

1 Основные понятия теории оптимизации

Определение 1 (Окрестность). Множество $U_\epsilon(X)$ называется окрестностью точки $X \in \mathbb{R}^N$, если существует $\epsilon > 0$ для любых $X' \in U_\epsilon(X)$ справедливо неравенство

$$0 \leq \|X - X'\| = \|\delta X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - x'_i)^2} \quad (1)$$

$$\delta X = (x_1 - x'_1, \dots, x_n - x'_n) \quad (2)$$

Определение 2 (Локальный экстремум). Точка $X^* \in D$ называется точкой локального экстремума (локального минимума или максимума), если существует $U_\epsilon(X^*)$ такая что в которой выполняется неравенство

$$f(X^*) \leq f(X) \text{ или } f(X^*) \geq f(X) \quad (3)$$

2 Постановка задачи оптимизации

Пусть даны:

1. функция $f(X)$ с областью определения $D_f, X \in D_f \subseteq \mathbb{R}^N$
2. множество D

Требуется найти $X^* \in D$ в которой функция достигает экстремального значения.

$$X^* : f(X^*) = \text{extr}_{(X \in D_f) \cap (X \in D)} f(X) \quad (4)$$

1. Если $D_f = D = \mathbb{R}^N$ такая задача называется задачей на безусловный экстремум.
2. Если $D_f \cap D \neq \emptyset$ и $D \subset \mathbb{R}^N$ или $D_f \subset \mathbb{R}^N$ то это задача на условный экстремум
3. Если $D_f \cap D = \emptyset$ экстремум не существует

Обычно задается не множество D , а система ограничений, его задающая

$$\psi_j(X) \leq, =, \geq 0, j = 1 \dots M \quad (5)$$

$$D = \{X \in \mathbb{R}^N \mid \psi_j(X) \leq, =, \geq 0, j = 1 \dots M\} \quad (6)$$

3 Условия существования безусловного экстремума

1. **Необходимые условия** – условия, которые вытекают из того факта, что рассматриваемая точка есть экстремум
2. **Достаточные условия** – условия, из которых следует, что рассматриваемая точка экстремум

Теорема 1 (Ферма одномерный случай). Пусть функция f задана на \mathbb{R} , и в некоторой точке дифференцируема. Если эта точка имеет в точке x^* локальный экстремум, то $f'(x^*) = 0$

Proof. Разложим в ряд Тейлора в форме Пеано

$$f(x^* + \delta x) = f(x^*) + f'(x^*)\delta x + o(\delta x) \quad (7)$$

$$f(x^* - \delta x) = f(x^*) - f'(x^*)\delta x + o(\delta x) \quad (8)$$

$$\begin{cases} f'(x^*)\delta x = f(x^* + \delta x) - f(x^*) \\ -f'(x^*)\delta x = f(x^* - \delta x) - f(x^*) \end{cases} \quad (9)$$

□

Теорема 2 (Необходимое условие экстремума первого порядка). Пусть функция $f(X)$ задана на \mathbb{R}^N , $X \in \mathbb{R}^N$, дифференцируема, $f(X^*) = \text{extr}_{X \in \mathbb{R}^N} f(X)$, то $\text{grad } f = 0$

Proof. Допустим, что точка X^* — точка локального минимума. Для произвольной переменной x_i^* рассмотрим f как $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_i, \dots, x_N^*)$ может рассматриваться как в окрестности $U_\epsilon(X^*)$ как функция одной переменной с минимумом в точке x_i^* , тогда $f'_{x_i}(x_i^*) = 0$ по теореме 1 \square

Определение 3. X стационарная точка, если $\text{grad } f(X) = 0$

Точки локального экстремума нужно искать среди стационарных точек

Пример 1. Найти стационарные точки функции

$$f(X) = \sum_{i=1}^N a_i x_i^2 \quad (10)$$

$$f'_{x_i} = 2a_i x_i = 0 \quad (11)$$

Такая система уравнений, имеет одно решение $X^* = (0, 0, \dots, 0)$

1. $\forall a_i \geq 0$ X^* — точка минимума
2. $\forall a_i \leq 0$ X^* — точка максимума

Пример 2.

$$f(X) = 5x_1^2 - 6x_2^2 \quad (12)$$

$$\begin{cases} f'_{x_1} = 10x_1 = 0 \\ f'_{x_2} = -12x_2 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Стационарная точка $(0, 0)$

$$f(x_1, 0) = 5x_1^2 \quad (14)$$

Возрастает

$$f(0, x_2) = -6x_2^2 \quad (15)$$

Убывает.

X^* – седловая точка

Теорема 3 (Необходимое условие экстремума второго порядка). Пусть функция f задана на \mathbb{R} , дважды непрерывно дифференцируема, тогда

$$1. f(x^*) = \min f(x) \implies f''(x^*) \geq 0$$

$$2. f(x^*) = \max f(x) \implies f''(x^*) \leq 0$$

Proof. Разложим функцию в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x^* + \delta x) = f(x^*) + f'(x^*)\delta x + \frac{1}{2}f''(x^*)(\delta x)^2 + o((\delta x)^2) \quad (16)$$

Так как x^* точка локального минимума (максимума)

$$f(x^* + \delta x) = f(x^*) + \frac{1}{2}f''(x^*)(\delta x)^2 \quad (17)$$

$$\frac{1}{2}f''(x^*)(\delta x)^2 = f(x^* + \delta x) - f(x^*) \quad (18)$$

$$1. f(x^*) \min \implies f(x^* + \delta x) - f(x^*) \geq 0$$

$$2. f(x^*) \max \implies f(x^* + \delta x) - f(x^*) \leq 0$$

□

Определение 4 (матрица Гессе).

$$H(X) = (f''_{x_i x_j})_{ij} \quad (19)$$

Это квадратная симметричная матрица

Определение 5. Квадратная матрица называется

$$1. \text{ Положительно определенной если } Q(X) = XAX^T > 0$$

$$2. \text{ Положительно полуопределенной если } Q(X) = XAX^T \geq 0$$

3. Отрицательно определенной если $Q(X) = XAX^T < 0$

4. Отрицательно полуопределенной если $Q(X) = XAX^T \leq 0$ Для любого $X = (x_1, \dots, x_N)$

Определение 6 (Угловые (ведущие) миноры). $M_i(A)$ определители i порядка расположенные вдоль главной диагонали A в первых i строках и столбцах с одинаковыми номерами

Определение 7 (Главные миноры). m_i матрицы A называют определители i порядка, расположенные вдоль главной диагонали в i строках и столбцах, полученных при вычеркивании из A строк и столбцов с одними номерами

Определение 8 (Условия Сильвестра). 1. Матрица A положительно определенная когда все угловые миноры положительны

2. Матрица A является отрицательно определенной, когда $\text{sgn } M_K(A) = (-1)^K$

3. Матрица A является положительно полуопределенной, когда она вырожденная и ее главные миноры ≥ 0

4. Матрица A является отрицательно полуопределенной, когда значение $m_k(A)$ либо равно 0 либо $\text{sgn}(m_k) = (-1)^k$

Теорема 4 (Необходимое условие экстремума второго порядка). Пусть функция f задана на \mathbb{R}^N и дважды непрерывно дифференцируема в некой окрестности $U_\epsilon(X^*)$ если в точке X^* f имеет локальный минимум (максимум), то Вычисленная в этой точке матрица Гессе, неотрицательно(неположительно) определена

Proof. Разложим функцию в ряд тейлора в $U_\epsilon(X^*)$

$$f(X^* + \delta X) = f(X^*) + \mathbf{grad} f(X) \delta x + \frac{1}{2} \delta X H(X^*) \delta X^T + o(\|\delta X\|^2) \quad (20)$$

Так как X^* точка локального экстремума

$$\frac{1}{2} \delta X H(X^*) \delta X^T = f(X^* + \delta X) - f(X^*) \quad (21)$$

□

Теорема 5. Рассмотрим $f(x)$, x^* стационарная точка, в окрестности точки существует непрерывная вторая производная

Если $f''(x) > (<) 0$ то x^* точка локального минимума (максимума)

Proof. Разложим f в $U_\epsilon(x^*)$ в ряд Тейлора

$$f(x^* + \delta x) = f(x^*) + f'(x^*)\delta x + \frac{1}{2}f''(x^*)(\delta x)^2 + o((\delta x)^2) \quad (22)$$

Так как x^* стационарная точка

$$\frac{1}{2}f''(x^*)(\delta x)^2 = f(x^* + \delta x) - f(x^*) \quad (23)$$

□

Теорема 6 (Достаточное условие экстремума). f задана на \mathbb{R}^N и имеет стационарную точку, **grad** $f(X^*) = 0$, в окрестности которой все вторые производные существуют и непрерывны. Если матрица Гессе $H(X^*)$ положительно (отрицательно) определена, то X^* локального минимума (максимума) функции f . Если $H(X^*)$ не является знако определенной, то экстремума в точке X^* нет

Proof.

$$f(X^* + \delta X) = f(X^*) + \mathbf{grad} f(X^*) * \delta X + \frac{1}{2}\delta X H(X^*) \delta X^T + o(\|\delta X\|^2) \quad (24)$$

$$\frac{1}{2}\delta X H(X^*) \delta X^T = f(X^* + \delta X) - f(X^*) \quad (25)$$

□

Теорема 7 (Частный случай прошлой теоремы для $N = 2$). $f(x_1, x_2)$ задана на \mathbb{R}^2 , $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ стационарная точка, в которой вторые производные существуют и непрерывны

1. Если в точке X^*

$$f''_{x_1} f(X^*) * f''_{x_2}(X^*) - (f''_{x_1 x_2}(X^*)) > 0 \quad (26)$$

то при

(a) $f''_{x_1}(X^*) > 0$, X^* точка локального минимума

(b) $f''_{x_2}(X^*) < 0$, X^* точка локального максимум

2. Если это не выполняется то локального экстремума в точке X^* нет

Определение 9. Для функции f определенной на \mathbb{R}^N вектор единичной длины задает направление убывания $w^\downarrow \in \mathbb{R}^N$ или возрастания $w^\uparrow \in \mathbb{R}^N$ в точке X' если при всех достаточно малых α выполняется

$$f(X' + \alpha w^\downarrow) < f(X') \quad (27)$$

$$f(X' + \alpha w^\uparrow) > f(X') \quad (28)$$

Определение 10. Направления убывания (возрастания) функции f в точке X' образуют множество направлений убывания (возрастания)

$$W_{X'}^\downarrow \subseteq \mathbb{R}^N \quad (29)$$

$$W_{X'}^\uparrow \subseteq \mathbb{R}^N \quad (30)$$

Точка X^* является точкой минимума функции $f(X)$ если существует $U_\epsilon(X^*)$ целиком содержащаяся в $W_{X^*}^\uparrow$

Теорема 8. Пусть $f(X)$ дифференцируема в точке $X' \in \mathbb{R}^N$

1. если вектор $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{grad} f(X') \mathbf{w} < (>) 0 \quad (31)$$

$$\text{то } \mathbf{w} \in W_{X'}^\downarrow (W_{X'}^\uparrow)$$

2. если $\mathbf{w}^{\uparrow(\downarrow)} \in W^{\downarrow(\uparrow)}$, то

$$\mathbf{grad} f(X') \mathbf{w}^{\downarrow(\uparrow)} \leq (\geq) 0 \quad (32)$$

Proof. 1.

$$f(X' + \alpha \mathbf{w}) = f(X') + \mathbf{grad} f(X') \alpha \mathbf{w} + o(\alpha) \quad (33)$$

$$\mathbf{grad} f(X')\alpha\mathbf{w} = f(X' + \alpha\mathbf{w}) - f(X') \quad (34)$$

Эквивалентно $\mathbf{w}^{\downarrow(\uparrow)} \in W^{\downarrow(\uparrow)}$

2. Пусть $\mathbf{w}^{\downarrow(\uparrow)} \in W^{\downarrow(\uparrow)}$ то

$$f(X' + \alpha\mathbf{w}^{\downarrow(\uparrow)}) - f(X') = \mathbf{grad} f(X')\alpha\mathbf{w}^{\downarrow(\uparrow)} \quad (35)$$

□

4 Методы нелинейной оптимизации

4.1 Классическая задача условной оптимизации

Определение 11 (Формулировка задачи условной оптимизации общем виде).

$$X^* : f(X^*) = \text{extr}_{X \in D} f(X) \quad (36)$$

$$D = \{X \in \mathbb{R}^N \mid \psi_j \leq, (=, \geq) 0, j = 1 \dots M, X \in \mathcal{P}\} \quad (37)$$

Определение 12. Вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ задает возможное направление в точке $X \in D$ на множестве допустимых значений D , есл при всех достаточно малых $\alpha > 0$, $X' = X + \alpha\mathbf{v} \in D$

Все возможные направления образуют в точке x функции $f(X)$ образуют множество возможных направлений $V_X \subseteq \mathbb{R}^N$

Теорема 9. Если точка X^* локальный минимум (максимум) задачи 36, то

$$W_{X^*}^{\downarrow(\uparrow)} \cap V_{X^*} = \emptyset \quad (38)$$

Proof. Предположим обратное тогда существует $\mathbf{r} \in W^{\downarrow(\uparrow)}$ Такой что при всех достаточно малых α

$$f(X^* + \alpha\mathbf{r}) < (>) f(X^*) \quad (39)$$

$$X^* + \alpha\mathbf{r} \in D \quad (40)$$

Следовательно X^* не является локальным минимумом (максимумом) f

□

Теорема 10 (Вейрштрасса). Пусть $D \subset \mathbb{R}^N$ замкнутое ограниченное множество $f(X)$ непрерывная функция определенная на D . Тогда на D существуют точки глобального минимума и максимума функции f

Определение 13. Классическая задача оптимизации – это задача оптимизации, в которой множество допустимых значений D определяется системой функциональных равенств

$$\psi_j(X) = 0, j = 1 \dots M, M < N \quad (41)$$

$$D = \{X \in \mathbb{R}^N \mid \psi_j(X) = 0, j = 1 \dots M\} \subset \mathbb{R}^n \quad (42)$$

Подразумевается что функции f, ψ_j определены на D

$$X^* : f(X^*) = \text{extr}_{X \in D} f(X) \quad (43)$$

Лемма 1. Если область допустимых значений содержит точку X' и ее окрестность $U_\epsilon(X')$, то

$$M < N \quad (44)$$

При этом предполагаем, что $\psi_j(X)$ дифференцируемые функции

Proof. разложим $\psi_j(X)$ в ряд тейлора в окрестности точки X'

$$\psi_j(X' + \delta X) = \psi_j(X') + \mathbf{grad} \psi_j(X') \cdot \delta X + o(||\delta X||) \quad (45)$$

$$\psi_j(X') = \psi_j(X' + \delta X) \quad (46)$$

Получили систему M линейных уравнений

$$\mathbf{grad} \psi_j \delta X = 0, j = 1 \dots M \quad (47)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial \psi_i(X')}{\partial x_i}, j = 1 \dots M \quad (48)$$

1. $M > N$ система является переопределенной либо не содержит решений, либо содержит линейно зависимые ограничения, которые могут быть отброшены

2. $M = N$ система имеет тривиальное решение, либо содержит линейно зависимые ограничения
3. $M < N$ система имеет бесконечно много решений, которые определяют допустимую окрестность

□

Лемма 2. Предположим, что область допустимых значений D содержит хотя бы одну точку $X' \in D$. Если $M < N$ и якобиан $\mathbf{J} = (\frac{\partial \psi_j(X)}{\partial x_i})$ имеет в этой точке ранг равный M , то $U_\epsilon(X') \subseteq D$

Proof. Пусть $X' + \delta X \notin D$, тогда

$$\psi_j(X' + \delta X) = \mathbf{grad} \psi_j(X') \cdot \delta X + o(\|\delta X\|) \neq 0 \quad (49)$$

Так как $M < N$ можно выбрать $P = N - M$ независимых переменных, обозначим их как $Z = (z_1, \dots, z_P)$. Оставшиеся зависимые $S = (s_1, \dots, s_M)$, $X = (Z, S)$

$$\Psi(X' + \delta X) = \mathbf{J}_0(X')\delta S^T + \mathbf{C}(X')\delta Z^T \neq 0 \quad (50)$$

$$\delta X = (\delta S, \delta Z) \quad (51)$$

$$\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_M)^T \quad (52)$$

$$\mathbf{J}_0(X') = (\frac{\partial \psi_j(X')}{\partial s_l})_{j=1\dots M, l=1\dots M} \quad (53)$$

$$\mathbf{C}(X') = (\frac{\partial \psi_j(X')}{\partial z_k})_{j=1\dots M, k=1\dots P} \quad (54)$$

Так как ранг якобиана \mathbf{J} равен M всегда можно сделать разделение что \mathbf{J}_0 будет невырождена

$$\delta S^T = -\mathbf{J}^{-1}(X')\mathbf{C}(X')\delta Z^T \quad (55)$$

где $\mathbf{C}(X')$ называется матрицей управления

$$\mathbf{J}_0\delta S^T + \mathbf{C}(X')\delta Z^T = 0 \quad (56)$$

$$\square(X' + \delta X) = 0 \quad (57)$$

Получили что окрестность $U_\epsilon(X')$ допустимой точки, содержащая отличные точки от X' , $X' + \delta X \in U_\epsilon(X') \subseteq D$ □

5 Метод множителей Лагранжа

Метод множителей Лагранжа сводит классическую задачу на условный экстремум к задаче на безусловный экстремум

Определение 14 (Функция Лагранжа).

$$L(\Lambda, \lambda_0, X) = \lambda_0 f(X) + \sum_{j=1}^M \lambda_j \psi_j(X) \quad (58)$$

Данная функция является функцией N переменных X , и $N + 1$ параметров λ

$$\frac{\partial L(\Lambda, \lambda_0, X)}{\partial x_i} = \lambda_0 \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{\partial \psi_j(X)}{\partial x_i} \quad (59)$$

Составим из частных производных вектор

$$\mathbf{L}'_X = \left(\lambda_0 \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{\partial \psi_j(X)}{\partial x_i} \right)_{i=1 \dots N} \quad (60)$$

Частные производные по координатам λ_j

$$\frac{\partial L(\Lambda, \lambda_0, X)}{\partial \lambda_j} = \psi_j(X), j = 1 \dots M \quad (61)$$

Если точка X^* является точкой локального условного экстремума, то

$$\psi_j(X^*) = 0, L(\Lambda, \lambda_0, X^*) = \lambda_0 f(X^*) \quad (62)$$

L имеет безусловный локальный экстремум при $\lambda_0 \neq 0, X^* \in D$

Теорема 11 (Правило множителей Лагранжа). Пусть в $U_\epsilon(X^*) \subset D$

1. $f, \psi_j(X)$ непрерывно дифференцируемы

2. ранг матрицы Якоби $\mathbf{J}(X) = (\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i})_{i=1 \dots N, j=1 \dots M}$ равен M

Если $f(X^*) = \text{extr}_{X \in D} f(X)$ то существуют $\lambda_0^* \neq 0, \Lambda^* \neq 0$, что точка $(\lambda^*, 1, X^*)$ является стационарной точкой задачи на безусловный экстремум функции Лагранжа

$$\text{grad } f(\Lambda^*, 1, X^*) = 0 \quad (63)$$

Proof. Пусть точка X^* точка экстремума задачи на условный. Чтоб точка была стационарной точкой функции загранижа

$$\lambda_0 \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{\partial \psi_j(X)}{\partial x_i} = 0, i = 1, \dots, N \quad (64)$$

$$\frac{\partial L(\Lambda, \lambda_0, X)}{\partial \lambda_j} = \psi_j(X) = 0, j = 1, \dots, M \quad (65)$$

$N + M$ уравнений, $N + M + 1$ переменная, если $\lambda_0 \neq 0$, то можно положить его равным $\lambda_0 = 1$, два случая

1. $\lambda_0 = 1$, система 64 линейна относительно Λ , ранг $\mathbf{J}(X^*) = M$, $(X^*, 1, \Lambda)$ стационарная точка
2. $\lambda_0 = 0$, система 64 имеет нулевое решение, строить функцию лагранжа нет смысла

□

$$L(\lambda, X) = f(X) \pm \sum_{j=1}^M \lambda_j \psi_j(X) \quad (66)$$

регулярная функция Лагранжа

Нам нужна будет Матрица Гессе для функции Лагранжа

$$\mathbf{H}(\Lambda, X) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{J}(X) \\ \mathbf{J}^T(X) & \mathbf{L}''_{XX}(\Lambda, X) \end{pmatrix} \quad (67)$$

$$\mathbf{L}''_{XX}(\Lambda, X) = \left(\frac{\partial L(\Lambda, X)}{\partial x_i x_j} \right)_{i=1 \dots N, j=1 \dots N} \quad (68)$$

$$\mathbf{J}(X) = \left(\frac{\partial \psi_j(X)}{\partial x_i} \right)_{j=1 \dots M, i=1 \dots N} \quad (69)$$

Теорема 12 (Необходимое условие второго порядка). Пусть в окрестности $U_\epsilon(X^*) \subset D$ точки $X \in \mathbb{R}^N$

1. функции f, ψ_j дважды непрерывно дифференцируемы

2. $\text{Rank } \mathbf{J}(X^*) = M$

Пусть точка X^* точка локального минимума (максимума) классической задачи на условный экстремум тогда для любых отклонений δX от точки X^* удовлетворяющих условию

$$\mathbf{grad} \psi_j(X^*) \cdot \delta X = 0 \quad (70)$$

или

$$\mathbf{J}(X^*) \delta X^T = 0 \quad (71)$$

в стационарной точке (Λ^*, X^*) функции Лагранжа выполняется

$$\delta X \mathbf{L}''_{XX}(\Lambda^*, X^*) \delta X^T \geq (\leq) 0 \quad (72)$$

Proof. Разложим функцию Лагранжа в ряд Тейлора в окрестности X^* с остатком в форме Пеано

$$L(\Lambda, X) = L(\Lambda^*, X^*) + \mathbf{grad} L(\Lambda^*, X^*)(\delta \Lambda, \Delta X) + \frac{1}{2}(\delta \Lambda, \delta X) H(\Lambda^*, X^*) \begin{pmatrix} \delta \Lambda^T \\ \delta X^T \end{pmatrix} + o(\|\delta \Lambda, \delta X\|^2) \quad (73)$$

$$f(X) = f(X^*) + \frac{1}{2}(\delta \Lambda, \delta X) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{J}(X^*) \\ \mathbf{J}^T(X^*) & \mathbf{L}''_{XX}(\Lambda, X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \Lambda^T \\ \delta X^T \end{pmatrix} \quad (74)$$

$$(\delta \Lambda, \delta X) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{J}(X^*) \\ \mathbf{J}^T(X^*) & \mathbf{L}''_{XX}(\Lambda, X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \Lambda^T \\ \delta X^T \end{pmatrix} = \delta X \mathbf{L}''_{XX}(\Lambda^*, X^*) \delta X^T \quad (75)$$

в силу 71

$$f(X) - f(X^*) = \delta X \mathbf{L}_{XX}''(\Lambda^*, X^*) \geq (\leq) 0 \quad (76)$$

□

Теорема 13 (Достаточное условие экстремума). *Дана классическая задача оптимизации*

*Предположим, что в окрестности допустимой точки X^**

1. $f(X), \psi_j(X)$ дважды дифференцируемы
2. $\text{Rank } \mathbf{J}(X^*) = M$
3. существуют не равные нулю (Λ^*, λ^*) такие что $\mathbf{grad} L(\Lambda^*, X^*) = 0$
4. существуют не нулевые отклонения δX от точки X^* , удовлетворяющие условиям

$$\mathbf{grad} \psi_j(X^*) \cdot \delta X = 0 \quad (77)$$

Для которых выполняется

$$\delta X \mathbf{L}_{XX}''(\Lambda^*, X^*) \delta X^T > (<) 0 \quad (78)$$

То X^ локального минимума (максимума) $f(X)$*

Теорема 14 (Достаточное условие в терминах матрицы Гессе функции Лагранжа).

Дана классическая задача оптимизации. Допустим в точке X^ , f, ψ_j дважды непрерывно дифференцируемы. Если существуют ненулевые значения множителей Лагранжа для которых (X^*, Λ^*) является стационарной точкой регулярной функции Лагранж*

$$L(\Lambda, X) = f(X) + \sum_{j=1}^M \lambda_j^M \lambda_j \psi_j \quad (79)$$

То X^ является:*

1. *точкой минимума $f(X)$*

$$\text{sgn}(M_{2M+k}(\mathbf{H})) = \text{sgn}((-1)^M), k = 1 \dots N - M \quad (80)$$

2. точкой максимума $f(X)$

$$\text{sgn}(M_{2M+k}(\mathbf{H})) = \text{sgn}((-1)^{M+1}) \quad (81)$$

6 Интерпретация множителей Лагранжа

$$X^* : f(X^*) = \text{extr}_{X \in D} f(X) \quad (82)$$

$$D = \{X \in \mathbb{R}^N \mid \phi_j(X) = b_j\} \subset \mathbb{R}^N \quad (83)$$

$$L(\Lambda, X) = f(X) - \sum_{j=1}^M \lambda_j (\phi_j(X) - b_j) \quad (84)$$

В стационарной точке (Λ^*, X^*)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^M \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}, i = 1 \dots N \quad (85)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{X^*} = \sum_{j=1}^M \lambda_j \left. \frac{\partial \phi_j}{\partial x_1} \right|_{X^*} \quad (86)$$

и так далее

Допустим, что X^* является точкой условного экстремума. Предположим что величины b_j варьируются, точки экстремума, значения функций f, ψ_j могут рассматриваться как функции параметров b_j

$$x_i^* = x_i(b_1, \dots, b_M), i = 1 \dots N \quad (87)$$

$$f(X^*) = f(X^*(b_1, \dots, b_M)) \quad (88)$$