Лекции по алгебре

Титилин Александр

1 Линейное пространство, свойства, примеры

Есть множество $\mathrm{L} = \{a, b, \dots\}$ и есть некоторое поле P

Определение 1. *L называется линейным пространством над полем P, если выполняются следущие условия*

1. $\forall a, b \in L\ \exists! c : a + b = c$
2. $\forall a, b, c \in L : (a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists \overline{0} \in L \forall a \in L a + 0 = a$
4. $\forall a \in L \exists \overline{a} \in L : a + \overline{a} = \overline{0}$
5. $a + b = b + a \forall a, b \in L$

И существует операция $\forall a \in L \forall \alpha \in P \exists! d \in L : \alpha a = d$

1. $\alpha, \beta \in P a \in L = (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
2. $\forall a, b \in L, \forall \alpha \in P \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
3. $\exists 1 \in P 1a = a \forall a \in L$
4. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \forall a \in L \forall \alpha, \beta \in P$

1.1 Свойства операций

1. $\exists! \overline{0}$ Пусть есть два ноля тогда их сумма может быть и первым и вторым значит они равны.
2. $\forall a \in L \exists! \overline{a}$ Предполагаем что для какого-то a обратный не единственный, найдется два обратных $\overline{a_1} + a + \overline{a_2}$

$$\overline{a_1} + (a + \overline{a_2}) = a_1 + \overline{0} = a_1.$$

$$(\overline{a_1} + a) + \overline{a_2} = (a + \overline{a_1}) + \overline{a_2} = \overline{0} + \overline{a_2} = \overline{a_2} + \overline{0} = \overline{a_2}.$$

3. $a, b \in L \exists c \in L : a = b + c$ c называется разностью a, b Докажем что разность существует для любых двух элементов и она единсвенная. $(a + \overline{b}) + b = a + (\overline{b} + b) = a + (b + \overline{b}) = a + \overline{0} = a$

4. $0a = \overline{0} \forall \in L$
$$a + 0a = 1a + 0a = (1 + 0)a = 1a = a.$$

5. $(-1)a = \overline{a} \forall a \in L$
$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0.$$

1.2 Примеры

1. Векторы на плоскости и в пространстве.

2. Векторы с n координат.

3. Матрицы из вещ чисел $n \times m$

4. $\{\overline{0}\}$ = L, $P = \mathbb{R}$

5. $L = R_+$ $P = \mathbb{R}$ $a + b = ab$ $\alpha a = a^\alpha$

6. L - множество всех полиномов степени не старше n $(P_n(t))$.

7. L - множество всех функций непрерывных на отрезке от 0 до 1.

Мы будем терминологически разделять компклесные и вещественные линейные пространства.

Определение 2. *Есть поле P, повесим над ним два линейных пространства L, L'. Эти два линейных пространства изоморфны друг другу, если между элементами существует биекция,такая что*

1. $(a + b)' = a' + b' \forall a, b \in L$ *Образ суммы равен сумме образов.*

2. $(\alpha a)' = \alpha a', \alpha \in P$

2 Линейная зависимость, базис, размерность

Рассмотрим $a_1, a_2, \ldots, a_n \in L$

Определение 3 (Линейная комбинация)**.**

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i.$$

Если линейная комбинация равна нулю, то она называется нулевой или тривиальной.

Определение 4 (Линейная независимость)**.** *Система элементов являются линейно независимыми, если их нулевая линейная комбинация достигается при всех нулевых коэффициентов.*

Определение 5 (Линейная зависимость)**.** *Если нулевую комбинацию можно получить, имея не нулевые коэффициенты, то она линейно зависимая*

2.1 Примеры

1. Векторы на плоскость $\vec{v_1} = \{0, 1\}\vec{v_2} = \{1, 0\}$

$$\alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = (\alpha, \beta) = 0 \implies \alpha = 0 \wedge \beta = 0.$$

2.2 Свойства

1. Если в системе элементов есть нейтральный элемент, то она линейно зависимая.
2. Если в системе есть два одинаковых, то она линейно зависимая.
3. Подномножество совокупность линейно зависимое $\implies$ вся совокупность линейно зависимая.
4. Все подмножества линейно независимой системы линейно независимые.

Теорема 1. *Система элементов линейно зависимой $\iff$ хотя бы один из элементов представлял собой линейную комбинацию остальных элементов.*

Доказательство. Необходимость. $\alpha_i \neq 0$ $\alpha_i a_i = -\alpha_1 a_1 - \cdots - \alpha_n a_n$ Достаточность $a_i = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_n a_n$ □

Теорема 2.

$$a_1, \ldots, a_k \in L, b_1, \ldots, b_m \in L.$$

Любой элемент второй системы можно представить как линейную комбинацию первой. $m > k \implies$ элементы b линейно зависимы

Доказательство. 1. $k = 1$

$$b_1 = \alpha_1 a_1.$$

$$b_2 = \alpha_2 a_1.$$

$$\ldots.$$

$$b_m = \alpha_m a_1.$$

$$-\alpha_2 b_1 + \alpha_1 b_2 + 0b_3 + \cdots + 0b_m = 0.$$

2. Утверждение теоремы верно для $k-1$

$$b_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \dots + \alpha_{1k}a_k.$$

$$b_i = a_{i1}a_1 + \dots a_{ik}a_k, i = 1 \dots m.$$

Если есть нулевой столбец альф, то а при этих альфах можем выкинуть и элементы b представляются k-1 элементом попали в индуктивное предположение. Нулевых столбцов нет. Мы можем предположить, что $\alpha_{11} \neq 0$

$$b'_2 = b_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} b_1.$$

$$b'_3 = b_3 - \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}} b_1.$$

Элементы b' зависимы по индуктивному предположению

$$\gamma_2 b'_2 + \gamma_3 b_3` + \dots \gamma_m b'_n = \overline{0}.$$

□

3 Базис и размерность линейного пространства. Переход к другому базису.

Пусть у нас есть линейное пространство L над полем P.

Определение 6 (Базис)**.** *Базисом линейного пространства L будем называть линейно независимую систему $e_1, \dots, e_n \in L$ такую что $\forall x \in L$ $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ Альфы – это координаты x по базису e.*

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. *Для выбраного элемента и базиса есть только один набор координат.*

Доказательство. Пусть существуют $x, e_1 \dots e_n$ такие что

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

□

Теорема 4.

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

$$y = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n y_n.$$

1. $x + y = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i)e_i$

2. $\lambda \in P \lambda x = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i)$

Определение 7 (Размерность)**.** *Линейное пространство* L $(\dim L = n)$ *Размерность* L *равна* n *если в этом пространстве существует система из* n *линейных независимых элементов, а любая система из* n *+1 линейно зависимая*

Если в линейном пространстве существует произвольное количество линейно независимых элементов то размерность бесконечная

Теорема 5. *Любые* n *линейные независимые элементы* n*-мерного пространства образуют базис.*

Доказательство. С линейной назависимостью все ясно. Берем произвольный $x \in L$ добавили его в линейно независимую систему, получили линейно зависимую.

$$\alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n \alpha x = 0.$$

$$x = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha} e_i.$$

□

Теорема 6. *Если есть базис из* n *элементов, то* $\dim L = n$

Доказательство. По последней теореме с прошлого занятия. Взяли $n + 1$ любых элементов из L, каждый из них раскладывается по базису. □

Теорема 7. *Любые два Лиреныйных пространства одинаковой размерности над одним полем изоморфны.*

Доказательство.

$$\dim L = \dim L' = n.$$

Назначим взаимно однозначное соответветсвие. У L базис $e_1, e_2, \dots, e_1$, У L' базис $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$. Биекция между базисами есть.

Берем $x \in L$

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n.$$

$$x' = \alpha_1 e'_1 + \dots + \alpha_n e'_n.$$

Действительно является изоморфизмом. □

Пусть в линейном пространстве два базиса $e_1, \dots, e_n \wedge e'_1 \dots e'_n$

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n = \alpha'_1 e'_1 + \dots + \alpha'_n e'_n.$$

$$e'_1 = p_{11} e_1 + p_{12} e_2 + \dots + p_{1n} e_n.$$

$$e'_i = p_{i1} e_1 + p_{i2} + \dots + p_{in} e_n.$$

Из р можем собрать матрицу.

$$e' = Pe.$$
$$e = P'e'.$$

Обе матрицы обратимы, значит обратимы, значит ранги обоих матриц равны n.

$$x = \alpha e = \alpha' e'.$$
$$\alpha e = \alpha' Pe.$$
$$\alpha = \alpha' P.$$
$$\alpha' = \alpha P^{-1}.$$

3.1 Пример

Есть плоскость, выбрали стандартный базис $e_1 = (0, 1), e_2 = (1, 0)$. Возьмем в качестве нового базиса эти векторы, повернутые на угол φ Нужна матрица преобразования.

$$e'_1 = \cos(\varphi)e_1 + \cos(\varphi)e_2.$$
$$e'_2 = -\sin(\varphi)e_1 + \cos(\varphi)e_2.$$
$$P = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

4 Подпространства и линейная оболочка

Определение 8 (Подпространство). *L – линейное пространство над $\mathbf{P}$. $L_1 \subset L$ называется подространством пространства L если $\forall x, y \in L_1 \forall \alpha, \beta \in \mathrm{P}$ $\alpha x + \beta y \in L_1$*

Любое линейное подпространство само является линейным пространством.

В пространстве выбрали подпространство L_1 ее базис образует линейно независимый набор элементов относительно L. Ее можно дополнить до базиса L

4.1 Примеры

1. Векторы на плоскости, которые лежат на осях.
2. Многочлены $P_n^0(t)$ – многочлены, которые в нуле имеют значение 0.

Задача на подумать. Размерность пространства полиномов, у которых сумма коэфициентов ноль.

Определение 9 (Линейная оболочка.). *В линейном пространстве L выбираем произвольное количество элементов. Линейной оболочкой этих элементов будем называть множество всех линейных комбинаций из этих элементов*

$$x, y, \ldots, \in L.$$
$$\alpha x + \beta y + \ldots \ \ \alpha, \beta \in \mathbf{P}.$$

$x, y \ldots$ система образующих

4.2 Пример

1. Комплексные числа – это линейная оболочка над $1, i$

Теорема 8. *Линейная оболочка является подпространством.*

Теорема 9. *Линейная оболочка является наименьшим подпространством содержащим систему $x, y, \dots$*

Любое линейное подпространство, которое содержит $x, y, z, \dots,$ будет содержать оболочку.

Теорема 10. *Размерность линейной оболочки равна количеству линейно независимых векторов в ее образующей системе.*

Доказательство. Размерность совпадает с количеством элементов в базисе. Взяли систему, нашли самое большой линейно-независмое подмножество. Остальные элементы это линейная комбинация этих элементов. □

Теорема 11. *Размерность линейной оболочки равна рангу матрицы, составленной из координат элементов образующей системы в произвольном базисе L.*

Доказательство.

$$x, y, z \dots \in L.$$

Каждый раскладываем по базису. □

5 Линейная независимость относительно подпространства. Сумма и пересечение подпространств.

Определение 10. *L – линейное пространство, в этом линейном пространстве есть линейное подпространство $L_1 \subset L$. $v_1, \dots v_k \in L$ Мы будем говорить, что эти элемены линейно независимые относительно L_1 , если*

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \in L_1.$$

выполняется, только если все альфы нули.

Теорема 12. *$L_1 \subset L, u_1 \dots u_m$ базис. Для того чтобы вектора $v_1, \dots, v_k$ Были линейно независимы относительно $L_1 \iff u, v$ была линейно независимой*

Доказательство. Прямой ход. Создаем линейную комбинацию относительно

$$\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m = 0.$$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = -\beta_1 u_1 - \dots - b_m u_m \in L_1.$$

Левая комбиация это ноль, так как линйно независима относительно L_1, правая линейно независима

Обратный предположим, что $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \neq 0 \in L_1$.

$$\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_k v_k = \gamma_1 u_1 + \dots \gamma_m u_m.$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i u_i = 0.$$

Противоречие. □

Определение 11 (Базис относительно подпространства)**.** *$v_1, \dots, v_k \in L$ будем называть базисом относительно $L_1 \subset L$ если*

1. *$v_1, \dots, v_k$ линейно независимы относительно L_1*
2. *$\forall x \in L$ $x = \alpha_1 v_1 + \dots \alpha_k v_k + y$ $y \in L_1$*

Теорема 13. *Для того, чтобы система была базисом была относительно L_1 необходимо и достачно система u, v была базисом L*

Доказательство. Необходимость. у представляем как линейную комбинацию u. Достаточность самим. □

$$L_j \subset L_{j-1} \subset \dots L_2 \subset L_1 \subset L.$$

Теорема 14. *Любую систему линейно независимую относительно L_1 до базиса L относительно L_1*

Доказательство. Есть система линейно независимая относительная L_1. u,v – линейно независимая совокупность дополним до базиса L. Получили базис относительно L_1, так как у нас выходит v, что дополнили + сумма из L_1 □

6 Сумма и пересечение подпространств.

Есть линенйное пространство L, L_1, L_2 его подпространства

Определение 12.

$$L_1 + L_2 := \{z \in L | z = x + y, x \in L_1, y \in L_2\}.$$

Определение 13.

$$L_1 \cap L_2 := \{x \in L | x \in L_1, x \in L_2\}.$$

Теорема 15. *Сумма и пересечение подпространств сами являются подпросранствами*

Теорема 16.

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim (L_1 + L_2) + \dim (L_1 \cap L_2).$$

Доказательство.

$$\dim L_1 = p.$$

$$\dim L_2 = g.$$

$$\dim (L_1 + L_2) = s.$$

$$\dim L_1 \cap L_2 = t.$$

$$L_1 : u_1, \ldots, u_p v_1 \ldots v_{p-t}\text{базис}.$$

$$L_2 : u_1 \ldots u_t w_1 \ldots w_{g-t}.$$

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

$$\alpha u + \beta v = -\gamma w = \nu u.$$

Левая штука из L_1 , правая из L_2. Они из пересечения. Через ν разложили в базисе пересечения

$$\nu u + \gamma w = 0.$$

Получили нулевую линейную комбинацию базиса L_2

$$\alpha u + \beta v = 0.$$

$$z \in L_1 + L_2.$$

$$t = x + y.$$

x, y разложили по базису □

7 Примеры

1. L – трехмерные вектора.

8 Алгоритм

Берутся векторы, которые не вошли в базис суммы, раскладываеются по базису суммы.Теперь берем базисный вектор пересечения (часть разложения, где только векторы из L_1)

9 Прямая сумма

$$\exists ! x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 : x = x_1 + x_2.$$

Множесвто таких иксов называется прямая сумма. $L_1 \oplus L_2$

Теорема 17.

$$L = L_1 \oplus L_2 \iff .$$

1. *$L_1 \cap L_2 = \{\emptyset\}$*

2. $\dim L = \dim L_1 + \dim L_2$

Доказательство. Предположим, что в пересечение есть не только нейтральный элемент.

$$\exists x \neq 0, x \in L_1 \cap L_2.$$

$$x = x + 0 = 0 + x.$$

Два разложения по L_1, L_2 В другую сторону. Есть базис в L_1, есть базис в L_2

$$L_1 : u_1, \ldots, u_k.$$

$$L_2 : v_1, \ldots, v_m.$$

Базис L можно соствить из объединения этих базисов.

$$\sum \alpha u + \sum \beta v = 0.$$

$$\sum \alpha u = -\sum \beta v.$$

Элемент из L_1 равен элементу из L_2, тоесть они из $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ произвольный элемент разложили по базису из L. Получили определение прямой суммы ☐

Теорема 18. *Для того чтобы $L = L_1 \oplus L_2 \iff$ обведиение базиса L_1 L_2 будет базисом L.*

Определение 14.

$$L_1 \subset L.$$

$$L_1^\nu - \textit{Дополнение до } L.$$

$$L_1 \oplus L_1^\nu = L.$$

10 Евклидовы и унитарные пространства

У нас есть линейное пространство E над полем P.

Определение 15 (Евклидовое пространство). *E – евклидово пространство.*

$$\forall x, y \in E \ \exists (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Ставится в соответсвие вещественное число, которое назовем скалярным произведением. Это отображение удовлетворяет следущим пунктам

1. $(x, y) = (y, x) \ \forall x, y \in E$
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \ \forall x, y, z$
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y) \ \forall x, y \in E, \forall \lambda \in P$
4. $(x, x) \geq 0 \forall x \in E (x, x) = 0 \iff x = 0$

10.1 Свойства.

1. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$
$$(y + z, x) = (y, x) + (z, x) = (x, y) + (x, z).$$
2. $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$
3. $(0, x) = 0$
4. $(\sum \alpha_i u_i, \sum \beta_j v_j) = \sum_i \sum_j \alpha_i b_j (u_i, v_j)$
5.

Теорема 19 (Неравенство Коши-Буняковского)**.** $\forall x, y \in E$ $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$

Доказательство. Если x или y равны 0, то се понятно. Рассмотрим
$$\lambda x - y.$$
$$(\lambda x - y, \lambda x - y) = (\lambda x, \lambda x) - (y, \lambda x) - (\lambda x, y) + (y, y) = \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \geq 0.$$
$$D = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0.$$
□

10.2 Унитарные пространства.

Определение 16 (Унитарные пространства)**.** *Линейное комплексное пространство называется унитарным, если любым двум элементам ставится в соответсвие комплексное число, которое называется скалярным произведением.* U

10.2.1 Свойства

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \forall x, y, z \in U$
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \forall x, y \in U, \lambda \in P$
4. $(x, x) \geq 0$ $\forall x \in U, (x, x) = 0 \iff x = 0$

10.2.2 Примеры

$$x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

$$y = (\beta_1, \dots, \beta_n).$$

$$(x, y) = \sum \alpha_i \overline{\beta_i}.$$

$$(x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x), (z, x)} = \overline{(y, z)} + \overline{z, x} = (x, y) + (x, z).$$

$$(x, \lambda x) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda}(x, y).$$

$$(\sum \alpha_i u_i, \sum \beta_j v_j) = \sum_i \sum_j .$$

Теорема 20.

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

Доказательство.

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) = |\lambda|^2 (x, x) - \overline{\lambda \overline{(x, y)}} - \lambda(x, y) + (y, y) \geq 0.$$

Рассмотрим частный случай

$$\lambda = |\lambda|(\cos\phi - i\sin\phi).$$

□

Теорема 21 (Теорема Грама)**.**

$$u_1, \dots, u_k \in E.$$

$$\Gamma = \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_2) & \dots & (u_1, u_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_k, u_1) & (u_k, u_2) & \dots & (u_k, u_k) \end{vmatrix}.$$

Вектора линейно зависимы

Доказательство. Дано, что вектора зависимы

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k = 0.$$

$$\alpha(u_1, u_1) + \dots \alpha_k(u_1, u_k) = 0.$$

Дальше так же умножили скалярно на остальные u. Получили однородную систему с ненулевым решением. Ее определитель ноль.
В обратную сторону. Используем опеределитель как определитель системы

$$\begin{cases} (u_1, u_1)\alpha_1 + \dots + (u_1, u_k)\alpha_k = 0 \\ \dots \\ (u_k, u_1)\alpha_1 + \dots + (u_k, u_k)\alpha = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases}(\alpha_1 u_1, \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k) = 0 \\ \dots \\ (\alpha_k u_k, \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k)\end{cases}.$$

Набор альф – ненулевое решение. Все сложили

$$(\sum \alpha u, \sum \alpha u).$$

$$\sum \alpha u = 0.$$

□

Определение 17 (Нормированный). *$x \in E$ нормированный, если $(x, x) = 1$*

Теорема 22. *Любой вектор кроме нуля, можно нормировать.*

Доказательство.

$$(x, x) = \lambda.$$

$$\frac{(x, x)}{\lambda} = 1.$$

$$(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}, \frac{x}{\sqrt{\lambda}}) = 1.$$

□

11 Ортогональность векторов и подпространств.

По умолчанию живем в евклидовом пространстве.

Определение 18 (Ортогональность). $x, y \in E, x \perp y := (x, y) = 0$

Определение 19 (Ортогональная система). *Систему векторов называем ортогональной, если все векторы попарно ортогональны и нет нуля.*

Определение 20 (Ортонормированная система.). *Если в системе ортогональной системе, все элементы нормированны, то она ортонормированная*

Теорема 23. *Ортогональная(ортонормированная) система,линейно независима*

Доказательство. Так как в определителе Грама, все нули, кроме главной диагонали. □

Следствие 23.1. *В n мерном евклидовом пространстве, ортогональная система не может содержать более n элементов.*

Следствие 23.2. *Если в ортогональной системе n – элементов. Она базис (ортогональный/ортонормированный базис).*

Будем называть ортонормированный базис естественным.

Определение 21 (Символ Кронекера). $e_1, \dots, e_n$ *– ортонормированный базис*

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} .$$

Теорема 24. *Всякую линейно независимую систему линейного пространства можно перевести в ортогональную линейными преобразованиями элементов*

$$x_1, \dots, x_k \in E.$$

Доказательство. Индукция по количество элементов в изначальной системе. Система из 1 элемента все ясно.
Предположим, что мы умеем взяв $k-1$ элемент превратить в $k-1$ ортогональный элемент. Возьмем систему из k линейно независимых элементов. Взяли $k-1$ по предположению превратили в ортогональную.

$$y_k = x_k + \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{k-1} y_{k-1}.$$

$$(y_k, y_i) = 0, i = 1, \dots, k-1.$$

$$0 = (y_k, y_1) = (x_k, y_1) + \alpha_1 (y_1, y_1).$$

$$\alpha_1 = -\frac{(x_k, y_i)}{(y_1, y_1)}.$$

$$\alpha_i = -\frac{(x_k, y_i)}{(y_i, y_i)}.$$

$$y_1 = x_1.$$

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1.$$

$$y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k, y_i)}{(y_i, y_i)} y_i.$$

□

Следствие 24.1. *В любом евклидовом пространстве существует ортогональный(ортонормированны базис.*

Следствие 24.2. *Любая ортогональная система элементов может быть дополнена до ортонормированного базиса.*

11.1 Свойства ортонормированного базиса.

$$E : e_1, \dots, e_n, (e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Ортонормированный базис

$$x, y \in E.$$

$$x = \sum \alpha e.$$

$$y = \sum \beta e.$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (e_i, e_j) = \alpha_i \beta_i + \dots \alpha_n \beta n.$$

В унитарном пространстве тоже самое, беты сопряженные.

1.
$$x \in E.$$
$$x = \sum \alpha e_1.$$
$$(x, e_1) = \alpha_1.$$
$$(x, e_i) = \alpha_i, 1 = 1 \dots n.$$

2.
$$e'_1, \dots, e'_n.$$

   Новый ортонормированный базис.

$$e' = Pe.$$

$$e = P^{-1} e'.$$

$$e'_1 = p_{11} e_1 + p_{12} e_2 + \dots + p_{1n} e_n.$$

$$e'_i = p_{i1} e_1 + p_{i2} e_2 + \dots + p_{in} e_n.$$

Определение 22. *Ортогональная матрица P – квадратная.*

$$PP^T = E.$$

$$E' \subset E.$$

Определение 23 (элемент ортогонален подпространству)**.** $x \perp L_1 \subset E := x \perp y \; \forall y \in L_1$

Определение 24.

$$L_1 \perp L_2 := \forall x \in L_1 \; \forall x \in L_2 x \perp y.$$

Теорема 25.

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset.$$

Теорема 26.
$$x \perp L_1.$$
Необходимо и достаточно, чтобы x был ортогонален всем элементам некоторого базиса L_1.

Доказательство. Необходимость понятно x ортогонален всем. Достаточность $y = \sum \alpha u$
$$(x, y) = 0.$$
□

Следствие 26.1. *Необходимо и достаточно, чтоб базисы L_1, L_2 были ортогональны.*

Определение 25. *Ортогональное дополнение $L_1 \subset E$*
$$L_1^{\perp} := \{y \in E \mid y \perp L_1\}.$$

Теорема 27. *Ортогональное дополнение – линенейно пространства.*

11.1.1 Построение ортогонального дополнения

Дополнили базис L_1 до базиса L $u_1, \dots, u_k, w_{k+1}, \dots, w_n$. Строим ортогональный базис применили Грама-Шмидта. $u_1', \dots, u_k', w_{k+1}', \dots, w_n'$ Дубльвэ из дополнения
$$y \in L^{\perp}.$$
$$y = \sum \alpha u' + \sum \beta w'.$$
$$(y, u_1') = 0 (\forall \alpha = 0).$$
ДубльВэ базис $L_1^{\perp}$

Теорема 28.
$$L_1 \oplus L_1^{\perp} = E.$$

Теорема 29.
$$(L_1 + L_2)^{\perp} = L_1^{\perp} \cap L_2^{\perp}.$$

Теорема 30.
$$(L_1 \cap L_2)^{\perp} = L_1^{T} + L_2^{T}.$$

Теорема 31.
$$(L_1^{\perp})^{\perp} = L_1.$$

Теорема 32. *Любые два евклидовых пространства одной размерности изоиорфны*

12 Проекция перпендикуляр точка. Длины, углы, расстояния.

$$L \subset E.$$

$$L_1 \oplus L_1^{\perp} = E.$$

$$\forall x \in \ E \exists!\ t \in L_1, z \in L^{\perp}\ x = y + z.$$

y – проекция на L_1, z – перпендикуляр.

12.1 Алгоритм

$$L_1 : u_1, \dots, u_k.$$

$$y = \sum \alpha u.$$

$$(x, u_1) = (y + z, u_1) = (y, u_1) = \alpha(u_1, u_1) + \dots + \alpha_k(u_k, u_1).$$

$$(x, u_i) = \alpha_1(u_1, u_i) + \dots \alpha_i(u_i, u_k).$$

Определитель этой системы не нуль, есть одно решение.

Теорема 33.

$$y = -\frac{1}{\Gamma}\begin{pmatrix} \gamma & u_1 & \\ \dots & \dots & \\ (x, u_1) & \dots & (x, u_k) \end{pmatrix}.$$

Определение 26. *Линейное пространство L называется нормированным, если*

$$\forall x \in L \exists!\ ||x|| \in P.$$

Называется нормой если выполняются следущие свойства

1. $||x|| \geq 0\ ||x|| = 0 \iff x = 0 \forall x \in L$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

1. $||x||_2 = \sqrt{(x, x)}$ – евклидова норма(норма 2)
2. $||x||_1 = \sum |\alpha_i|$
3. $||x||_\infty = \max \alpha_i$

Определение 27 (Расстояние между двумя элементами)**.**

$$x, y \in E.$$

$\rho(x, y) := ||x - y||$

1. $\rho(x,y) \geq 0$ $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$

Определение 28 (Углы)**.**

$$x, y \in E.$$
$$(\widehat{x,y}) \in [0, \pi].$$
$$\cos\widehat{(x,y)} = \frac{(x,y)}{||x|| * ||y||}.$$
$$|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}.$$

Теорема 34 (Теорема косинусов)**.**

$$||x-y||^2 = (x-y, x-y) = ||x||^2 + ||y||^2 - 2||x|| * ||y|| \cos\widehat{(x,y)}.$$
$$(||x|| - ||y||)^2 \leq ||x-y||^2 \leq (||x|| + ||y||)^2.$$
$$||x|| - ||y|| \leq ||x-y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

Определение 29 (Расстояние до подпространства)**.**

$$\rho(x, L_1) := \inf_{u \in L_1} \rho(x, u).$$

Определение 30.

$$\rho(L_1, L_2) = \inf_{u \neq 0 \in L_1, v \neq 0 \in L_2} \rho(u, v).$$
$$x \in E, L_1 \subset E.$$
$$u \in L.$$
$$\rho(x,u) = \rho(y+z, u) = ||x-u||^2 = ||y-u+z||^2 = ||y-u||^2 + ||z||^2.$$

Минимум этой фигни, когда $y = u$, вот так ищются расстояния между подпространствами.

$$\rho(x, L_1) = ||z||.$$

Определение 31.

$$(\widehat{x.L_1}) = \inf_{u \in L_1} (\widehat{x,u}).$$
$$\cos\widehat{x,y} = \frac{(x,u)}{||x||||u||} = \frac{||y||}{||x||}\cos\widehat{y,u}.$$

Эта фигня достигает максимума при $u = y$

$$(\widehat{x, L_1}) = (\widehat{x,y}).$$
$$a \perp L_1.$$
$$(x.a) = (z, a).$$
$$\frac{|(x,a)|}{||a||}.$$

13 Операторы

X , Y – линейные пространства над полем P.

Определение 32 (Операторы)**.**

$$\mathcal{A} : X \to Y.$$

Опреатором из X в Y мы будем называть отображение при котором

$$y = \mathcal{A}x.$$

Оператор линейный если

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in P.$$

$$\mathcal{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \mathcal{A}x_1 + \alpha_2 \mathcal{A}x_2.$$

13.1 Термины

1. Если оператор переводит в скаляр, то оператор называется функционалом.
2. Если $Y = X$ говорим что оператор действует в X.(оператор преобразования X)
3. Нулевой оператор, если $Y = \{0\}$, $\mathcal{O}x = 0$
4. $\mathcal{E}x = x \ \forall x \in X$

13.2 Примеры

1. $P_n(t)$

   $$\mathcal{A} : P_n(t) \to P_{n-1}(t).$$

   $$\mathcal{A}f(t) = f'(t).$$

   Оператор диференцирования, обычно обозначается $\mathcal{D}$
2. $\mathcal{I}f(t) = \int f(t)dt + c$

   $$\mathcal{I} : P_n(t) \to P_{n+1}(t).$$
3. Норма вектора – функционал.

13.3 Операции с операторами

Рассмотрим множество линейных операторов из X в Y.

1. Операторы равны, если $\forall x \in \mathcal{X} \ \mathcal{A}x = \mathcal{B}x$
2. Сложение операторов $\forall x \in \mathcal{X} \ (\mathcal{A} + \mathcal{B})x := \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$
3. $\forall x \in \mathcal{A} \lambda \in P (\lambda \mathcal{A})x := \lambda \mathcal{A}x$

Теорема 35. *Сумма и умножение линейных операторов есть линейный оператор*

Доказательство.

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = .$$

□

Теорема 36. *Множество линейных операторов и такие операции образуют линейное пространство.* $L(X, Y)$

13.4 Умножение операторов

$$\mathcal{B} : X \to Y.$$

$$\mathcal{A} : Y \to Z.$$

$(\mathcal{A}\mathcal{B})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x)$

13.4.1 Свойства

1. линейность
2. $(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C})$
3. $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}$
4. $\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \dashv + \mathcal{C}$
5. $\lambda(\mathcal{A}\mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B}$
6. $E\mathcal{A} = \mathcal{A}E = \mathcal{A}$

Доказательсва дома $L(X, X)$ – образуют кольцо с 1.

Теорема 37. *Степени оператора коммутативны*

14 Ядро и образ, ранг и дефект

Рассмотрим $\mathcal{A} \in L(X, Y)$

Определение 33 (Ядро оператора)**.**

$$\ker \mathcal{A} := \{x \in X | \mathcal{A}x = 0\}.$$

$$\ker \mathcal{A} \subset X.$$

Теорема 38. *Ядро образует подпрострастно* X*.*

Определение 34 (Дефект)**.**

$$def \mathcal{A} := \dim \ker \mathcal{A}.$$

Определение 35 (Образ).

$$im\mathcal{A} := \{\mathcal{A}x | x \in X\}.$$

$$y_1, y_2 \in im\mathcal{A}.$$

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \mathcal{A}\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

Определение 36 (Ранг).

$$r\mathcal{A} := \dim im\ \mathcal{A}.$$

14.1 Свойства

1. Дефект меньше или равен размерности X

$$def0 = \dim X.$$

$$defE = 0.$$

2. Ранг меньше или равен Y

Теорема 39.

$$\forall \mathcal{A} \in L(X, Y).$$

$$rank\mathcal{A} + def\mathcal{A} = \dim X.$$

Доказательство.

$$\ker \mathcal{A} : u_1, \ldots, u_k - \text{Базис}.$$

$$u_1, \ldots, u_k, v_1 \ldots, v_{n-k}.$$

Дополнили базис ядра до базиса X.

$$\mathcal{A}v_1 \ldots \mathcal{A}v_{n-k}.$$

Построили из этой фигни линейную комбинацию нулевую и линейность оператора

$$\sum \alpha \mathcal{A}v = 0.$$

Комбинация из ядра. Разложили по базису ядра приравняли, перенесли, получили линейная комбинация из базиса равна нулю. Таким образом

$$\mathcal{A}v_1 \ldots \mathcal{A}v_{n-k} \text{ Базис Образа}.$$

$$\exists y \in Im \implies \exists x \in Xy = \mathcal{A}x.$$

x разложили по базису получили линейную комбинацию $\mathcal{A}v_1, \ldots, \mathcal{A}v_{n-k}$ □

Теорема 40.

$$A, B \in L(X, X).$$

$$rankAB \leq rankA.$$

$$defA \leq defAB.$$

$$rangB \leq rankB.$$

Теорема 41.

$$rankAB \geq rangA + rangB - \dim X.$$

Доказательство.

$$kerAB : u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_{p+q}.$$

$$q = defb.$$

$$\sum \beta Bu = 0.$$

$$B(\sum \alpha u) = 0.$$

□

15 Невырожденные операторы

Определение 37.

$$\mathcal{A} \in L(X, X).$$

Оператор называется невырожденым если в его ядре только нейтральный элемент.

$$\ker \mathcal{A} = \{0\}.$$

15.1 Свойства

1. $im\mathcal{A} = X$
2. $\forall x \in X \exists! y = \mathcal{A}x$
3. Произведение невырожденных операторов являетс невырожденным

Давайте предоложим

$$\exists y \in X \ y = \mathcal{A}x_1, y = \mathcal{A}x_2.$$

$$0 = \mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 = \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0.$$

$$x_1 - x_2 \in \ker \mathcal{A}.$$

Определение 38. *Рассмотрим оператор из X в X.*

$$x = \mathcal{A}^{-1}y.$$

Обратный оператор

Теорема 42. *Обратный оператор линейный*

Доказательство.

$$y_1 = \mathcal{A}x_1.$$

$$y_2 = \mathcal{A}x_2.$$

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \mathcal{A}\alpha y_1 + \mathcal{A}\beta y_2.$$

$$.$$

□

Теорема 43. *Обратный оператор невыражденный*

Доказательство.

$$\mathcal{A}^{-1}y = 0.$$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}y = \mathcal{A}0 = 0.$$

$$y = 0.$$

□

Теорема 44.

$$\mathcal{A} \in L(X, X).$$

$$\mathcal{A}^2 = 0 \iff im\mathcal{A} \subset \ker A.$$

Теорема 45.

$$\mathcal{P}x = y.$$

$$x = y + z.$$

$$y \in L, z \in L^{\perp}.$$

16 Матрица операторов

$$\mathcal{A} \in L(X, Y).$$

$$X : e_1, \dots, e_n - \text{Базис.}$$

$$Y : q_1, \dots, q_m - \text{Базис.}$$

$$x \in X.$$

$$x = \sum \alpha_j e_j.$$

$$y = \mathcal{A}x = \sum \alpha_j \mathcal{A}e_j.$$

$$y = \sum \beta_i q_i.$$

$$\mathcal{A}e_1 = a_{11}q_1 + a_{21}q_2 + \dots + a_{m1}q_m.$$

$$\mathcal{A}e_2 = a_{12}q_1 + \dots a_{m2}q_m.$$

$$\mathcal{A}e_n = a_{1n}q_1 + a_{2n} + \dots a_{mn}q_m.$$

Из а собрали матрицу

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}q_i.$$

$$y = \sum_{i=1}^{m} \beta_i q_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\sum_{i=1}^{m} a_{ij}q_i) = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j) q_i.$$

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j.$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

$$Y_q = A_{qe}X_e.$$

A_{qe} – матрица оператора в паре базисов e,q. Размер A – $\dim X \times \dim Y$

16.1 Переход к новой матрице оператора

$$\mathcal{A} \in L(x, Y).$$

$$x \in X.$$

$$x = x_e^T e = x_{e'}^T e'.$$

$$y = y_g^T g = y_{g'}^T g'.$$

$$e' = Pe.$$

$$g' = Qg.$$

$$x_e^T e = x_{e'}^T Pe.$$

$$x_e^T = x_{e'}^t P.$$

$$x_e = P^t x_{e'}.$$

$$y_q = Q^T y_{g'}.$$

17 Собственные числа

Рассмотрим $\mathcal{A} \in L(X, X)$

Определение 39.

$$\mathcal{A} \in L(X, X).$$

$$x \in X, x \neq 0.$$

x является собственным вектором опреатора $\mathcal{A}$ соответствующим собсвенному числу $\lambda \in P$

$$\mathcal{A}x = \lambda x.$$

Теорема 46. *Есть оператор, есть набор собственных чисел. Для каждого из них нашли собственный вектор. Они линейно независимые*

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0.$$

$$\mathcal{A} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0.$$

$$\sum_{i=1} \alpha_i \lambda_i x_i = 0.$$

На первую фигню умножили λ_k

Доказываем по индункции по k. Система из 1 собственного вектора независима, так как он не ноль. Из второй фигни отняли первую после умножения

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) x_i = 0.$$

Все коээфициенты нули по индуктивному предположению. Лямбды разные, значит альфы нули. $\implies \alpha_k = 0$ $\square$

Следствие 46.1. *Количество собственных чисел у оператора $\leq \dim X$*

Следствие 46.2. *Если равно размерности, то собственные векторы образуют базис.*

17.1 Как найти собственные числа оператора.

$$X : e_1, \ldots, e_n \text{ БАЗИС}.$$

$$A_e.$$

$$\mathcal{A}x = \lambda x.$$

$$A_e x_e = \lambda x_e = \lambda E x_e.$$

$$(\lambda E - A_e)x_e = 0.$$

$$(\lambda \mathcal{E} - \mathcal{A})x = 0.$$

оператор вырожденный. Эта фигня система линейных уравнений

$$\det \lambda E - A_e = 0.$$

Эта хуйня многочлен от лямбды степени n. Его корни это собственные числа.

Дальеш ищем собственные вектора – решения уравнения не равные 0 $(\lambda E - A_e)e = 0$ для конкретного лямбда.

17.2 Еще собственные числа

Геометрическая кратность – размерность собственного подпространства
Алгебраическая кратность – кратность собтвенного числа как кратность характеристического полинома.

Определение 40 (спектр)**.** *Множество собсвенных чисел.*

$$\ker(\lambda^* E - A_e).$$

l – геометрическая кратность λ^*,k – алгебраическая кратность λ^*

$$u_1, \ldots, u_l - -\text{Базис собственного подпространства.}$$

дополнили до базиса всего пространства. Этим базисом строим базис оператора . Первые l столбоцов имеют одну лямбду со звездой и нули. Характеристический полином гарантированно имеет $(\lambda - \lambda^*)^l$

18 Сопряженный оператор

$$\mathcal{A} \in L(X, Y).$$

Определение 41 (Сопряженный оператор)**.** $\mathcal{A}^*$ *сопряженный к* $\mathcal{A}$ *если*

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y).$$

$$\forall x \in X, y \in Y.$$

Теорема 47.

$$\forall \mathcal{A}\ \exists! \mathcal{A}^*.$$

Доказательство.

$$X : e_1, \ldots, e_n.$$

Ортонормированный базис.

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i.$$

$$A^*y = \sum_{i=1}^{n} (\mathcal{A}^*y, e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{(e_i, A^*y)e_i} = \sum_{\overline{(\mathcal{A}e_i)}e_i} = \sum_{i=1}^{n} (y, \mathcal{A}e_i)e_i.$$

$$A^*y = \sum_{i=1}^{n} (y, \mathcal{A}e_i)e_i.$$

□

18.1 Свойства

1. $(\mathcal{A}^*)^*$
2. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = A^* + B^*$
3. $(\alpha\mathcal{A})^* = \overline{\alpha}\mathcal{A}^*$
4. $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$
5. $(\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1}$

$$\mathcal{A}^*y = 0.$$

$$\sum_{i=1}^{n} (y, \mathcal{A}e_i)e_i = 0.$$

$$(y, \mathcal{A}e_i) = 0 \ \forall i.$$

$$\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n \text{ БАЗИС}.$$

$$\mathcal{A}u = x, \mathcal{A}^*v = y.$$

$$(x, (\mathcal{A}^{-1})^*y) = (\mathcal{A}^{-1}x, y) = (u, \mathcal{A}^*v) = (\mathcal{A}u, v) = (x, (\mathcal{A}^*)^{-1}y).$$

19 Матрица сопряженного оператора

$$X : e_1, \dots, e_n.$$

$$Y : g_1, \dots, g_m.$$

Ортонормированные базисы

$$\mathcal{A}e_j = \dots + a_{ij}g_i + \dots.$$

$$a_{ij} = (\mathcal{A}e_j, g_i).$$

$$\mathcal{A}^*_{eg}.$$

$$a^*_{ij} = (\mathcal{A}^*g_j, e_i) = \overline{(e_i, A^*g_i)} = \overline{(\mathcal{A}e_i, g_j)} = \overline{a_{ji}}.$$

Матрица сопряженного оператора – сопряженная матрица оператора

$$\ker \mathcal{A}, im\mathcal{A}^* \subset X.$$

$$\ker A^*, imA \subset Y.$$

20 Нормальный оператор, унитарный оператор, самосопряженный оператор.

Определение 42. *Оператор называется нормальным, если*

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}.$$

$$\mathcal{A}x = \lambda x.$$

$$A^*x = \overline{\lambda}x.$$

Теорема 48. *Оператор в унитарном пространстве нормальный* $\iff$ *Оператор имеет базисную систему ортонормированных векторов из собственных векторов.*

Определение 43. *Оператор из X в X. Называется унитарным, если*

$$\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{E}.$$

Теорема 49. *Нормальный оператор унитарный* $\iff$ *все его собственные числа по модулю равны 1.*

Теорема 50. *Есть возможность из собственных векторов построить ортонормированный базис. Возьмем нормированный собственный вектор $(e, e) = 1 = (e, \mathcal{U}^*\mathcal{U}e) = (\mathcal{U}e, \mathcal{U}e) \leq |\lambda^2|$*

Теперь в другую сторону. Взяли базис из собственных ортонормированных векторов

$$\mathcal{U}e_i = \lambda_i e_i.$$

$$x = \sum \alpha e.$$

$$\mathcal{U}x = \sum \alpha\lambda e.$$

$$\mathcal{U}^*\mathcal{U}x = \sum \alpha\lambda\overline{\lambda}e = \sum \alpha e = x.$$

Теорема 51. *Оператор унитаный* $\iff$ *скалярное произведение образов равно произведение прообразов*

$$(x, y) = (\mathcal{U}x, \mathcal{U}y)\ \forall x, y \in X.$$

Доказательство.

$$(x, y) = (x, \mathcal{U}^*\mathcal{U}y) = (\mathcal{U}x, \mathcal{U}y).$$

В другую сторону

$$(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = (x, \mathcal{U}^*\mathcal{U}y).$$

$$0 = (x, (\mathcal{E} - \mathcal{U}^*\mathcal{U})y).$$

□

Теорема 52. *Линейный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис $\implies$ он унитарный*

Доказательство.

$$(x, y) = \sum \alpha\overline{\beta}.$$

$$\mathcal{U}x = \sum \alpha\mathcal{U}e.$$

$$\mathcal{U}y = \sum \beta\mathcal{U}e.$$

□

Определение 44. *Оператор, действующий в унитарном пространстве называется самосопряженным (эрмитовым)*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^*.$$

Теорема 53. *Оператор эрмитовый $\iff$ все его собственные числа вещественные*

Доказательство. Пусть все собственные числа вещественные. Так как оператор нормальный из собственных векторов (ортонормированный),получаем диагональную матрицу, на диагонялях эти числа. Сопряженная матрица такая же. Операторы совпадают, так как матрицы совпадают в одном базисе.

Пусть оператор самосопряженный. Берем собственное число и собственный вектор, соответсввующий этому числу. Нормируем вектор

$$\mathcal{H}x = \lambda x, ||x|| = 1.$$

$$\lambda = (\lambda x, x) = (\mathcal{H}x, x) = (x, \mathcal{H}^* x) = (x, \mathcal{H}x) = \overline{\lambda}.$$

$$\lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

Определение 45. *Эрмитов оператор называется положительно определенный, если*

$$(\mathcal{H}x, x) > 0 \ \forall x \neq 0.$$

Определение 46. *Эрмитов оператор называется отрицаетльно определенный, если*

$$(\mathcal{H}x, x) < 0 \ \forall x \neq 0.$$

Теорема 54. *Оператор положительно определенный $\iff$ все его собственные числа больше 0*

Доказательство. Дан эрмитов оператор все собственные числа больше нуля. Берем ортонормированный базис из собственных векторов

$$x = \sum \alpha e.$$

$$(\mathcal{H}\sum \alpha e, \sum \alpha e) = (\sum \alpha\lambda e, \alpha e) = \sum \alpha\overline{\alpha}\lambda = \sum |\alpha|^2\lambda.$$

□

20.1 Свойства положительно определенного оператора

Возьмем 2 положительно определенных оператора

$$\alpha_1\mathcal{H}_1 + \alpha_2\mathcal{H}_2.$$

Такая сумма самосопряженная

$$(\alpha_1\mathcal{H}_1 + \alpha_2\mathcal{H}_2)^* = \overline{\alpha_1}\mathcal{H}_1^* + \overline{a_2}\mathcal{H}_2^*.$$

$$(\alpha_1\mathcal{H}_1 x + \alpha_2\mathcal{H}_2 x, x) = .$$

У положительно определенного оператора есть обратный.

$$\mathcal{A}\mathcal{H}\mathcal{A}^*.$$

$$\mathcal{S}^2 = \mathcal{H}.$$

$$\mathcal{S}x_i = \sqrt{\lambda_i}x_i.$$

20.2

$$\mathcal{A} \in L(X, Y).$$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^*.$$

$$\mathcal{A}^*\mathcal{A}.$$

$$(\mathcal{A}^*\mathcal{A})^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}.$$

$$(\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) \geq 0.$$

Такие операторы самосопряженные и положительно определенные.

20.3

$$\mathcal{A} = L(x, X).$$

Теорема 55.

$$\exists \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2.$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2.$$

Доказательство.

$$\mathcal{A}^* = (\mathcal{H}_1 + i\mathcal{H}_2)^* = \mathcal{H}_1 - i\mathcal{H}_2.$$

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*).$$

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2i}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*).$$

□

21 Квадратичные формы

Определение 47. *Однородный полином от нескольких букв – полином где сумма степеней у букв каждого слагаемого равна*

Определение 48. *Квадратичная форма – однородный полином второго порядка*

$\phi(x) = \phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots a_{1n}x_1x_n + \dots a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_2nx_2x_n + \dots + a_{n1}x_nx_1$

x – вектор размерности n

$$x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_2^2 + x_3^2.$$

$x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n) + x_2(a_{21}a_1a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) + \dots + x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n).$

В матричной форме пы получили умножение строки x на столбцы. Каждая скобка напоминает левую часть линейного уравнения

$$x^T Ax.$$

$$\phi(x) = \phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = x^T Ax.$$

A – матрица квадратичной форма

Определение 49. *Симметричная матрица $A = A^T$*

21.1 Пример

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 3x^2.$$

$$x_1^2 - 3x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3.$$

21.2 Преобразовани квадратичных форм

Введем такую запись $x = By$ линейное преобразование переменных B – матрица

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 - y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_2 - y_3 \end{cases}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$y^T B^T ABy.$$

Это осталось квадратичной формой.

$$(B^T AB)^T = B^T AB.$$

B должна быть невырожденной матрицей, иначев выходит хуйня какая-то.

Лемма 56. *У нас есть квадратичная форма $a_{11} = 0$ Если в квадратичной форме, есть хотя бы один квадрат можно такое преобразование что $b_{11} \neq 0$*

$$x_2^2 + 2x_1x_2 - 3x_3^2 + 4x_2x_3.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Если переименовать переменные $x_1 = y_2, x_2 = y_2, x_3 = y_3$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$x_1 = y_k.$$

$$x_k = y_1.$$

$$x_i = y_i.$$

Лемма 57.

$$a_{ii} = 0 \forall i.$$

$$\exists a_{ij} \neq 0.$$

$$x_i = y_i + y_j.$$

$$x_j = y_i - y_j.$$

$$x_k = y_k \forall k \neq ij.$$

Матрица такой хуйни на главной диаганали 1 $a_{ij} = 1, a_{ji} = -1$ к i строке прибавили строку j получили нижнетреугольную матрицу, определитель такой матрицы -2

Теорема 58. *Существует линейное преобразование переменных с невырожденнной матрицей, приводящая квадратичную форму к диагональному виду.*

Доказательство. Индукция по количесву x, если x один, то такая форма ax_1^2 уже в диагональном виде Предположим, что умеем переводить квадратичную форму из n-1 к диагональному виду Соберем из квадратичной формы их n иксов, где x_1 встречается и где такого нет. Оставшиеся – квадратичная форма из n - 1 обозначит ее $\psi(x_2 \ldots, x_{n)}$

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots 2a_{1n}x_1x_n = a_{11}(x_1^2 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}a_1x_n).$$

$$(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n)^2 - (\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n)^2.$$

$$a_{11}(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \ldots \frac{a_{1n}}{a11} x_n)^2 + \tau(x_2, \ldots, x_n).$$

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a11} x_n.$$

$$y_i = x_i.$$

$$\phi(x) = a_{11} y_1^2 + \tau(y_2, \ldots, y_n).$$

$$x_1 = y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} y_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}.$$

□