Экзамен по алгебре и геометрии

Титилин Александр

Ананлитическая Геометрия

1 Геометрические векторы.

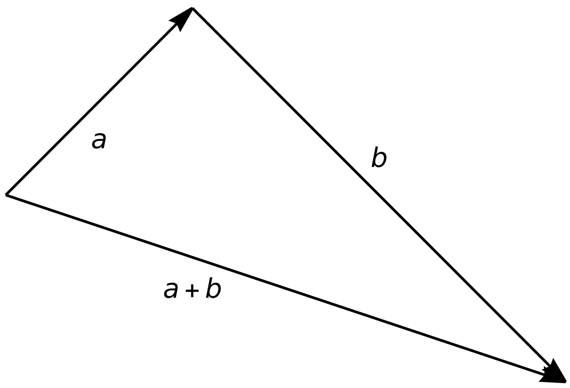
Определение 1. *Вектор – направленный отрзок, который характеризуется длиной и направлением.*$\overline{AB}$ *– вектор,* A *– начало (точка приложения),* B *– конец.* $|AB|$ *– Длина вектра*

Определение 2. *Векторы коллинеарны (*$\overline{a} \parallel \overline{b}$*) , если* L *– прямая,* $\overline{a} \parallel L \wedge \overline{b} \parallel L$

Определение 3. a_0 *орт вектора* $\overline{a}$ *, если* $\overline{a_0}$ *сонаправлен* $\overline{a} \wedge |\overline{a_0} = 1$

Определение 4. $\overline{a} = \overline{b}$ *:=* $|a| = |b| \wedge a \parallel b \wedge$ *a сонаправлен b.*

Определение 5. *Суммой* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *называют вектор, идущий из начала* $\overline{a}$ *в конец* $\overline{b}$*, если b приложен к концу* $\overline{a}$



Определение 6. *Произведение вектора на число – вектор, коллинеарный исходногому и имеющий его длину умноженную на число*

Теорема 1.

1. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$
2. $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$
3. $\exists! \overline{0} : \overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$

4. $\forall \overline{a} \exists -\overline{a} : \overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$

5. $\alpha(\beta\overline{a}) = (\alpha\beta)\overline{a}$

6. $(\alpha+\beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$

2 Линейная зависимость векторов.

Определение 7. *Набор векторов $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ называется линейно зависимым, если существует набор чисел, где хоть одно не равно 0 и $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots \alpha_n a_n = 0$*

Теорема 2. *1.* $\overline{0}$ *-линейно зависимый*

2. $a_1, \ldots, 0, \ldots, a_n$ *- линейно зависимый*

3. $a_1, \ldots, a_i$ *- линейно зависимый,*$a_1, \ldots a_i, \ldots a_n$ *– линейно зависимый.*

4. $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n$ *- линейно зависимый* $\iff a_i = \sum_{j \neq i} a_i$

Доказательство. 1. $1 * \overline{0} = \overline{0}$

2. $0a_1 + \cdots + 1 * \overline{0} + \cdots + 0 * \overline{a_n} = 0$

3. $\exists \alpha_1 \ldots \alpha_i \sum \alpha_j a = 0 \; \alpha_1 a_1 + \ldots \alpha_i a_i + \ldots 0 * a_n = 0$

□

3 Линейная зависимость трех и четырех векторов в плоскости и пространстве.

Теорема 3. $\overline{a}, \overline{b}$ *линейно зависимые* $\iff \overline{a} \parallel \overline{b}$

Доказательство. $\rightarrow \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} = \overline{0}$. Пусть $\beta \neq 0 \implies \overline{b} = (-\frac{\alpha}{\beta})\overline{a} \implies a \parallel b$
$\leftarrow \overline{b} = \lambda\overline{a} \implies \overline{b} - \lambda\overline{a} = \overline{0}$ □

Теорема 4. $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ *линейно зависимые* $\iff \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \parallel \Pi$

Доказательство. $\rightarrow$. $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}\gamma \neq 0 \implies \overline{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\overline{a} - \frac{\beta}{\gamma}\overline{b}$. Векторы лежат в одной плоскости.
$\rightarrow$. Если одна из пар коллинеарна, то она линейно зависимая, и мы можем просто оставшийся вектор на 0 умножить. Иначе переносим все прямые на одну плоскоскость в одну точку. Через конец вектора с проводим прямые паралельные a и b. Эти прямые пересекают $\nu\overline{a}$ и $\mu\overline{b}$. $\overline{c} = \nu\overline{a} + \mu\overline{b}$ □

Теорема 5. *Любые четыре вектора линейно зависимы.*

Доказательство. Если 3 вектора компланарны, то все понятно. □

4 Проекция вектора на ось.

Определение 8. *u – ось (направленная прямая), $\vec{a} = \vec{AB}$, $A'B'$ основания перпендикуляров, опущенных на A, B. $\pm \mid \vec{A'B'} \mid$ – проекция $\vec{a}$ на u. Знак зависит от направления вектора. Если он сонаправлен с осью, то плюс иначе минус.*

Теорема 6. *Проекция вектора $\vec{a}$ на ось u равна $|\vec{a}| * \cos\phi$, где ϕ угол наклона вектора к оси.*

Теорема 7. $Pr_u(\vec{a}+\vec{b}) = Pr_u\vec{a} + Pr_u\vec{b}$
$Pr_u(\alpha\vec{a}) = \alpha Pr_u\vec{a}$

5 Базис аффиные координаты

Определение 9 (базис в пространстве)**.** *$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ линейно независимы. Они образует базис если $\forall \overline{d} \exists \lambda, \mu, \nu : \overline{d} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \nu\overline{c}$*

Определение 10 (базис на плоскости)**.** *$\vec{a}, \vec{b}$ линейно независимы, они образуют базис если $\forall \vec{c} : \exists \lambda, \nu\ \vec{c} = \lambda\vec{a} + \nu\vec{b}$*

Теорема 8. *Любые три линейно-независимые вектора однозначно раскладываются по базису относительно четвертого.*

Доказательство. $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \nu\vec{b} + \mu\vec{c} \wedge \vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} (\lambda-\alpha)\vec{a} + (\nu-\beta)\vec{b} + (\mu-\gamma)\vec{c} = \vec{0}$.
Векторы линейно независимые $\lambda = \alpha, \mu = \beta, \nu = \gamma$ □

Теорема 9. *При сложение двух векторов их координаты относительно одного базиса складываются. При умножении на число умножаются на это число.*

Доказательство.

$$\vec{d_1} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} + \gamma_1\vec{c}.$$

$$\vec{d_2} = \alpha_2\vec{a} + \beta_2\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

$$\vec{d_1} + \vec{d_2} = (\alpha_1 + \alpha_2)\vec{a} + (\beta_1 + \beta_2)\vec{b} + (\gamma_1 + \gamma_2)\vec{c}.$$

$$\lambda\vec{d_1} = (\lambda\alpha_1)\vec{a} + (\lambda\beta_1)\vec{b} + (\lambda\gamma_1)\vec{c}.$$

Определение 11. *Аффиные координаты задаются базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и точкой O (началом координат)*

□

Определение 12 (Декартовы координаты)**.** *$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – взаимно ортогональные векторы длины 1. Разложение по такому базису – декартовы координаты*

Теорема 10. *Декартовы координаты вектора $\vec{d}$ равны его проекциям на оси $OxOyOz$*

Теорема 11. *$\alpha, \beta, , \gamma$ углы наклона вектора $\vec{d}$ к осям Ox, Oy, Oz*

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Доказательство.

$$\vec{d} = \{X, Y, Z\}.$$

$$X = |\vec{d}| \cos\alpha.$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Каждую из этих хреней в квадрат возводим и складываем теорема доказана. □

Определение 13. *M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ , если $\vec{M_1M} = \lambda\vec{MM_2}$*

$$M = (x, y, z).$$

$$M_1 = (x_1, y_1, z_1).$$

$$M_2 = (x_2, y_2, z_2).$$

$$\{x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z\} = \lambda\{x_2 - x, y_2 - z, z_2 - z\}.$$

6 Скалярное произведение

Определение 14. $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| * |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ *– скалярное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$. Так же выражается через проекции.*

$$|\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = Pr_a\vec{b} \implies (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| Pr_a\vec{b}.$$

$$|\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = Pr_b\vec{a} \implies (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| Pr_b\vec{a}.$$

Теорема 12. $\vec{a} \perp \vec{b} \iff (\vec{a}, \vec{b}) = 0$

Доказательство. $\rightarrow$. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \implies (\vec{a}, \vec{b}) = 0$
$\leftarrow$. $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \implies |a| = 0 \vee |b| = 0 \vee \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0.$ □

Теорема 13. *Если угол между векторами меньше $\frac{\pi}{2}$ скалярное произведение больше нуля. Иначе оно меньше нуля.*

6.1 Алгебраические свойства.

Теорема 14. *1.* $(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a})$

2. $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c})$

3. $(\alpha\vec{a},\vec{b}) = \alpha(\vec{a},\vec{b})$

4. $(\vec{a},\vec{a}) > 0$ *если* $a \neq 0$, $(\vec{a},\vec{a}) = 0$, *если* $\vec{a} = 0$

Доказательство. 1. очев

2. $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = |c|Pr_c(\vec{a}+\vec{b}) = |c|Pr_c\vec{a} + |c|Pr_c\vec{b} = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c})$

3. $(\alpha\vec{a},\vec{b}) = |b|Pr_b(\alpha a) = \alpha|b|Pr_{\vec{b}}(\vec{a}) = \alpha(\vec{a},\vec{b})$

4. $(\vec{a},\vec{a}) = |a|^2$

$\square$

6.2 Скалярное произведение в координатах

Теорема 15.

$$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}.$$

$$\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}.$$

$$(\vec{a},\vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Доказательство.

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}.$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

У одинаковых ортов скалярное произведение равно 1, у разных 0. $\square$

6.3 Угол между векторами

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

7 Ортогональность векторов

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff (\vec{a},\vec{b}) = 0 \implies x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

8 Векторное произведение

Назовем упорядоченную тройку векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правой, если с конца $\vec{c}$ кратчайщий поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ виден наблюдателю против часовой стрелки

Определение 15 (Векторное произведение). $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ *является векторным произведением* $\vec{a}, \vec{b}$, *если*

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$
2. $c \perp a, c \perp b$
3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *правая тройка*

8.1 Геометрические свойства

Теорема 16. 1. $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff [\vec{a}, \vec{b}] = 0$

2. $[\vec{a}\vec{b}]$ *равен площади паралеллограмма, со сторонами* a, b

Доказательство. 1. $\rightarrow \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 0$
$\leftarrow |a| = 0 \vee |b| = 0 \vee \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 0$

2. Формула из школы

□

8.2 Алгебраические свойства

Теорема 17. 1. $[\vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b}]$

2. $[\alpha\vec{a}, \vec{b}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}]$
3. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$
4. $\forall \vec{a}, [\vec{a}, \vec{a}] = 0$

Доказательство. □

8.3 Векторное произведение в координатах

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}.$$
$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$
$$[\vec{a}, \vec{b}] = x_1x_2[\vec{i}, \vec{i}] + x_1y_2[\vec{i}, \vec{j}] + x_1z_2[\vec{i}, \vec{k}] + y_1x_2[\vec{j}, \vec{i}] + y_1y_2[j, j] + y_1z_2[\vec{j}, \vec{k}] + z_1x_2[\vec{k}, \vec{i}] + z_1y_2[\vec{k}, \vec{j}] + z_1z_2[\vec{k}, \vec{k}].$$
$$= (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} = .$$
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

8.4 Условие коллинеарности векторов

$a \parallel \vec{b} \iff [\vec{a}, \vec{b}] = 0 \implies$

$$y_1 z_2 - z_1 y_2 = 0.$$
$$x_1 z_2 - z_1 x_2 = 0.$$
$$x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0.$$

9 Смешанное произведение векторов

Определение 16 (Смешаное произведние векторов)**.**

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}).$$

9.1 Геометрические свойства

Теорема 18. *1.* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \Pi \iff ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = 0$

2. $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \pm V$

9.2 Алгебраические свойства

Теорема 19. *1.* $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$

2. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$

9.3 Смешанное произведение через координаты.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = x_1(y_2 z_3 - z_2 y_3) - y_1(x_2 z_3 - z_2 x_3) + z_1(x_2 y_3 - y_2 x_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

10 Прямая линия на плоскоскости

10.1 Общее уравнение

$$Ax + By + C = 0.$$

А и В не равны 0 одновременно.

10.2 Неполные уравнеия

1. $Ax + By = 0$ прямая проходит через начало координат
2. $Ax + C = 0$ прямая паралелльная оси Oy
3. $By + C = 0$ прямая паралелльная оси Ox
4. $Ax = 0$ ось Oy
5. $By = 0$ ось Ox

10.3 Уравнение в отрезках

Если $C \neq 0 \frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$ если $A \neq 0 B \neq 0 \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, a = -\frac{C}{A} B = -\frac{C}{B}$

10.4 Уравнение с угловым коэфициентом

Если $B \neq 0 y = kx + b, k = -\frac{A}{b}, b = -\frac{C}{B}$

10.5 Канончиеское уравнение прямой.

Определение 17. *Направляющий вектор – ненулевой вектор параллельный данный прямой.*

Надо найти уравнение прямой, проходящкй через $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей заданный направляющий вектор $\vec{q} = \{l, m\}$. $M(x, y)$ лежит на прямой только тогда когда $\vec{M_1 M} \parallel \vec{q}$

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}.$$

10.6 Параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \end{cases}.$$

10.7 Векторное уравнение

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{1}.$$

11 Нормальное уравнение прямой.

У нас есть прямая L. Прямая n проходит через начало координат и перпендикулярна n. P точка их пересечения. $\vec{n}$ единичный вектор выбранный на OP

$$\vec{n} = \{\cos\theta, \sin\theta\}.$$

$$x\cos\theta + y\sin\theta - o.$$

12 Уравнение плоскости

Комплексные числа и многочлены

13 Комплексные числа

Определение 18. *Комплексное число – пара действительных чисел с заданными операциями сложения и умножения*

$$\alpha = (a, b).$$

$$\beta = c, d.$$

$$\alpha + \beta = (a + c, b + d).$$

$$\alpha * \beta = (ac - bd, ad + bc).$$

13.1 Свойства сложения

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
3. $\exists ! \mathbf{0} : \forall \alpha : \alpha + \mathbf{0} = \alpha, \mathbf{0} = (0, 0)$
4. $\forall \alpha \exists ! - \alpha : \alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}\ -\alpha = (-a, -b)$

13.2 Свойства умножения

1. $\alpha * \beta = \beta * \alpha$
2. $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$
3. $\exists ! \mathbf{1} \forall \alpha \alpha * \mathbf{1} = \alpha, \mathbf{1} = (1, 0)$
4. $(\alpha + \beta) * \gamma = \alpha * \gamma + \beta * \gamma$
5. $\forall \alpha \neq 0 \exists\ \alpha^{-1} : \alpha * \alpha^{-1} = 1, \alpha^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$

13.3 Мнимая единица

$$i = (0, 1).$$

$$i^2 = (-1, 0).$$

$$i^2 + (1, 0) = 0.$$

13.4 Алгебраическая форма записи

$$\alpha = (a, b) = (a, 0) + (0, b) \implies \alpha = a + bi.$$

$$\alpha \pm \beta = (a \pm c) + i(b \pm d).$$

$$\alpha * \beta = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

13.5 Тригонометрическая форма записи комплексных чисел.

Комплексное число имеет интерапретацию ввиде точки на декартовых координатах, с осями Re, Im, $r = |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – расстояние до точки, θ – угол между вещественной осью и радиус вектором из начала координат в точку. Таким образом комплексное число $\alpha = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$z_1 * z_2 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha) * r_2(\cos\beta + i\sin\beta) + r_1 r_2(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)).$$

14 Возведение в степень.

14.1 В алгебраической форме.

$$z = a + ib.$$

$$z^n = (a+ib)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}(bi)^i.$$

$$i^{4k} = 1.$$

$$i^{4k+1} = i.$$

$$i^{4k+2} = -1.$$

$$i^{4k+3} = -i.$$

14.2 В тригонометрической форме.

Теорема 20.

$$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

$$a^n = r^n(\cos n\theta + \sin n\theta).$$

Доказательство. По индукции. База очевидна

$$a * a^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) r(\cos\phi + i\sin\phi) = r^{n+1}(\cos((n+1)\phi) + i\sin((n+1)\phi)).$$

□

15 Извлечение корня в тригонометрической форме

$$\sqrt[n]{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}), k = 0 \ldots n-1.$$