

Экзамен по алгебре и геометрии

Титилин Александр

Аналитическая Геометрия

1 Геометрические векторы.

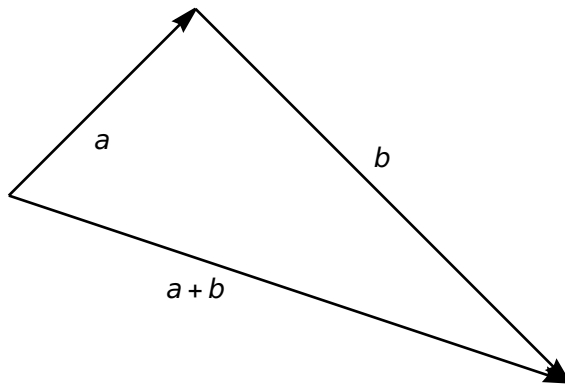
Определение 1. Вектор – направленный отрезок, который характеризуется длиной и направлением. \overrightarrow{AB} – вектор, A – начало (точка приложения), B – конец. $|AB|$ – Длина вектора

Определение 2. Векторы коллинеарны ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), если L – прямая, $\vec{a} \parallel L \wedge \vec{b} \parallel L$

Определение 3. a_0 орт вектора \vec{a} , если \vec{a}_0 сонаправлен $\vec{a} \wedge |\vec{a}_0| = 1$

Определение 4. $\vec{a} = \vec{b} := |a| = |b| \wedge a \parallel b \wedge a$ сонаправлен b .

Определение 5. Суммой \vec{a} и \vec{b} называют вектор, идущий из начала \vec{a} в конец \vec{b} , если b приложен к концу \vec{a}



Определение 6. Произведение вектора на число – вектор, коллинеарный исходному и имеющий его длину умноженную на число

Теорема 1. 1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

3. $\exists! \vec{0} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

$$4. \forall \bar{a} \exists -\bar{a} : \bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$$

$$5. \alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}$$

$$6. (\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$$

2 Линейная зависимость векторов.

Определение 7. Набор векторов $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ называется линейно зависимым, если существует набор чисел, где хоть одно не равно 0 и $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$

Теорема 2. 1. $\bar{0}$ - линейно зависимый

2. $a_1, \dots, 0, \dots, a_n$ - линейно зависимый

3. a_1, \dots, a_i - линейно зависимый, $a_1, \dots, a_i, \dots, a_n$ - линейно зависимый.

4. $a_1, \dots, a_i, \dots, a_n$ - линейно зависимый $\iff a_i = \sum_{j \neq i} a_j$

Доказательство. 1. $1 * \bar{0} = \bar{0}$

$$2. 0a_1 + \dots + 1 * \bar{0} + \dots + 0 * a_n = 0$$

$$3. \exists \alpha_1 \dots \alpha_i \sum \alpha_j a_j = 0 \quad \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_i a_i + \dots + 0 * a_n = 0$$

□

3 Линейная зависимость трех и четырех векторов в плоскости и пространстве.

Теорема 3. \bar{a}, \bar{b} линейно зависимые $\iff \bar{a} \parallel \bar{b}$

Доказательство. $\rightarrow \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} = \bar{0}$. Пусть $\beta \neq 0 \implies \bar{b} = (-\frac{\alpha}{\beta})\bar{a} \implies \bar{a} \parallel \bar{b}$

$\leftarrow \bar{b} = \lambda\bar{a} \implies \bar{b} - \lambda\bar{a} = \bar{0}$

□

Теорема 4. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ линейно зависимые $\iff \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \parallel \Pi$

Доказательство. $\rightarrow \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = \bar{0} \implies \bar{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\bar{a} - \frac{\beta}{\gamma}\bar{b}$. Векторы лежат в одной плоскости.

\rightarrow . Если одна из пар коллинеарна, то она линейно зависима, и мы можем просто оставшийся вектор на 0 умножить. Иначе переносим все прямые на одну плоскость в одну точку. Через конец вектора c проводим прямые параллельные a и b . Эти прямые пересекают $\nu\bar{a}$ и $\mu\bar{b}$. $\bar{c} = \nu\bar{a} + \mu\bar{b}$

□

Теорема 5. Любые четыре вектора линейно зависимы.

Доказательство. Если 3 вектора компланарны, то все понятно.

□

4 Проекция вектора на ось.

Определение 8. u – ось (направленная прямая), $\vec{a} = \vec{A'B'}$, $A'B'$ основания перпендикуляров, опущенных на A, B . $\pm |A'B'|$ – проекция \vec{a} на u . Знак зависит от направления вектора. Если он сонаправлен с осью, то плюс иначе минус.

Теорема 6. Проекция вектора \vec{a} на ось u равна $|\vec{a}| \cdot \cos \phi$, где ϕ угол наклона вектора к оси.

Теорема 7. $Pr_u(\vec{a} + \vec{b}) = Pr_u \vec{a} + Pr_u \vec{b}$
 $Pr_u(\alpha \vec{a}) = \alpha Pr_u \vec{a}$

5 Базис аффинные координаты

Определение 9 (базис в пространстве). $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно независимы. Они образуют базис если $\forall \vec{d} \exists \lambda, \mu, \nu : \vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$

Определение 10 (базис на плоскости). \vec{a}, \vec{b} линейно независимы, они образуют базис если $\forall \vec{c} : \exists \lambda, \nu \vec{c} = \lambda \vec{a} + \nu \vec{b}$

Теорема 8. Любые три линейно-независимые вектора однозначно раскладываются по базису относительно четвертого.

Доказательство. $\vec{d} = \lambda \vec{a} + \nu \vec{b} + \mu \vec{c} \wedge \vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \Rightarrow (\lambda - \alpha) \vec{a} + (\nu - \beta) \vec{b} + (\mu - \gamma) \vec{c} = \vec{0}$.
Векторы линейно независимы $\lambda = \alpha, \mu = \beta, \nu = \gamma$ \square

Теорема 9. При сложении двух векторов их координаты относительно одного базиса складываются. При умножении на число умножаются на это число.

Доказательство.

$$\vec{d}_1 = \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b} + \gamma_1 \vec{c}.$$

$$\vec{d}_2 = \alpha_2 \vec{a} + \beta_2 \vec{b} + \gamma_2 \vec{c}.$$

$$\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) \vec{a} + (\beta_1 + \beta_2) \vec{b} + (\gamma_1 + \gamma_2) \vec{c}.$$

$$\lambda \vec{d}_1 = (\lambda \alpha_1) \vec{a} + (\lambda \beta_1) \vec{b} + (\lambda \gamma_1) \vec{c}.$$

Определение 11. Аффинные координаты задаются базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и точкой O (началом координат)

\square

Определение 12 (Декартовы координаты). $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – взаимно ортогональные векторы длины 1. Разложение по такому базису – декартовы координаты

Теорема 10. Декартовы координаты вектора \vec{d} равны его проекциям на оси $OxOyOz$

Теорема 11. α, β, γ углы наклона вектора \vec{d} к осям Ox, Oy, Oz

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Доказательство.

$$\vec{d} = \{X, Y, Z\}.$$

$$X = |\vec{d}| \cos \alpha.$$

$$\cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

$$\cos \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

$$\cos \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Каждую из этих хреней в квадрат возводим и складываем теорема доказана. \square

Определение 13. *M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ , если $M_1\vec{M} = \lambda M\vec{M}_2$*

$$M = (x, y, z).$$

$$M_1 = (x_1, y_1, z_1).$$

$$M_2 = (x_2, y_2, z_2).$$

$$\{x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z\} = \lambda \{x_2 - x, y_2 - z, z_2 - z\}.$$

6 Скалярное произведение

Определение 14. $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| * |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$ – скалярное произведение векторов \vec{a}, \vec{b} .
Так же выражается через проекции.

$$|\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = Pr_a \vec{b} \implies (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| Pr_a \vec{b}.$$

$$|\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = Pr_b \vec{a} \implies (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| Pr_b \vec{a}.$$

Теорема 12. $\vec{a} \perp \vec{b} \iff (\vec{a}, \vec{b}) = 0$

Доказательство. $\rightarrow. \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \implies (\vec{a}, \vec{b}) = 0$

$\leftarrow. (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \implies |a| = 0 \vee |b| = 0 \vee \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0.$ \square

Теорема 13. *Если угол между векторами меньше $\frac{\pi}{2}$ скалярное произведение больше нуля. Иначе оно меньше нуля.*

6.1 Алгебраические свойства.

Теорема 14. 1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$

2. $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$

3. $(\alpha \vec{a}, \vec{b}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b})$

4. $(\vec{a}, \vec{a}) > 0$ если $a \neq 0$, $(\vec{a}, \vec{a}) = 0$, если $\vec{a} = 0$

Доказательство. 1. очев

2. $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = |c|Pr_c(\vec{a} + \vec{b}) = |c|Pr_c\vec{a} + |c|Pr_c\vec{b} = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$

3. $(\alpha \vec{a}, \vec{b}) = |b|Pr_b(\alpha a) = \alpha |b|Pr_b(\vec{a}) = \alpha(\vec{a}, \vec{b})$

4. $(\vec{a}, \vec{a}) = |a|^2$

□

6.2 Скалярное произведение в координатах

Теорема 15.

$$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}.$$

$$\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}.$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Доказательство.

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}.$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

У одинаковых ортов скалярное произведение равно 1, у разных 0.

□

6.3 Угол между векторами

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

7 Ортогональность векторов

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \implies x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

8 Векторное произведение

Назовем упорядоченную тройку векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правой, если с конца \vec{c} кратчайший поворот от \vec{a} к \vec{b} виден наблюдателю против часовой стрелки

Определение 15 (Векторное произведение). $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ является векторным произведением \vec{a}, \vec{b} , если

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$
2. $c \perp a, c \perp b$
3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая тройка

8.1 Геометрические свойства

Теорема 16. 1. $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff [\vec{a}, \vec{b}] = 0$

2. $[\vec{a}\vec{b}]$ равен площади параллелограмма, со сторонами a, b

Доказательство. 1. $\rightarrow \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 0$
 $\leftarrow |a| = 0 \vee |b| = 0 \vee \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 0$

2. Формула из школы

□

8.2 Алгебраические свойства

Теорема 17. 1. $[\vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b}]$

2. $[\alpha\vec{a}, \vec{b}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}]$
3. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$
4. $\forall \vec{a}, [\vec{a}, \vec{a}] = 0$

Доказательство.

□

8.3 Векторное произведение в координатах

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}.$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= x_1x_2[\vec{i}, \vec{i}] + x_1y_2[\vec{i}, \vec{j}] + x_1z_2[\vec{i}, \vec{k}] + y_1x_2[\vec{j}, \vec{i}] + y_1y_2[\vec{j}, \vec{j}] + y_1z_2[\vec{j}, \vec{k}] + z_1x_2[\vec{k}, \vec{i}] + z_1y_2[\vec{k}, \vec{j}] + z_1z_2[\vec{k}, \vec{k}]. \\ &= (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} = . \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

8.4 Условие коллинеарности векторов

$$a \parallel \vec{b} \iff [\vec{a}, \vec{b}] = 0 \implies$$

$$y_1 z_2 - z_1 y_2 = 0.$$

$$x_1 z_2 - z_1 x_2 = 0.$$

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0.$$

9 Смешанное произведение векторов

Определение 16 (Смешанное произведение векторов).

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}).$$

9.1 Геометрические свойства

Теорема 18. 1. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \Pi \iff ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = 0$

$$2. ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \pm V$$

9.2 Алгебраические свойства

Теорема 19. 1. $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$

$$2. \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$$

9.3 Смешанное произведение через координаты.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = x_1(y_2 z_3 - z_2 y_3) - y_1(x_2 z_3 - z_2 x_3) + z_1(x_2 y_3 - y_2 x_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

10 Прямая линия на плоскости

10.1 Общее уравнение

$$Ax + By + C = 0.$$

A и B не равны 0 одновременно.

10.2 Неполные уравнения

1. $Ax + By = 0$ прямая проходит через начало координат

2. $Ax + C = 0$ прямая параллельная оси Oy

3. $By + C = 0$ прямая параллельная оси Ox

4. $Ax = 0$ ось Oy

5. $By = 0$ ось Ox

10.3 Уравнение в отрезках

Если $C \neq 0$ $\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$ если $A \neq 0$ $B \neq 0$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $a = -\frac{C}{A}$ $b = -\frac{C}{B}$

10.4 Уравнение с угловым коэффициентом

Если $B \neq 0$ $y = kx + b$, $k = -\frac{A}{b}$, $b = -\frac{C}{B}$

10.5 Каноническое уравнение прямой.

Определение 17. *Направляющий вектор – ненулевой вектор параллельный данной прямой.*

Надо найти уравнение прямой, проходящей через $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей заданный направляющий вектор $\vec{q} = \{l, m\}$. $M(x, y)$ лежит на прямой только тогда когда $M_1M \parallel \vec{q}$

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}.$$

10.6 Параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \end{cases}.$$

10.7 Векторное уравнение

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{l}.$$

11 Нормальное уравнение прямой.

У нас есть прямая L. Прямая n проходит через начало координат и перпендикулярна L. P точка их пересечения. \vec{n} единичный вектор выбранный на OP

$$\vec{n} = \{\cos \theta, \sin \theta\}.$$

$$x \cos \theta + y \sin \theta = o.$$

12 Уравнение плоскости

Комплексные числа и многочлены

13 Комплексные числа

Определение 18. *Комплексное число – пара действительных чисел с заданными операциями сложения и умножения*

$$\alpha = (a, b).$$

$$\beta = c, d.$$

$$\alpha + \beta = (a + c, b + d).$$

$$\alpha * \beta = (ac - bd, ad + bc).$$

13.1 Свойства сложения

1. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
2. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
3. $\exists! \mathbf{0} : \forall \alpha : \alpha + \mathbf{0} = \alpha, \mathbf{0} = (0, 0)$
4. $\forall \alpha \exists! -\alpha : \alpha + (-\alpha) = \mathbf{0} \quad -\alpha = (-a, -b)$

13.2 Свойства умножения

1. $\alpha * \beta = \beta * \alpha$
2. $(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma)$
3. $\exists! \mathbf{1} \forall \alpha \alpha * \mathbf{1} = \alpha, \mathbf{1} = (1, 0)$
4. $(\alpha + \beta) * \gamma = \alpha * \gamma + \beta * \gamma$
5. $\forall \alpha \neq 0 \exists \alpha^{-1} : \alpha * \alpha^{-1} = 1, \alpha^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$

13.3 Мнимая единица

$$i = (0, 1).$$

$$i^2 = (-1, 0).$$

$$i^2 + (1, 0) = 0.$$

13.4 Алгебраическая форма записи

$$\alpha = (a, b) = (a, 0) + (0, b) \implies \alpha = a + bi.$$

$$\alpha \pm \beta = (a \pm c) + i(b \pm d).$$

$$\alpha * \beta = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

13.5 Тригонометрическая форма записи комплексных чисел.

Комплексное число имеет интерпретацию в виде точки на декартовых координатах, с осями Re, Im , $r = |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – расстояние до точки, θ – угол между вещественной осью и радиус вектором из начала координат в точку. Таким образом комплексное число $\alpha = a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$z_1 * z_2 = r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha) * r_2(\cos \beta + i \sin \beta) = r_1 r_2(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)).$$

14 Возведение в степень.

14.1 В алгебраической форме.

$$z = a + ib.$$

$$z^n = (a + ib)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} (bi)^i.$$

$$i^{4k} = 1.$$

$$i^{4k+1} = i.$$

$$i^{4k+2} = -1.$$

$$i^{4k+3} = -i.$$

14.2 В тригонометрической форме.

Теорема 20.

$$\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

$$a^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Доказательство. По индукции. База очевидна

$$a * a^n = r^n(\cos n\phi + i \sin n\phi)r(\cos \phi + i \sin \phi) = r^{n+1}(\cos((n+1)\phi) + i \sin((n+1)\phi)).$$

□

15 Извлечение корня в тригонометрической форме

$$\sqrt[n]{r(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = \sqrt[n]{r}(\cos \frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi k}{n}), k = 0 \dots n-1.$$

16 Многочлены

Определение 19. *Многочлен — сумма целых неотрицательных степеней неизвестного с некоторыми числовыми коэффициентами*

Определение 20 (Степень многочлена). *Степень многочлена — самая большая степень неизвестного с ненулевым коэффициентом.*

16.1 Операции над многочленами

$$1. f + g = \sum_{k=0}^t (a_k + b_k)x^k, t = \max(\deg f, \deg g)$$

$$2. f * g = \sum_{k=0}^t (\sum_{i+j=k} a_i b_j) x^k, t = \deg f + \deg g$$

17 Свойства операций над многочленами.

$$1. f + g = g + f$$

$$2. (f + g) + h = f + (g + h)$$

$$3. \exists 0 : f + 0 = f$$

$$4. \forall f \exists -f : f + (-f) = 0, -f(x) = \sum_{i=0}^n (-a_i)x^i$$

$$5. fg = gf$$

$$6. (f * g) * h = f * (g * h)$$

$$7. \exists 1 : \forall f : f * 1 = f$$

$$8. (f + g) * h = f * h + g * h$$

$$9. \forall f \neq 0 \exists f^{-1} : f * f^{-1} = 1$$

18 Деление с остатком

$$\forall f, g, \exists! q, r : f = gq + r, \deg r < \deg g \vee r = 0.$$

18.1 Доказательство единственности.

$$f = gq + r, f = \phi q + \psi.$$

$$g(q - \phi) = \psi - r.$$

Степень левого многочлена или больше степени g или он 0. Степень левого или меньше или он ноль $q = \phi, \psi = r$

19 Делимость многочленов.

Определение 21. g делитель f , если $f = g \cdot h$, $h \in R$

19.1 Свойства

1. $f \in R \wedge g \in R \implies f \in R$
2. $f \in R \wedge g \in R \implies (f \pm g) \in R$
3. $f \in R \implies \forall g \in R \quad fg \in R$