# Лекции по алгебре

Титилин Александр

## 1 Линейное пространство, свойства, примеры

Есть множество $\mathrm{L} = \{a, b, \dots\}$ и есть некоторое поле $P$

**Определение 1.** *$L$ называется линейным пространством над полем $P$, если выполняются следующие условия*

1. $\forall a, b \in L\ \exists! c : a + b = c$
2. $\forall a, b, c \in L : (a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists \overline{0} \in L \forall a \in L a + 0 = a$
4. $\forall a \in L \exists \overline{a} \in L : a + \overline{a} = \overline{0}$
5. $a + b = b + a \forall a, b \in L$

*И существует операция* $\forall a \in L \forall \alpha \in P \exists! d \in L : \alpha a = d$

1. $\alpha, \beta \in P a \in L = (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
2. $\forall a, b \in L, \forall \alpha \in P \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
3. $\exists 1 \in P 1a = a \forall a \in L$
4. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \forall a \in L \forall \alpha, \beta \in P$

### 1.1 Свойства операций

1. $\exists! \overline{0}$ Пусть есть два ноля тогда их сумма может быть и первым и вторым значит они равны.
2. $\forall a \in L \exists! \overline{a}$ Предполагаем что для какого-то а обратный не единственный, найдется два обратных $\overline{a_1} + a + \overline{a_2}$

$$\overline{a_1} + (a + \overline{a_2}) = a_1 + \overline{0} = a_1.$$

$$(\overline{a_1} + a) + \overline{a_2} = (a + \overline{a_1}) + \overline{a_2} = \overline{0} + \overline{a_2} = \overline{a_2} + \overline{0} = \overline{a_2}.$$

3. $a, b \in L \exists c \in L : a = b + c$ c называется разностью $a, b$ Докажем что разность существует для любых двух элементов и она единсвенная. $(a+\overline{b})+b = a+(\overline{b}+b) = a+(b+\overline{b}) = a+\overline{0} = a$

4. $0a = \overline{0} \forall \in L$
$$a + 0a = 1a + 0a = (1+0)a = 1a = a.$$

5. $(-1)a = \overline{a} \forall a \in L$
$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0.$$

### 1.2 Примеры

1. Векторы на плоскости и в пространстве.
2. Векторы с $n$ координат.
3. Матрицы из вещ чисел $n \times m$
4. $\{\overline{0}\}$ = L, $P = \mathbb{R}$
5. $L = R_+$ $P = \mathbb{R}$ $a + b = ab$ $\alpha a = a^\alpha$
6. L - множество всех полиномов степени не старше n ($P_n(t)$).
7. L - множество всех функций непрерывных на отрезке от 0 до 1.

Мы будем терминологически разделять компклесные и вещественные линейные пространства.

**Определение 2.** *Есть поле $P$, повесим над ним два линейных пространства $L, L'$. Эти два линейных пространства изоморфны друг другу, если между элементами существует биекция,такая что*

1. $(a+b)' = a' + b' \forall a, b \in L$ *Образ суммы равен сумме образов.*
2. $(\alpha a)' = \alpha a', \alpha \in P$

## 2 Линейная зависимость, базис, размерность

Рассмотрим $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$

**Определение 3** (Линейная комбинация)**.**
$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i.$$

Если линейная комбинация равна нулю, то она называется нулевой или тривиальной.

**Определение 4** (Линейная независимость)**.** *Система элементов являются линейно независимыми, если их нулевая линейная комбинация достигается при всех нулевых коэффициентов.*

**Определение 5** (Линейная зависимость)**.** *Если нулевую комбинацию можно получить, имея не нулевые коэффициенты, то она линейно зависимая*

## 2.1 Примеры

1. Векторы на плоскость $\vec{v_1} = \{0, 1\}\vec{v_2} = \{1, 0\}$

$$\alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = (\alpha, \beta) = 0 \implies \alpha = 0 \wedge \beta = 0.$$

## 2.2 Свойства

1. Если в системе элементов есть нейтральный элемент, то она линейно зависимая.
2. Если в системе есть два одинаковых, то она линейно зависимая.
3. Подномножество совокупность линейно зависимое $\implies$ вся совокупность линейно зависимая.
4. Все подмножества линейно независимой системы линейно независимые.

**Теорема 1.** *Система элементов линейно зависимой $\iff$ хотя бы один из элементов представлял собой линейную комбинацию остальных элементов.*

*Доказательство.* Необходимость. $\alpha_i \neq 0$ $\alpha_i a_i = -\alpha_1 a_1 - \cdots - \alpha_n a_n$ Достаточность $a_i = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_n a_n$ □

**Теорема 2.**

$$a_1, \ldots, a_k \in L, b_1, \ldots, b_m \in L.$$

*Любой элемент второй системы можно представить как линейную комбинацию первой. $m > k \implies$ элементы $b$ линейно зависимы*

*Доказательство.* 1. $k = 1$

$$b_1 = \alpha_1 a_1.$$

$$b_2 = \alpha_2 a_1.$$

$$\ldots.$$

$$b_m = \alpha_m a_1.$$

$$-\alpha_2 b_1 + \alpha_1 b_2 + 0b_3 + \cdots + 0b_m = 0.$$

2. Утверждение теоремы верно для $k-1$

$$b_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \dots + \alpha_{1k}a_k.$$

$$b_i = a_{i1}a_1 + \dots a_{ik}a_k, i = 1 \dots m.$$

Если есть нулевой столбец альф, то а при этих альфах можем выкинуть и элементы b представляются k-1 элементом попали в индуктивное предположение. Нулевых столбцов нет. Мы можем предположить, что $\alpha_{11} \neq 0$

$$b_2' = b_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}b_1.$$

$$b_3' = b_3 - \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}b_1.$$

Элементы b' зависимы по индуктивному предположению

$$\gamma_2 b_2' + \gamma_3 b_3` + \dots \gamma_m b_n' = \overline{0}.$$

□

# 3 Базис и размерность линейного пространства. Переход к другому базису.

Пусть у нас есть линейное пространство L над полем P.

**Определение 6** (Базис)**.** *Базисом линейного пространства $L$ будем называть линейно независимую систему $e_1, \dots, e_n \in L$ такую что $\forall x \in L$ $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ Альфы – это координаты $x$ по базису $e$.*

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

**Теорема 3.** *Для выбраного элемента и базиса есть только один набор координат.*

*Доказательство.* Пусть существуют $x, e_1 \dots e_n$ такие что

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

□

**Теорема 4.**

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

$$y = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n y_n.$$

*1.* $x + y = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) e_i$

*2.* $\lambda \in P \lambda x = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i)$

**Определение 7** (Размерность)**.** *Линейное пространство* $L$ $(\dim L = n)$ *Размерность* $L$ *равна* $n$ *если в этом пространстве существует система из* $n$ *линейных независимых элементов, а любая система из* $n$ *+1 линейно зависимая*

*Если в линейном пространстве существует произвольное количество линейно независимых элементов то размерность бесконечная*

**Теорема 5.** *Любые* $n$ *линейные независимые элементы* $n$*-мерного пространства образуют базис.*

*Доказательство.* С линейной назависимостью все ясно. Берем произвольный $x \in L$ добавили его в линейно независимую систему, получили линейно зависимую.

$$\alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n \alpha x = 0.$$

$$x = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha} e_i.$$

□

**Теорема 6.** *Если есть базис из* $n$ *элементов, то* $\dim L = n$

*Доказательство.* По последней теореме с прошлого занятия. Взяли $n + 1$ любых элементов из L, каждый из них раскладывается по базису. □

**Теорема 7.** *Любые два Линеныйных пространства одинаковой размерности над одним полем изоморфны.*

*Доказательство.*

$$\dim L = \dim L' = n.$$

Назначим взаимно однозначное соответветсвие. У L базис $e_1, e_2, \dots, e_1$, У L' базис $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$. Биекция между базисами есть.

Берем $x \in L$

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n.$$

$$x' = \alpha_1 e'_1 + \dots + \alpha_n e'_n.$$

Действительно является изоморфизмом. □

Пусть в линейном пространстве два базиса $e_1, \dots, e_n \wedge e'_1 \dots e'_n$

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n = \alpha'_1 e'_1 + \dots + \alpha'_n e'_n.$$

$$e'_1 = p_{11} e_1 + p_{12} e_2 + \dots + p_{1n} e_n.$$

$$e'_i = p_{i1} e_1 + p_{i2} + \dots + p_{in} e_n.$$

Из p можем собрать матрицу.

$$e' = Pe.$$

$$e = P'e'.$$

Обе матрицы обратимы, значит обратимы, значит ранги обоих матриц равны n.

$$x = \alpha e = \alpha' e'.$$

$$\alpha e = \alpha' P e.$$

$$\alpha = \alpha' P.$$

$$\alpha' = \alpha P^{-1}.$$