Лекции по математическому анализу

Титилин Александр

1 Равномерная непрерывность.

$$\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall y |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Определение непрерывной функции.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \forall y |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Определение равномерно непрерывной функции.

1.1 Примеры

1. $f(x) = C$ Берем любую дельту

$$|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon.$$

2. $f(x) = ax + b$

$$|f(x) - f(y)| = |ax + b - ay - b| = |a(x - y)| = |a||x - y|.$$

   a) $a = 0 \implies$ прошлый пункт

   b) $a \neq 0$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}.$$

3. $f(x) = x^2 D = [a, b] a \neq b$

$$\varepsilon > 0.$$

$$|x^2 - y^2| = |(x - y)||(x + y)| \leq (|x| + |y|)|x - y| \leq 2C|x - y|.$$

$$C = \max(|a|, |b|).$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2C}.$$

4. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

$$|\frac{x^2}{x^2 + 1} - \frac{y^2}{y^2 + 1}| = |\frac{x^2y^2 + x^2 - x^2y^2 - y^2}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}| = |\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}| = |\frac{(x + y)(x - y)}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}|.$$

Определение 1. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ говорят, что функция f удовлетворяет условию Липшица если*

$$\exists C \geq 0 \forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| < C|x - y|.$$

Теорема 1. *Если функция удовлетворяет условию Липщица на промежутке D, то она равномерно непрерывна на промежутке D.*

Теорема 2. *Пусть функция задана на промежутке, функция удовлетворятет условию Гёльде, если*

$$\exists C \geq 0 \exists \alpha > 0 \forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}.$$

Теорема 3. *Если функция удовлетворяет условию Гёльдера, то она равномерно непрерывна.*

Доказательство.

$$C > 0 \ |x - y| < (\frac{\varepsilon}{C})^{\frac{1}{\alpha}}.$$

$$\delta = (\frac{\varepsilon}{C})^{\frac{1}{\alpha}}.$$

□

1.2 Пример.

$$D = (0, +\infty), f(x) = \sqrt{x}.$$

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|.$$

Теорема 4. *Функция f равномерно непрерывна* $\iff \forall (x_n), (y_n), x_n, y_n \in D \implies f(x_n) - f(y_n) \to 0$

Доказательство.

1. Возьмем $\forall (x_n)(y_n) x_n - y_n \to 0$. Нужно доказать $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$ Дальше смотрим определение равномерной непрырывности и все понятно.

2. Теперь обратно доказываем. От противного

   $$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon.$$

   Берем все такие последовательность $(x_n)(y_n) x_n - y_n < \frac{1}{n}$

   $$|x_n - y_n| \to 0 \implies f(x_n) - f(y_n) \to 0.$$

   По т. о ментах.

□

1.3 Пример функции, которая не является равномерно непрерывной

$$D = (0, +\infty) f(x) = \frac{1}{x}.$$

$$x_n = \frac{1}{n}.$$

$$y_n = \frac{1}{n+1}.$$

$$x_n - y_n = \frac{1}{n(n+1)} \to 0.$$

$$f(x_n) = n.$$

$$f(y_n) = n + 1.$$

$$f(x_n) - f(y_n) = -1 \not\to 0.$$

1.4 Еще такой пример

$$f(x) = \ln x \ D = (0; +\infty).$$

$$x_n = \frac{1}{n}.$$

$$y_n = \frac{1}{n^2}.$$

$$x_n - y_n \to 0.$$

$$f(x_n) - f(y_n) = \ln x_n - \ln y_n = \ln \frac{x_n}{y_n} = \ln 0 \to +\infty.$$

1.5

$$f(x) = x^2, D = \mathbb{R}.$$

$$x_n = n + \frac{1}{n}.$$

$$y_n = n.$$

$$x_n - y_n \to 0.$$

$$f(x_n) = n^2 + 2 + \frac{1}{n^2}.$$

$$f(y_n) = n^2.$$

$$f(x_n) - f(y_2) = 2 + \frac{1}{n} \to 2.$$

1.6

$$f(x) = \operatorname{tg} x D = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}).$$

$$x_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}.$$

$$y_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2n}.$$

$$\operatorname{tg} x_n - \operatorname{tg} y_n \not\to 0.$$

1.7 Пример

$$D = [0, \frac{1}{2}].$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln x}, \text{если } x \neq 0 \\ 0, \text{если } x = 0 \end{cases}.$$

Докажем, что не удовлетворяет условию Гельдера.
Пусть $\exists C > 0 \alpha > 0$

$$\forall x, y \in [0; \frac{1}{2}] \ |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}.$$

2 Теорема Кантора

Теорема 5 (Кантора)**.** *Пусть функция f задана на замкнутом и ограниченном промежутке и непрерывна.Тогда f равномерна непрерывна.*

Доказательство. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$, но не является равномерно непрерывной. Тогда $\exists \varepsilon \forall \delta > 0$ Найдутся такие $x, y \in [a, b]$, такие что $|x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. В частности $\forall n \in \mathbb{N}$ найдутся такие x_n, y_n, что $|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n) \geq \varepsilon$ Рассматриваем последовательность (x_n) Выбрали из нее сходящую подпоследовательность $(x_{n_k}) \to cc \in [a; b]$ Рассмотрим y_{n_k}

$$y_{n_k} = (y_{n_k} - x_{n_k}) + x_{n_k}.$$

По ментам

$$0 \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| < \frac{1}{n} \to 0.$$

f непрерывна в точке c $x_{n_k} \to c \implies f(x_{n_k}) \to f(c)$

$$y_{n_k} \to c \implies f(y_{n_k}) \to f(c).$$

$$f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to 0.$$

Противоречие так как $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ $\square$

Теорема 6.

$$d : (a, b) \to \mathbb{R}.$$

Пусть f непрерывна f равномерно непрерывна $\iff$ *Существуют конечные пределы* $\lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)$

Доказательство. В обратную сторону. Пусть

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = A.$$

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = B.$$

$$\overline{f}[a, b] \to \mathbb{R}.$$

$$\overline{f(x)} = \begin{cases} f(x), x \in (a, b) \\ A, x = a \\ B, x = b \end{cases}.$$

$\overline{f}$ непрерывна в $x \in (a, b)$ в a, b □

2.1 Примеры

$f(x) = \sqrt{x}$ $D = (0, 1)$ Так же она равномерно непрерывна на $[a, b]$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1.$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x \ D = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}).$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = +\infty.$$

f не является равномерной непрерывной

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \ D = [-1; 1].$$

По т Кантора равномерно непрерывна.

3