1 Учебники

1. Колмогоров
2. Люстерник, Соболев (Краткий Курс Функционального Анализа)
3. Вайнберг Функциональный Анализ
4. Бахарев

2 Метрические пространства

Пусть есть некоторое множество M, мы хотим ввести предел (непрерывность, производную и тд) на этом множестве.

Надо ввести расстояние (метрику).

Определение 1 (Метрика)**.** *Метрикой* ρ *на множестве* M *называется отображение* $\rho : M \times M \to [0, +\infty)$ *удовлетворяющее следущим свойствам (аксиомам):*

1. $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, u) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Пара (M, ρ) *называется метрическим пространством.*

Пример 1.1.

$$M = \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y| \tag{1}$$

Пример 1.2.

$$M = \mathbb{R}^n, ||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{2}$$

Пример 1.3 (Транспортная метрика (Матхэтеннская))**.**

$$\rho(A,B) = \min \text{ ломанная соединяющая } A, B \tag{3}$$

Пример 1.4. *M – город*

$$\rho(A,B) = \min \text{ время за которое можно добраться } A \to B \tag{4}$$

Пример 1.5. *M – множество всех непрерывных функций $f(t) : [0,1] \to \mathbb{R}$, $M = C([0,1])$*

$$\rho(f_1, f_2) = \max_{t \in [0,1]} |f_1(t) - f_2(t)| \tag{5}$$

max $\exists$ *по теореме Вейрштрасса*

$$(M, \rho) = C[0,1] \tag{6}$$

Это одно из ***важнейших*** *пространств функционального анализа*

Пример 1.6. *Обозначим $M = \{$Множество всех последовательностей$\{x_n\} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), x_k \in \mathbb{R}\}$*

$$\rho(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \tag{7}$$

1. *Ряд сходится для любых последовательностей так как мажорируется рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$*

2. *Докажем, что выполняется неравентство треугольника*

   Рассмотрим вспогательную функцию

$$f(t) = \frac{t}{1+t} : [0, +\infty] \to \mathbb{R} \tag{8}$$

Ясно что $f(t) = 1 - \frac{1}{1+t}$ *данная функция возрастаетс так как* $\frac{1}{1+t}$ *убывает. Отсюда следует, что*

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \tag{9}$$

$$f(|a+b|) \le f(|a|+|b|) \le f(|a|) + f(|b|) \tag{10}$$

Мы доказали неравенство треугольника для всех членов ряда

Рассмотим $\{z\}$

$$\frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|} = \frac{|x_n - z_n + z_n - y_n|}{1+|x_n - z_n + z_n - y_n|} \le \frac{|x_n - z_n|}{1+|x_n - z_n|} + \frac{|z_n - y_n|}{1+|z_n - y_n|} \tag{11}$$

$$\rho(x_n, y_n) \le \rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n) \tag{12}$$

Понятие метрики позволяет на метрическом пространстве (M, ρ) вводить «старые» понятия из анализа.

1. Открытый шар радиуса r с центром в точке x_0

$$B_r(x_0) := \{x \in M \mid \rho(x, x_0) < r\} \tag{13}$$

2. Замкнутый шар радиуса r с центром в точке x_0

$$\overline{B}_r(x_0) := \{x \in M \mid \rho(x, x_0) \le r\} \tag{14}$$

3. $X \subset M$ назывется открытым, если $\forall x \in X \; \exists B_r(x) \subset X$

4. Множество X называется замкнутым если дополнение к нему $(M \backslash X)$ является открытым

5. Точка x_0 называется внутренней точкой X, если $\exists B_r(x_0 \subset X$, X открытое $\iff$ любая точка внутренняя

6. x_0 называется предельной точкой множества X, если $\forall r > 0$ $B_r(x_0) \cap X$ содержит бесконечно много точек из X

7. x_0 называется изолированной точкой множества X если $\exists B_r(x_0) : B_r(x_0) \cap X = \{x_0\}$ Изолированная точка не может быть предельной

8. Точка x_0 называется внешней для множетсва X, если существует такой шар с центром в x_0, что его пересечение с X пусто

9. Точка x_0 называется граничной точкой множества X если $\forall r$ в шаре $B_r(x_0)$ содержатся точки как $x \in X$, так и $x \notin X$

Коллекция фактов (без доказательсва, упражнения, дз)

1. Другое определение замкнутости. X замкнуто $\iff$ содержит все свои предельные точки

2. Добавление к X всех его предельных точек называется пополнением X. Полученное множество обозначат $\overline{X}$

$$\overline{X} = X \cup \{ \text{ Пределные точки } \} \tag{15}$$

3. $\overline{X}$ замкнутое

4. X замкнутое $\iff X = \overline{X}$

5. Принцим трихотомии (деления на 3) $\forall$ множества X и $\forall x \in M$ возможен только один из трех вариантов

   (a) x внутренняя точка $x \in \operatorname{Int} X$

   (b) x граничная точка $x \in \delta X$

   (c) x внешняя точка

   Верны формулы

   (a) $\overline{X} = X \cup \delta X$

(b) $\overline{X_1 \cup X_2} = \overline{X_1} \cup \overline{X_2}$

(c) Объединение любого числа открытых множеств