1 Учебники

1. Колмогоров
2. Люстерник, Соболев (Краткий Курс Функционального Анализа)
3. Вайнберг Функциональный Анализ
4. Бахарев

2 Метрические пространства

Пусть есть некоторое множество M, мы хотим ввести предел (непрерывность, производную и тд) на этом множестве.

Надо ввести расстояние (метрику).

Определение 1 (Метрика)**.** *Метрикой* ρ *на множестве* M *называется отображение* $\rho : M \times M \to [0, +\infty)$ *удовлетворяющее следущим свойствам (аксиомам):*

1. $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, u) = 0 \iff x = y$

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Пара (M, ρ) *называется метрическим пространством.*

Пример 1.1.

$$M = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y| \tag{1}$$

Пример 1.2.

$$M = \mathbb{R}^n, ||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad (2)$$

Пример 1.3 (Транспортная метрика (Матхэтеннская))**.**

$$\rho(A, B) = \min \; \textit{ломанная соединяющая } A, B \quad (3)$$

Пример 1.4. *M – город*

$$\rho(A, B) = \min \; \textit{время за которое можно добраться } A \to B \quad (4)$$

Пример 1.5. *M – множество всех непрерывных функций $f(t) : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $M = C([0, 1])$*

$$\rho(f_1, f_2) = \max_{t \in [0,1]} |f_1(t) - f_2(t)| \quad (5)$$

max $\exists$ *по теореме Вейрштрасса*

$$(M, \rho) = C[0, 1] \quad (6)$$

Это одно из ***важнейших*** *пространств функционального анализа*

Пример 1.6. *Обозначим $M = \{$Множество всех последовательностей$\{x_n\} = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), x_k \in \mathbb{R}\}$*

$$\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \quad (7)$$

1. *Ряд сходится для любых последовательностей так как мажорируется рядом* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$

2. *Докажем, что выполняется неравентство треугольника*

   Рассмотрим вспогательную функцию

$$f(t) = \frac{t}{1 + t} : [0, +\infty] \to \mathbb{R} \quad (8)$$

Ясно что $f(t) = 1 - \frac{1}{1+t}$ *данная функция возрастаетс так как* $\frac{1}{1+t}$ *убывает. Отсюда следует, что*

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \tag{9}$$

$$f(|a+b|) \leq f(|a|+|b|) \leq f(|a|) + f(|b|) \tag{10}$$

Мы доказали неравенство треугольника для всех членов ряда

Рассмотим $\{z\}$

$$\frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|} = \frac{|x_n - z_n + z_n - y_n|}{1+|x_n - z_n + z_n - y_n|} \leq \frac{|x_n - z_n|}{1+|x_n - z_n|} + \frac{|z_n - y_n|}{1+|z_n - y_n|} \tag{11}$$

$$\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n) \tag{12}$$

Понятие метрики позволяет на метрическом пространстве (M, ρ) вводить «старые» понятия из анализа.

1. Открытый шар радиуса r с центром в точке x_0

$$B_r(x_0) := \{x \in M \mid \rho(x, x_0) < r\} \tag{13}$$

2. Замкнутый шар радиуса r с центром в точке x_0

$$\overline{B}_r(x_0) := \{x \in M \mid \rho(x, x_0) \leq r\} \tag{14}$$

3. $X \subset M$ назывется открытым, если $\forall x \in X\ \exists B_r(x) \subset X$

4. Множество X называется замкнутым если дополнение к нему $(M \backslash X)$ является открытым

5. Точка x_0 называется внутренней точкой X, если $\exists B_r(x_0 \subset X$, X открытое $\iff$ любая точка внутренняя

6. x_0 называется предельной точкой множества X, если $\forall r > 0$ $B_r(x_0) \cap X$ содержит бесконечно много точек из X

7. x_0 называется изолированной точкой множества X если $\exists B_r(x_0) : B_r(x_0) \cap X = \{x_0\}$ Изолированная точка не может быть предельной

8. Точка x_0 называется внешней для множетсва X, если существует такой шар с центром в x_0, что его пересечение с X пусто

9. Точка x_0 называется граничной точкой множества X если $\forall r$ в шаре $B_r(x_0)$ содержатся точки как $x \in X$, так и $x \notin X$

Коллекция фактов (без доказательсва, упражнения, дз)

1. Другое определение замкнутости. X замкнуто $\iff$ содержит все свои предельные точки

2. Добавление к X всех его предельных точек называется пополнением X. Полученное множество обозначат $\overline{X}$

$$\overline{X} = X \cup \{ \text{ Пределные точки } \} \tag{15}$$

3. $\overline{X}$ замкнутое

4. X замкнутое $\iff X = \overline{X}$

5. Принцим трихотомии (деления на 3) $\forall$ множества X и $\forall x \in M$ возможен только один из трех вариантов

   (a) x внутренняя точка $x \in \operatorname{Int} X$

   (b) x граничная точка $x \in \delta X$

   (c) x внешняя точка

   Верны формулы

   (a) $\overline{X} = X \cup \delta X$

(b) $\overline{X_1 \cup X_2} = \overline{X_1} \cup \overline{X_2}$

(c) Объединение любого числа открытых множеств открыто

(d) Пересечение конечного числа открытых множеств открыто

(e) Пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто

(f) объединение конечного числа замкунтых множеств

(g) объедение бесконечного числа замкнутых множеств может быть открытым

3

Понятие метрики позволяет определять на M понятия сходимости и непрерывнос
Рассмотрим $\{x_n\} \in M$

Определение 2. $x_n \to a \in M$ *если*

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N \ \rho(x_n, a) < \epsilon \tag{16}$$

Сохраняются многие свойства обычного предела $x_n \to a \iff \rho(x_n, a) \to 0, n \to \infty$

Предложение 3.1. $\exists \lim$ *то он единственный*

Proof. Пусть $x_n \to a_1$, $x_n \to a_2$, $a_1 \neq a_2$

$$\rho(a_1, a_2) \leq \rho(a_1, x_n) + \rho(x_n, a_{a_2}) \tag{17}$$

$$\rho(a_1, x_n) \to 0 \tag{18}$$

$$\rho(a_2, x_n) \to 0 \tag{19}$$

$$0 \leq \rho(a_1, a_2) \leq 0 \tag{20}$$

$$\rho(a_1, a_2) = 0 \implies a_1 = a_2 \tag{21}$$

□

Теперь надо ввести понятие непреывности. Пусть (M_1, ρ_1), (M_2, ρ_2) два метрических пространства

Рассмотрим $f : M_1 \to M_2$

Определение 3. *f непрерывно в точке $x_0 \in M_1$ если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) : \forall x \rho_1(x, x_0) < \delta : \rho_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon$*

Определение 4. *f непрерывна на $M_1 \iff$ она непрерывна в любой точке M_1*

Предложение 3.2. *Метрика ρ автоматически непрерывная функция $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$*

Proof. $\forall (x_0, y_0) \in M \times M$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) : \forall x : \rho(x, x_o) < \delta, \forall y \rho(y, y_0) < \delta \implies \overline{\rho}((x, y), (x_0, y_0)) < \epsilon \tag{22}$$

Пусть $\overline{\rho}((x, y), (x_0, y_0)) = \rho(x, x_0) + \rho(y, y_0)$

$$\delta = \frac{\epsilon}{2} \tag{23}$$

$$\overline{\rho((x, y), (x_0, y_0))} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{24}$$

□

Пример 4.1. *$\exists$ метрика в которой любая функция непрерывна*

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y \end{cases} \tag{25}$$

Определение 5. *$\{x_n\}$ называется фундаментальной (или последовательностью Коши) или сходящейся в себе, если*

$$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) : \forall n, m \geq N : \rho(x_n, x_m) < \epsilon \tag{26}$$

Другой вариант

$$\forall \epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N, \forall m \in \mathbb{N} : \rho(x_n, x_{n+m}) < \epsilon \tag{27}$$

Предложение 3.3. *В любом метрическом постранстве, если последовательность сходится, то она фундаментальная*

Proof. Пусть $x_n \to a \implies$

$$\forall \epsilon \exists N : \forall n \geq N, \rho(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2} \tag{28}$$

$$n, m \geq N \tag{29}$$

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{30}$$

□

Определение 6. *Метрическое пространство (M, ρ) если $\forall$ фундаментальная последова имеет предел (из фундаментальность следует сходимость)*

Теорема 1. *$\forall$ метрического пространства (M, ρ) $\exists$ полное метрическое пространство $\overline{M}, \overline{\rho}$*

$$M \subset \overline{M}, \overline{\rho}|_M = \rho \tag{31}$$

Пример 6.1. *Рассмотрим $\mathbb{Q}$ $\rho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$ Оно не полное*

$$\{r_n\} \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \tag{32}$$

$\{r_n\}$ фундаментальная последовательность в $\mathbb{R}$, значит она фундаментальная последовательность в $\mathbb{Q}$

4 Пространство Чебышева

Рассмотрим множество непрерывных функций $f[a; b] \to \mathbb{R}$ $C([a, b])$

Определение 7 (метрика Чебышева)**.**

$$\rho_C(f_1, f_2) = \max_{x \in [a,b]} |f_1(x) - f_2(x)| \tag{33}$$

$\exists$ max по теореме Вейерштрасса

1. ρ_C очевидно , $\phi_C(f_1, f_2) = 0 \iff \max_{[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)| = 0 \iff |f_1(x) - f_2(x)| = 0$

2. очевидно

3. $$\rho_C(f_1, f_2) \leq \rho_C(f_1, g) + \rho_c(g, g_2) \tag{34}$$

$$\max_{[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)| \leq \max_{[a,b]}(|f_1 - f| + |g - f_2|) \leq \max_{[a,b]} |f_1 - g| + \max_{[a,b]} |g - f_2| \tag{35}$$

Посмотрим, что означает сходимость по метреке Чебышева

$$f_n \to f \iff \rho_c(f_n, f) \to 0 \iff \max_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \tag{36}$$

Это равномерная сходмость $f_n \to$

Определение 8. *$f_n(x)$ сходится $f(x)$ поточечно $[a, b]$ если $\forall x \in [a, b]$, $f_n(x) \to f(f)$*

Определение 9. *$f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равно мено на $[a, b]$ если $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$ $\forall n \geq N$, то $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \forall x \in [a, b]$*

$$\max_{[a,b]} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \tag{37}$$

$[a, b] = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$

1. $x = 1, f_n(x) = 1$

2. $x \in [0, 1)$ $f_n(x) = x^n \to 0$

$$f_n(x) \to f(x) \begin{cases} 0, x \in [0, 1) \\ 1, x = 1 \end{cases} \tag{38}$$

$f \notin C$

Теорема 2. *Равномерный предел непрерывных функций есть непрерывная функция*

Теорема 3. *$C([a, b])$ с метрикой ρ_c полное*

Proof. $\{f_n(x)\}$ фундаментальная последовательность.

$$\forall \epsilon > 0 \forall x \in [a,b] \exists N = N(e,x) : \forall n,m \geq N \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \tag{39}$$

Так как $\mathbb{R}$ полно $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $\square$