Лекции по алгебре

Титилин Александр

1 Линейное пространство, свойства, примеры

Есть множество L $= \{a, b, \dots\}$ и есть некоторое поле P

Определение 1. *L называется линейным пространством над полем P, если выполняются следущие условия*

1. $\forall a, b \in L\ \exists! c : a + b = c$
2. $\forall a, b, c \in L : (a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists \overline{0} \in L \forall a \in L a + 0 = a$
4. $\forall a \in L \exists \overline{a} \in L : a + \overline{a} = \overline{0}$
5. $a + b = b + a \forall a, b \in L$

И существует операция $\forall a \in L \forall \alpha \in P \exists! d \in L : \alpha a = d$

1. $\alpha, \beta \in P a \in L = (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
2. $\forall a, b \in L, \forall \alpha \in P \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
3. $\exists 1 \in P 1a = a \forall a \in L$
4. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \forall a \in L \forall \alpha, \beta \in P$

1.1 Свойства операций

1. $\exists! \overline{0}$ Пусть есть два ноля тогда их сумма может быть и первым и вторым значит они равны.
2. $\forall a \in L \exists! \overline{a}$ Предполагаем что для какого-то a обратный не единственный, найдется два обратных $\overline{a_1} + a + \overline{a_2}$

$$\overline{a_1} + (a + \overline{a_2}) = a_1 + \overline{0} = a_1.$$

$$(\overline{a_1} + a) + \overline{a_2} = (a + \overline{a_1}) + \overline{a_2} = \overline{0} + \overline{a_2} = \overline{a_2} + \overline{0} = \overline{a_2}.$$

3. $a, b \in L \exists c \in L : a = b + c$ c называется разностью a, b Докажем что разность существует для любых двух элементов и она единсвенная. $(a+\overline{b})+b = a+(\overline{b}+b) = a + (b+\overline{b}) = a + \overline{0} = a$

4. $0a = \overline{0} \forall \in L$
$$a + 0a = 1a + 0a = (1+0)a = 1a = a.$$

5. $(-1)a = \overline{a} \forall a \in L$
$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0.$$

1.2 Примеры

1. Векторы на плоскости и в пространстве.

2. Векторы с n координат.

3. Матрицы из вещ чисел $n \times m$

4. $\{\overline{0}\}$ = L, $P = \mathbb{R}$

5. $L = R_+$ $P = \mathbb{R}$ $a + b = ab$ $\alpha a = a^\alpha$

6. L - множество всех полиномов степени не старше n ($P_n(t)$).

7. L - множество всех функций непрерывных на отрезке от 0 до 1.

Мы будем терминологически разделять компклесные и вещественные линейные пространства.

Определение 2. *Есть поле P, повесим над ним два линейных пространства L, L'. Эти два линейных пространства изоморфны друг другу, если между элементами существует биекция,такая что*

1. $(a + b)' = a' + b' \forall a, b \in L$ *Образ суммы равен сумме образов.*

2. $(\alpha a)' = \alpha a', \alpha \in P$

2 Линейная зависимость, базис, размерность

Рассмотрим $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$

Определение 3 (Линейная комбинация)**.**
$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i.$$

Если линейная комбинация равна нулю, то она называется нулевой или тривиальной.

Определение 4 (Линейная независимость). *Система элементов являются линейно независимыми, если их нулевая линейная комбинация достигается при всех нулевых коэффициентов.*

Определение 5 (Линейная зависимость). *Если нулевую комбинацию можно получить, имея не нулевые коэффициенты, то она линейно зависимая*

2.1 Примеры

1. Векторы на плоскость $\vec{v_1} = \{0, 1\}\vec{v_2} = \{1, 0\}$

$$\alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = (\alpha, \beta) = 0 \implies \alpha = 0 \wedge \beta = 0.$$

2.2 Свойства

1. Если в системе элементов есть нейтральный элемент, то она линейно зависимая.
2. Если в системе есть два одинаковых, то она линейно зависимая.
3. Подномножество совокупность линейно зависимое $\implies$ вся совокупность линейно зависимая.
4. Все подмножества линейно независимой системы линейно независимые.

Теорема 1. *Система элементов линейно зависимой $\iff$ хотя бы один из элементов представлял собой линейную комбинацию остальных элементов.*

Доказательство. Необходимость. $\alpha_i \neq 0$ $\alpha_i a_i = -\alpha_1 a_1 - \cdots - \alpha_n a_n$ Достаточность $a_i = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_n a_n$ □

Теорема 2.

$$a_1, \ldots, a_k \in L, b_1, \ldots, b_m \in L.$$

Любой элемент второй системы можно представить как линейную комбинацию первой. $m > k \implies$ элементы b линейно зависимы

Доказательство. 1. $k = 1$

$$b_1 = \alpha_1 a_1.$$

$$b_2 = \alpha_2 a_1.$$

$$\ldots.$$

$$b_m = \alpha_m a_1.$$

$$-\alpha_2 b_1 + \alpha_1 b_2 + 0 b_3 + \cdots + 0 b_m = 0.$$

2. Утверждение теоремы верно для $k-1$

$$b_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \dots + \alpha_{1k}a_k.$$

$$b_i = a_{i1}a_1 + \dots a_{ik}a_k, i = 1 \dots m.$$

Если есть нулевой столбец альф, то а при этих альфах можем выкинуть и элементы b представляются k-1 элементом попали в индуктивное предположение. Нулевых столбцов нет. Мы можем предположить, что $\alpha_{11} \neq 0$

$$b_2' = b_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}b_1.$$

$$b_3' = b_3 - \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}b_1.$$

Элементы b' зависимы по индуктивному предположению

$$\gamma_2 b_2' + \gamma_3 b_3` + \dots \gamma_m b_n' = \overline{0}.$$

□

3 Базис и размерность линейного пространства. Переход к другому базису.

Пусть у нас есть линейное пространство L над полем P.

Определение 6 (Базис)**.** *Базисом линейного пространства L будем называть линейно независимую систему $e_1, \dots, e_n \in L$ такую что $\forall x \in L$ $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ Альфы – это координаты x по базису e.*

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. *Для выбраного элемента и базиса есть только один набор координат.*

Доказательство. Пусть существуют $x, e_1 \dots e_n$ такие что

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

□

Теорема 4.

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n.$$

$$y = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n y_n.$$

1. $x + y = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i)e_i$

2. $\lambda \in P \lambda x = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i)$

Определение 7 (Размерность)**.** *Линейное пространство* L $(\dim L = n)$ *Размерность* L *равна* n *если в этом пространстве существует система из* n *линейных независимых элементов, а любая система из* n *+1 линейно зависимая*

Если в линейном пространстве существует произвольное количество линейно независимых элементов то размерность бесконечная

Теорема 5. *Любые* n *линейные независимые элементы* n*-мерного пространства образуют базис.*

Доказательство. С линейной названисимостью все ясно. Берем произвольный $x \in L$ добавили его в линейно независимую систему, получили линейно зависимую.

$$\alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n \alpha x = 0.$$

$$x = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha} e_i.$$

□

Теорема 6. *Если есть базис из* n *элементов, то* $\dim L = n$

Доказательство. По последней теореме с прошлого занятия. Взяли $n + 1$ любых элементов из L, каждый из них раскладывается по базису. □

Теорема 7. *Любые два Линеныйных пространства одинаковой размерности над одним полем изоморфны.*

Доказательство.

$$\dim L = \dim L' = n.$$

Назначим взаимно однозначное соответветсвие. У L базис $e_1, e_2, \dots, e_1$, У L' базис $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$. Биекция между базисами есть.

Берем $x \in L$

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n.$$

$$x' = \alpha_1 e'_1 + \dots + \alpha_n e'_n.$$

Действительно является изоморфизмом. □

Пусть в линейном пространстве два базиса $e_1, \dots, e_n \wedge e'_1 \dots e'_n$

$$x = \alpha_1 e_1 + \dots \alpha_n e_n = \alpha'_1 e'_1 + \dots + \alpha'_n e'_n.$$

$$e'_1 = p_{11} e_1 + p_{12} e_2 + \dots + p_{1n} e_n.$$

$$e'_i = p_{i1} e_1 + p_{i2} + \dots + p_{in} e_n.$$

Из р можем собрать матрицу.

$$e' = Pe.$$

$$e = P'e'.$$

Обе матрицы обратимы, значит обратимы, значит ранги обоих матриц равны n.

$$x = \alpha e = \alpha' e'.$$

$$\alpha e = \alpha' P e.$$

$$\alpha = \alpha' P.$$

$$\alpha' = \alpha P^{-1}.$$

3.1 Пример

Есть плоскость, выбрали стандартный базис $e_1 = (0, 1), e_2 = (1, 0)$. Возьмем в качестве нового базиса эти векторы, повернутые на угол φ Нужна матрица преобразования.

$$e_1' = \cos{(\varphi)} e_1 + \cos{(\varphi)} e_2.$$

$$e_2' = -\sin{(\varphi)} e_1 + \cos{(\varphi)} e_2.$$

$$P = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

4 Подпространства и линейная оболочка

Определение 8 (Подпространство)**.** *L – линейное пространство над $\mathbf{P}$. $L_1 \subset L$ называется подпространством пространства L если $\forall x, y \in L_1 \forall \alpha, \beta \in \mathrm{P}$ $\alpha x + \beta y \in L_1$*

Любое линейное подпространство само является линейным пространством.

В пространстве выбрали подпространство L_1 ее базис образует линейно незавсимый набор элементов относительно L. Ее можно дополнить до базиса L

4.1 Примеры

1. Векторы на плоскости, которые лежат на осях.
2. Многочлены $P_n^0(t)$ – многочлены, которые в нуле имеют значение 0.

Задача на подумать. Размерность пространства полиномов, у которых сумма коэфициентов ноль.

Определение 9 (Линейная оболочка.)**.** *В линейном пространстве L выбираем произвольное количество элементов. Линейной оболочкой этих элементов будем называть множество всех линейных комбинаций из этих элементов*

$$x, y, \ldots, \in L.$$

$$\alpha x + \beta y + \ldots \quad \alpha, \beta \in \mathbf{P}.$$

$x, y \ldots$ система образующих

4.2 Пример

1. Комплексные числа – это линейная оболочка над $1, i$

Теорема 8. *Линейная оболочка является подпространством.*

Теорема 9. *Линейная оболочка является наименьшим подпространством содержащим систему $x, y, \dots$*

Любое линейное подпространство, которое содержит $x, y, z, \dots$, будет содержать оболочку.

Теорема 10. *Размерность линейной оболочки равна количеству линейно независимых векторов в ее образующей системе.*

Доказательство. Размерность совпадает с количеством элементов в базисе. Взяли систему, нашли самое большой линейно-независмое подмножество. Остальные элементы это линейная комбинация этих элементов. □

Теорема 11. *Размерность линейной оболочки равна рангу матрицы, составленной из координат элементов образующей системы в произвольном базисе L.*

Доказательство.

$$x, y, z \dots \in L.$$

Каждый раскладываем по базису. □

5 Линейная независимость относительно подпространства. Сумма и пересечение подпространств.

Определение 10. *L – линейное пространство, в этом линейном пространстве есть линейное подпространство $L_1 \subset L$. $v_1, \dots v_k \in L$ Мы будем говорить, что эти элемены линейно независимые относительно L_1 , если*

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \in L_1.$$

выполняется, только если все альфы нули.

Теорема 12. *$L_1 \subset L, u_1 \dots u_m$ базис. Для того чтобы вектора $v_1, \dots, v_k$ Были линейно независимы относительно $L_1 \iff u, v$ была линейно независимой*

Доказательство. Прямой ход. Создаем линейную комбинацию относительно

$$\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m = 0.$$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = -\beta_1 u_1 - \dots - b_m u_m \in L_1.$$

Левая комбиация это ноль, так как линйно независима относительно L_1, правая линейно независима

Обратный предположим, что $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \neq 0 \in L_1$.

$$\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_k v_k = \gamma_1 u_1 + \dots \gamma_m u_m.$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i u_i = 0.$$

Противоречие. □

Определение 11 (Базис относительно подпространства)**.** *$v_1, \dots, v_k \in L$ будем называть базисом относительно $L_1 \subset L$ если*

1. *$v_1, \dots, v_k$ линейно независимы относительно L_1*
2. *$\forall x \in L$ $x = \alpha_1 v_1 + \dots \alpha_k v_k + y$ $y \in L_1$*

Теорема 13. *Для того, чтобы система была базисом была относительно L_1 необходимо и достачно система u, v была базисом L*

Доказательство. Необходимость. y представляем как линейную комбинацию u. Достаточность самим. □

$$L_j \subset L_{j-1} \subset \dots L_2 \subset L_1 \subset L.$$

Теорема 14. *Любую систему линейно независимую относительно L_1 до базиса L относительно L_1*

Доказательство. Есть система линейно независимая относительная L_1. u,v – линейно независимая совокупность дополним до базиса L. Получили базис относительно L_1, так как у нас выходит v, что дополнили + сумма из L_1 □

6 Сумма и пересечение подпространств.

Есть линенйное пространство L, L_1, L_2 его подпространства

Определение 12.

$$L_1 + L_2 := \{z \in L | z = x + y, x \in L_1, y \in L_2\}.$$

Определение 13.

$$L_1 \cap L_2 := \{x \in L | x \in L_1, x \in L_2\}.$$

Теорема 15. *Сумма и пересечение подпространств сами являются подпросранствами*

Теорема 16.

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim (L_1 + L_2) + \dim (L_1 \cap L_2).$$

Доказательство.

$$\dim L_1 = p.$$

$$\dim L_2 = g.$$

$$\dim (L_1 + L_2) = s.$$

$$\dim L_1 \cap L_2 = t.$$

$$L_1 : u_1, \dots, u_p v_1 \dots v_{p-t} \text{базис}.$$

$$L_2 : u_1 \dots u_t w_1 \dots w_{g-t}.$$

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

$$\alpha u + \beta v = -\gamma w = \nu u.$$

Левая штука из L_1 , правая из L_2. Они из пересечения. Через ν разложили в базисе пересечения

$$\nu u + \gamma w = 0.$$

Получили нулевую линейную комбинацию базиса L_2

$$\alpha u + \beta v = 0.$$

$$z \in L_1 + L_2.$$

$$t = x + y.$$

x, y разложили по базису □

7 Примеры

1. L – трехмерные вектора.

8 Алгоритм

Берутся векторы, которые не вошли в базис суммы, раскладываются по базису суммы.Теперь берем базисный вектор пересечения (часть разложения, где только векторы из L_1)

9 Прямая сумма

$$\exists! x_1 \in L_1, x_2 \in L_2 : x = x_1 + x_2.$$

Множесвто таких иксов называется прямая сумма. $L_1 \oplus L_2$

Теорема 17.

$$L = L_1 \oplus L_2 \iff .$$

1. $L_1 \cap L_2 = \{\emptyset\}$

2. $\dim L = \dim L_1 + \dim L_2$

Доказательство. Предположим, что в пересечение есть не только нейтральный элемент.

$$\exists x \neq 0, x \in L_1 \cap L_2.$$

$$x = x + 0 = 0 + x.$$

Два разложения по L_1, L_2 В другую сторону. Есть базис в L_1, есть базис в L_2

$$L_1 : u_1, \ldots, u_k.$$

$$L_2 : v_1, \ldots, v_m.$$

Базис L можно соствить из объединения этих базисов.

$$\sum \alpha u + \sum \beta v = 0.$$

$$\sum \alpha u = -\sum \beta v.$$

Элемент из L_1 равен элементу из L_2, тоесть они из $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ произвольный элемент разложили по базису из L. Получили определение прямой суммы □

Теорема 18. *Для того чтобы $L = L_1 \oplus L_2 \iff$ обвединение базиса L_1 L_2 будет базисом L.*

Определение 14.

$$L_1 \subset L.$$

$$L_1^\nu - \textit{Дополнение до } L.$$

$$L_1 \oplus L_1^\nu = L.$$

10 Евклидовы и унитарные пространства

У нас есть линейное пространство E над полем P.

Определение 15 (Евклидовое пространство)**.** *E – евклидово пространство.*

$$\forall x, y \in E \ \exists (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Ставится в соответсвие вещественное число, которое назовем скалярным произведением. Это отображение удовлетворяет следущим пунктам

1. $(x, y) = (y, x) \ \forall x, y \in E$
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \ \forall x, y, z$
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y) \ \forall x, y \in E, \forall \lambda \in P$
4. $(x, x) \geq 0 \forall x \in E (x, x) = 0 \iff x = 0$

10.1 Свойства.

1. $(x, y+z) = (x,y) + (x,z)$
$$(y+z, x) = (y,x) + (z,x) = (x,y) + (x,z).$$
2. $(x, \lambda y) = \lambda(x,y)$
3. $(0, x) = 0$
4. $(\sum \alpha_i u_i, \sum \beta_j v_j) = \sum_i \sum_j \alpha_i b_j (u_i, v_j)$
5.

Теорема 19 (Неравенство Коши-Буняковского). $\forall x, y \in E \ (x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$

Доказательство. Если x или y равны 0, то се понятно. Рассмотрим
$$\lambda x - y.$$
$$(\lambda x - y, \lambda x - y) = (\lambda x, \lambda x) - (y, \lambda x) - (\lambda x, y) + (y,y) = \lambda^2 (x,x) - 2\lambda(x,y) + (y,y) \geq 0.$$
$$D = (x,y)^2 - (x,x)(y,y) \leq 0.$$
□

10.2 Унитарные пространства.

Определение 16 (Унитарные пространства). *Линейное комплексное пространство называется унитарным, если любым двум элементам ставится в соответсвие комплексное число, которое называется скалярным произведением.* U

10.2.1 Свойства

1. $(x,y) = \overline{(y,x)}$
2. $(x+y, z) = (x,z) + (y,z) \forall x, y, z \in U$
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x,y), \forall x, y \in U, \lambda \in P$
4. $(x,x) \geq 0 \ \forall x \in U, (x,x) = 0 \iff x = 0$

10.2.2 Примеры

$$x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

$$y = (\beta_1, \dots, \beta_n).$$

$$(x, y) = \sum \alpha_i \overline{\beta_i}.$$

$$(x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x), (z, x)} = \overline{(y, z)} + \overline{z, x} = (x, y) + (x, z).$$

$$(x, \lambda x) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda}(x, y).$$

$$(\sum \alpha_i u_i, \sum \beta_j v_j) = \sum_i \sum_j .$$

Теорема 20.

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

Доказательство.

$$(\lambda x - y, \lambda x - y) = |\lambda|^2 (x, x) - \overline{\lambda \overline{(x, y)}} - \lambda(x, y) + (y, y) \geq 0.$$

Рассмотрим частный случай

$$\lambda = |\lambda|(\cos\phi - i \sin\phi).$$

□

Теорема 21 (Теорема Грама)**.**

$$u_1, \dots, u_k \in E.$$

$$\Gamma = \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & (u_1, u_2) & \dots & (u_1, u_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_k, u_1) & (u_k, u_2) & \dots & (u_k, u_k) \end{vmatrix}.$$

Вектора линейно зависимы

Доказательство. Дано, что вектора зависимы

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k = 0.$$

$$\alpha(u_1, u_1) + \dots \alpha_k (u_1, u_k) = 0.$$

Дальше так же умножили скалярно на остальные u. Получили однородную систему с ненулевым решением. Ее определитель ноль.
В обратную сторону. Используем опеределитель как определитель системы

$$\begin{cases} (u_1, u_1)\alpha_1 + \dots + (u_1, u_k)\alpha_k = 0 \\ \dots \\ (u_k, u_1)\alpha_1 + \dots + (u_k, u_k)\alpha = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases}(\alpha_1 u_1, \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k) = 0 \\ \dots \\ (\alpha_k u_k, \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k)\end{cases}.$$

Набор альф – ненулевое решение. Все сложили

$$(\sum \alpha u, \sum \alpha u).$$

$$\sum \alpha u = 0.$$

□

Определение 17 (Нормированный)**.** *$x \in E$ нормированный, если $(x, x) = 1$*

Теорема 22. *Любой вектор кроме нуля, можно нормировать.*

Доказательство.

$$(x, x) = \lambda.$$

$$\frac{(x, x)}{\lambda} = 1.$$

$$(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}, \frac{x}{\sqrt{\lambda}}) = 1.$$

□

11 Ортогональность векторов и подпространств.

По умолчанию живем в евклидовом пространстве.

Определение 18 (Ортогональность)**.** *$x, y \in E, x \perp y := (x, y) = 0$*

Определение 19 (Ортогональная система)**.** *Систему векторов называем ортогональной, если все векторы попарно ортогональны и нет нуля.*

Определение 20 (Ортонормированная система.)**.** *Если в системе ортогональной системе, все элементы нормированны, то она ортонормированная*

Теорема 23. *Ортогональная(ортонормированная) система,линейно независима*

Доказательство. Так как в определителе Грама, все нули, кроме главной диагонали. □

Следствие 23.1. *В n мерном евклидовом пространстве, ортогональная система не может содержать более n элементов.*

Следствие 23.2. *Если в ортогональной системе n – элементов. Она базис (ортогональный/ортонормированный базис).*

Будем называть ортонормированный базис естественным.

Определение 21 (Символ Кронекера)**.** $e_1, \ldots, e_n$ *– ортонормированный базис*

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \quad .$$

Теорема 24. *Всякую линейно независимую систему линейного пространства можно перевести в ортогональную линейными преобразованиями элементов*

$$x_1, \ldots, x_k \in E.$$

Доказательство. Индукция по количество элементов в изначальной системе. Система из 1 элемента все ясно.
Предположим, что мы умеем взяв $k-1$ элемент превратить в $k-1$ ортогональный элемент. Возьмем систему из k линейно независимых элементов. Взяли $k-1$ по предположению превратили в ортогональную.

$$y_k = x_k + \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{k-1} y_{k-1}.$$

$$(y_k, y_i) = 0, i = 1, \ldots, k-1.$$

$$0 = (y_k, y_1) = (x_k, y_1) + \alpha_1 (y_1, y_1).$$

$$\alpha_1 = -\frac{(x_k, y_i)}{(y_1, y_1)}.$$

$$\alpha_i = -\frac{(x_k, y_i)}{(y_i, y_i)}.$$

$$y_1 = x_1.$$

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1.$$

$$y_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k, y_i)}{(y_i, y_i)} y_i.$$

□