не может быть достигнуто никакое другое состояние цепи*

Определение 8. *Множество состояниий называется поглащаюшим или замкнутым,ес никакое состояние вне C не может быть достигнуто ни пз кого состоянмя вхоядщего в C*

Определение 9. *Состояние называется возвратным, если, отпавляюсь от него обхект с вероятность 1 когда нибудь в него вернется*

7.3 Классификация цепей