

Лекции по алгебре

Титилин Александр

1 Линейное пространство, свойства, примеры

Есть множество $L = \{a, b, \dots\}$ и есть некоторое поле P

Определение 1. L называется линейным пространством над полем P , если выполняются следующие условия

1. $\forall a, b \in L \exists! c : a + b = c$
2. $\forall a, b, c \in L : (a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists \bar{0} \in L \forall a \in L a + \bar{0} = a$
4. $\forall a \in L \exists \bar{a} \in L : a + \bar{a} = \bar{0}$
5. $a + b = b + a \forall a, b \in L$

И существует операция $\forall a \in L \forall \alpha \in P \exists! d \in L : \alpha a = d$

1. $\alpha, \beta \in P a \in L : (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
2. $\forall a, b \in L, \forall \alpha \in P \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
3. $\exists 1 \in P 1a = a \forall a \in L$
4. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \forall a \in L \forall \alpha, \beta \in P$

1.1 Свойства операций

1. $\exists \bar{0}$ Пусть есть два нуля тогда их сумма может быть и первым и вторым значит они равны.
2. $\forall a \in L \exists \bar{a}$ Предполагаем что для какого-то a обратный не единственный, найдется два обратных $\bar{a}_1 + a + \bar{a}_2$

$$\bar{a}_1 + (a + \bar{a}_2) = a_1 + \bar{0} = a_1.$$

$$(\bar{a}_1 + a) + \bar{a}_2 = (a + \bar{a}_1) + \bar{a}_2 = \bar{0} + \bar{a}_2 = \bar{a}_2 + \bar{0} = \bar{a}_2.$$

3. $a, b \in L \exists c \in L : a = b + c$ с называется разностью a, b Докажем что разность существует для любых двух элементов и она единственная. $(a + \bar{b}) + b = a + (\bar{b} + b) = a + (b + \bar{b}) = a + \bar{0} = a$

4. $0a = \bar{0} \forall a \in L$

$$a + 0a = 1a + 0a = (1 + 0)a = 1a = a.$$

5. $(-1)a = \bar{a} \forall a \in L$

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0.$$

1.2 Примеры

1. Векторы на плоскости и в пространстве.
2. Векторы с n координат.
3. Матрицы из вещ чисел $n \times m$
4. $\{\bar{0}\} = L, P = \mathbb{R}$
5. $L = R_+ P = \mathbb{R} a + b = ab \alpha a = a^\alpha$
6. L - множество всех полиномов степени не старше n ($P_n(t)$).
7. L - множество всех функций непрерывных на отрезке от 0 до 1.

Мы будем терминологически разделять комплексные и вещественные линейные пространства.

Определение 2. *Есть поле P , повесим над ним два линейных пространства L, L' . Эти два линейных пространства изоморфны друг другу, если между элементами существует биекция, такая что*

1. $(a + b)' = a' + b' \forall a, b \in L$ Образ суммы равен сумме образов.
2. $(\alpha a)' = \alpha a', \alpha \in P$

2 Линейная зависимость, базис, размерность

Рассмотрим $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$

Определение 3 (Линейная комбинация).

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i.$$

Если линейная комбинация равна нулю, то она называется нулевой или тривиальной.

Определение 4 (Линейная независимость). Система элементов являются линейно независимыми, если их нулевая линейная комбинация достигается при всех нулевых коэффициентах.

Определение 5 (Линейная зависимость). Если нулевую комбинацию можно получить, имея не нулевые коэффициенты, то она линейно зависима.

2.1 Примеры

1. Векторы на плоскость $\vec{v}_1 = \{0, 1\}, \vec{v}_2 = \{1, 0\}$

$$\alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = (\alpha, \beta) = 0 \implies \alpha = 0 \wedge \beta = 0.$$

2.2 Свойства

1. Если в системе элементов есть нейтральный элемент, то она линейно зависима.
2. Если в системе есть два одинаковых, то она линейно зависима.
3. Подмножество совокупности линейно зависимое \implies вся совокупность линейно зависима.
4. Все подмножества линейно независимой системы линейно независимы.

Теорема 1. Система элементов линейно зависимой \iff хотя бы один из элементов представлял собой линейную комбинацию остальных элементов.

Доказательство. Необходимость. $\alpha_i \neq 0$ $\alpha_i a_i = -\alpha_1 a_1 - \dots - \alpha_n a_n$ Достаточность $a_i = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_n a_n$ \square

Теорема 2.

$$a_1, \dots, a_k \in L, b_1, \dots, b_m \in L.$$

Любой элемент второй системы можно представить как линейную комбинацию первой. $m > k \implies$ элементы b линейно зависимы

Доказательство. 1. $k = 1$

$$b_1 = \alpha_1 a_1.$$

$$b_2 = \alpha_2 a_1.$$

\dots

$$b_m = \alpha_m a_1.$$

$$-\alpha_2 b_1 + \alpha_1 b_2 + 0b_3 + \dots + 0b_m = 0.$$

2. Утверждение теоремы верно для $k - 1$

$$b_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \dots + \alpha_{1k}a_k.$$

$$b_i = a_{i1}a_1 + \dots + a_{ik}a_k, i = 1 \dots m.$$

Если есть нулевой столбец альфа, то а при этих альфах можем выкинуть и элементы b представляются $k-1$ элементом попали в индуктивное предположение. Нулевых столбцов нет. Мы можем предположить, что $\alpha_{11} \neq 0$

$$b'_2 = b_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}b_1.$$

$$b'_3 = b_3 - \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}b_1.$$

Элементы b' зависимы по индуктивному предположению

$$\gamma_2 b'_2 + \gamma_3 b'_3 + \dots + \gamma_m b'_m = \bar{0}.$$

□

3 Базис и размерность линейного пространства. Переход к другому базису.

Пусть у нас есть линейное пространство L над полем P .

Определение 6 (Базис). *Базисом линейного пространства L будем называть линейно независимую систему $e_1, \dots, e_n \in L$ такую что $\forall x \in L \ x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$. Альфы – это координаты x по базису e .*

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. *Для выбранного элемента и базиса есть только один набор координат.*

Доказательство. Пусть существуют $x, e_1 \dots e_n$ такие что

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

□

Теорема 4.

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

$$y = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n.$$

$$1. x + y = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) e_i$$

$$2. \lambda \in P \lambda x = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i)$$

Определение 7 (Размерность). *Линейное пространство L ($\dim L = n$) Размерность L равна n если в этом пространстве существует система из n линейных независимых элементов, а любая система из $n + 1$ линейно зависима*

Если в линейном пространстве существует произвольное количество линейно независимых элементов то размерность бесконечная

Теорема 5. *Любые n линейные независимые элементы n -мерного пространства образуют базис.*

Доказательство. С линейной независимостью все ясно. Берем произвольный $x \in L$ добавили его в линейно независимую систему, получили линейно зависимую.

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n + \alpha x = 0.$$

$$x = - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha} e_i.$$

□

Теорема 6. *Если есть базис из n элементов, то $\dim L = n$*

Доказательство. По последней теореме с прошлого занятия. Взяли $n + 1$ любых элементов из L , каждый из них раскладывается по базису. □

Теорема 7. *Любые два Линейных пространства одинаковой размерности над одним полем изоморфны.*

Доказательство.

$$\dim L = \dim L' = n.$$

Назначим взаимно однозначное соответствие. У L базис e_1, e_2, \dots, e_n , У L' базис e'_1, e'_2, \dots, e'_n . Биекция между базисами есть.

Берем $x \in L$

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

$$x' = \alpha_1 e'_1 + \dots + \alpha_n e'_n.$$

Действительно является изоморфизмом. □

Пусть в линейном пространстве два базиса e_1, \dots, e_n и e'_1, \dots, e'_n

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \alpha'_1 e'_1 + \dots + \alpha'_n e'_n.$$

$$e'_1 = p_{11} e_1 + p_{12} e_2 + \dots + p_{1n} e_n.$$

$$e'_i = p_{i1} e_1 + p_{i2} e_2 + \dots + p_{in} e_n.$$

Из p можем собрать матрицу.

$$e' = Pe.$$

$$e = P'e'.$$

Обе матрицы обратимы, значит обратимы, значит ранги обеих матриц равны n .

$$x = \alpha e = \alpha' e'.$$

$$\alpha e = \alpha' P e.$$

$$\alpha = \alpha' P.$$

$$\alpha' = \alpha P^{-1}.$$

3.1 Пример

Есть плоскость, выбрали стандартный базис $e_1 = (0, 1), e_2 = (1, 0)$. Возьмем в качестве нового базиса эти векторы, повернутые на угол φ . Нужна матрица преобразования.

$$e'_1 = \cos(\varphi)e_1 + \sin(\varphi)e_2.$$

$$e'_2 = -\sin(\varphi)e_1 + \cos(\varphi)e_2.$$

$$P = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

4 Подпространства и линейная оболочка

Определение 8 (Подпространство). L – линейное пространство над \mathbf{P} . $L_1 \subset L$ называется подпространством пространства L если $\forall x, y \in L_1 \forall \alpha, \beta \in \mathbf{P} \alpha x + \beta y \in L_1$.

Любое линейное подпространство само является линейным пространством.

В пространстве выбрали подпространство L_1 ее базис образует линейно независимый набор элементов относительно L . Ее можно дополнить до базиса L .

4.1 Примеры

1. Векторы на плоскости, которые лежат на осях.
2. Многочлены $P_n^0(t)$ – многочлены, которые в нуле имеют значение 0.

Задача на подумать. Размерность пространства полиномов, у которых сумма коэффициентов ноль.

Определение 9 (Линейная оболочка). В линейном пространстве L выбираем произвольное количество элементов. Линейной оболочкой этих элементов будем называть множество всех линейных комбинаций из этих элементов

$$x, y, \dots \in L.$$

$$\alpha x + \beta y + \dots \quad \alpha, \beta \in \mathbf{P}.$$

x, y, \dots система образующих

4.2 Пример

1. Комплексные числа – это линейная оболочка над $1, i$

Теорема 8. *Линейная оболочка является подпространством.*

Теорема 9. *Линейная оболочка является наименьшим подпространством содержащим систему x, y, \dots*

Любое линейное подпространство, которое содержит x, y, z, \dots , будет содержать оболочку.

Теорема 10. *Размерность линейной оболочки равна количеству линейно независимых векторов в ее образующей системе.*

Доказательство. Размерность совпадает с количеством элементов в базисе. Взяли систему, нашли самое большой линейно-независимое подмножество. Остальные элементы это линейная комбинация этих элементов. \square

Теорема 11. *Размерность линейной оболочки равна рангу матрицы, составленной из координат элементов образующей системы в произвольном базисе L .*

Доказательство.

$$x, y, z \dots \in L.$$

Каждый раскладываем по базису. \square

5 Линейная независимость относительно подпространства. Сумма и пересечение подпространств.

Определение 10. L – линейное пространство, в этом линейном пространстве есть линейное подпространство $L_1 \subset L$. $v_1, \dots, v_k \in L$ Мы будем говорить, что эти элементы линейно независимы относительно L_1 , если

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \in L_1.$$

выполняется, только если все альфы нули.

Теорема 12. $L_1 \subset L, u_1 \dots u_m$ базис. Для того чтобы вектора v_1, \dots, v_k были линейно независимы относительно $L_1 \iff u, v$ была линейно независимой

Доказательство. Прямой ход. Создаем линейную комбинацию относительно

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m = 0.$$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = -\beta_1 u_1 - \dots - \beta_m u_m \in L_1.$$

Левая комбинация это ноль, так как линейно независима относительно L_1 , правая линейно независима

Обратный предположим, что $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \neq 0 \in L_1$.

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_m u_m.$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^m \gamma_i u_i = 0.$$

Противоречие. □

Определение 11 (Базис относительно подпространства). $v_1, \dots, v_k \in L$ будем называть базисом относительно $L_1 \subset L$ если

1. v_1, \dots, v_k линейно независимы относительно L_1
2. $\forall x \in L \ x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + y \ y \in L_1$

Теорема 13. Для того, чтобы система была базисом была относительно L_1 необходимо и достаточно система u, v была базисом L

Доказательство. Необходимость. u представляем как линейную комбинацию u . Достаточность самим. □

$$L_j \subset L_{j-1} \subset \dots \subset L_2 \subset L_1 \subset L.$$

Теорема 14. Любую систему линейно независимую относительно L_1 до базиса L относительно L_1

Доказательство. Есть система линейно независимая относительно L_1 . u, v – линейно независимая совокупность дополним до базиса L . Получили базис относительно L_1 , так как у нас выходит v , что дополнили + сумма из L_1 □

6 Сумма и пересечение подпространств.

Есть линейное пространство L , L_1, L_2 его подпространства

Определение 12.

$$L_1 + L_2 := \{z \in L | z = x + y, x \in L_1, y \in L_2\}.$$

Определение 13.

$$L_1 \cap L_2 := \{x \in L | x \in L_1, x \in L_2\}.$$

Теорема 15. Сумма и пересечение подпространств сами являются подпространствами

Теорема 16.

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim (L_1 + L_2) + \dim (L_1 \cap L_2).$$

Доказательство.

$$\dim L_1 = p.$$

$$\dim L_2 = g.$$

$$\dim (L_1 + L_2) = s.$$

$$\dim L_1 \cap L_2 = t.$$

$$L_1 : u_1, \dots, u_p v_1 \dots v_{p-t} \text{ базис.}$$

$$L_2 : u_1 \dots u_t w_1 \dots w_{g-t}.$$

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

$$\alpha u + \beta v = -\gamma w = \nu u.$$

Левая штука из L_1 , правая из L_2 . Они из пересечения. Через ν разложили в базисе пересечения

$$\nu u + \gamma w = 0.$$

Получили нулевую линейную комбинацию базиса L_2

$$\alpha u + \beta v = 0.$$

$$z \in L_1 + L_2.$$

$$t = x + y.$$

x, y разложили по базису

□

7 Примеры

1. L – трехмерные вектора.

8 Алгоритм

Берутся векторы, которые не вошли в базис суммы, раскладываются по базису суммы. Теперь берем базисный вектор пересечения (часть разложения, где только векторы из L_1)

9 Прямая сумма

$$\exists! x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 : x = x_1 + x_2.$$

Множество таких x называется прямой суммой. $L_1 \oplus L_2$

Теорема 17.

$$L = L_1 \oplus L_2 \iff .$$

1. $L_1 \cap L_2 = \{\emptyset\}$

$$2. \dim L = \dim L_1 + \dim L_2$$

Доказательство. Предположим, что в пересечении есть не только нейтральный элемент.

$$\exists x \neq 0, x \in L_1 \cap L_2.$$

$$x = x + 0 = 0 + x.$$

Два разложения по L_1, L_2 В другую сторону. Есть базис в L_1 , есть базис в L_2

$$L_1 : u_1, \dots, u_k.$$

$$L_2 : v_1, \dots, v_m.$$

Базис L можно составить из объединения этих базисов.

$$\sum \alpha u + \sum \beta v = 0.$$

$$\sum \alpha u = - \sum \beta v.$$

Элемент из L_1 равен элементу из L_2 , то есть они из $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ произвольный элемент разложили по базису из L . Получили определение прямой суммы \square

Теорема 18. Для того чтобы $L = L_1 \oplus L_2 \iff$ объединение базиса L_1, L_2 будет базисом L .

Определение 14.

$$L_1 \subset L.$$

$$L_1^\nu - \text{Дополнение до } L.$$

$$L_1 \oplus L_1^\nu = L.$$

10 Евклидовы и унитарные пространства

У нас есть линейное пространство E над полем P .

Определение 15 (Евклидовое пространство). E – евклидово пространство.

$$\forall x, y \in E \exists (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Ставится в соответствие вещественное число, которое назовем скалярным произведением. Это отображение удовлетворяет следующим пунктам

1. $(x, y) = (y, x) \forall x, y \in E$
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \forall x, y, z$
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y) \forall x, y \in E, \forall \lambda \in P$
4. $(x, x) \geq 0 \forall x \in E (x, x) = 0 \iff x = 0$

10.1 Свойства.

1. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$

$$(y + z, x) = (y, x) + (z, x) = (x, y) + (x, z).$$

2. $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$

3. $(0, x) = 0$

4. $(\sum \alpha_i u_i, \sum \beta_j v_j) = \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j (u_i, v_j)$

5.

Теорема 19 (Неравенство Коши-Буняковского). $\forall x, y \in E \quad (x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$

Доказательство. Если x или y равны 0, то все понятно. Рассмотрим

$$\lambda x - y.$$

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) = (\lambda x, \lambda x) - (y, \lambda x) - (\lambda x, y) + (y, y) = \lambda^2(x, x) - 2\lambda(x, y) + (y, y) \geq 0.$$

$$D = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0.$$

□

10.2 Унитарные пространства.

Определение 16 (Унитарные пространства). *Линейное комплексное пространство называется унитарным, если любому двум элементам ставится в соответствие комплексное число, которое называется скалярным произведением. U*

10.2.1 Свойства

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$

2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \forall x, y, z \in U$

3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \forall x, y \in U, \lambda \in \mathbb{C}$

4. $(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in U, (x, x) = 0 \iff x = 0$

10.2.2 Примеры

$$x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

$$y = (\beta_1, \dots, \beta_n).$$

$$(x, y) = \sum \alpha_i \bar{\beta}_i.$$

$$(x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = \overline{(y, z)} + \overline{z, x} = (x, y) + (x, z).$$

$$(x, \lambda x) = \overline{(\lambda y, x)} = \bar{\lambda} \overline{(x, y)}.$$

$$\left(\sum \alpha_i u_i, \sum \beta_j v_j\right) = \sum_i \sum_j \alpha_i \bar{\beta}_j (u_i, v_j).$$

Теорема 20.

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

Доказательство.

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) = |\lambda|^2 (x, x) - \bar{\lambda} \overline{(x, y)} - \lambda (x, y) + (y, y) \geq 0.$$

Рассмотрим частный случай

$$\lambda = |\lambda|(\cos \phi - i \sin \phi).$$

□

Теорема 21 (Теорема Грама).

$$u_1, \dots, u_k \in E.$$

$$\Gamma = \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_2) & \dots & (u_1, u_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_k, u_1) & (u_k, u_2) & \dots & (u_k, u_k) \end{vmatrix}.$$

Вектора линейно зависимы

Доказательство. Дано, что вектора зависимы

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k = 0.$$

$$\alpha(u_1, u_1) + \dots + \alpha_k(u_1, u_k) = 0.$$

Дальше так же умножили скалярно на остальные u_i . Получили однородную систему с ненулевым решением. Ее определитель ноль. □