Лекции по математическому анализу

Титилин Александр

1 Равномерная непрерывность.

$$\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall y |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Определение непрерывной функции.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \forall y |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Определение равномерно непрерывной функции.

1.1 Примеры

1. $f(x) = C$ Берем любую дельту
$$|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon.$$

2. $f(x) = ax + b$
$$|f(x) - f(y)| = |ax + b - ay - b| = |a(x-y)| = |a||x-y|.$$
   a) $a = 0 \implies$ прошлый пункт
   b) $a \neq 0$
$$\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}.$$

3. $f(x) = x^2 D = [a, b] a \neq b$
$$\varepsilon > 0.$$
$$|x^2 - y^2| = |(x-y)||(x+y)| \leq (|x| + |y|)|x-y| \leq 2C|x-y|.$$
$$C = \max(|a|, |b|).$$
$$\delta = \frac{\varepsilon}{2C}.$$

4. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$
$$|\frac{x^2}{x^2+1} - \frac{y^2}{y^2+1}| = |\frac{x^2y^2 + x^2 - x^2y^2 - y^2}{(x^2+1)(y^2+1)}| = |\frac{x^2 - y^2}{(x^2+1)(y^2+1)}| = |\frac{(x+y)(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)}|.$$

Определение 1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ говорят, что функция f удовлетворяет условию Липшица если*

$$\exists C \geq 0 \forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| < C|x - y|.$$

Теорема 1. *Если функция удовлетворяет условию Липщица на промежутке D, то она равномерно непрерывна на промежутке D.*

Теорема 2. *Пусть функция задана на промежутке, функция удовлетворятет условию Гёльде, если*

$$\exists C \geq 0 \exists \alpha > 0 \forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}.$$

Теорема 3. *Если функция удовлетворяет условию Гёльдера, то она равномерно непрерывна.*

Доказательство.

$$C > 0 \ |x - y| < (\frac{\varepsilon}{C})^{\frac{1}{\alpha}}.$$

$$\delta = (\frac{\varepsilon}{C})^{\frac{1}{\alpha}}.$$

□

1.2 Пример.

$$D = (0, +\infty), f(x) = \sqrt{x}.$$

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|.$$

Теорема 4. *Функция f равномерно непрерывна* $\iff \forall (x_n), (y_n), x_n, y_n \in D \implies f(x_n) - f(y_n) \to 0$

Доказательство.

1. Возьмем $\forall (x_n)(y_n) x_n - y_n \to 0$. Нужно доказать $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$ Дальше смотрим определение равномерной непрырывности и все понятно.

2. Теперь обратно доказываем. От противного

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon.$$

Берем все такие последовательность $(x_n)(y_n) x_n - y_n < \frac{1}{n}$

$$|x_n - y_n| \to 0 \implies f(x_n) - f(y_n) \to 0.$$

По т. о ментах.

□

1.3 Пример функции, которая не является равномерно непрерывной

$$D = (0, +\infty) f(x) = \frac{1}{x}.$$

$$x_n = \frac{1}{n}.$$

$$y_n = \frac{1}{n+1}.$$

$$x_n - y_n = \frac{1}{n(n+1)} \to 0.$$

$$f(x_n) = n.$$

$$f(y_n) = n + 1.$$

$$f(x_n) - f(y_n) = -1 \not\to 0.$$

1.4 Еще такой пример

$$f(x) = \ln x \; D = (0; +\infty).$$

$$x_n = \frac{1}{n}.$$

$$y_n = \frac{1}{n^2}.$$

$$x_n - y_n \to 0.$$

$$f(x_n) - f(y_n) = \ln x_n - \ln y_n = \ln \frac{x_n}{y_n} = \ln 0 \to +\infty.$$

1.5

$$f(x) = x^2, D = \mathbb{R}.$$

$$x_n = n + \frac{1}{n}.$$

$$y_n = n.$$

$$x_n - y_n \to 0.$$

$$f(x_n) = n^2 + 2 + \frac{1}{n^2}.$$

$$f(y_n) = n^2.$$

$$f(x_n) - f(y_2) = 2 + \frac{1}{n} \to 2.$$

1.6

$$f(x) = \operatorname{tg} x D = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}).$$

$$x_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}.$$

$$y_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2n}.$$

$$\operatorname{tg} x_n - \operatorname{tg} y_n \not\to 0.$$

1.7 Пример

$$D = [0, \frac{1}{2}].$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln x}, \text{если } x \neq 0 \\ 0, \text{если } x = 0 \end{cases}.$$

Докажем, что не удовлетворяет условию Гельдера.
Пусть $\exists C > 0 \alpha > 0$

$$\forall x, y \in [0; \frac{1}{2}] \ |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}.$$

2 Теорема Кантора

Теорема 5 (Кантора)**.** *Пусть функция f задана на замкнутом и ограниченном промежутке и непрерывна.Тогда f равномерна непрерывна.*

Доказательство. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$, но не является равномерно непрерывной. Тогда $\exists \varepsilon \forall \delta > 0$ Найдутся такие $x, y \in [a, b]$, такие что $|x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. В частности $\forall n \in \mathbb{N}$ найдутся такие x_n, y_n, что $|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n) \geq \varepsilon$ Рассматриваем последовательность (x_n) Выбрали из нее сходящую подпоследовательность $(x_{n_k}) \to cc \in [a; b]$ Рассмотрим y_{n_k}

$$y_{n_k} = (y_{n_k} - x_{n_k}) + x_{n_k}.$$

По ментам

$$0 \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| < \frac{1}{n} \to 0.$$

f непрерывна в точке c $x_{n_k} \to c \implies f(x_{n_k}) \to f(c)$

$$y_{n_k} \to c \implies f(y_{n_k}) \to f(c).$$

$$f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to 0.$$

Противоречие так как $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ $\square$

Теорема 6.

$$d : (a, b) \to \mathbb{R}.$$

Пусть f непрерывна f равномерно непрерывна $\iff$ *Существуют конечные пределы* $\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)$

Доказательство. В обратную сторону. Пусть

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = A.$$

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = B.$$

$$\overline{f}[a, b] \to \mathbb{R}.$$

$$\overline{f(x)} = \begin{cases} f(x), x \in (a, b) \\ A, x = a \\ B, x = b \end{cases}.$$

$\overline{f}$ непрерывна в $x \in (a, b)$ в a, b □

2.1 Примеры

$f(x) = \sqrt{x}$ $D = (0, 1)$ Так же она равномерно непрерывна на $[a, b]$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1.$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x \ D = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}).$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = +\infty.$$

f не является равномерной непрерывной

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \ D = [-1; 1].$$

По т Кантора равномерно непрерывна.

3 Интеграл Римана

3.1 Разбиение отрезков

Определение 2 (Разбиение)**.** $[a, b]$ *разбиение отрезка на n частей это набор точек* $\tau = x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$

$$a = x_0.$$

$$b = x_n.$$

Номер промежутка – номер правого конца.

Определение 3 (продолжение, измельчение)**.** *Пусть τ, τ' τ' будем называть продолжением разбиения τ, если*

$$\tau \subset \tau'.$$

Теорема 7. *Любые два разбиения τ, τ' отрезка $[a, b]$ имеют общееe измельчение*

Доказательство. Общее измельчение $\tau \cup \tau'$ □

Определение 4. *Длина i-того промежутка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$*

Определение 5 (Разбиение с отмеченными точками.)**.** *В каждом промежутке разбиения τ выбрано по точке $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$*

$$\xi = (\xi_1, dots, \xi_n).$$

(τ, ξ) разбиение с отмеченными точками

Определение 6 (Ранг разбиения)**.**

$$\lambda(\tau) = \max \Delta x_1, \dots, \Delta x_n.$$

3.2 Интегральные суммы

Определение 7 (Интегральные суммы)**.**

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}.$$

Пусть (τ, ξ) – оснащенное разбиение

$$S(f, (\tau, \xi)) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

3.2.1 Свойства интегральных сумм

1. $\alpha \in \mathbb{R}$ $S(\alpha f, (\tau, \xi)) = \alpha S(f, (\tau, \xi))$

   Доказательство.

$$S(\alpha f, (\tau, \xi)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha f(\xi_i) \Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

□

2.
$$S(f + g, (\tau, \xi)) = S(f, (\tau, \xi)) + S(g, (\tau, \xi)).$$

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^{n}(f+g)(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i)+g(\xi_i))\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i)\Delta x_i + g(\xi_i)\Delta x_i).$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i.$$

□

3. Если $f \leq g$, то

$$S(f,(\tau,\xi)) \leq S(g,(\tau,\xi)).$$
$$\forall i f(\xi_i) \leq g(\xi_i).$$
$$f(\xi_i)\Delta x_i \leq g(\xi_i)\Delta x_i.$$

3.2.2 Предел интегральных сумм

Пусть для любой последовательности $\lambda(\tau^{(n)}) \to 0$ $n \to \infty$

3.2.3 Примеры

1. $f(x) = C, x \in [a,b]$

$$S(f,(\tau,\xi)) = \sum_{i}^{c} C\Delta x_2 = C(b-a).$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Разбили на n равных частей. $\lambda(\tau^{(n)}) = \frac{1}{n} \to 0$ $n \to \infty$

3. C – число $\neq 0$

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}.$$
$$c \in [a,b].$$
$$f(x) = \begin{cases} 0, x \neq c \\ C, x = c \end{cases}.$$

Теорема 8.

$$I = \int_a^b f \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (\tau,\xi) \lambda(\tau,\xi) < \delta \implies |S(f,(\tau,\xi)) - I| < \varepsilon.$$

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется для всех достаточно мелких разбиений, если $\exists \delta > 0$ что это свойство выполняется для всех оснащенных разбиений
$\forall \varepsilon |S(f,(\tau,\xi))| < \varepsilon$ для достаточно мелких разбиений.

Теорема 9. *Если функция интегрируема, то она ограничена.*

Доказательство. Докажем, что f ограничена сверху от противного. Пусть $\forall C \exists x, f(x) > C$. Построим последовательность оснащенных разбиений $(\tau^{(n)}, \xi^{(n)})$ такую что $\lambda(\tau^{(n)}, \xi^{(n)}) \to 0$ $n \to \infty$
$$S(f, (\tau^{(n)}, \xi^{(n)})) \to \infty.$$
Так как f не ограничена сверху, то существует промежуток разбиения, где есть точка $\xi_i, f(\xi_i) > C$. На всех промежутках кроме этого выберем точку. □

Теорема 10. *Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. И пусть K – конечное подмножество отрезка (a, b) Ξ – множество всех оснащенных разбиений (τ, ξ) отрезка, таких что $K \subset \tau$. Тогда для любой последовательность оснащенных размещений из X, такие что длина разбиения стремится к нулю. Тогда предел интегральных сумм – это интеграл.*

3.3 Простейшее свойство интеграла

1. $f \in R_{[a,b]}, \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha f \in R_{[a,b]} \wedge \int\limits_a^b \alpha f = \alpha \int\limits_a^b f$

   Доказательство. Возьмем $\forall (\tau^{(n)}, \xi^{(n)}) \lambda(\tau^{(n)}) \to 0$
$$S(\alpha f; (\tau^{(n)}, \xi^{(n)})) = \alpha S(f; (\tau^{(n)}); \xi^{(n)})).$$
$$S(f; (\tau^{(n)}); \xi^{(n)})) \to \int_a^b f.$$
$$\alpha S(f; (\tau^{(n)}); \xi^{(n)})) \to \alpha \int_a^b f.$$
□

2. $f, g \in R_{[a,b]} \to f + g \in R_{[a,b]} \wedge \int\limits_a^b (f + g) = \int\limits_a^b f + \int\limits_a^b g$

   Доказательство. Рассмотрим $\forall (\tau^{(n)}, \xi^{(n)})$ $\lambda(\tau^{(n)}) \to 0$
$$S(f + g; (\tau^{(n)}, \xi^{(n)})) = S(f; (\tau^{(n)}, \xi^{(n)})) + S(g; (\tau^{(n)}, \xi^{(n)})) \to \int_a^b f + \int_a^b g.$$
□

3. $f, g \in R_{[a,b]} \wedge \forall x \in [a, b] f(x) \leq g(x)$, то $\int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b g$

Следствие 10.1. *Пусть* $f \in R_{[a,b]}$ *и пусть числа* m, M *таковы, что* $\forall x \in [a;b] m \leq f(x) \leq M$ *тогда*

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f \leq M(b-a).$$

Доказательство.

$$m \leq f \leq M.$$

$$\int\limits_a^b m \leq \int\limits_a^b f \leq \int\limits_a^b M.$$

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f \leq M(b-a).$$

□

4. $f \in R_{[a,b]}, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ и отличается от f в конечном числе точек. Тогда $g \in R_{[a,b]}$ и $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b g$

   Доказательство. Рассмотрим функцию h задананную на $[a,b]$

$$h(x) = g(x) - f(x).$$

$$\int\limits_a^b g = \int\limits_a^b f + \int\limits_a^b h = \int\limits_a^b f.$$

□

5.

   Теорема 11. $f : [a,b] \to \mathbb{R}, c \in (a;b)$

$$f \in R_{[a,c]} \wedge f \in R_{[c,b]}.$$

   То $f \in R[a,b]$ и $\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$

Следствие 11.1.

$$f \in R_{[a,b]}.$$

Тогда $|\int\limits_a^b| \leq \int\limits_a^b |f|$

Доказательство.

$$-|f| \le f \le |f|.$$

$$-\int\limits_a^b |f| \le \int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b |f|.$$

$$|\int\limits_a^b f| \le \int\limits_a^b |f|.$$

При $a \le b$ □

В общем случае

$$|\int\limits_a^b f| \le |\int\limits_a^b |f||.$$

$$|\int\limits_a^b f| = |-\int\limits_b^a f| = |\int\limits_b^a f|.$$

4 Суммы Дарбу

Определение 8. *Пусть* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\tau = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *– разбиение*

$$d(f, \tau) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

$$D(f, \tau) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

$$M_i = \sum_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

4.1 Свойства

1. $d(f, \tau) \le S(f, (\tau, \xi) \le D(f, \tau)$
   $\forall i \; m_i \le f(\xi_i) < M_i$

$$m_i \Delta x_i < f(\xi_i) \Delta x_i \le M_i \Delta x_i.$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum f(\xi_i) \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

2.

$$d(f, \tau) = \inf_{\xi} S(f, (\tau, \xi)).$$

$$D(f, \tau) = \sup_{\xi} S(f, (\tau, \xi)).$$

Доказательство.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \ M_i - f(\xi_i) < \epsilon.$$

$$(M_i - f(\xi_i))\Delta x_i < e\Delta x_i.$$

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - f(\xi_i))\Delta x_i \leq .$$

$$D(f, \tau) - S(f, (\tau, \xi)) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - f(\xi_i))\delta x_i.$$

□

3.

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}.$$

$$\tau, \tau' - -\text{Разбиения отрезка}[a, b].$$

$$\tau' \supset \tau.$$

Тогда

$$D(f, \tau') \leq D(f, \tau).$$

$$d(f, \tau') \geq d(f, \tau).$$

Доказательство. Достаточно доказать только для случая $\tau' = \tau \cup \{c\}$ Суммы дарбу меняются только в том месте, куда попадапет c.

$$D(f, \tau') = \cdots + (M_i^*(c - x_{i-1}) + M_i^*(x_i - c)) + \ldots.$$

$$M_i((c - x_{i-1}) + (x_i - c)) = M_i(c - x_{i-1}) + M_i(x_i - c) \geq M_i^* + M_i^{**}.$$

$$M_i \geq M_i^*.$$

$$M_i \geq M_i^{**}.$$

□

4.

$$\forall \tau_1 \tau_2 \text{ разбиений } [a, b].$$

$$\tau' = \tau_1 \cap \tau_2.$$

$$d(f, \tau_1) \leq d(f, \tau') \leq D(f, \tau') \leq D(f, \tau_2).$$

4.2 Критерий интегрируемости в терминах Дарбу

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$f \in R_{[a,b]} \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \forall \tau \lambda(\tau) < \delta : D(f, \tau) - d(f, \tau) < \epsilon.$$

Доказательство. 1. Пусть функция интегрируема $f \in R_{[a,b]}$ по определению $\exists I$ что $\forall \varepsilon > 0\ |S(f, (\tau, \xi)) - I| < \varepsilon$ Для всех достаточно мелих разбиений

$$I - \varepsilon < S(f, (\tau, \xi)) < I + \varepsilon.$$

$$I + \varepsilon \text{ верхняя граница инт сум для разбиения} \tau.$$

Верхняя сумма дарбу меньше или равна этой херне, так как она инфинум верхних границ С нижней аналогично

$$d(f, \tau) < S(f, (\tau, \xi)) < D(f, \tau).$$

$$d(f, \tau) - D(f, \tau) < \varepsilon.$$

2.

$$S(f, (\tau, \xi)).$$

□

Теорема 12.

$$f \in R_{[a,b]}, [c, d] \subset [a, b].$$

Тогда $f \in R_{[c,d]}$

Доказательство. Докажем, что $\forall \varepsilon > 0\ D(f|_{[c,d]}, \tau^*) - d(f|_{[c,d]}, \tau^*) < \varepsilon$ □

Теорема 13. *Если* $f \in C_{[a,b]}$ *, то* $f \in R_{[a,b]}$

Доказательство. Так как $f \in C_{[a,b]}$ f равномерно непрерывна

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b] |x - y| < \delta.$$

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

$$D(f, \tau) - d(f, \tau) = \sum M_i \Delta x_i - \sum m \Delta x_i = \sum (M_i - m_i) \Delta x_i.$$

□

Теорема 14. *Пусть* f *задана на отрезке* $[a, b]$ f *монотонна, тогда* f *интегрируема*

5 Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция f задана на промежутке D, f интегрируема на любом промежутке лежащем внутри D. Такие функции называют локально интегрируемыми. Зададим на D функцию F формулой выберем $\forall a \in D$

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt.$$

Теорема 15. *Пусть f задана на D, $a \in D$ тогда функция $F(x) = \int\limits_a^x f$ Непрерывна*

Доказательство.

$$\forall x_0 \in D.$$

$$|F(x) - F(x_0)| = |\int\limits_a^x f - \int\limits_a^{x_0} f| = |\int\limits_{x_0}^x f| \leq |\int\limits_{x_0}^x |f|| \leq |\int\limits_{x_0}^x | = |M||x - x_0|.$$

Так f интегрируема на промежутке с концами x_0, x, она ограничена на этом промежутке

$$0 \leq |F(x) - F(x_0)| \leq M|x - x_0|.$$

По теорме о ментах $|F(x) - F(x_0)| \to 0 x \to x_0$ □

Теорема 16. *(Барроу)*

$$f : D \to \mathbb{R}.$$

f локально интегрирумема

$$F(x) = \int\limits_a^x f.$$

Пусть $x_0 \in D$ и пусть f непрерывна в точке x_0 Тогда F дифференцируема в x_0 и $F'(x) = f(x_0)$

$$|F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0)|.$$

$$|\int\limits_a^x f - \int\limits_a^{x_0} f - \int\limits_{x_0}^x f(x_0)|.$$

$$|\int\limits_{x_0}^x f - \int\limits_{x_0}^x f(x_0) = |\int\limits_{x_0}^x (f - f(x_0)) \leq |\int\limits_{x_0}^x |f - f(x_0)||.$$

Так как f непрерывна в x_0, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 |t - x_0| < \delta \implies |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Следствие 16.1. $f \in C_{[a,b]}$. *Тогда f имеет первобразную*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

6 Обобщенная первообразная

Определение 9.
$$f : D \to \mathbb{R}.$$

K – конечное подмножество D
Пусть $F \in C_{[a,b]}$ F обобщенная первообразная функции f, если для всех точек K

$$F'(x) = f(x).$$

Теорема 17. *Любые две обобщенные первообразные отличаются на константу*

7 Ряды

Есть последовательность $a_1, a_2, \dots$

$$a_1 + a_2 + \dots.$$

Вот эта фигня с плюсиками ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

$$S_1 = a_1.$$

$$S_2 = a_1 + a_2.$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Определение 10 (Сумма ряда)**.**
$$\lim_{n\to\infty} S_n.$$

Сумма – конечна ряд сходится иначе расходится.

7.1 Свойства

1. Если ряд сходится, то его последовательность стремится к нулю.

8 Несобственные интегралы

Определение 11 (Несобственный интеграл)**.**

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Сходится если эта фигня конечная

8.1 Примеры

1.

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx.$$

$$\lim_{t \to +\infty} \int\limits_{1}^{t} \frac{1}{x} dx.$$

$$\lim_{t \to +\infty} \ln t = +\infty.$$

2.

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to +\infty} \int\limits_{1}^{t} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to +\infty} (-\frac{1}{t} + 1) = 1.$$

9 Снова ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

$$S_1 = a_1.$$

$$S_2 = a_1 + a_2.$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Определение 12. *Суммой ряда называется*

$$\lim_{n \to \infty} S_n.$$

Ряд сходится если сумма конечная

9.1 Гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots.$$

9.2 Теоремочки

Теорема 18.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + T.$$

Доказательство. Пусть U_n n-я частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$

$$U_n(a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S_n + T_n.$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} T_n.$$

□

Теорема 19. *Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

$$\alpha \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha S.$$

Доказательство.

$$U_n = \alpha(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \alpha \lim_{n\to\infty} S_n = \alpha S.$$

□

9.3 Ряды с неотрицательными членами

Теорема 20 (Необходимое и достачное условие сходимсоть ряда, все члены которого неотрицательные)**.** *Ряд, члены вкоторого неотрицательные, сходится тогда и только тогда когда множество его частичных суммм ограниченно.*

Доказательство.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.$$

$$S_i < S_{i+1}.$$

По т Вейештрасса S_n имеет конечный предел ряд сходится □

Теорема 21 (Первый признак сравнения)**.** *Даны ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

$\forall n$ $a_n \leq b_n$ *Тогда если больший ряд сходится, меньший ряд сходится (если меньший расходится, то больший расходится)*

Доказательство. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ Последовательность T_n ограничена , тогда частичные суммы первого ряда тоже ограничены. □

Теорема 22 (Предельный признак сравнения)**.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

$$b_n > 0.$$

Пусть $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C \neq 0$ *тогда первый ряд сходится тогда и только тогда когда второй ряд сходится*

Доказательство.

$$\frac{a_n}{b_n} \in (K; L).$$

$$K * b_n < a_n < L * b_n.$$

Пусть a_n сходится, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} Kb_n$ сходится, а значит $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ тогда $\sum_{n=1}^{\infty} Lb_n$ сходится, а значит $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ □

9.3.1 Пример

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 100n + 2}.$$

$$\frac{n^2}{n^2 - 100n + 2} \to 1.$$

10 Еще признаки сравнения

10.1 Признак Коши

Теорема 23. *Дан ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0 \forall n$ *Рассмотрим последовательность*

$$c_n = \sqrt[n]{a_n}.$$

Пусть c_n *имеет предел*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = C.$$

Тогда

1. *если* $c < 1$ *ряд сходится.*
2. *если* $c > 1$ *ряд расходится.*
3. $c = 1$ *ничего не знаем, ряд может и сходиться и расходиться.*

Доказательство.

1. Пусть $c < 1$ Выберем q , $c < q < 1$, $c_n \to C$, то $\exists n_0 \forall n \geq n_0 c_n < q$

$$\sqrt[n]{a_n} < q.$$

$$a_n < q^n.$$

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$. Этот ряд сходится, по признаку сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится

2. Пусть $c > 1$ $\exists n_0 \forall n \geq n_0$ $a_n > 1$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

□

10.2 Признак Даламбера

Теорема 24. *Дан ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *Рассмотрим последовательность*

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Пусть d_n *имеет предел* $\lim_{n\to\infty} d_n = d$

1. $d < 1$ *ряд сходится*
2. $d > 1$ *ряд расходится*
3. $d = 1$ *не понятно*

Доказательство. 1. $d < q, 1 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \; \frac{a_{n+1}}{n} < q$

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < q \dots \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}} < q.$$

$$a_{n_0+k} < a_{n_0} q^k.$$

Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$ вынули из исходного первые n_0 членов и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n_0} q^k$ По признаку сравнения ряд сходится, а значит исходный сходится

2. $d > 1 \; \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \; a_{n+1} > a_n \; (n \geq n_0)$ Последовательность начиная с n_0 строго возрастает, не стримится к нулю, ряд расходится

□

10.3 Примеры

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$

   a) Коши

$$\sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}} = \frac{\sqrt[3]{n^3}}{3} \to \frac{1}{3}.$$

   b) $\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} * \frac{3^n}{n^3} = (\frac{n+1}{3}) * \frac{1}{3} \to \frac{1}{3}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{(n+1)!}$

$$\frac{(n+1)^{10}}{(n+2)!} * \frac{(n+1)!}{n^{10}} = (\frac{n+1}{n})^{10} * \frac{1}{n+2} \to 0.$$

10.4 Интегральный признак

Теорема 25. *Пусть f задана на $[1, +\infty]$ Пусть f интегрируема на каждом промежутке $[a, b] \subset [1; +\infty]$ f убывает на всем промежутке. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится $\iff \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится.*

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму

$$S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) + f(n).$$

$$S_n > \int\limits_1^{n+1} f(x)dx.$$

$$f(2) + \dots + f(n) < \int\limits_1^{n} f(x)dx.$$

1. Пусть $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ Сходится

$$S_n < f(1) + \int\limits_{1}^{n} f(x)dx \leq f(1) + \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx.$$

2. Интеграл расходится есть бесконечный предел Имеем такое неравенство

$$S_n > \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx.$$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{1}^{n+1} f = +\infty.$$

Ряд расходится

□

10.4.1 Пример

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} d \ln x = \ln \ln x.$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln \ln x - \ln \ln 2 = \infty.$$

11 Абсолютно сходящиеся ряды

Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Определение 13. *Если сходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$*, то* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *абсолютно сходится*

Теорема 26. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится*

Доказательство. Если отрицательных чисел конечно, то ряды почти одинаковые (отбрасывание конечного числа не влияет на сходимость)

Пусть в $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ бесконечное число неотрицательных членов и бесконечное число отрицательных членов

Построим 2 ряда. $(*)$ получили из исходного заменой всех отрицательных на 0. $(**)$ получили из исходного ряда заменой всех неотрицательных членов на 0, а отрицательных членов на их модули. Сумма новых рядов это исходный из модулей, разность – исходный

Пусть ряд из модулей сходится, тогда $(**)$ сходится, $(*)$ сходится, тогда $(*) - (**)$ сходится □

Определение 14. *Если ряд сходится, а ряд из модулей расходится, то такой ряд называется условно сходящимся*