

# Лекции по алгебре

Титилин Александр

## 1 Линейное пространство, свойства, примеры

Есть множество  $L = \{a, b, \dots\}$  и есть некоторое поле  $P$

**Определение 1.**  $L$  называется линейным пространством над полем  $P$ , если выполняются следующие условия

1.  $\forall a, b \in L \exists! c : a + b = c$
2.  $\forall a, b, c \in L : (a + b) + c = a + (b + c)$
3.  $\exists \bar{0} \in L \forall a \in L a + \bar{0} = a$
4.  $\forall a \in L \exists \bar{a} \in L : a + \bar{a} = \bar{0}$
5.  $a + b = b + a \forall a, b \in L$

И существует операция  $\forall a \in L \forall \alpha \in P \exists! d \in L : \alpha a = d$

1.  $\alpha, \beta \in P a \in L : (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
2.  $\forall a, b \in L, \forall \alpha \in P \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
3.  $\exists 1 \in P 1a = a \forall a \in L$
4.  $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \forall a \in L \forall \alpha, \beta \in P$

### 1.1 Свойства операций

1.  $\exists \bar{0}$  Пусть есть два нуля тогда их сумма может быть и первым и вторым значит они равны.
2.  $\forall a \in L \exists \bar{a}$  Предполагаем что для какого-то  $a$  обратный не единственный, найдется два обратных  $\bar{a}_1 + a + \bar{a}_2$

$$\bar{a}_1 + (a + \bar{a}_2) = a_1 + \bar{0} = a_1.$$

$$(\bar{a}_1 + a) + \bar{a}_2 = (a + \bar{a}_1) + \bar{a}_2 = \bar{0} + \bar{a}_2 = \bar{a}_2 + \bar{0} = \bar{a}_2.$$

3.  $a, b \in L \exists c \in L : a = b + c$  с называется разностью  $a, b$  Докажем что разность существует для любых двух элементов и она единственная.  $(a + \bar{b}) + b = a + (\bar{b} + b) = a + (b + \bar{b}) = a + \bar{0} = a$

4.  $0a = \bar{0} \forall a \in L$

$$a + 0a = 1a + 0a = (1 + 0)a = 1a = a.$$

5.  $(-1)a = \bar{a} \forall a \in L$

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0.$$

## 1.2 Примеры

1. Векторы на плоскости и в пространстве.
2. Векторы с  $n$  координат.
3. Матрицы из вещ чисел  $n \times m$
4.  $\{\bar{0}\} = L, P = \mathbb{R}$
5.  $L = R_+ P = \mathbb{R} a + b = ab \alpha a = a^\alpha$
6.  $L$  - множество всех полиномов степени не старше  $n$  ( $P_n(t)$ ).
7.  $L$  - множество всех функций непрерывных на отрезке от 0 до 1.

Мы будем терминологически разделять комплексные и вещественные линейные пространства.

**Определение 2.** *Есть поле  $P$ , повесим над ним два линейных пространства  $L, L'$ . Эти два линейных пространства изоморфны друг другу, если между элементами существует биекция, такая что*

1.  $(a + b)' = a' + b' \forall a, b \in L$  Образ суммы равен сумме образов.
2.  $(\alpha a)' = \alpha a', \alpha \in P$

## 2 Линейная зависимость, базис, размерность

Рассмотрим  $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$

**Определение 3** (Линейная комбинация).

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i.$$

Если линейная комбинация равна нулю, то она называется нулевой или тривиальной.

**Определение 4** (Линейная независимость). Система элементов являются линейно независимыми, если их нулевая линейная комбинация достигается при всех нулевых коэффициентах.

**Определение 5** (Линейная зависимость). Если нулевую комбинацию можно получить, имея не нулевые коэффициенты, то она линейно зависима.

## 2.1 Примеры

1. Векторы на плоскость  $\vec{v}_1 = \{0, 1\}, \vec{v}_2 = \{1, 0\}$

$$\alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = (\alpha, \beta) = 0 \implies \alpha = 0 \wedge \beta = 0.$$

## 2.2 Свойства

1. Если в системе элементов есть нейтральный элемент, то она линейно зависима.
2. Если в системе есть два одинаковых, то она линейно зависима.
3. Подмножество совокупности линейно зависимое  $\implies$  вся совокупность линейно зависима.
4. Все подмножества линейно независимой системы линейно независимы.

**Теорема 1.** Система элементов линейно зависимой  $\iff$  хотя бы один из элементов представлял собой линейную комбинацию остальных элементов.

*Доказательство.* Необходимость.  $\alpha_i \neq 0$   $\alpha_i a_i = -\alpha_1 a_1 - \dots - \alpha_n a_n$  Достаточность  $a_i = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_n a_n$   $\square$

**Теорема 2.**

$$a_1, \dots, a_k \in L, b_1, \dots, b_m \in L.$$

Любой элемент второй системы можно представить как линейную комбинацию первой.  $m > k \implies$  элементы  $b$  линейно зависимы

*Доказательство.* 1.  $k = 1$

$$b_1 = \alpha_1 a_1.$$

$$b_2 = \alpha_2 a_1.$$

$\dots$

$$b_m = \alpha_m a_1.$$

$$-\alpha_2 b_1 + \alpha_1 b_2 + 0b_3 + \dots + 0b_m = 0.$$

2. Утверждение теоремы верно для  $k - 1$

$$b_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \dots + \alpha_{1k}a_k.$$

$$b_i = a_{i1}a_1 + \dots + a_{ik}a_k, i = 1 \dots m.$$

Если есть нулевой столбец альфа, то а при этих альфах можем выкинуть и элементы  $b$  представляются  $k-1$  элементом попали в индуктивное предположение. Нулевых столбцов нет. Мы можем предположить, что  $\alpha_{11} \neq 0$

$$b'_2 = b_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}b_1.$$

$$b'_3 = b_3 - \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}b_1.$$

Элементы  $b'$  зависимы по индуктивному предположению

$$\gamma_2 b'_2 + \gamma_3 b'_3 + \dots + \gamma_m b'_m = \bar{0}.$$

□

### 3 Базис и размерность линейного пространства. Переход к другому базису.

Пусть у нас есть линейное пространство  $L$  над полем  $P$ .

**Определение 6** (Базис). *Базисом линейного пространства  $L$  будем называть линейно независимую систему  $e_1, \dots, e_n \in L$  такую что  $\forall x \in L \ x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ . Альфы – это координаты  $x$  по базису  $e$ .*

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

**Теорема 3.** *Для выбранного элемента и базиса есть только один набор координат.*

*Доказательство.* Пусть существуют  $x, e_1 \dots e_n$  такие что

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

□

**Теорема 4.**

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

$$y = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n.$$

$$1. x + y = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) e_i$$

$$2. \lambda \in P \lambda x = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i)$$

**Определение 7** (Размерность). *Линейное пространство  $L$  ( $\dim L = n$ ) Размерность  $L$  равна  $n$  если в этом пространстве существует система из  $n$  линейных независимых элементов, а любая система из  $n + 1$  линейно зависима*

*Если в линейном пространстве существует произвольное количество линейно независимых элементов то размерность бесконечная*

**Теорема 5.** *Любые  $n$  линейные независимые элементы  $n$ -мерного пространства образуют базис.*

*Доказательство.* С линейной независимостью все ясно. Берем произвольный  $x \in L$  добавили его в линейно независимую систему, получили линейно зависимую.

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n + \alpha x = 0.$$

$$x = - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha} e_i.$$

□

**Теорема 6.** *Если есть базис из  $n$  элементов, то  $\dim L = n$*

*Доказательство.* По последней теореме с прошлого занятия. Взяли  $n + 1$  любых элементов из  $L$ , каждый из них раскладывается по базису. □

**Теорема 7.** *Любые два Линейных пространства одинаковой размерности над одним полем изоморфны.*

*Доказательство.*

$$\dim L = \dim L' = n.$$

Назначим взаимно однозначное соответствие. У  $L$  базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , У  $L'$  базис  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ . Биекция между базисами есть.

Берем  $x \in L$

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

$$x' = \alpha_1 e'_1 + \dots + \alpha_n e'_n.$$

Действительно является изоморфизмом. □

Пусть в линейном пространстве два базиса  $e_1, \dots, e_n$  и  $e'_1, \dots, e'_n$

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \alpha'_1 e'_1 + \dots + \alpha'_n e'_n.$$

$$e'_1 = p_{11} e_1 + p_{12} e_2 + \dots + p_{1n} e_n.$$

$$e'_i = p_{i1} e_1 + p_{i2} e_2 + \dots + p_{in} e_n.$$

Из  $p$  можем собрать матрицу.

$$e' = Pe.$$

$$e = P'e'.$$

Обе матрицы обратимы, значит обратимы, значит ранги обеих матриц равны  $n$ .

$$x = \alpha e = \alpha' e'.$$

$$\alpha e = \alpha' P e.$$

$$\alpha = \alpha' P.$$

$$\alpha' = \alpha P^{-1}.$$

### 3.1 Пример

Есть плоскость, выбрали стандартный базис  $e_1 = (0, 1), e_2 = (1, 0)$ . Возьмем в качестве нового базиса эти векторы, повернутые на угол  $\varphi$ . Нужна матрица преобразования.

$$e'_1 = \cos(\varphi)e_1 + \sin(\varphi)e_2.$$

$$e'_2 = -\sin(\varphi)e_1 + \cos(\varphi)e_2.$$

$$P = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

## 4 Подпространства и линейная оболочка

**Определение 8** (Подпространство).  $L$  – линейное пространство над  $\mathbf{P}$ .  $L_1 \subset L$  называется подпространством пространства  $L$  если  $\forall x, y \in L_1 \forall \alpha, \beta \in \mathbf{P} \alpha x + \beta y \in L_1$ .

Любое линейное подпространство само является линейным пространством.

В пространстве выбрали подпространство  $L_1$  ее базис образует линейно независимый набор элементов относительно  $L$ . Ее можно дополнить до базиса  $L$ .

### 4.1 Примеры

1. Векторы на плоскости, которые лежат на осях.
2. Многочлены  $P_n^0(t)$  – многочлены, которые в нуле имеют значение 0.

Задача на подумать. Размерность пространства полиномов, у которых сумма коэффициентов ноль.

**Определение 9** (Линейная оболочка). В линейном пространстве  $L$  выбираем произвольное количество элементов. Линейной оболочкой этих элементов будем называть множество всех линейных комбинаций из этих элементов

$$x, y, \dots \in L.$$

$$\alpha x + \beta y + \dots \quad \alpha, \beta \in \mathbf{P}.$$

$x, y, \dots$  система образующих

## 4.2 Пример

1. Комплексные числа – это линейная оболочка над  $1, i$

**Теорема 8.** *Линейная оболочка является подпространством.*

**Теорема 9.** *Линейная оболочка является наименьшим подпространством содержащим систему  $x, y, \dots$*

*Любое линейное подпространство, которое содержит  $x, y, z, \dots$ , будет содержать оболочку.*

**Теорема 10.** *Размерность линейной оболочки равна количеству линейно независимых векторов в ее образующей системе.*

*Доказательство.* Размерность совпадает с количеством элементов в базисе. Взяли систему, нашли самое большой линейно-независимое подмножество. Остальные элементы это линейная комбинация этих элементов.  $\square$

**Теорема 11.** *Размерность линейной оболочки равна рангу матрицы, составленной из координат элементов образующей системы в произвольном базисе  $L$ .*

*Доказательство.*

$$x, y, z \dots \in L.$$

Каждый раскладываем по базису.  $\square$

## 5 Линейная независимость относительно подпространства. Сумма и пересечение подпространств.

**Определение 10.**  $L$  – линейное пространство, в этом линейном пространстве есть линейное подпространство  $L_1 \subset L$ .  $v_1, \dots, v_k \in L$  Мы будем говорить, что эти элементы линейно независимы относительно  $L_1$ , если

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \in L_1.$$

выполняется, только если все альфы нули.

**Теорема 12.**  $L_1 \subset L, u_1 \dots u_m$  базис. Для того чтобы вектора  $v_1, \dots, v_k$  были линейно независимы относительно  $L_1 \iff u, v$  была линейно независимой

*Доказательство.* Прямой ход. Создаем линейную комбинацию относительно

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m = 0.$$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = -\beta_1 u_1 - \dots - \beta_m u_m \in L_1.$$

Левая комбинация это ноль, так как линейно независима относительно  $L_1$ , правая линейно независима

Обратный предположим, что  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \neq 0 \in L_1$ .

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_m u_m.$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^m \gamma_i u_i = 0.$$

Противоречие. □

**Определение 11** (Базис относительно подпространства).  $v_1, \dots, v_k \in L$  будем называть базисом относительно  $L_1 \subset L$  если

1.  $v_1, \dots, v_k$  линейно независимы относительно  $L_1$
2.  $\forall x \in L \ x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + y \ y \in L_1$

**Теорема 13.** Для того, чтобы система была базисом была относительно  $L_1$  необходимо и достаточно система  $u, v$  была базисом  $L$

*Доказательство.* Необходимость.  $u$  представляем как линейную комбинацию  $u$ . Достаточность самим. □

$$L_j \subset L_{j-1} \subset \dots \subset L_2 \subset L_1 \subset L.$$

**Теорема 14.** Любую систему линейно независимую относительно  $L_1$  до базиса  $L$  относительно  $L_1$

*Доказательство.* Есть система линейно независимая относительно  $L_1$ .  $u, v$  – линейно независимая совокупность дополним до базиса  $L$ . Получили базис относительно  $L_1$ , так как у нас выходит  $v$ , что дополнили + сумма из  $L_1$  □

## 6 Сумма и пересечение подпространств.

Есть линейное пространство  $L$ ,  $L_1, L_2$  его подпространства

**Определение 12.**

$$L_1 + L_2 := \{z \in L | z = x + y, x \in L_1, y \in L_2\}.$$

**Определение 13.**

$$L_1 \cap L_2 := \{x \in L | x \in L_1, x \in L_2\}.$$

**Теорема 15.** Сумма и пересечение подпространств сами являются подпространствами

**Теорема 16.**

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim (L_1 + L_2) + \dim (L_1 \cap L_2).$$



Доказательство.

$$\dim L_1 = p.$$

$$\dim L_2 = g.$$

$$\dim (L_1 + L_2) = s.$$

$$\dim L_1 \cap L_2 = t.$$

$$L_1 : u_1, \dots, u_p v_1 \dots v_{p-t} \text{ базис.}$$

$$L_2 : u_1 \dots u_t w_1 \dots w_{g-t}.$$

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

$$\alpha u + \beta v = -\gamma w = \nu u.$$

Левая штука из  $L_1$ , правая из  $L_2$ . Они из пересечения. Через  $\nu$  разложили в базисе пересечения

$$\nu u + \gamma w = 0.$$

Получили нулевую линейную комбинацию базиса  $L_2$

$$\alpha u + \beta v = 0.$$

$$z \in L_1 + L_2.$$

$$t = x + y.$$

$x, y$  разложили по базису

□

## 7 Примеры

1.  $L$  – трехмерные вектора.

## 8 Алгоритм

Берутся векторы, которые не вошли в базис суммы, раскладываются по базису суммы. Теперь берем базисный вектор пересечения (часть разложения, где только векторы из  $L_1$ )

## 9 Прямая сумма

$$\exists! x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 : x = x_1 + x_2.$$

Множество таких  $x$  называется прямой суммой.  $L_1 \oplus L_2$

**Теорема 17.**

$$L = L_1 \oplus L_2 \iff .$$

1.  $L_1 \cap L_2 = \{\emptyset\}$

$$2. \dim L = \dim L_1 + \dim L_2$$

*Доказательство.* Предположим, что в пересечении есть не только нейтральный элемент.

$$\exists x \neq 0, x \in L_1 \cap L_2.$$

$$x = x + 0 = 0 + x.$$

Два разложения по  $L_1, L_2$  В другую сторону. Есть базис в  $L_1$ , есть базис в  $L_2$

$$L_1 : u_1, \dots, u_k.$$

$$L_2 : v_1, \dots, v_m.$$

Базис  $L$  можно составить из объединения этих базисов.

$$\sum \alpha u + \sum \beta v = 0.$$

$$\sum \alpha u = - \sum \beta v.$$

Элемент из  $L_1$  равен элементу из  $L_2$ , то есть они из  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$  произвольный элемент разложили по базису из  $L$ . Получили определение прямой суммы  $\square$

**Теорема 18.** Для того чтобы  $L = L_1 \oplus L_2 \iff$  объединение базиса  $L_1, L_2$  будет базисом  $L$ .

**Определение 14.**

$$L_1 \subset L.$$

$$L_1^\nu - \text{Дополнение до } L.$$

$$L_1 \oplus L_1^\nu = L.$$

## 10 Евклидовы и унитарные пространства

У нас есть линейное пространство  $E$  над полем  $P$ .

**Определение 15** (Евклидовое пространство).  $E$  – евклидово пространство.

$$\forall x, y \in E \exists (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Ставится в соответствие вещественное число, которое назовем скалярным произведением. Это отображение удовлетворяет следующим пунктам

1.  $(x, y) = (y, x) \forall x, y \in E$
2.  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \forall x, y, z$
3.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y) \forall x, y \in E, \forall \lambda \in P$
4.  $(x, x) \geq 0 \forall x \in E (x, x) = 0 \iff x = 0$

## 10.1 Свойства.

1.  $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$

$$(y + z, x) = (y, x) + (z, x) = (x, y) + (x, z).$$

2.  $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$

3.  $(0, x) = 0$

4.  $(\sum \alpha_i u_i, \sum \beta_j v_j) = \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j (u_i, v_j)$

5.

**Теорема 19** (Неравенство Коши-Буняковского).  $\forall x, y \in E \quad (x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$

*Доказательство.* Если  $x$  или  $y$  равны 0, то все понятно. Рассмотрим

$$\lambda x - y.$$

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) = (\lambda x, \lambda x) - (y, \lambda x) - (\lambda x, y) + (y, y) = \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \geq 0.$$

$$D = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0.$$

□

## 10.2 Унитарные пространства.

**Определение 16** (Унитарные пространства). *Линейное комплексное пространство называется унитарным, если любым двум элементам ставится в соответствие комплексное число, которое называется скалярным произведением.  $U$*

### 10.2.1 Свойства

1.  $(x, y) = \overline{(y, x)}$

2.  $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \forall x, y, z \in U$

3.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \forall x, y \in U, \lambda \in \mathbb{C}$

4.  $(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in U, (x, x) = 0 \iff x = 0$

### 10.2.2 Примеры

$$x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

$$y = (\beta_1, \dots, \beta_n).$$

$$(x, y) = \sum \alpha_i \bar{\beta}_i.$$

$$(x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = \overline{(y, z)} + \overline{z, x} = (x, y) + (x, z).$$

$$(x, \lambda x) = \overline{(\lambda y, x)} = \bar{\lambda} \overline{(x, y)}.$$

$$\left(\sum \alpha_i u_i, \sum \beta_j v_j\right) = \sum_i \sum_j.$$

**Теорема 20.**

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

*Доказательство.*

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) = |\lambda|^2 (x, x) - \bar{\lambda} \overline{(x, y)} - \lambda (x, y) + (y, y) \geq 0.$$

Рассмотрим частный случай

$$\lambda = |\lambda|(\cos \phi - i \sin \phi).$$

□

**Теорема 21** (Теорема Грама).

$$u_1, \dots, u_k \in E.$$

$$\Gamma = \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_2) & \dots & (u_1, u_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_k, u_1) & (u_k, u_2) & \dots & (u_k, u_k) \end{vmatrix}.$$

*Вектора линейно зависимы*

*Доказательство.* Дано, что вектора зависимы

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k = 0.$$

$$\alpha(u_1, u_1) + \dots + \alpha_k(u_1, u_k) = 0.$$

Дальше так же умножили скалярно на остальные  $u$ . Получили однородную систему с ненулевым решением. Ее определитель ноль.

В обратную сторону. Используем определитель как определитель системы

$$\begin{cases} (u_1, u_1)\alpha_1 + \dots + (u_1, u_k)\alpha_k = 0 \\ \dots \\ (u_k, u_1)\alpha_1 + \dots + (u_k, u_k)\alpha_k = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} (\alpha_1 u_1, \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k) = 0 \\ \dots \\ (\alpha_k u_k, \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k) \end{cases}.$$

Набор альф – ненулевое решение. Все сложили

$$(\sum \alpha u, \sum \alpha u).$$

$$\sum \alpha u = 0.$$

□

**Определение 17** (Нормированный).  $x \in E$  *нормированный*, если  $(x, x) = 1$

**Теорема 22.** *Любой вектор кроме нуля, можно нормировать.*

*Доказательство.*

$$(x, x) = \lambda.$$

$$\frac{(x, x)}{\lambda} = 1.$$

$$(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}, \frac{x}{\sqrt{\lambda}}) = 1.$$

□

## 11 Ортогональность векторов и подпространств.

По умолчанию живем в евклидовом пространстве.

**Определение 18** (Ортогональность).  $x, y \in E, x \perp y := (x, y) = 0$

**Определение 19** (Ортогональная система). Систему векторов называем ортогональной, если все векторы попарно ортогональны и нет нуля.

**Определение 20** (Ортонормированная система). Если в системе ортогональной системе, все элементы нормированны, то она ортонормированная

**Теорема 23.** *Ортогональная(ортонормированная) система, линейно независима*

*Доказательство.* Так как в определителе Грама, все нули, кроме главной диагонали. □

**Следствие 23.1.** *В  $n$  мерном евклидовом пространстве, ортогональная система не может содержать более  $n$  элементов.*

**Следствие 23.2.** *Если в ортогональной системе  $n$  – элементов. Она базис (ортогональный/ортонормированный базис).*

Будем называть ортонормированный базис естественным.

**Определение 21** (Символ Кронекера).  $e_1, \dots, e_n$  – ортонормированный базис

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}.$$

**Теорема 24.** *Всякую линейно независимую систему линейного пространства можно перевести в ортогональную линейными преобразованиями элементов*

$$x_1, \dots, x_k \in E.$$

*Доказательство.* Индукция по количеству элементов в изначальной системе. Система из 1 элемента все ясно.

Предположим, что мы умеем взяв  $k - 1$  элемент превратить в  $k - 1$  ортогональный элемент. Возьмем систему из  $k$  линейно независимых элементов. Взяли  $k - 1$  по предположению превратили в ортогональную.

$$y_k = x_k + \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{k-1} y_{k-1}.$$

$$(y_k, y_i) = 0, i = 1, \dots, k - 1.$$

$$0 = (y_k, y_1) = (x_k, y_1) + \alpha_1 (y_1, y_1).$$

$$\alpha_1 = -\frac{(x_k, y_1)}{(y_1, y_1)}.$$

$$\alpha_i = -\frac{(x_k, y_i)}{(y_i, y_i)}.$$

$$y_1 = x_1.$$

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1.$$

$$y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k, y_i)}{(y_i, y_i)} y_i.$$

□

**Следствие 24.1.** *В любом евклидовом пространстве существует ортогональный (ортонормированный) базис.*

**Следствие 24.2.** *Любая ортогональная система элементов может быть дополнена до ортонормированного базиса.*

### 11.1 Свойства ортонормированного базиса.

$$E : e_1, \dots, e_n, (e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Ортонормированный базис

$$x, y \in E.$$

$$x = \sum \alpha e.$$

$$y = \sum \beta e.$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j (e_i, e_j) = \alpha_i \beta_i + \dots \alpha_n \beta_n.$$

В унитарном пространстве тоже самое, беты сопряженные.

1.

$$x \in E.$$

$$x = \sum \alpha e_1.$$

$$(x, e_1) = \alpha_1.$$

$$(x, e_i) = \alpha_i, 1 = 1 \dots n.$$

2.

$$e'_1, \dots, e'_n.$$

Новый ортонормированный базис.

$$e' = P e.$$

$$e = P^{-1} e'.$$

$$e'_1 = p_{11}e_1 + p_{12}e_2 + \dots + p_{1n}e_n.$$

$$e'_i = p_{i1}e_1 + p_{i2}e_2 + \dots + p_{in}e_n.$$

**Определение 22.** Ортогональная матрица  $P$  – квадратная.

$$PP^T = E.$$

$$E' \subset E.$$

**Определение 23** (элемент ортогонален подпространству).  $x \perp L_1 \subset E := x \perp y \forall y \in L_1$

**Определение 24.**

$$L_1 \perp L_2 := \forall x \in L_1 \forall y \in L_2 x \perp y.$$

**Теорема 25.**

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset.$$

**Теорема 26.**

$$x \perp L_1.$$

Необходимо и достаточно, чтобы  $x$  был ортогонален всем элементам некоторого базиса  $L_1$ .

*Доказательство.* Необходимость понятно  $x$  ортогонален всем. Достаточность  $y = \sum \alpha u$

$$(x, y) = 0.$$

□

**Следствие 26.1.** Необходимо и достаточно, чтобы базисы  $L_1, L_2$  были ортогональными.

**Определение 25.** Ортогональное дополнение  $L_1 \subset E$

$$L_1^\perp := \{y \in E \mid y \perp L_1\}.$$

**Теорема 27.** Ортогональное дополнение – линейно пространство.

### 11.1.1 Построение ортогонального дополнения

Дополнили базис  $L_1$  до базиса  $L$   $u_1, \dots, u_k, w_{k+1}, \dots, w_n$ . Строим ортогональный базис применили Грама-Шмидта.  $u'_1, \dots, u'_k, w'_{k+1}, \dots, w'_n$  Дубльвэ из дополнения

$$y \in L^\perp.$$

$$y = \sum \alpha u' + \sum \beta w'.$$

$$(y, u'_1) = 0 (\forall \alpha = 0).$$

Дубльвэ базис  $L_1^\perp$

**Теорема 28.**

$$L_1 \oplus L_1^\perp = E.$$

**Теорема 29.**

$$(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp.$$

**Теорема 30.**

$$(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp.$$

**Теорема 31.**

$$(L_1^\perp)^\perp = L_1.$$

**Теорема 32.** Любые два евклидовых пространства одной размерности изоморфны



## 12 Проекция перпендикуляр точка. Длины, углы, расстояния.

$$L \subset E.$$

$$L_1 \oplus L_1^\perp = E.$$

$$\forall x \in E \exists! t \in L_1, z \in L_1^\perp x = y + z.$$

$y$  – проекция на  $L_1$ ,  $z$  – перпендикуляр.

### 12.1 Алгоритм

$$L_1 : u_1, \dots, u_k.$$

$$y = \sum \alpha u.$$

$$(x, u_1) = (y + z, u_1) = (y, u_1) = \alpha(u_1, u_1) + \dots + \alpha_k(u_k, u_1).$$

$$(x, u_i) = \alpha_1(u_1, u_i) + \dots + \alpha_i(u_i, u_k).$$

Определитель этой системы не нуль, есть одно решение.

**Теорема 33.**

$$y = -\frac{1}{\Gamma} \begin{pmatrix} \gamma & u_1 \\ \dots & \dots \\ (x, u_1) & \dots & (x, u_k) \end{pmatrix}.$$

**Определение 26.** Линейное пространство  $L$  называется нормированным, если

$$\forall x \in L \exists! \|x\| \in P.$$

Называется нормой если выполняются следующие свойства

1.  $\|x\| \geq 0 \quad \|x\| = 0 \iff x = 0 \forall x \in L$
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
1.  $\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)}$  – евклидова норма (норма 2)
2.  $\|x\|_1 = \sum |\alpha_i|$
3.  $\|x\|_\infty = \max \alpha_i$

**Определение 27** (Расстояние между двумя элементами).

$$x, y \in E.$$

$$\rho(x, y) := \|x - y\|$$

1.  $\rho(x, y) \geq 0 \quad \rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3.  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$

**Определение 28** (Углы).

$$\begin{aligned}
 x, y &\in E. \\
 (\widehat{x, y}) &\in [0, \pi]. \\
 \cos(\widehat{x, y}) &= \frac{(x, y)}{\|x\| * \|y\|}. \\
 |(x, y)| &\leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}.
 \end{aligned}$$

**Теорема 34** (Теорема косинусов).

$$\begin{aligned}
 \|x - y\|^2 &= (x - y, x - y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| * \|y\| \cos(\widehat{x, y}). \\
 (\|x\| - \|y\|)^2 &\leq \|x - y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2. \\
 \|x\| - \|y\| &\leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|.
 \end{aligned}$$

**Определение 29** (Расстояние до подпространства).

$$\rho(x, L_1) := \inf_{u \in L_1} \rho(x, u).$$