

# Лекции по алгебре

Титилин Александр

## 1 Линейное пространство, свойства, примеры

Есть множество  $L = \{a, b, \dots\}$  и есть некоторое поле  $P$

**Определение 1.**  $L$  называется линейным пространством над полем  $P$ , если выполняются следующие условия

1.  $\forall a, b \in L \exists! c : a + b = c$
2.  $\forall a, b, c \in L : (a + b) + c = a + (b + c)$
3.  $\exists \bar{0} \in L \forall a \in L a + \bar{0} = a$
4.  $\forall a \in L \exists \bar{a} \in L : a + \bar{a} = \bar{0}$
5.  $a + b = b + a \forall a, b \in L$

И существует операция  $\forall a \in L \forall \alpha \in P \exists! d \in L : \alpha a = d$

1.  $\alpha, \beta \in P a \in L : (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
2.  $\forall a, b \in L, \forall \alpha \in P \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
3.  $\exists 1 \in P 1a = a \forall a \in L$
4.  $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \forall a \in L \forall \alpha, \beta \in P$

### 1.1 Свойства операций

1.  $\exists \bar{0}$  Пусть есть два нуля тогда их сумма может быть и первым и вторым значит они равны.
2.  $\forall a \in L \exists \bar{a}$  Предполагаем что для какого-то  $a$  обратный не единственный, найдется два обратных  $\bar{a}_1 + a + \bar{a}_2$

$$\bar{a}_1 + (a + \bar{a}_2) = a_1 + \bar{0} = a_1.$$

$$(\bar{a}_1 + a) + \bar{a}_2 = (a + \bar{a}_1) + \bar{a}_2 = \bar{0} + \bar{a}_2 = \bar{a}_2 + \bar{0} = \bar{a}_2.$$

3.  $a, b \in L \exists c \in L : a = b + c$  с называется разностью  $a, b$  Докажем что разность существует для любых двух элементов и она единственная.  $(a + \bar{b}) + b = a + (\bar{b} + b) = a + (b + \bar{b}) = a + \bar{0} = a$

4.  $0a = \bar{0} \forall a \in L$

$$a + 0a = 1a + 0a = (1 + 0)a = 1a = a.$$

5.  $(-1)a = \bar{a} \forall a \in L$

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0.$$

## 1.2 Примеры

1. Векторы на плоскости и в пространстве.
2. Векторы с  $n$  координат.
3. Матрицы из вещ чисел  $n \times m$
4.  $\{\bar{0}\} = L, P = \mathbb{R}$
5.  $L = R_+ P = \mathbb{R} a + b = ab \alpha a = a^\alpha$
6.  $L$  - множество всех полиномов степени не старше  $n$  ( $P_n(t)$ ).
7.  $L$  - множество всех функций непрерывных на отрезке от 0 до 1.

Мы будем терминологически разделять комплексные и вещественные линейные пространства.

**Определение 2.** *Есть поле  $P$ , повесим над ним два линейных пространства  $L, L'$ . Эти два линейных пространства изоморфны друг другу, если между элементами существует биекция, такая что*

1.  $(a + b)' = a' + b' \forall a, b \in L$  Образ суммы равен сумме образов.
2.  $(\alpha a)' = \alpha a', \alpha \in P$

## 2 Линейная зависимость, базис, размерность

Рассмотрим  $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$

**Определение 3** (Линейная комбинация).

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i.$$

Если линейная комбинация равна нулю, то она называется нулевой или тривиальной.

**Определение 4** (Линейная независимость). Система элементов являются линейно независимыми, если их нулевая линейная комбинация достигается при всех нулевых коэффициентах.

**Определение 5** (Линейная зависимость). Если нулевую комбинацию можно получить, имея не нулевые коэффициенты, то она линейно зависима.

## 2.1 Примеры

1. Векторы на плоскость  $\vec{v}_1 = \{0, 1\}, \vec{v}_2 = \{1, 0\}$

$$\alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = (\alpha, \beta) = 0 \implies \alpha = 0 \wedge \beta = 0.$$

## 2.2 Свойства

1. Если в системе элементов есть нейтральный элемент, то она линейно независима.
2. Если в системе есть два одинаковых, то она линейно зависима.
3. Подмножество совокупности линейно зависимое  $\implies$  вся совокупность линейно зависима.
4. Все подмножества линейно независимой системы линейно независимы.

**Теорема 1.** Система элементов линейно зависимой  $\iff$  хотя бы один из элементов представлял собой линейную комбинацию остальных элементов.

*Доказательство.* Необходимость.  $\alpha_i \neq 0$   $\alpha_i a_i = -\alpha_1 a_1 - \dots - \alpha_n a_n$  Достаточность  $a_i = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_n a_n$   $\square$

**Теорема 2.**

$$a_1, \dots, a_k \in L, b_1, \dots, b_m \in L.$$

Любой элемент второй системы можно представить как линейную комбинацию первой.  $m > k \implies$  элементы  $b$  линейно зависимы

*Доказательство.* 1.  $k = 1$

$$b_1 = \alpha_1 a_1.$$

$$b_2 = \alpha_2 a_1.$$

....

$$b_m = \alpha_m a_1.$$

$$-\alpha_2 b_1 + \alpha_1 b_2 + 0b_3 + \dots + 0b_m = 0.$$

2. Утверждение теоремы верно для  $k - 1$

$$b_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \dots + \alpha_{1k}a_k.$$

$$b_i = a_{i1}a_1 + \dots a_{ik}a_k, i = 1 \dots m.$$

Если есть нулевой столбец альфа, то а при этих альфах можем выкинуть и элементы b представляются k-1 элементом попали в индуктивное предположение. Нулевых столбцов нет. Мы можем предположить, что  $\alpha_{11} \neq 0$

$$b'_2 = b_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}b_1.$$

$$b'_3 = b_3 - \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}b_1.$$

Элементы b' зависимы по индуктивному предположению

$$\gamma_2b'_2 + \gamma_3b'_3 + \dots \gamma_mb'_n = \bar{0}.$$

□