Mathematik (Master) für Informatik Skript

Niklas Stich, Alexander Walk

SoSe 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Komplexe Zahlen und komplexwertige Funktionen

1.1 Historisches

16. Jahrhundert: Lösung algebraischer Gleichungen
Gegeben: $a_k \in \mathbb{Q}, \quad k = 0, \dots, n \in \mathbb{N}_0$

Satz 1.1

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0 \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k^k = 0 \tag{2}$$

$$\underbrace{p(x)}_{\text{Polynom } n\text{-ten Grades}} = 0, \quad p \in \mathbb{Q}[x] \tag{3}$$

Gesucht: Lösung von (1.1) zunächst für $n \leq 3$
bekannt war:

(i) $n = 1, \quad a_1 x + a_0 = 0, \quad x = -\frac{a_0}{a_1}$

(ii) $n = 2:$

$$\begin{aligned}
a_2 x^2 + a_1 x + a_0 &= 0 \\
a_2 \neq 0, \qquad x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} &= 0 \\
x^2 + 2\frac{a_1}{2a_2} x &= -\frac{a_0}{a_2} \\
x^2 + 2\frac{a_1}{2a_2} x + (\frac{a_1}{2a_2})^2 &= (\frac{a_1}{2a_2})^2 - \frac{a_0}{a_2} \\
(x + \frac{a_1}{2a_2})^2 &= (\frac{a_1}{2a_2})^2 - \frac{a_0}{a_2} \\
x + \frac{a_1}{2a_2} &= \pm\sqrt{\frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{4a_2 a_0}{4a_2^2}} \\
x_{1/2} &= -\frac{a_1}{2a_2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta = a_1^2 - 4a_0 a_2 \quad &< 0 \quad \Rightarrow \text{keine reelle Lösung} \\
\text{Falls } \Delta \quad &= 0 \quad \Rightarrow \text{genau eine Lösung} \\
\Delta \quad &> 0 \quad \Rightarrow \text{genau zwei Lösungen}
\end{aligned}$$

Die Lösungen sind die Schnittpunkte einer Parabel mit der x-Achse. Die Schnittpunkte existieren für Parabeln mit $\Delta \geq 0$. Aber für $a_2 = 1$, a_0, $a_0 = -2$ ergibt sich: $x_{1/2} = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Folge: Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist ein Körper, in dem wie in $\mathbb{Q}$ gerechnet werden kann und in dem die Lösungen von $x^2 = 2$ existieren.

(iii) Für Gleichungen 3. Grades keine allgemeine Lösungsformel, jedoch für spezielle Gleichungen
Carolano: [WTF???]
Für bestimmte Gleichungen 3. Grades können alle ihre reellen Lösungen mit Lösungen von $x^3 = \alpha$ und $x^2 = \beta = -1$ beschreiben, [... to be continued]