Лекции по математическому анализу

Титилин Александр

1 Равномерная непрерывность.

$$\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall y |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Определение непрерывной функции.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \forall y |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Определение равномерно непрерывной функции.

1.1 Примеры

1. $f(x) = C$ Берем любую дельту
$$|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon.$$
2. $f(x) = ax + b$
$$|f(x) - f(y)| = |ax + b - ay - b| = |a(x - y)| = |a||x - y|.$$
   a) $a = 0 \implies$ прошлый пункт
   b) $a \neq 0$
$$\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}.$$
3. $f(x) = x^2 D = [a, b] a \neq b$
$$\varepsilon > 0.$$
$$|x^2 - y^2| = |(x - y)||(x + y)| \leq (|x| + |y|)|x - y| \leq 2C|x - y|.$$
$$C = \max(|a|, |b|).$$
$$\delta = \frac{\varepsilon}{2C}.$$
4. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$
$$|\frac{x^2}{x^2+1} - \frac{y^2}{y^2+1}| = |\frac{x^2y^2 + x^2 - x^2y^2 - y^2}{(x^2+1)(y^2+1)}| = |\frac{x^2 - y^2}{(x^2+1)(y^2+1)}| = |\frac{(x+y)(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)}|.$$

Определение 1. *Пусть* $f : D \to \mathbb{R}$ *говорят, что функция* f *удовлетворяет условию Липшица если*

$$\exists C \geq 0 \forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| < C|x - y|.$$

Теорема 1. *Если функция удовлетворяет условию Липщица на промежутке* D*, то она равномерно непрерывна на промежутке* D*.*

Теорема 2. *Пусть функция задана на промежутке, функция удовлетворятет условию Гёльде, если*

$$\exists C \geq 0 \exists \alpha > 0 \forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}.$$

Теорема 3. *Если функция удовлетворяет условию Гёльдера, то она равномерно непрерывна.*

Доказательство.

$$C > 0 \ |x - y| < (\frac{\varepsilon}{C})^{\frac{1}{\alpha}}.$$

$$\delta = (\frac{\varepsilon}{C})^{\frac{1}{\alpha}}.$$

□

1.2 Пример.

$$D = [0, +\infty], f(x) = \sqrt{x}.$$

$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|.$$

Теорема 4. *Функция* f *равномерно непрерывна* $\iff \forall (x_n), (y_n), x_n, y_n \in D \implies f(x_n) - f(y_n) \to 0$

Доказательство.

1. Возьмем $\forall (x_n)(y_n) x_n - y_n \to 0$. Нужно доказать $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$ Дальше смотрим определение равномерной непрырывности и все понятно.

2. Теперь обратно доказываем. От противного

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon.$$

Берем все такие последовательность $(x_n)(y_n) x_n - y_n < \frac{1}{n}$

$$|x_n - y_n| \to 0 \implies f(x_n) - f(y_n) \to 0.$$

По т. о ментах.

□

1.3 Пример функции, которая не является равномерно непрерывной

$$D = (0, +\infty) f(x) = \frac{1}{x}.$$

$$x_n = \frac{1}{n}.$$

$$y_n = \frac{1}{n+1}.$$

$$x_n - y_n = \frac{1}{n(n+1)} \to 0.$$

$$f(x_n) = n.$$

$$f(y_n) = n + 1.$$

$$f(x_n) - f(y_n) = -1 \not\to 0.$$