

Лекции по алгебре

Титилин Александр

1 Линейное пространство, свойства, примеры

Есть множество $L = \{a, b, \dots\}$ и есть некоторое поле P

Определение 1. L называется линейным пространством над полем P , если выполняются следующие условия

1. $\forall a, b \in L \exists! c : a + b = c$
2. $\forall a, b, c \in L : (a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists \bar{0} \in L \forall a \in L a + \bar{0} = a$
4. $\forall a \in L \exists \bar{a} \in L : a + \bar{a} = \bar{0}$
5. $a + b = b + a \forall a, b \in L$

И существует операция $\forall a \in L \forall \alpha \in P \exists! d \in L : \alpha a = d$

1. $\alpha, \beta \in P a \in L : (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
2. $\forall a, b \in L, \forall \alpha \in P \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
3. $\exists 1 \in P 1a = a \forall a \in L$
4. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \forall a \in L \forall \alpha, \beta \in P$

1.1 Свойства операций

1. $\exists \bar{0}$ Пусть есть два нуля тогда их сумма может быть и первым и вторым значит они равны.
2. $\forall a \in L \exists \bar{a}$ Предполагаем что для какого-то a обратный не единственный, найдется два обратных $\bar{a}_1 + a + \bar{a}_2$

$$\bar{a}_1 + (a + \bar{a}_2) = a_1 + \bar{0} = a_1.$$

$$(\bar{a}_1 + a) + \bar{a}_2 = (a + \bar{a}_1) + \bar{a}_2 = \bar{0} + \bar{a}_2 = \bar{a}_2 + \bar{0} = \bar{a}_2.$$

3. $a, b \in L \exists c \in L : a = b + c$ с называется разностью a, b Докажем что разность существует для любых двух элементов и она единственная. $(a + \bar{b}) + b = a + (\bar{b} + b) = a + (b + \bar{b}) = a + \bar{0} = a$

4. $0a = \bar{0} \forall a \in L$

$$a + 0a = 1a + 0a = (1 + 0)a = 1a = a.$$

5. $(-1)a = \bar{a} \forall a \in L$

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0.$$

1.2 Примеры

1. Векторы на плоскости и в пространстве.
2. Векторы с n координат.
3. Матрицы из вещ чисел $n \times m$
4. $\{\bar{0}\} = L, P = \mathbb{R}$
5. $L = R_+ P = \mathbb{R} a + b = ab \alpha a = a^\alpha$
6. L - множество всех полиномов степени не старше n ($P_n(t)$).
7. L - множество всех функций непрерывных на отрезке от 0 до 1.

Мы будем терминологически разделять комплексные и вещественные линейные пространства.

Определение 2. *Есть поле P , повесим над ним два линейных пространства L, L' . Эти два линейных пространства изоморфны друг другу, если между элементами существует биекция, такая что*

1. $(a + b)' = a' + b' \forall a, b \in L$ Образ суммы равен сумме образов.
2. $(\alpha a)' = \alpha a', \alpha \in P$

2 Линейная зависимость, базис, размерность

Рассмотрим $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$

Определение 3 (Линейная комбинация).

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i.$$

Если линейная комбинация равна нулю, то она называется нулевой или тривиальной.

Определение 4 (Линейная независимость). Система элементов являются линейно независимыми, если их нулевая линейная комбинация достигается при всех нулевых коэффициентах.

Определение 5 (Линейная зависимость). Если нулевую комбинацию можно получить, имея не нулевые коэффициенты, то она линейно зависима.

2.1 Примеры

1. Векторы на плоскость $\vec{v}_1 = \{0, 1\}, \vec{v}_2 = \{1, 0\}$

$$\alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = (\alpha, \beta) = 0 \implies \alpha = 0 \wedge \beta = 0.$$

2.2 Свойства

1. Если в системе элементов есть нейтральный элемент, то она линейно зависима.
2. Если в системе есть два одинаковых, то она линейно зависима.
3. Подмножество совокупности линейно зависимое \implies вся совокупность линейно зависима.
4. Все подмножества линейно независимой системы линейно независимы.

Теорема 1. Система элементов линейно зависимой \iff хотя бы один из элементов представлял собой линейную комбинацию остальных элементов.

Доказательство. Необходимость. $\alpha_i \neq 0$ $\alpha_i a_i = -\alpha_1 a_1 - \dots - \alpha_n a_n$ Достаточность $a_i = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_n a_n$ \square

Теорема 2.

$$a_1, \dots, a_k \in L, b_1, \dots, b_m \in L.$$

Любой элемент второй системы можно представить как линейную комбинацию первой. $m > k \implies$ элементы b линейно зависимы

Доказательство. 1. $k = 1$

$$b_1 = \alpha_1 a_1.$$

$$b_2 = \alpha_2 a_1.$$

...

$$b_m = \alpha_m a_1.$$

$$-\alpha_2 b_1 + \alpha_1 b_2 + 0b_3 + \dots + 0b_m = 0.$$

2. Утверждение теоремы верно для $k - 1$

$$b_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \dots + \alpha_{1k}a_k.$$

$$b_i = a_{i1}a_1 + \dots + a_{ik}a_k, i = 1 \dots m.$$

Если есть нулевой столбец альфа, то а при этих альфах можем выкинуть и элементы b представляются $k-1$ элементом попали в индуктивное предположение. Нулевых столбцов нет. Мы можем предположить, что $\alpha_{11} \neq 0$

$$b'_2 = b_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}b_1.$$

$$b'_3 = b_3 - \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}b_1.$$

Элементы b' зависимы по индуктивному предположению

$$\gamma_2 b'_2 + \gamma_3 b'_3 + \dots + \gamma_m b'_m = \bar{0}.$$

□

3 Базис и размерность линейного пространства. Переход к другому базису.

Пусть у нас есть линейное пространство L над полем P .

Определение 6 (Базис). *Базисом линейного пространства L будем называть линейно независимую систему $e_1, \dots, e_n \in L$ такую что $\forall x \in L \ x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$*
Альфы – это координаты x по базису e .

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. *Для выбранного элемента и базиса есть только один набор координат.*

Доказательство. Пусть существуют $x, e_1 \dots e_n$ такие что

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

□

Теорема 4.

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

$$y = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n.$$

$$1. x + y = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) e_i$$

$$2. \lambda \in P \lambda x = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i)$$

Определение 7 (Размерность). *Линейное пространство L ($\dim L = n$) Размерность L равна n если в этом пространстве существует система из n линейных независимых элементов, а любая система из $n + 1$ линейно зависима*

Если в линейном пространстве существует произвольное количество линейно независимых элементов то размерность бесконечная

Теорема 5. *Любые n линейные независимые элементы n -мерного пространства образуют базис.*

Доказательство. С линейной независимостью все ясно. Берем произвольный $x \in L$ добавили его в линейно независимую систему, получили линейно зависимую.

$$\alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n \alpha x = 0.$$

$$x = - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha} e_i.$$

□

Теорема 6. *Если есть базис из n элементов, то $\dim L = n$*

Доказательство. По последней теореме с прошлого занятия. Взяли $n + 1$ любых элементов из L , каждый из них раскладывается по базису. □

Теорема 7. *Любые два Линейных пространства одинаковой размерности над одним полем изоморфны.*

Доказательство.

$$\dim L = \dim L' = n.$$

Назначим взаимно однозначное соответствие. У L базис e_1, e_2, \dots, e_n , У L' базис e'_1, e'_2, \dots, e'_n . Биекция между базисами есть.

Берем $x \in L$

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n.$$

$$x' = \alpha_1 e'_1 + \dots + \alpha_n e'_n.$$

Действительно является изоморфизмом. □

Пусть в линейном пространстве два базиса $e_1, \dots, e_n \wedge e'_1 \dots e'_n$

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n = \alpha'_1 e'_1 + \dots + \alpha'_n e'_n.$$

$$e'_1 = p_{11} e_1 + p_{12} e_2 + \dots + p_{1n} e_n.$$

$$e'_i = p_{i1} e_1 + p_{i2} e_2 + \dots + p_{in} e_n.$$

Из p можем собрать матрицу.

$$e' = Pe.$$

$$e = P'e'.$$

Обе матрицы обратимы, значит обратимы, значит ранги обеих матриц равны n .

$$x = \alpha e = \alpha' e'.$$

$$\alpha e = \alpha' P e.$$

$$\alpha = \alpha' P.$$

$$\alpha' = \alpha P^{-1}.$$

3.1 Пример

Есть плоскость, выбрали стандартный базис $e_1 = (0, 1), e_2 = (1, 0)$. Возьмем в качестве нового базиса эти векторы, повернутые на угол φ . Нужна матрица преобразования.

$$e'_1 = \cos(\varphi)e_1 + \sin(\varphi)e_2.$$

$$e'_2 = -\sin(\varphi)e_1 + \cos(\varphi)e_2.$$

$$P = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

4 Подпространства и линейная оболочка

Определение 8 (Подпространство). L – линейное пространство над \mathbf{P} . $L_1 \subset L$ называется подпространством пространства L если $\forall x, y \in L_1 \forall \alpha, \beta \in \mathbf{P} \alpha x + \beta y \in L_1$.

Любое линейное подпространство само является линейным пространством.

В пространстве выбрали подпространство L_1 ее базис образует линейно независимый набор элементов относительно L . Ее можно дополнить до базиса L .

4.1 Примеры

1. Векторы на плоскости, которые лежат на осях.
2. Многочлены $P_n^0(t)$ – многочлены, которые в нуле имеют значение 0.

Задача на подумать. Размерность пространства полиномов, у которых сумма коэффициентов ноль.

Определение 9 (Линейная оболочка). В линейном пространстве L выбираем произвольное количество элементов. Линейной оболочкой этих элементов будем называть множество всех линейных комбинаций из этих элементов

$$x, y, \dots \in L.$$

$$\alpha x + \beta y + \dots \quad \alpha, \beta \in \mathbf{P}.$$

x, y, \dots система образующих

4.2 Пример

1. Комплексные числа – это линейная оболочка над $1, i$

Теорема 8. *Линейная оболочка является подпространством.*

Теорема 9. *Линейная оболочка является наименьшим подпространством содержащим систему x, y, \dots*

Любое линейное подпространство, которое содержит x, y, z, \dots , будет содержать оболочку.

Теорема 10. *Размерность линейной оболочки равна количеству линейно независимых векторов в ее образующей системе.*

Доказательство. Размерность совпадает с количеством элементов в базисе. Взяли систему, нашли самое большой линейно-независимое подмножество. Остальные элементы это линейная комбинация этих элементов. \square

Теорема 11. *Размерность линейной оболочки равна рангу матрицы, составленной из координат элементов образующей системы в произвольном базисе L .*

Доказательство.

$$x, y, z \dots \in L.$$

Каждый раскладываем по базису. \square

5 Линейная независимость относительно подпространства. Сумма и пересечение подпространств.

Определение 10. L – линейное пространство, в этом линейном пространстве есть линейное подпространство $L_1 \subset L$. $v_1, \dots, v_k \in L$ Мы будем говорить, что эти элементы линейно независимы относительно L_1 , если

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \in L_1.$$

выполняется, только если все альфы нули.

Теорема 12. $L_1 \subset L, u_1 \dots u_m$ базис. Для того чтобы вектора v_1, \dots, v_k были линейно независимы относительно $L_1 \iff u, v$ была линейно независимой

Доказательство. Прямой ход. Создаем линейную комбинацию относительно

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m = 0.$$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = -\beta_1 u_1 - \dots - \beta_m u_m \in L_1.$$

Левая комбинация это ноль, так как линейно независима относительно L_1 , правая линейно независима

Обратный предположим, что $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \neq 0 \in L_1$.

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_m u_m.$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^m \gamma_i u_i = 0.$$

Противоречие. □

Определение 11 (Базис относительно подпространства). $v_1, \dots, v_k \in L$ будем называть базисом относительно $L_1 \subset L$ если

1. v_1, \dots, v_k линейно независимы относительно L_1
2. $\forall x \in L \ x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + y \ y \in L_1$

Теорема 13. Для того, чтобы система была базисом была относительно L_1 необходимо и достаточно система u, v была базисом L

Доказательство. Необходимость. u представляем как линейную комбинацию u . Достаточность самим. □

$$L_j \subset L_{j-1} \subset \dots \subset L_2 \subset L_1 \subset L.$$

Теорема 14. Любую систему линейно независимую относительно L_1 до базиса L относительно L_1

Доказательство. Есть система линейно независимая относительно L_1 . u, v – линейно независимая совокупность дополним до базиса L . Получили базис относительно L_1 , так как у нас выходит v , что дополнили + сумма из L_1 □

6 Сумма и пересечение подпространств.

Есть линейное пространство L , L_1, L_2 его подпространства

Определение 12.

$$L_1 + L_2 := \{z \in L | z = x + y, x \in L_1, y \in L_2\}.$$

Определение 13.

$$L_1 \cap L_2 := \{x \in L | x \in L_1, x \in L_2\}.$$

Теорема 15. Сумма и пересечение подпространств сами являются подпространствами

Теорема 16.

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim (L_1 + L_2) + \dim (L_1 \cap L_2).$$

Доказательство.

$$\dim L_1 = p.$$

$$\dim L_2 = g.$$

$$\dim (L_1 + L_2) = s.$$

$$\dim L_1 \cap L_2 = t.$$

$$L_1 : u_1, \dots, u_p v_1 \dots v_{p-t} \text{ базис.}$$

$$L_2 : u_1 \dots u_t w_1 \dots w_{g-t}.$$

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

$$\alpha u + \beta v = -\gamma w = \nu u.$$

Левая штука из L_1 , правая из L_2 . Они из пересечения. Через ν разложили в базисе пересечения

$$\nu u + \gamma w = 0.$$

Получили нулевую линейную комбинацию базиса L_2

$$\alpha u + \beta v = 0.$$

$$z \in L_1 + L_2.$$

$$t = x + y.$$

x, y разложили по базису

□

7 Примеры

1. L – трехмерные вектора.

8 Алгоритм

Берутся векторы, которые не вошли в базис суммы, раскладываются по базису суммы. Теперь берем базисный вектор пересечения (часть разложения, где только векторы из L_1)

9 Прямая сумма

$$\exists! x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 : x = x_1 + x_2.$$

Множество таких x называется прямой суммой. $L_1 \oplus L_2$

Теорема 17.

$$L = L_1 \oplus L_2 \iff .$$

1. $L_1 \cap L_2 = \{\emptyset\}$

$$2. \dim L = \dim L_1 + \dim L_2$$

Доказательство. Предположим, что в пересечении есть не только нейтральный элемент.

$$\exists x \neq 0, x \in L_1 \cap L_2.$$

$$x = x + 0 = 0 + x.$$

Два разложения по L_1, L_2 В другую сторону. Есть базис в L_1 , есть базис в L_2

$$L_1 : u_1, \dots, u_k.$$

$$L_2 : v_1, \dots, v_m.$$

Базис L можно составить из объединения этих базисов.

$$\sum \alpha u + \sum \beta v = 0.$$

$$\sum \alpha u = - \sum \beta v.$$

Элемент из L_1 равен элементу из L_2 , то есть они из $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ произвольный элемент разложили по базису из L . Получили определение прямой суммы \square

Теорема 18. Для того чтобы $L = L_1 \oplus L_2 \iff$ объединение базиса L_1, L_2 будет базисом L .

Определение 14.

$$L_1 \subset L.$$

$$L_1^\nu - \text{Дополнение до } L.$$

$$L_1 \oplus L_1^\nu = L.$$

10 Евклидовы и унитарные пространства

У нас есть линейное пространство E над полем P .

Определение 15 (Евклидовое пространство). E – евклидово пространство.

$$\forall x, y \in E \exists (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Ставится в соответствие вещественное число, которое назовем скалярным произведением. Это отображение удовлетворяет следующим пунктам

1. $(x, y) = (y, x) \forall x, y \in E$
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \forall x, y, z$
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y) \forall x, y \in E, \forall \lambda \in P$
4. $(x, x) \geq 0 \forall x \in E (x, x) = 0 \iff x = 0$

10.1 Свойства.

1. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$

$$(y + z, x) = (y, x) + (z, x) = (x, y) + (x, z).$$

2. $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$

3. $(0, x) = 0$

4. $(\sum \alpha_i u_i, \sum \beta_j v_j) = \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j (u_i, v_j)$

5.

Теорема 19 (Неравенство Коши-Буняковского). $\forall x, y \in E \quad (x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$

Доказательство. Если x или y равны 0, то все понятно. Рассмотрим

$$\lambda x - y.$$

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) = (\lambda x, \lambda x) - (y, \lambda x) - (\lambda x, y) + (y, y) = \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \geq 0.$$

$$D = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0.$$

□

10.2 Унитарные пространства.

Определение 16 (Унитарные пространства). *Линейное комплексное пространство называется унитарным, если любым двум элементам ставится в соответствие комплексное число, которое называется скалярным произведением. U*

10.2.1 Свойства

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$

2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \forall x, y, z \in U$

3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \forall x, y \in U, \lambda \in \mathbb{C}$

4. $(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in U, (x, x) = 0 \iff x = 0$

10.2.2 Примеры

$$x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

$$y = (\beta_1, \dots, \beta_n).$$

$$(x, y) = \sum \alpha_i \bar{\beta}_i.$$

$$(x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = \overline{(y, z)} + \overline{z, x} = (x, y) + (x, z).$$

$$(x, \lambda x) = \overline{(\lambda x, x)} = \bar{\lambda} \overline{(x, x)} = \bar{\lambda} (x, x).$$

$$\left(\sum \alpha_i u_i, \sum \beta_j v_j \right) = \sum_i \sum_j \alpha_i \bar{\beta}_j (u_i, v_j).$$

Теорема 20.

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

Доказательство.

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) = |\lambda|^2 (x, x) - \bar{\lambda} \overline{(x, y)} - \lambda (x, y) + (y, y) \geq 0.$$

Рассмотрим частный случай

$$\lambda = |\lambda|(\cos \phi - i \sin \phi).$$

□

Теорема 21 (Теорема Грама).

$$u_1, \dots, u_k \in E.$$

$$\Gamma = \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_2) & \dots & (u_1, u_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_k, u_1) & (u_k, u_2) & \dots & (u_k, u_k) \end{vmatrix}.$$

Вектора линейно зависимы

Доказательство. Дано, что вектора зависимы

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k = 0.$$

$$\alpha(u_1, u_1) + \dots + \alpha_k(u_1, u_k) = 0.$$

Дальше так же умножили скалярно на остальные u_i . Получили однородную систему с ненулевым решением. Ее определитель ноль.

В обратную сторону. Используем определитель как определитель системы

$$\begin{cases} (u_1, u_1)\alpha_1 + \dots + (u_1, u_k)\alpha_k = 0 \\ \dots \\ (u_k, u_1)\alpha_1 + \dots + (u_k, u_k)\alpha_k = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} (\alpha_1 u_1, \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k) = 0 \\ \dots \\ (\alpha_k u_k, \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k) \end{cases}.$$

Набор альф – ненулевое решение. Все сложили

$$(\sum \alpha u, \sum \alpha u).$$

$$\sum \alpha u = 0.$$

□

Определение 17 (Нормированный). $x \in E$ *нормированный*, если $(x, x) = 1$

Теорема 22. *Любой вектор кроме нуля, можно нормировать.*

Доказательство.

$$(x, x) = \lambda.$$

$$\frac{(x, x)}{\lambda} = 1.$$

$$(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}, \frac{x}{\sqrt{\lambda}}) = 1.$$

□

11 Ортогональность векторов и подпространств.

По умолчанию живем в евклидовом пространстве.

Определение 18 (Ортогональность). $x, y \in E, x \perp y := (x, y) = 0$

Определение 19 (Ортогональная система). Систему векторов называем ортогональной, если все векторы попарно ортогональны и нет нуля.

Определение 20 (Ортонормированная система). Если в системе ортогональной системе, все элементы нормированны, то она ортонормированная

Теорема 23. *Ортогональная(ортонормированная) система, линейно независима*

Доказательство. Так как в определителе Грама, все нули, кроме главной диагонали. □

Следствие 23.1. *В n мерном евклидовом пространстве, ортогональная система не может содержать более n элементов.*

Следствие 23.2. *Если в ортогональной системе n – элементов. Она базис (ортогональный/ортонормированный базис).*

Будем называть ортонормированный базис естественным.

Определение 21 (Символ Кронекера). e_1, \dots, e_n – ортонормированный базис

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}.$$

Теорема 24. *Всякую линейно независимую систему линейного пространства можно перевести в ортогональную линейными преобразованиями элементов*

$$x_1, \dots, x_k \in E.$$

Доказательство. Индукция по количеству элементов в изначальной системе. Система из 1 элемента все ясно.

Предположим, что мы умеем взяв $k - 1$ элемент превратить в $k - 1$ ортогональный элемент. Возьмем систему из k линейно независимых элементов. Взяли $k - 1$ по предположению превратили в ортогональную.

$$y_k = x_k + \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{k-1} y_{k-1}.$$

$$(y_k, y_i) = 0, i = 1, \dots, k - 1.$$

$$0 = (y_k, y_1) = (x_k, y_1) + \alpha_1 (y_1, y_1).$$

$$\alpha_1 = -\frac{(x_k, y_1)}{(y_1, y_1)}.$$

$$\alpha_i = -\frac{(x_k, y_i)}{(y_i, y_i)}.$$

$$y_1 = x_1.$$

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1.$$

$$y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k, y_i)}{(y_i, y_i)} y_i.$$

□

Следствие 24.1. *В любом евклидовом пространстве существует ортогональный (ортонормированный) базис.*

Следствие 24.2. *Любая ортогональная система элементов может быть дополнена до ортонормированного базиса.*

11.1 Свойства ортонормированного базиса.

$$E : e_1, \dots, e_n, (e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Ортонормированный базис

$$x, y \in E.$$

$$x = \sum \alpha e.$$

$$y = \sum \beta e.$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j (e_i, e_j) = \alpha_i \beta_i + \dots \alpha_n \beta_n.$$

В унитарном пространстве тоже самое, беты сопряженные.

1.

$$x \in E.$$

$$x = \sum \alpha e_1.$$

$$(x, e_1) = \alpha_1.$$

$$(x, e_i) = \alpha_i, 1 = 1 \dots n.$$

2.

$$e'_1, \dots, e'_n.$$

Новый ортонормированный базис.

$$e' = P e.$$

$$e = P^{-1} e'.$$

$$e'_1 = p_{11}e_1 + p_{12}e_2 + \dots + p_{1n}e_n.$$

$$e'_i = p_{i1}e_1 + p_{i2}e_2 + \dots + p_{in}e_n.$$

Определение 22. Ортогональная матрица P – квадратная.

$$PP^T = E.$$

$$E' \subset E.$$

Определение 23 (элемент ортогонален подпространству). $x \perp L_1 \subset E := x \perp y \forall y \in L_1$

Определение 24.

$$L_1 \perp L_2 := \forall x \in L_1 \forall y \in L_2 x \perp y.$$

Теорема 25.

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset.$$

Теорема 26.

$$x \perp L_1.$$

Необходимо и достаточно, чтобы x был ортогонален всем элементам некоторого базиса L_1 .

Доказательство. Необходимость понятно x ортогонален всем. Достаточность $y = \sum \alpha u$

$$(x, y) = 0.$$

□

Следствие 26.1. Необходимо и достаточно, чтобы базисы L_1, L_2 были ортогональными.

Определение 25. Ортогональное дополнение $L_1 \subset E$

$$L_1^\perp := \{y \in E \mid y \perp L_1\}.$$

Теорема 27. Ортогональное дополнение – линейно пространство.

11.1.1 Построение ортогонального дополнения

Дополнили базис L_1 до базиса L $u_1, \dots, u_k, w_{k+1}, \dots, w_n$. Строим ортогональный базис применили Грама-Шмидта. $u'_1, \dots, u'_k, w'_{k+1}, \dots, w'_n$ Дубльвэ из дополнения

$$y \in L^\perp.$$

$$y = \sum \alpha u' + \sum \beta w'.$$

$$(y, u'_1) = 0 (\forall \alpha = 0).$$

Дубльвэ базис L_1^\perp

Теорема 28.

$$L_1 \oplus L_1^\perp = E.$$

Теорема 29.

$$(L_1 + L_2)^\perp = L_1^\perp \cap L_2^\perp.$$

Теорема 30.

$$(L_1 \cap L_2)^\perp = L_1^\perp + L_2^\perp.$$

Теорема 31.

$$(L_1^\perp)^\perp = L_1.$$

Теорема 32. Любые два евклидовых пространства одной размерности изоморфны

12 Проекция перпендикуляр точка. Длины, углы, расстояния.

$$L \subset E.$$

$$L_1 \oplus L_1^\perp = E.$$

$$\forall x \in E \exists! t \in L_1, z \in L_1^\perp x = y + z.$$

y – проекция на L_1 , z – перпендикуляр.

12.1 Алгоритм

$$L_1 : u_1, \dots, u_k.$$

$$y = \sum \alpha u.$$

$$(x, u_1) = (y + z, u_1) = (y, u_1) = \alpha(u_1, u_1) + \dots + \alpha_k(u_k, u_1).$$

$$(x, u_i) = \alpha_1(u_1, u_i) + \dots + \alpha_i(u_i, u_k).$$

Определитель этой системы не нуль, есть одно решение.

Теорема 33.

$$y = -\frac{1}{\Gamma} \begin{pmatrix} \gamma & u_1 \\ \dots & \dots \\ (x, u_1) & \dots & (x, u_k) \end{pmatrix}.$$

Определение 26. Линейное пространство L называется нормированным, если

$$\forall x \in L \exists! \|x\| \in P.$$

Называется нормой если выполняются следующие свойства

1. $\|x\| \geq 0 \quad \|x\| = 0 \iff x = 0 \forall x \in L$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
1. $\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)}$ – евклидова норма (норма 2)
2. $\|x\|_1 = \sum |\alpha_i|$
3. $\|x\|_\infty = \max \alpha_i$

Определение 27 (Расстояние между двумя элементами).

$$x, y \in E.$$

$$\rho(x, y) := \|x - y\|$$

1. $\rho(x, y) \geq 0 \quad \rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$

Определение 28 (Углы).

$$\begin{aligned} x, y &\in E. \\ (\widehat{x, y}) &\in [0, \pi]. \\ \cos \widehat{(x, y)} &= \frac{(x, y)}{\|x\| * \|y\|}. \\ |(x, y)| &\leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}. \end{aligned}$$

Теорема 34 (Теорема косинусов).

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= (x - y, x - y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| * \|y\| \cos \widehat{(x, y)}. \\ (\|x\| - \|y\|)^2 &\leq \|x - y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2. \\ \|x\| - \|y\| &\leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Определение 29 (Расстояние до подпространства).

$$\rho(x, L_1) := \inf_{u \in L_1} \rho(x, u).$$

Определение 30.

$$\begin{aligned} \rho(L_1, L_2) &= \inf_{u \neq 0 \in L_1, v \neq 0 \in L_2} \rho(u, v). \\ x &\in E, L_1 \subset E. \\ u &\in L. \end{aligned}$$

$$\rho(x, u) = \rho(y + z, u) = \|x - u\|^2 = \|y - u + z\|^2 = \|y - u\|^2 + \|z\|^2.$$

Минимум этой фигни, когда $y = u$, вот так ищутся расстояния между подпространствами.

$$\rho(x, L_1) = \|z\|.$$

Определение 31.

$$\begin{aligned} (\widehat{x, L_1}) &= \inf_{u \in L_1} (\widehat{x, u}). \\ \cos \widehat{x, y} &= \frac{(x, u)}{\|x\| \|u\|} = \frac{\|y\|}{\|x\|} \cos \widehat{y, u}. \end{aligned}$$

Эта фигня достигает максимума при $u = y$

$$(\widehat{x, L_1}) = (\widehat{x, y}).$$

$$a \perp L_1.$$

$$(x, a) = (z, a).$$

$$\frac{|(x, a)|}{\|a\|}.$$

13 Операторы

X, Y – линейные пространства над полем P .

Определение 32 (Операторы).

$$\mathcal{A} : X \rightarrow Y.$$

Оператором из X в Y мы будем называть отображение при котором

$$y = \mathcal{A}x.$$

Оператор линейный если

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in P.$$

$$\mathcal{A}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \mathcal{A}x_1 + \alpha_2 \mathcal{A}x_2.$$

13.1 Термины

1. Если оператор переводит в скаляр, то оператор называется функционалом.
2. Если $Y = X$ говорим что оператор действует в X . (оператор преобразования X)
3. Нулевой оператор, если $Y = \{0\}$, $\mathcal{O}x = 0$
4. $\mathcal{E}x = x \forall x \in X$

13.2 Примеры

1. $P_n(t)$

$$\mathcal{A} : P_n(t) \rightarrow P_{n-1}(t).$$

$$\mathcal{A}f(t) = f'(t).$$

Оператор дифференцирования, обычно обозначается \mathcal{D}

2. $\mathcal{I}f(t) = \int f(t)dt + c$

$$\mathcal{I} : P_n(t) \rightarrow P_{n+1}(t).$$

3. Норма вектора – функционал.

13.3 Операции с операторами

Рассмотрим множество линейных операторов из X в Y .

1. Операторы равны, если $\forall x \in X \mathcal{A}x = \mathcal{B}x$
2. Сложение операторов $\forall x \in X (\mathcal{A} + \mathcal{B})x := \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$
3. $\forall x \in X \lambda \mathcal{A}x := \lambda \mathcal{A}x$

Теорема 35. Сумма и умножение линейных операторов есть линейный оператор
Доказательство.

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = .$$

□

Теорема 36. Множество линейных операторов и такие операции образуют линейное пространство. $L(X, Y)$

13.4 Умножение операторов

$$\mathcal{B} : X \rightarrow Y.$$

$$\mathcal{A} : Y \rightarrow Z.$$

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})x = \mathcal{A}(\mathcal{B}x)$$

13.4.1 Свойства

1. линейность
2. $(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C})$
3. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{C} + \mathcal{B}\mathcal{C}$
4. $\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}$
5. $\lambda(\mathcal{A}\mathcal{B}) = (\lambda\mathcal{A})\mathcal{B}$
6. $E\mathcal{A} = \mathcal{A}E = \mathcal{A}$

Доказательства дома $L(X, X)$ – образуют кольцо с 1.

Теорема 37. Степени оператора коммутативны

14 Ядро и образ, ранг и дефект

Рассмотрим $\mathcal{A} \in L(X, Y)$

Определение 33 (Ядро оператора).

$$\ker \mathcal{A} := \{x \in X | \mathcal{A}x = 0\}.$$

$$\ker \mathcal{A} \subset X.$$

Теорема 38. Ядро образует подпространство X .

Определение 34 (Дефект).

$$\text{def } \mathcal{A} := \dim \ker \mathcal{A}.$$

Определение 35 (Образ).

$$\text{im } \mathcal{A} := \{\mathcal{A}x | x \in X\}.$$

$$y_1, y_2 \in \mathcal{A}.$$

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \mathcal{A} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

Определение 36 (Ранг).

$$r\mathcal{A} := \dim \text{im } \mathcal{A}.$$

14.1 Свойства

1. Дефект меньше или равен размерности X

$$\text{def } 0 = \dim X.$$

$$\text{def } E = 0.$$

2. Ранг меньше или равен Y

Теорема 39.

$$\forall \mathcal{A} \in L(X, Y).$$

$$\text{rank } \mathcal{A} + \text{def } \mathcal{A} = \dim X.$$

Доказательство.

$$\ker \mathcal{A} : u_1, \dots, u_k - \text{Базис.}$$

$$u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k}.$$

Дополнили базис ядра до базиса X .

$$\mathcal{A}v_1 \dots \mathcal{A}v_{n-k}.$$

Построили из этой фигни линейную комбинацию нулевую и линейность оператора

$$\sum \alpha \mathcal{A}v = 0.$$

Комбинация из ядра. Разложили по базису ядра приравняли, перенесли, получили линейная комбинация из базиса равна нулю. Таким образом

$$\mathcal{A}v_1 \dots \mathcal{A}v_{n-k} \text{ Базис Образа.}$$

$$\exists y \in \text{Im} \implies \exists x \in X y = \mathcal{A}x.$$

x разложили по базису получили линейную комбинацию $\mathcal{A}v_1, \dots, \mathcal{A}v_{n-k}$

□

Теорема 40.

$$\begin{aligned} A, B &\in L(X, X). \\ \text{rank} AB &\leq \text{rank} A. \\ \text{def} A &\leq \text{def} AB. \\ \text{rang} B &\leq \text{rank} B. \end{aligned}$$

Теорема 41.

$$\text{rank} AB \geq \text{rang} A + \text{rang} B - \dim X.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \ker AB &: u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_{p+q}. \\ q &= \text{def} b. \\ \sum \beta B u &= 0. \\ B(\sum \alpha u) &= 0. \end{aligned}$$

□

15 Невырожденные операторы

Определение 37.

$$\mathcal{A} \in L(X, X).$$

Оператор называется невырожденным если в его ядре только нейтральный элемент.

$$\ker \mathcal{A} = \{0\}.$$

15.1 Свойства

1. $\text{im} \mathcal{A} = X$
2. $\forall x \in X \exists! y = \mathcal{A}x$
3. Произведение невырожденных операторов является невырожденным

Давайте предположим

$$\begin{aligned} \exists y \in X \quad y &= \mathcal{A}x_1, y = \mathcal{A}x_2. \\ 0 &= \mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 = \mathcal{A}(x_1 - x_2) = 0. \\ x_1 - x_2 &\in \ker \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Определение 38. Рассмотрим оператор из X в X .

$$x = \mathcal{A}^{-1}y.$$

Обратный оператор

Теорема 42. Обратный оператор линейный

Доказательство.

$$y_1 = \mathcal{A}x_1.$$

$$y_2 = \mathcal{A}x_2.$$

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \mathcal{A}\alpha x_1 + \mathcal{A}\beta x_2.$$

.

□

Теорема 43. Обратный оператор невыраженный

Доказательство.

$$\mathcal{A}^{-1}y = 0.$$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}y = \mathcal{A}0 = 0.$$

$$y = 0.$$

□

Теорема 44.

$$\mathcal{A} \in L(X, X).$$

$$\mathcal{A}^2 = 0 \iff \text{im } \mathcal{A} \subset \ker \mathcal{A}.$$

Теорема 45.

$$\mathcal{P}x = y.$$

$$x = y + z.$$

$$y \in L, z \in L^\perp.$$

16 Матрица операторов

$$\mathcal{A} \in L(X, Y).$$

$$X : e_1, \dots, e_n - \text{Базис.}$$

$$Y : q_1, \dots, q_m - \text{Базис.}$$

$$x \in X.$$

$$x = \sum \alpha_j e_j.$$

$$y = \mathcal{A}x = \sum \alpha_j \mathcal{A}e_j.$$

$$y = \sum \beta_i q_i.$$

$$\mathcal{A}e_1 = a_{11}q_1 + a_{21}q_2 + \dots + a_{m1}q_m.$$

$$\mathcal{A}e_2 = a_{12}q_1 + \dots a_{m2}q_m.$$

$$\mathcal{A}e_n = a_{1n}q_1 + a_{2n} + \dots a_{mn}q_m.$$

Из а собрали матрицу

$$\mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}q_i.$$

$$y = \sum_{i=1}^m \beta_i q_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} q_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j \right) q_i.$$

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j.$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

$$Y_q = A_{qe} X_e.$$

A_{qe} – матрица оператора в паре базисов e, q . Размер $A = \dim X \times \dim Y$

16.1 Переход к новой матрице оператора

$$\mathcal{A} \in L(x, Y).$$

$$x \in X.$$

$$x = x_e^T e = x_{e'}^T e'.$$

$$y = y_g^T g = y_{g'}^T g'.$$

$$e' = P e.$$

$$g' = Q g.$$

$$x_e^T e = x_{e'}^T P e.$$

$$x_e^T = x_{e'}^t P.$$

$$x_e = P^t x_{e'}.$$

$$y_q = Q^T y_{g'}.$$

17 Собственные числа

Рассмотрим $\mathcal{A} \in L(X, X)$

Определение 39.

$$\mathcal{A} \in L(X, X).$$

$$x \in X, x \neq 0.$$

x является собственным вектором оператора \mathcal{A} соответствующим собственному числу $\lambda \in P$

$$\mathcal{A}x = \lambda x.$$

Теорема 46. *Есть оператор, есть набор собственных чисел. Для каждого из них нашли собственный вектор. Они линейно независимые*

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0.$$

$$\mathcal{A} \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0.$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda_i x_i = 0.$$

На первую фигню умножили λ_k

Доказываем по индукции по k . Система из 1 собственного вектора независима, так как он не ноль. Из второй фигни отняли первую после умножения

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) x_i = 0.$$

Все коэффиценты нули по индуктивному предположению. Лямбды разные, значит альфы нули. $\implies \alpha_k = 0$ □

Следствие 46.1. *Количество собственных чисел у оператора $\leq \dim X$*

Следствие 46.2. *Если равно размерности, то собственные векторы образуют базис.*

17.1 Как найти собственные числа оператора.

$$X : e_1, \dots, e_n \text{ БАЗИС.}$$

$$\mathcal{A}_e.$$

$$\mathcal{A}x = \lambda x.$$

$$\mathcal{A}_e x_e = \lambda x_e = \lambda E x_e.$$

$$(\lambda E - A_e)x_e = 0.$$

$$(\lambda \mathcal{E} - \mathcal{A})x = 0.$$

оператор вырожденный. Эта фигня система линейных уравнений

$$\det \lambda E - A_e = 0.$$

Эта хуйня многочлен от лямбды степени n . Его корни это собственные числа.

Дальше ищем собственные вектора – решения уравнения не равные 0 $(\lambda E - A_e)e = 0$ для конкретного лямбда.

17.2 Еще собственные числа

Геометрическая кратность – размерность собственного подпространства

Алгебраическая кратность – кратность собственного числа как кратность характеристического полинома.

Определение 40 (спектр). *Множество собственных чисел.*

$$\ker(\lambda^* E - A_e).$$

l – геометрическая кратность λ^* , k – алгебраическая кратность λ^*

$$u_1, \dots, u_l \text{ — Базис собственного подпространства.}$$

дополнили до базиса всего пространства. Этим базисом строим базис оператора. Первые l столбцов имеют одну лямбду со звездой и нули. Характеристический полином гарантированно имеет $(\lambda - \lambda^*)^l$

18 Сопряженный оператор

$$\mathcal{A} \in L(X, Y).$$

Определение 41 (Сопряженный оператор). \mathcal{A}^* сопряженный к \mathcal{A} если

$$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y).$$

$$\forall x \in X, y \in Y.$$

Теорема 47.

$$\forall \mathcal{A} \exists \mathcal{A}^*.$$

Доказательство.

$$X : e_1, \dots, e_n.$$

Ортонормированный базис.

$$x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) e_i.$$

$$A^*y = \sum_{i=1}^n (\mathcal{A}^*y, e_i)e_i = \sum_{i=1}^n \overline{(e_i, A^*y)}e_i = \sum_{(\mathcal{A}e_i)e_i} = \sum_{i=1}^n (y, \mathcal{A}e_i)e_i.$$

$$A^*y = \sum_{i=1}^n (y, \mathcal{A}e_i)e_i.$$

□

18.1 Свойства

1. $(\mathcal{A}^*)^*$
2. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$
3. $(\alpha\mathcal{A})^* = \bar{\alpha}\mathcal{A}^*$
4. $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$
5. $(\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1}$

$$\mathcal{A}^*y = 0.$$

$$\sum_{i=1}^n (y, \mathcal{A}e_i)e_i = 0.$$

$$(y, \mathcal{A}e_i) = 0 \quad \forall i.$$

$$\mathcal{A}e_1 \dots \mathcal{A}e_n \text{ БАЗИС.}$$

$$\mathcal{A}u = x, \mathcal{A}^*v = y.$$

$$(x, (\mathcal{A}^{-1})^*y) = (\mathcal{A}^{-1}x, y) = (u, \mathcal{A}^*v) = (\mathcal{A}u, v) = (x, (\mathcal{A}^*)^{-1}y).$$

19 Матрица сопряженного оператора

$$X : e_1, \dots, e_n.$$

$$Y : g_1, \dots, g_m.$$

Ортонормированные базисы

$$\mathcal{A}e_j = \dots + a_{ij}g_i + \dots$$

$$a_{ij} = (\mathcal{A}e_j, g_i).$$

$$\mathcal{A}_{eg}^*.$$

$$a_{ij}^* = (\mathcal{A}^*g_j, e_i) = \overline{(e_i, A^*g_j)} = \overline{(\mathcal{A}e_i, g_j)} = \overline{a_{ji}}.$$

Матрица сопряженного оператора – сопряженная матрица оператора

$$\ker \mathcal{A}, \operatorname{im} \mathcal{A}^* \subset X.$$

$$\ker A^*, \operatorname{im} A \subset Y.$$

20 Нормальный оператор, унитарный оператор, самосопряженный оператор.

Определение 42. *Оператор называется нормальным, если*

$$AA^* = A^*A.$$

$$Ax = \lambda x.$$

$$A^*x = \bar{\lambda}x.$$

Теорема 48. *Оператор в унитарном пространстве нормальный \iff Оператор имеет базисную систему ортонормированных векторов.*