# Математическая экономика

1. Дмитририев Антон Леонидович
2. dmitr7171@mail.ru
3. Элементы математической экономики, Экланд (как сказка на ночь)
4. Аллен Р.Г Математическая экономия
5. Тарасевич Микроэкономика
6. Микроэкономика практикум ii (Дмитриев)

## 1 Предпочтения

Нам надо научиться математически моделировать индивида.

**Определение 1** (Поведенческий Постулат)**.** *Лицо принимающее решение всегда выбирает наиболее предпочтительную для себя альтернативу*

Модель выбора должна содержать:

1. описание системы предпочтений ЛПР
2. множество альтернатив, доступных ЛПР

1. В основе выбора наилучшей альтернативы лежит сравнение возможных варианто
2. сравнение любых альтернатив предполагает их прямое или косвенное сопоставле

3. ЛПР сравнивают любую пару возможных вариантов по приницу лучше хуже. С точке срение математики задается бинарное отношение.

Пусть множество непустое ЛПР альтернатив. Рассмотрим множество всех упорядочени пар $(x, y)$, $(x, y) \sim (y, x)$ безразличие

**Определение 2** (Бинарное отношение)**.**

$$A \subseteq M \times M \tag{1}$$

**Определение 3** (Функция)**.** $\forall x \in M \exists ! y \in M$ *для которого справедливо* $xAy$

**Определение 4** (График)**.**

$$\Gamma = \{(x, y) \mid x, y \in M, xAy\} \tag{2}$$

**Определение 5** (Отношение предпочтения)**.** *Потребитель сравнивает два набора благ*

*1. строгое предпочтение (x лучше y)*

*2. слабое предпочтение $x$ не хуже $y$*

*3. безразличие, $x$ и $y$ одинаково хороши*

Рассмотрим символьную запись

1. $x \succ y$ $x$ строго лучше $y$

2. $x \succeq y$ $x$ не хуже $y$

3. $x \sim y$ $x, y$ одинакого предпочтительны

## 1.1 Гипотезы (аксиомы) о свойствах

1. **Полнота** для любых наборов выполняется $x \succeq y$ или $y \succeq x$

2. **Рефлексивность** для любого $x$ , $x \succeq x$

3. **Транзитивность**, есть три набора благ $x, y, z$

$$x \succeq y \wedge y \succeq z \implies x \succeq z \tag{3}$$

## 1.2 Непрерывность отношения

**Определение 6.** *Отношение на множестве $X$ непрерывно если для любого вектора $y \in X$ множества*

$$\{x \in X \mid x \succeq y\} \tag{4}$$

$$\{x \in X \mid x \preceq y\} \tag{5}$$

*являются замкнутыми*

**Определение 7** (Рациональное отнощение потребления)**.** *Определенное на множестве наборов благ $R^{n+}$ отношения предпочтения $\succeq$ называется рациональным, если оно является:*

1. *полным*
2. *рефлексивным*
3. *транзитивным*

## 1.3 Свойства рационального отношения предпочтения

В случае рациональность $\succeq$ :

1. $\succ$ антирефлексвно ( не выполняется $x \succ x$ ), транзитивно
2. $\succeq$ рефлексивно,транзитивно,симметрично
3. $x \succ y \succeq z \implies x \succ z$

## 1.4 Кривые безразличия

1. Зафиксируем некоторый набор благ $x'$ . Множество всех набор одинаково предпочтительных с $x'$, называется кривой безразличия, содержашей $x$

2. Поскольку кривая не сегла кривая в геометрическом смысле, то правильно говорить о множестве безразличия

$$I(x') = \{y \in R^{n+} \mid y \sim x'\} \tag{6}$$

$$\mathrm{WP}(x) \tag{7}$$

множество наборов не хуже $x$, $I(x) \subseteq \mathrm{WP}(X)$

Кривые безразличя не пересекаются, возникнет нарушение транситивности

## 1.5 Наклон кривых безразличия

1. Товар наличие которого в большем количестве всегда предпочтительнее меньшего называется **благом**

2. Если в наборе присутствуют только блага, то кривая безразличия имеет отрицател наклон, по отношению к осям соответсвующих благ

**Определение 8** (Антиблаго)**.** *Товар, наличие которого в наборе в меньшем количестве всегда предпочтительнее большего называется* ***антиблаго***

**Определение 9** (Совершенные заменители)**.** *Если потребитель в любых условиях считает два блага эквивалетными, то он совершенные заменители.*

*Если набор состояит из совершенных заменителей, то предпочтительность определяется общим количеством.*

**Определение 10.** *Если потрибитель во всех ситуациях исползует блага 1,2 в некоторой фиксированной пропорции, такие блага называются* ***совершенными дополняемыми***

$$U = \min(x_1, x_2) \tag{8}$$

**Определение 11.** *Набор благ, строго предпочитаемый всем другим, называется точкой насыщения*

**Определение 12.** *Отношение предпочтения мы будем называть локально ненасышенн дл любого набора $x \subseteq R^{n+}$ и произвольного числа $t > 0$ найдется $y \subseteq R^{n+}$ $y - x \preceq t$ и при этом $y \succeq x$*

1. Бесконечно делимое благо

2. Дискретное благо

**Определение 13.** *Рациональное отношение предпочтения, является регулярным если оно*

1. *монотонно, большее количество блага всегда предпочитается меньшему (наборы состоят только из благ)*

2. *выпуклое*

Выпуклая комбинация двух различных, но при этом одинаково предпочтительных наборов предпочтительных или по крайней мере не хуже, чем каждый из сотавляющих наборов

### 1.6 Наклон кривых безразличия

Вычисленный в конкретной тчоке наклон, кривой безразличия характеризует в ней предельную норму замены благ MRS (margina rate of substitution)

MRS в точке $x'$ характризует исчисленный в ней наклон кривойй безразличия, которому эта точка принадлежитю Геометрически MRS есть тангенс угла наклона касательной и кривой без различия в точке $x'$

MRS в точке $x'$ есть $\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ или иначе $\frac{dx_2}{dx_1}$ в точке $x'$

Если набор составлен из двух благ, то соответсвующие кривые имеют отрицатель наклон MRS $< 0$

Если набор включает одно благо и одно антиблаго MRS $> 0$

## 2 Полезность

**Определение 14.** *Функция полезност $U(X)$ описывает отношение предпочтения $\succeq$ тогда и только когда для двух наборов благ $x', x''$ верны следущие соотношения*

1. $x' \succ x'' \iff U(X') > U(x'')$

2. $x' \prec x'' \iff U(x') < U(x'')$

3. $x' \sim x'' \iff U(x') = U(x'')$

Непрерывное, монотонное возрастающее рциональное отношение педпочтения может быть представлено непреывной функцией полезности

**Определение 15** (непрерывность)**.** *Малые изменения набора благ, ведут малые изменения предпочтительности набора благ*

Полезность является порядковым (задающим упорядочение) понятием

**Пример 1.** $U(x) = 6, U(y) = 2$ *x строго предпочтительнее $y$, но при этом нельзя сказать, что $x$ в 3 раза предпочтительнее $y$*

**Пример 2.** *Рассмотрим наборы благ, представленные векторами* $(4, 1), (2, 3), (2, 2)$

*Допустим*

$$(2, 3) \succ (4, 1) \sim (2, 2) \tag{9}$$

*Поставим в соотсветвие этим наборам произвольные числа, сохранябщие упорядчение векторов по предпочтительности*

$$U(2, 3) = 6 > U(4, 1) = U(2, 2) = 4 \tag{10}$$

*Назовем эти числа уровнями полезности*

**Определение 16.** *Совокупность всех кривых безразличия называется картой кривых безразличия*

**Пример 3.** *Пусть* $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$ *описывает отношение* $\succeq$

$$V = U^2 = x_1^2 x_2^2 \tag{11}$$

$$V(2, 3) = 35 > V(4, 1) = V(2, 2) = 16 \tag{12}$$

$$(2, 3) \succ (4, 1) \sim (2, 2) \tag{13}$$

*$V$ сохраняет тоже самое упорядочение, что и $U$. Функция описывает одинаковое с $U$ отношение предпочтения*

$$W = 2U + 10 \tag{14}$$

$$W(2,3) = 22 > W(4,1) = W(2,2) = 18 \tag{15}$$

Если $U(x)$ является функцией полезности описыващей отношение предпочтения $\succeq$ на множестве неотриательных наборов блаш $R^{n+}$ , $f(U)$ есть строго возрастающая функция, одного аргумента, то зависимость $V = f(U)$ так же представляет собой функцию полезности, описывающую исходное отношение предпочтения $\succeq$

**Теорема 1** (о существовании непрерывной функции полезности)**.** *Пусть отношения предпочтения ЛПР $\succ$ является полным, рефлексивным, непрерывным и строго монотонным. Тогда существует непрерывная функция полезности $U : R^{n+} \to R$ описывающая данное отнощение предпочтения*

Рассмотрим $V = x_1+x_2$ ее кривые безразличия это прямые линии, состоящих из совершенных заменителей

Рассмотрим $W(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2$ ее кривые безразличия блага совершенные дополнители

Рассмотрим $U(x_1, x_2) = f(x_1)+x_2$ квазилинейная функция, является линейной только по $x_1$

**Определение 17** (Функция Кобба-Дугласа)**.**

$$U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b, a > 0, b > 0 \tag{16}$$

**Определение 18** (Предельная Полезность)**.** *Предельная полезность продукта $i$*

$$MU_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \tag{17}$$

**Пример 4.**

$$U(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^2 \tag{18}$$

$$MU_1 = \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^2 \tag{19}$$

$$MU_1 = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2 \tag{20}$$

Общее уравнение кривой безразличия функции полезности $U(x_1, x_2)$ иметт вид $U(x_1, x_2) = k, k > 0, k = \text{const}$. Полный дифференциал

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 = 0 \tag{21}$$