Лингвистические основы информатики (ЛОИ)

> *12.02.2019*

Орг. вопросы

- годовой курс: зачёт+экзамен;
- Петрова Елена Александровна, elena.petrova@urfu.ru;
- консультации по понедельникам в 16:10 на кафедре алгебры и фундаментальной информатики.

Рекомендуемая литература

- Языки, грамматики, распознаватели (Шур, Замятин) - основной учебник (много багов!)
- Ахо, Лам, Сети, Ульман "Компиляторы. Принципы, технологии, инструменты" (Dragon book)
- Ахо, Ульман "Теория синтаксического анализа, перевода и компиляции"
- Cooper K. Engineering a Compiler.

> репозиторий с .djvu книгами

Чем будем заниматься?

— Теорией компиляции. Узнаем:

- что такое язык;
- что такое компилятор;
- что делает компилятор с языком.

В итоге будем знать, как работают и как написать *(в теории)* компиляторы.

Немного комментариев и истории:

> Даже разбор формулы в Экселе использует какие-то приёмы компиляции!

> В 50-х годах людям надоело писать на ассемблере, и они начали думать. К 60-м придумали.
>
> Дейкстра - двигатель прогресса, потому что придумал теорию, а не какое-то специфичное для задачи решение.

Что такое компилятор?

По-простому – переводчик с языка на язык. Можно рассматривать как чёрный ящик с каким-то входом, выходом и магией внутри.

Принято разделять его работу на 2 фазы:

↓ *исходный текст*

фронтенд: **анализ** исходного текста. Если есть ошибки, то останавливаемся.

↓ *промежуточное представление*

бэкенд: **синтез** - генерация программы, которая нам нужна вместе с какими-то оптимизациями.

↓ *целевой код*

Заниматься будем фронтендом!

Блок анализа

↓ *исходный текст*

лексический анализ: разбиваем текст на токены – знаки, переменные, идентификаторы.

↓ *токены*

синтаксический анализ (парсер)

↓ *синтаксическое дерево*

семантический анализ: проверка типов.

↓ *промежуточное представление*

Язык

1. Лексика - слова
2. Синтаксис – правила построения предложений
3. Семантика - типы и подходящие им операции

Таблица символов - информация о переменных, константах, функциях. Используется на всех шагах анализа.

Заполнение:

- лексика (?): встречаем новый символ - записываем имя переменной и указываем место первого появления.
- семантика: тип, место хранения, время объявления

Написанию компилятора предшествует описание языка.

Рассмотрим язык с условным оператором. Что есть условный оператор с точки зрения синтаксиса? Опишем это с помощью **форм Бэкуса–Наура** [1] .

```
<условный оператор>::== if <логическое выражение> <список операторов> { else <список операторов> }

<список операторов>::== <оператор>|<оператор>;<список операторов>

...

<идентификатор>::== [a-zA-Z]\w*
```

> **Обозначения**
>
> | {} — альтернатива
>
> <> — синтаксическая категория
>
> ::== — выводимость

Грамматика

[Порождающая] грамматика - объект математический. Основной способ описания синтаксиса и лексики (частный случай синтаксиса).

Опр. Грамматика $G = < \Sigma, \Gamma, P, S >$, где

- Σ – терминальный алфавит (выходной);
- Γ – нетерминальный алфавит (вспомогательный);
- P – множество правил вывода;
- $S \in \Gamma$ – выделенный нетерминал – аксиома (одна).

Соглашения

- $a, b, c, \ \dots$ - терминальные символы (if - терминал);
- $x, y, z, \ \dots$ - терминальные слова (последовательности терминальных символов);
- $A, B, C, \ \dots$ - нетерминальные символы;
- $X, Y, Z, \ \dots$ - слова из любых символов;
- $\alpha, \beta, \gamma, \ \dots$ - совокупные слова, содержащие как терминальные, так и нетерминальные символы.
- λ - пустое слово.

Выводимость

Правило вывода: $\alpha \to \beta$, $\alpha, \beta \in (\Sigma \cup \Gamma)^*$, точнее $\alpha \in (\Sigma \cup \Gamma)^* \Gamma (\Sigma \cup \Gamma)^*$

↑ *в альфе должен быть хотя бы 1 нетерминал!*

Таким образом, терминальные символы стоит понимать как символы, из цепочек которых ничего нельзя вывести.

Основная функция этого правила – порождение языка.

Опр. Цепочка γ ***непосредственно* выводима** из цепочки σ, если $\gamma = \delta_1 \beta \delta_2$, $\sigma = \delta_1 \alpha \delta_2$ и $(\alpha \to \beta) \in P$

Обозначается как $\sigma \Rightarrow \gamma$ (или, при необходимости, $\gamma \Leftarrow \sigma$).

> В цепочке сигма есть подпоследовательность альфа, которую можно заменить бетой
>
> Выводимость - отношение на множестве цепочек. Рефлексивно-транзитивное замыкание $\sigma \Rightarrow \gamma$. Возможность вывести одну цепочку из другой за некоторое число шагов

Опр. γ **выводима** из σ если существует последовательность цепочек $\eta_0, \dots, \eta_n, n \geq 0$ такая, что $\eta_0 = \sigma, \eta_n = \gamma, \eta_{i-1} \Rightarrow \eta_i$ $(\sigma \Rightarrow^* \gamma)$

Последовательность $\eta_0, \dots, \eta_n$ – **вывод**

Получается, что грамматика для нас — просто набор правил вывода. Потому что всё остальное мы зафиксировали в обозначениях.

Опр. **Язык**, порождённый грамматикой $G = < \Sigma, \Gamma, P, S >: \{w \in \Sigma^* | S \Rightarrow^* w\}$ — множество терминальных цепочек таких, что их можно вывести из аксиомы.

Опр. $\eta_0, \dots, \eta_n : \eta_0 = s, \eta_n = w, \eta_{i-1} \Rightarrow \eta_i$, η_i – форма (шаг)

Пример

Убедимся в том, что язык $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ порождается грамматикой $G =< S, a, b, P, S >$, в которой P состоит из следующих правил вывода:

- $S \to aSb$
- $S \to \lambda$

Рассмотрим вывод терминальной цепочки:

$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb$

> ab - терминалы (см. соглашения)

Но тогда и слова $a^n b^n$ могут быть получены после n применений первого правила вывода к аксиоме S и затем однократным применением второго правила.

Ещё пример

$S \to ABS|\lambda$ $S \to SS|a|b|\lambda$

$AB \to BA$

$A \to a$

$B \to b$

$S \Rightarrow ABS \Rightarrow ABABS \Rightarrow^* (AB)^n S \Rightarrow (AB)^n$

Можем перейти к терминалам

$S \Rightarrow^* ABABAB \Rightarrow ABBAAB \Rightarrow abbaab$

Хотим загнать буквы A в конец, а B в начало. Будем менять местами буквы по второму правилу.

$ABABAB \Rightarrow BA\_AB\_AB \Rightarrow B\_AB\_AAB \Rightarrow BBAA\_AB\_ \Rightarrow \ldots$

> *19.02.2019*

```
pos = init + rate * 60;

// после лескического анализа превращается в...
id,15 <=> <id,2><+><id,3><*><const><;>
// синтаксическому анализу всё равно, как называется переменная

// после ситанксического анализа превращается в...
    =
   / \
id,1   +
      / \
   id,2  *
        / \
     id,3 const
//после семантического добавятся какие-то атрибуты
```

На каждой стадии – новый язык. Значит, нужны новые способы порождения\описания. А этот способ порождает распознаватель.

Иерархия Хомского-Шютценберже

	Вид грамматики	**Распознаватель**	**Класс языков**
0	Грамматика обычного вида	МТ	Рекурсивно перечислимые
1	Контекстно-зависимые	МТ с линейно ограниченной памятью (LBA)	КЗЯ
2	Контекстно-свободные	Недетерминированный автомат с магазинной памятью (PDA)	КСЯ
3	Праволинейные	ДКА	Регулярные языки

<u>Опр</u>. Контекстно-зависимая грамматика — все правила имеют вид $\alpha A \gamma \to \alpha \beta \gamma$ (у терминала имеется контекст, который сохраняется при его раскрытии) .

<u>Опр</u>. Язык обладает свойством P, если $\exists$ грамматика со свойством P, его порождающая.

<u>Опр</u>. Контекстно-свободная грамматика — все правила имеют вид $A \to \beta$ (частный случай КЗГ, когда оба контекста пусты).

<u>Опр</u>. Праволинейные грамматики — все правила имеют вид $A \to aB$ или $A \to \lambda$ справа либо лямбда, либо терминал+нетерминал.

Вспомним пример. Кажется, что это грамматика обычного вида.

$S \to ABS|\lambda \; S \to SS|a|b|\lambda$

$AB \to BA$

$A \to a$

$B \to b$

Построим КСГ, которая породит язык выше. Порождаем цепочки, где букв B на одну больше, чем a.

Из `A` должны выводиться строчки, где на одну a больше

$S \to aB|bA$

$A \to aS|bAA$

$B \to bS|aBB$

$A \to a$

$B \to b$

$abba: \; S \to aB \to abS \to abbA \to abba$

Иерархия: регулярные $\subset$ КСЯ $\subset$ КЗЯ $\subset$ Rec $\subset$ RecEn[2].

Контекстно-свободные грамматики и языки

Опр. Упорядоченное дерево — дерево с заданным линейным порядком со следующими свойствами:

1. Если x - сын узла y, то $x \geq y$
2. Если $x \leq y$ и они братья, то для всех сыновей z узла x: $z \leq y$

> Порядок, возникающий при обходе в глубину слева направо

Пример:

$S \to SS|(s)|\lambda$

$(())$

$S \to SS \to (s) \to ((s)) \to (())$

```
            S₁
          /   \
        S₂     S₄
        |     / | \
        λ₃ (₅   S₆   )₁₁
              / | \
          (₇    S₈   )₁₀
                |
                λ₉
```

Опр. Дерево вывода цепочки ω в $G = <\Sigma, \Gamma, P, S>$ — упорядоченное дерево со следующими свойствами:

1. Узлы – нетерминалы, корень – аксиома, листья – терминалы или λ, причём у листьев, помеченных пустым словом нет братьев.

   > Если есть братья, то $\lambda a == a$

2. Если у узла x все сыновья это некоторый набор $y_1, \ \dots \ y_n$, таких, что $y_1 \leq \dots \leq y_n$, и узлы x, $y_1, \ \dots \ y_n$ помечены символами $X, Y_1, \ \dots \ Y_n$, то $(X \to Y_1, \ \dots \ Y_n) \in P$.

   > Применили правило, в дереве появился куст вывода

3. Если все листья дерева имеют метки $a_1 \leq a_2 \leq \ \dots \leq \ a_n$, то $\omega = a_1 \dots a_n$

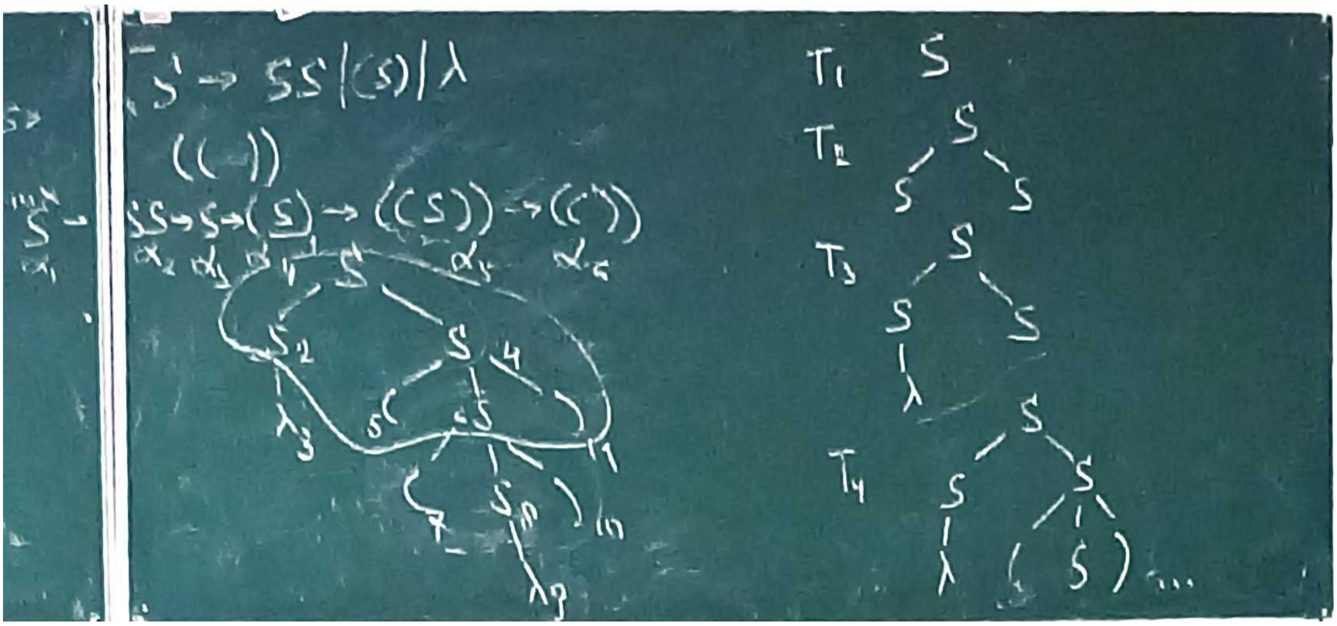
Опр. Вывод цепочки $\omega(S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \ \dots \ \Rightarrow \alpha_n = \omega)$ в $G = < \Sigma, \Gamma, P, S >$ представлен деревом вывода T, если $\exists$ набор стандартных поддеревьев $T_1, \dots T_n$ таких, что на упорядоченных листьях дерева T_i написана форма α_i.

Опр. Стандартное поддерево T' дерева T, если:

1. корень T' - корень T
2. Если узел x дерева $T \in T'$, то либо x - лист, либо все сыновья x в $T \in T'$

   > Если с узлом лежит хотя бы один его сын, то и все его сыновья тоже лежат.

Пример по последнему языку:



Наша любимая грамматика, которая порождает арифметику:

$E \to E + E | E * E | (E) | x$

$x + x * x$

```
   E
  /|\
E  +  E   - этот куст можно передвинуть влево, получится два разных дерева
|    /|\    для одного и того же. Плохо.
x   E * E
    |   |
    x   x
```

Опр. Грамматика однозначна, если $\forall\omega$, выводимой в грамматике, $\exists!$ дерево вывода.

Следующая грамматика однозначна и эквивалентна предыдущей

$E \to E + T | T$

$T \to T * F | F$

$F \to (E) | x$

1. Правосторонний вывод и r-формы:
   $E \to E + T \to E + T * F \to E + T * x \to E + F * x \to E + x * x \to T + x * x \to F + x * x \to x + x * x$
2. Левосторонний вывод и l-формы:
   $E \to E + T \to T + T \to F + T \to x + T \to x + T * F \to x + F * F \to x + x * F \to x + x * x$

Плата за однозначность - увеличение длины вывода.

> *26.02.19*

Теорема. Праволинейная грамматика порождает регулярный язык

Д-во:

> построим автомат и по теореме Клини - готово

$G = < \Sigma, \Gamma, P, S >$

Конечный автомат: $A = \ (\Sigma, \Gamma, \delta, S, F)$,

$F = \{A \in \Gamma | (A \to \lambda) \in P\}$ — терминальные состояния - такие нетерминалы, из которых выводится пустое слово

$\delta(A, a) = B \iff (A \to aB) \in P$ — переход возможен, если есть такое правило вывода

$\omega = a_1 \dots a_n$: $S \to a_1 A_1 \to a_1 a_2 A_2 \to \dots \to a_1 \dots a_n A_n \to a_1 \dots a_n$

■

> **Пример**
>
> $a(b + cc)*$ — чтобы построить грамматику, проще сначала нарисовать автомат, распознающий этот язык. Обозначим все состояния нетерминальными символами. А дальше - как в теореме выше, только в обратную сторону.
>
> $S \to aA$
>
> $A \to bA | cB | \lambda$

> $B \to cA$

Преобразования грамматик

> Хотим научиться удалять лишние вещи, которые не несут никакой пользы.

Приведённые грамматики

Опр. Нетерминал $A \in \Gamma$ называется **производящим**, если $A \Rightarrow^*_G \omega$.

> == из него можно получить терминальную цепочку.

Опр. Нетерминал $A \in \Gamma$ называется **достижимым**, если $S \Rightarrow^*_G \alpha A \beta$

> == его можно получить из аксиомы.

Опр. Грамматика **приведённая**, если все её нетерминалы достижимые и производящие.

Пример

$S \to bAc|AcB$

$A \to abC$

$B \to Ea$

$C \to BD$

$D \to CCa$

$E \to Fbb$

$F \to a$

Производящие *(**p**roducing)*: $\Gamma_p = \{F, E, B\}$.

> Если среди производящих нетерминалов нет аксиомы, то язык пустой.

Достижимые *(**r**eachable)*: $\Gamma_r = \{S, A, B, C, E, D, F\}$

Нахождение Γ_r:

- $\Gamma_r^1 \leftarrow S$;
- $\Gamma_r^n = \Gamma_r^{n-1} \cup \{A | (B \to \alpha A \beta) \in P, \beta \in \Gamma_r^{n-1})\}$.

  > смотрим, какие нетерминалы есть справа и добавляем те, которых ещё нет в Γ_r

Нахождение Γ_p:

- $\Gamma_p^1 \leftarrow \{A | (A \to \omega) \in P\}$;
- $\Gamma_p^n = \Gamma_p^{n-1} \cup \{A | (A \to \gamma) \in P, \gamma \in (\Sigma \cup \Gamma_p^{n-1})\}$.

  > смотрим на достижимые из Γ_p^{n-1} нетерминалы;

Теорема. Для любой КСГ G существует эквивалентная [3] ей приведённая грамматика.

Д-во:

КСГ $G = < \Sigma, \Gamma, P, S >$

Находим Γ_p:

- если $S \notin \Gamma_p$, то $G' = (\Sigma, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$
- иначе $\tilde{G} = (\Sigma, \Gamma_p, \tilde{P}, S)$

  $\tilde{P} = \{(A \to \gamma) \in P | A, \gamma \in (\Sigma \cup \Gamma_p)^*\}$

Находим $(\Gamma_p)_r$

> Выкидываем правила вывода, которые и так не участвовали в выводе терминальных цепочек

$(\Gamma_p)_r$ - достижимы в $\tilde{G}$, G', производящие в $\tilde{G}$, G

$A \in (\Gamma_p)_r$: $S \Rightarrow^*_{\tilde{G}} \alpha A \beta \Rightarrow^*_{\tilde{G}} uwv$

■

Пример

$S \to ab | bAc$

$A \to CB$

$B \to aSA$

$C \to bC | d$

$\Gamma_p = \{C, S\}$

$(\Gamma_p)_r = \{S\}$

$G' = \{S \to ab\}$

> Больше не будем рассматривать неприведённые грамматики

λ-свободные грамматики

Опр. $A \in G$ — **аннулирующий**, если $A \Rightarrow^* \lambda$.

Опр. $Ann(G)$ — множество аннулирующих нетерминалов.

> Хотим, чтобы это множество было пустым. Ну или хотя бы только с аксиомой. Потому что тогда нам жить станет прощею

> Чтобы от аннулирующих нетерминалов избавиться, нужно их найти

Пример

$D \to aBC|AE$

$A \to bC|\lambda$

$B \to ACA$

$C \to \lambda$

$E \to CA$

$D \to bE|c$

$Ann(G)$:

1. $\{A, C\}$
2. $\{A, C, B, E\}$
3. $\{A, C, B, E, S\}$

Опр. λ**-свободная** грамматика — грамматика, которая либо не содержит аннулирующих правил вида $(A \to \lambda)$, либо содержит единственное такое правило $(S \to \lambda)$ и S не встречается в правых частях правил вывода.

Теорема. Любая грамматика эквивалентна λ-свободной грамматике

Д-во:

> Сначала построим, потом всё покажем

$G =< \Sigma, \Gamma, P, S >$

0. Если $\lambda \in L(G)$, то $\Gamma' = \Gamma \cup S'$, $P' = P \cup \{(S' \to \lambda), (S' \to S))\}$

   Иначе $\Gamma = \Gamma'$, $S = S'$, $P = P'$

> Смысл: добавим аксиому, которая справа встречаться нигде не будет???

1. Построим $Ann(G)$.
2. Рассмотрим бинарное отношение на множестве форм:

   $\beta \preceq \gamma$, если β - подпоследовательность γ и все символы γ, которых нет в β, аннулирующие.

   $P' = \{(A \to \beta) | (A \to \gamma) \in P, \beta \preceq \gamma, \beta \neq \lambda\}$

   > Взяли все исходные правила. В новую грамматику положили их "части"-подстроки.

3. Видно, что аннулирующие правила мы не взяли, поэтому она λ-свободная по определению.

$L(G) = L(G')$?

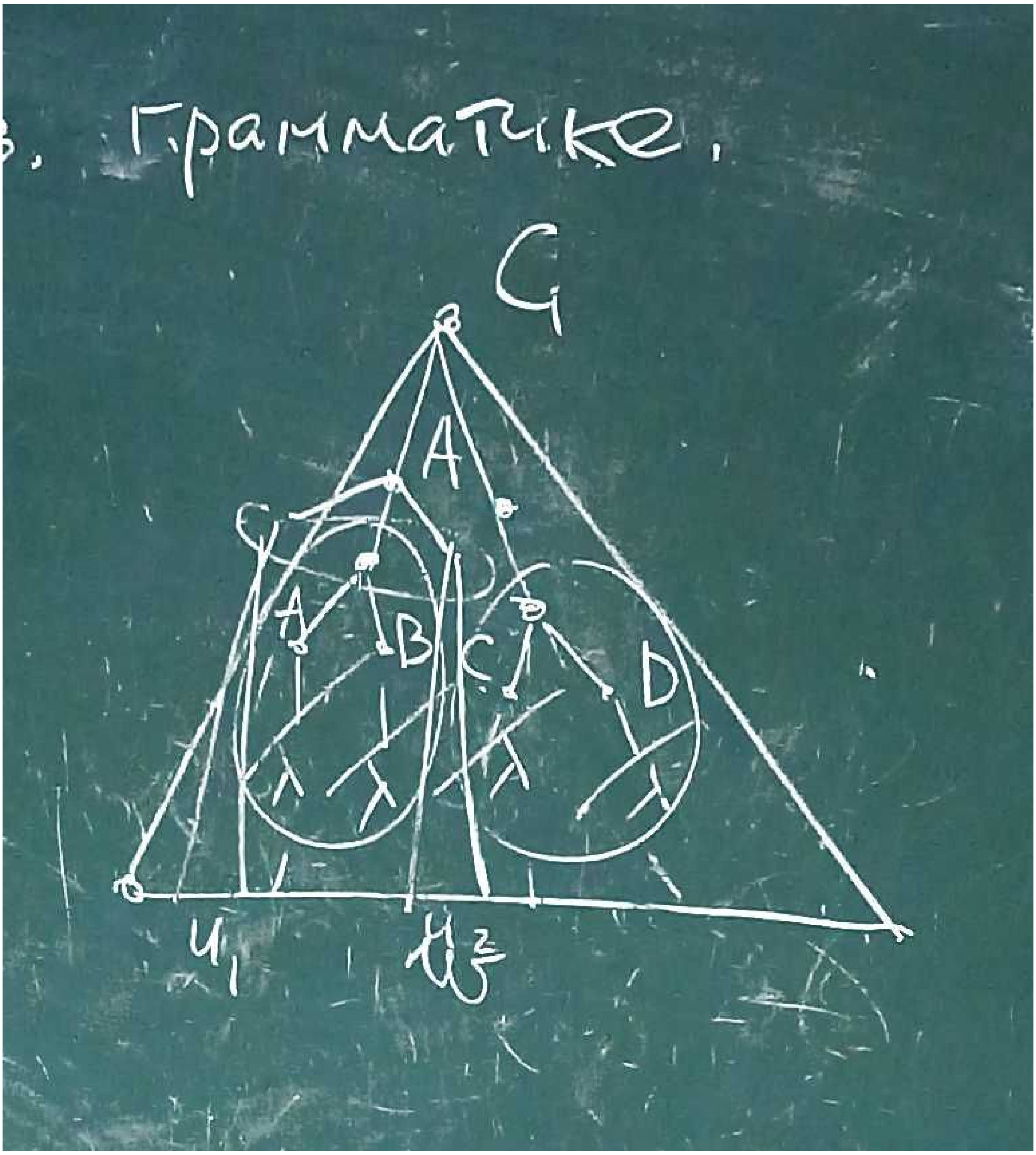
1. $w \in L(G')$

   $S \Rightarrow_{G'} \alpha_i \Rightarrow_{G'} \ldots \Rightarrow_{G'} \alpha_n = w$

   $\alpha_{i_{G'}} \Rightarrow \alpha_{i+1} (A \to \beta) \in P' \Rightarrow$ в G $\exists (A \to \gamma) \in P, \beta \preceq \gamma$

   > как построить такую же цепочку, используя другие правила? Непонятно.

2. $w \in L(G)$

> Что означает этот треугольник???
>
> 
>

■

> *05.03.2019*

Нормальная форма Хомского

> Нужна для доказательства важной теоремы, понадобится для алгоритма разбора.

<u>Опр.</u> Грамматика находится в ХНФ, если все её не аннулирующие правила вывода имеют вид $A \to BC$ (справа ровно 2 нетерминала) или $A \to a$'.

Теорема. Любая КС грамматика эквивалентна некоторой грамматике в ХНФ.

Д-во. *Конструктивное*.

$G =< \Sigma, \Gamma, P, S >$

Пусть G — исходная грамматика (λ-свободная)

1. Для всех правил грамматики, у которых в правой части хотя бы 2 символа сделаем следующее:

> $\forall A \to X_1 \dots X_n, n >= 2$

- если X_i— терминал, добавим новый нетерминал X_i' и правило $X_i' \to X_i$. Затем заменим вхождение терминала во всех правых частях на новый нетерминал.

> Избавляемся от правил, где справа много терминалов.

2. $A \to B$ — цепные правила. Что делать с ними? Заменим правую часть на всё, что выводится из B. Но что, если есть цепочка $A \to B \to \dots \to A$ (цикл)? Сначала нужно от них избавиться.

   Опр. Грамматика **циклическая**, если существует такой нетерминал `A` , что за какое-то ненулевое количество шагов из него выводится он сам. В противном случае — **ациклическая** .

   Лемма. Любая грамматика эквивалентна некоторой ацикличной.

   Д-во.Пусть $A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Rightarrow A_1$

   Заменим все A_i на A и удалим правила $A \Rightarrow A$. Получилась G'. Готово.

   Почему работает: $w \in L(G) \iff w \in L(G')$

   $\Rightarrow$ Вывод в G' получается стиранием индексов.

   $\Leftarrow$ Пусть A участвовал в выводе w. Пусть нетерминал A появлялся в какой-то правой части: $B \to \alpha A \beta$, $A \to \gamma$. Если такие правила были в G', то в G существуют правила вывода $(B \to \alpha A_i \beta)$, $(A_j \to \gamma)$. Но мы знаем, что из $A_i \Rightarrow_G^* A_j$ (*Если не совпадает с гаммой, то крутимся по циклу*).

3. Если справа хотя бы 3 нетерминала, то заменим второй нетерминал на новый, а из него будем выводить хвост.

■

Пример

$S \to AB|aAb$

$A \to bB|aBC|\lambda$

$B \to AS|bA|a$

$C \to b$

Выведем λ-свободную грамматику. $Ann(G) = \{A\}$.

$S \to AB|B|\_aAb\_|\_ab\_$

$A \to \_bB\_|\_aBC\_$

$B \to AS|S|\_bA\_|b|a$

$C \to b$

Приведём к ХНФ. Добавим $A' \to a$ и $B' \to b$:

$S \to AB|B|A'AB'|A'B'$

$A \to B'B|A'BC$

$B \to AS|S|B'A|b|a$

$C \to b$

Найдём цикл: $S \to B \to S$. Заменяем B на S, и подставляем в S всё, что выводится из B

$S \to AS|A'AB'|A'B'|B'A|b|a$

$A \to B'S|A'SC$

$C \to b$

Заменим тройные нетерминалы на двойные, добавим $D \to AB'$ и $E \to A'SC$

$S \to AS|A'D|A'B'|B'A|b|a$

$A \to B'S|D$

$C \to b$

Свойства КСЯ

Лемма Огдена

Пусть есть L — КСЯ. Тогда $\exists m \in \mathbb{N}: \ \forall w \in L$ в которых помечено не менее m позиций, представимо в виде $w = uxzyv$, причём:

1. xy содержит хотя бы одну помеченную позицию;
2. xzy содержит не более m помеченных;
3. $ux^n zy^n v \in L \, \forall n \in \mathbb{N}_0$ (*накачка*).

> Помечено - выбираем какие-то символы

Д-во. $G = < \Sigma, \Gamma, P, S >$, $L = L(G)$

Пусть L порождается грамматикой в ХНФ, $m = 2^{|\Gamma|+1}$. Рассмотрим такое слово $w \in L$, что $|w| \geq m$ и пометим в нём не менее m позиций. Рассмотрим дерево вывода слова w (треугольник). Построим путь вывода слова w в G:

- Корень (вершина треугольника) — аксиома. Принадлежит пути.
- Из двух (потому что ХНФ) потомков выберем того, из которого выводится больше выделенных позиций.

  > **Точка ветвления** — узел, у которого из обоих потомков выводится подслова w с помеченными позициями

  > ВАЖНО: каждая следующая точка ветвления порождает не менее половины помеченных позиций w от тех, что порождает предыдущая точка. Доказать можно по индукции.

в pw (*путь*) не менее $|\Gamma| + 1$ точек ветвления. Среди всех точек ветвления рассмотрим последние точки. Но у нас всего $|\Gamma|$ нетерминалов, значит, хотя бы 2 узла совпали – имеют одинаковую метку. Назовём её A. (Находится близко к листьям! Иначе не можем что-то гарантировать)

w_1 — точка ветвления $\Rightarrow x$ или y содержит хотя бы одну помеченную позицию. (x, y - *подслова*)

$A \Rightarrow^* z$, $A \Rightarrow^* xzy$

> Тут ещё какие-то правила

> Рандомный комментарий: для всех слов высота дерева вывода одинаковая! Для ХНФ.

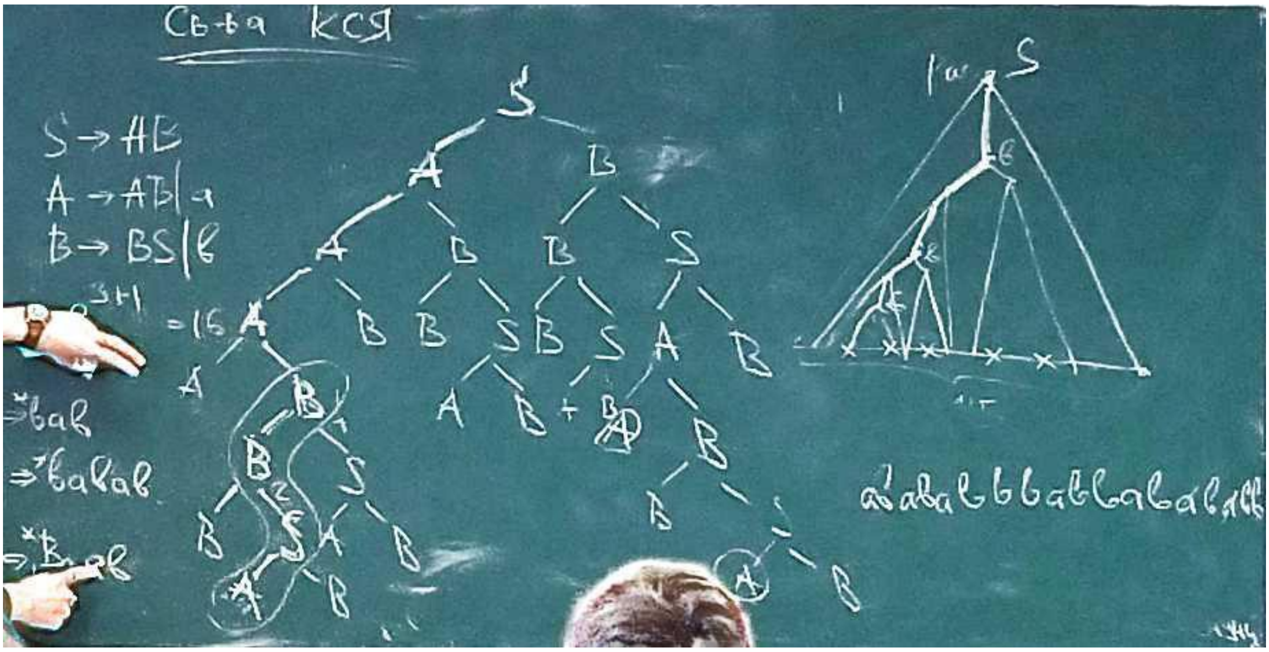
■

Пример

$S \to AB$

$A \to AB|a$

$B \to BS|b$



> *12.03.19*

Лемма о накачке

> следствие леммы Огдена

L — КСЯ $\Rightarrow \exists n, m \in \mathbb{N}\ :\ \forall w \in L : |w| \geq k : w$ представимо как $uxzyv$, причём:

1. $xy \neq \lambda$
2. $|xzy| \leq m$
3. $ux^k zy^k v \in L, \forall k \in \mathbb{N}_0$

> для любого КСЯ существуют натуральные константы такие, что любое слово определённой длины соответствует свойствам. Отсутствуют слова про выделенные позиции!

> Приравнять n и m и все позиции сделать выделенными

Следствия леммы о накачке

> На экзамене будет вопрос про лемму о накачке и её следствия! Лемму доказывать не надо! Лемму Огдена надо. А следствия те, что ниже!

<u>Сл. 1</u>. Язык $\{a^n b^n c^n | n \in \mathbb{N}\}$ не КСЯ

> Если не можем накачать слово, то это точно не КСЯ

Д-во: О.П: пусть язык L – контекстно свободный, следовательно выполняется лемма о накачке. Возьмём слово $a^l b^l c^l, l \geq m, 3l \geq n$. Попробуем впихнуть туда xzy. Переберём все варианты. Если ни один не подойдёт - получим противоречие.

$|aa \dots aa|b \dots b|c \dots c|$

xzy расположены в одном блоке, либо на границе двух (т.к. длина блока больше, чем длина строки xzy)

1. Накачиваться будет одна буква: $a^{l+r} b^l c^l \notin L$
2. Если x будет и в a, и в b, получиться a после $b \Rightarrow x$ целиком в блоке a, y целиком в блоке b. Накачаем: $a^{l+r} b^{l+s} c^l \notin L$.

■

<u>Сл. 2</u>. Язык $L = \{ww | w \in \Sigma^*, |\Sigma| \geq 2\}$ — не КСЯ (язык квадратов)

Д-во: О.П. $\Sigma = \{a_1, \dots, a_{n'}\}$. Должно накачиваться $a_1^l \dots a_k^l a_1^l \dots a_k^l$. $l \geq m, 2|w| \geq n$

Давайте накачаем одну из половинок или что-то посередине

$|w|w|$

1. Накачаем вторую половину. Значит, найдётся 1 или 2 буквы, которые мы накачали. В итоге тоже должно получиться "квадратное" слово. $w^2 = uxzyv$. Поделим пополам слово $ww' = ux^2zy^2v$. Новая граница точно не вышла за предел блока a_1

   $|w|a_1^l][\dots w' \dots a_k|$

   ↑ *новая граница*

2. Качаем посерединке

   $a_1^l \dots a_k^{l+r} a_1^{l+s} \dots a_k^l$ r+s \le m Б.О.О. r /ge s

   - $r = s \Rightarrow$ в новом слове правая половина кончается на большее кол-во a_k
   - $r > s$ первая половина начинается на a_1, вторая - на a_k

■

> Лемма о накачке не всесильна: $a^n b^n v^k, k \geq n$

> Пример унарного языка: a^{n^r}

Теорема об унарных языках

Для языка $L \subseteq \{a\}^*$:

1. L — регулярный;
2. L — КСЯ;
3. мн-во длин слов из L — периодическое.

> м $\subseteq \mathbb{N}$ — **периодическое**, если $\exists n_0, d \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \ (n \in M) \Rightarrow (n + d \in M)$

Д-во:

1. **2** $\Rightarrow$ **3**

   $\exists n, m : \forall a^n a^{n+r} \ (r \leq m)$:

   a^n =[*по лемме о накачке*]= $uxzyv$ =[*потому что язык унарный*]= $uvzxy$

   $uvz(xy)^k \in L$

   Положим $n_0 = n$ (из леммы о накачке), $d = m!$

   $m!$ делится на все $r \in \{1, \ldots, m\}$, значит, $a^{n+lm!} \in L$.
2. **3** $\Rightarrow$ **1**

   > построим автомат

   M — периодическое множество длин слов.

   $\forall i : 0 \leq i < d$ найдём минимальное $k_i : k_i \in M, k_i \equiv i \, mod \, d$. Если для какого-то i k_i не существует, положим его равным нулю.

   M — бесконечное $\Rightarrow \exists i : \ k_i > 0$

   > Рисунок мухоловки с ручкой длины k, обода длины d

   $\forall j \in \{0, \ldots, k\}$ сост. q_j – заключительное $\iff a^j \in L$

   Для остальных q_s – заключительное $\iff a^{s+rd} \in L$
3. **1** $\Rightarrow$ **2** — очевидно.

■

Подстановки

Опр. Подстановка $\tau : 2^{\Sigma^*} \rightarrow 2^{\Delta^*}$

1. $\tau(\lambda) = \lambda$;
2. $\tau(a) \subseteq \Delta^*, \ a \in \Sigma$; *если a - слово, то это гомоморфизм*
3. $\tau(a_1 \ldots a_n) = \tau(a_1) \cdot \ldots \cdot \tau(a_n)$;
4. $\tau(L) = \bigcup\limits_{w \in L} \tau(w)$.

> Гомоморфизм — частный случай подстановки ($\forall a \in \Sigma : \tau(a) = w \in \Delta^*$)

Пример.

Пусть $\Sigma = \{a_1, a_2\}$

$\tau(a_1) = L_1 \subseteq \Delta^*$

$\tau(a_2) = L_2 \subseteq \Delta^*$

- $L = \{a_1, a_2\}$

$\tau(L) = \tau(a_1) \cup \tau(a_2) = L_1 \cup L_2$

- $L = \{a_1 a_2\}$

  $\tau(L) = \tau(a_1) \cdot \tau(a_2) = L_1 \cdot L_2$

- $L = \{a_1\}^*$

  $\tau(L) = \tau(\{a_1\}^*) = \tau(\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} a_1^i) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \tau(a_1^i) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \tau(a_1)^i = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} L_1^i = L_1^*$

Теорема о подстановке.

Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ — КСЯ, $\tau : 2^{\Sigma^*} \to 2^{\Delta^*}$ – подстановка: $\forall a \in \Sigma : \tau(a)$ – КСЯ.

Тогда $\tau(L)$ – КСЯ

Д-во:

L порождает $G = < \Sigma, \Gamma, P, S >$, $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$

$G_i = < \Delta, \Gamma_i, P_i, S_i >, L(G_i) = \tau(a_i), \forall i = 1..n$

Б.о.о. $\Gamma \cap \Gamma_i = \emptyset$, $\forall i$, $\Gamma \cup \Gamma_i = \emptyset$, $i \neq j$

Грамматика $H = < \Delta, \bar{\Gamma}, \bar{P}, S >$

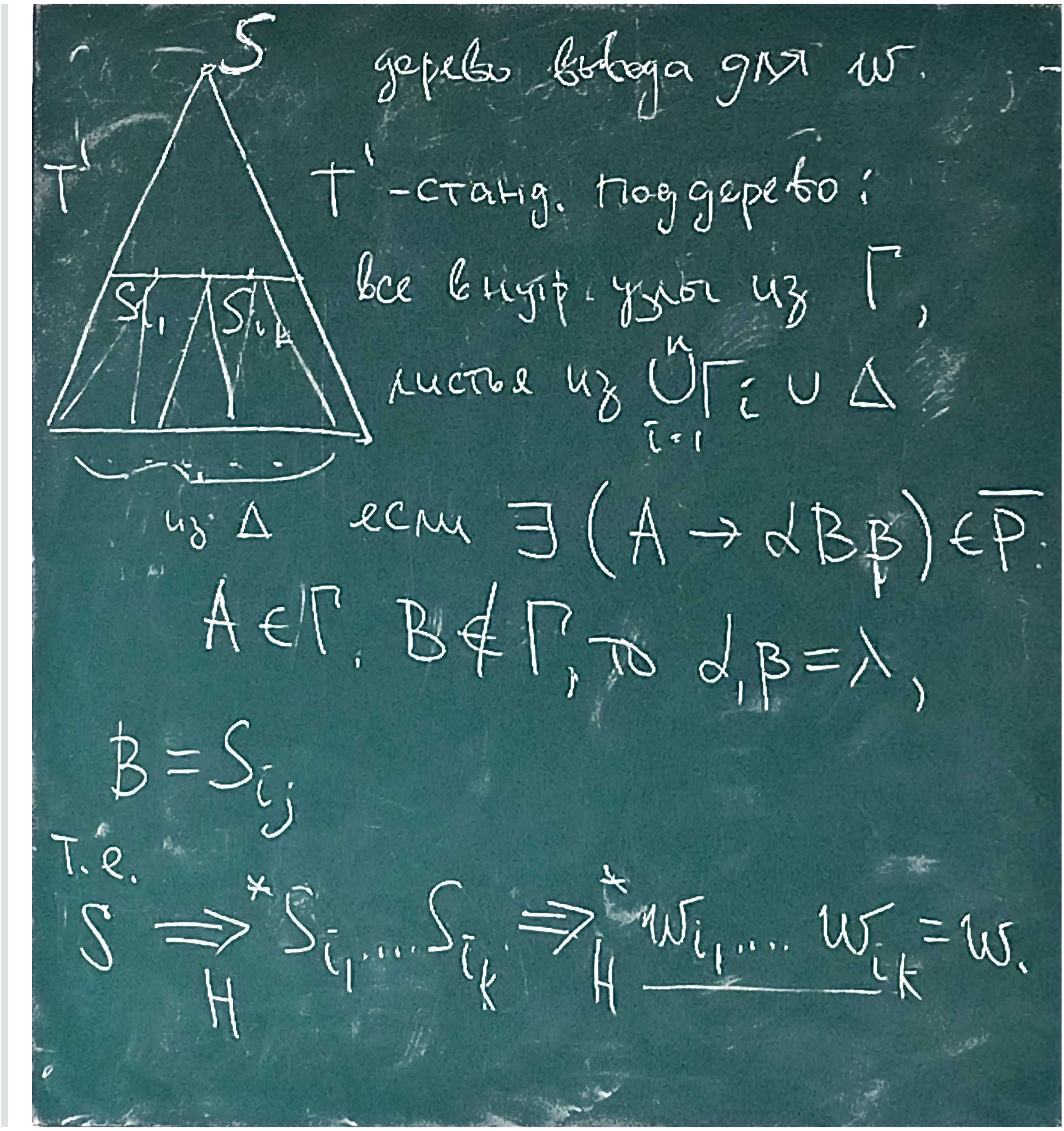
$\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \bigcup\limits_{i=0}^{n} \Gamma_i$

$\bar{P} = P' \cup \bigcup\limits_{i=0}^{n} P_i$, P' - из P значений всех терминалов a_i на соотв. S_i

$L(H) = \tau(L)$?

1. $w \in L(H)$

Построим дерево вывода для w. T' – стандартное поддерево: все внутренние узлы из Γ, листья из $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \Gamma_i \cup \Delta$. Если $\exists (A \to \alpha B \beta) \in \bar{P}: \ A \in \Gamma, B \notin \Gamma$, то $\alpha, \beta = \lambda$.



$B = S_{i_j}$, т.е. $S \Rightarrow_H^* S_{i_1} \dots S_{i_k} \Rightarrow_H^* w_{i_1} \dots w_{i_k} = w$

$w_{i_j} \in \tau(a_{i_j})$

$w \in \tau(a_{i_1}) \dots \tau(a_{i_k}) = \tau(a_{i_1} \dots a_{i_k}),\ a_{i_1} \dots a_{i_k} \in L$

$S \Rightarrow_G^* a_{i_1} \dots a_{i_k} \Rightarrow \Uparrow$

$w \in \tau(L)$.

2. $w \in \tau(L)$
3. $\exists u \in L : w \in \tau(u) \Rightarrow S \Rightarrow_G^+ u = a_{i_1} \dots a_{i_k} \iff S \Rightarrow_H^+ S_{i_1} \dots S_{i_k} \Rightarrow^+ w_{i_1} \dots w_{i_k}, w_{i_j} \in \tau(a_{i_j})$
   $u = a_{i_1} \dots a_{i_k} \Rightarrow w \in \tau(a_{i_1} \dots a_{i_k}) = \tau(a_{i_1}) \dots \tau(a_{i_k})\ w = w_{i_1} \dots w_{i_k}$

■

> 19.03.2019

Следствия теоремы о подстановке

Сл. 1. Класс КСЯ замкнут относительно регулярных операций ($*, \cdot, \cup$).

$\{a_1, a_2\}$

$L_1 = \tau(a_1), L_2 = \tau(a_2)$ — КСЯ

$\tau(\{a_1, a_2\}(\text{ксэ})) = L_1 \cup L_2$

Сл. 2. Класс КСЯ замкнут относительно перехода к гомоморфным образам.

> Гомоморфизм — частный случай подстановки. Применение подстановки к одному символу даёт язык из одного слова
>
> подстановка: $\tau(a) \subseteq \Sigma^*$ гомоморфизм: $\phi(a) \in \Sigma^*$, т.е. $\phi(a) = L, |L| = 1$

Предложение. Класс КСЯ не замкнут относительно пересечения и дополнения.

Д-во:

Пересечение: $L_1 = \{a^n b^n a^m | n, m \in \mathbb{N}_0\}$ $L_1 = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}_0\} \cdot \{a^*\}$ — КСЯ по лемме
$L_2 = \{a^m b^n a^n | n, m \in \mathbb{N}_0\}$ $L_2 = \{a^*\} \cdot \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}_0\}$ $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n a^n | n \in N_0\}$
$L_1 \cap L_2 = \phi(L_3), L_3 = \{a^n b^n c^n | n \in N_0\}$ — не КСЯ по лемме о накачке $\phi(a) = a, \phi(b) = b, \phi(c) = a$

Дополнение: $A \bar{\cap} B = \bar{A} \cup \bar{B}$ $A \cap B = \bar{A} \bar{\cup} \bar{B}$ ■

Теорема о пересечении КСЯ с РЯ

Пересечение КСЯ с регулярным языком — КСЯ Д-во: $L = L(G), G = <\Sigma, \Gamma, P, S>$ — КСЯ

$A = (\Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F), M = L(A)$

Что можно сказать про $L \cap M$?

> Достаточно рассмотреть автоматы с единственным заключительным состоянием:
>
> $A = (\Sigma, \Gamma, \delta, q_0, f_i), f_i \in F$
>
> $M = \bigcup_{f_i \in F} L(A_{f_i})$

$L \cap M = L \cap \bigcap_{f_i \in F} L(A_{f_i}) = \bigcap_{f_i \in F} L \cap L(A_{f_i})$

$A = (\Sigma, \Gamma, \delta, q_0, f)$

$H = (\Sigma, \bar{\Gamma}, \bar{P}, \bar{S})$

$\bar{\Gamma} = Q \times (\Gamma \cup \Sigma) \times Q$

$\bar{S} = (q_0, S, f)$

Правила вывода состоят из правил двух типов:

1. Те, что получаются из грамматики: Если $A \to X_1, \ldots, X_n \in P$, то $\forall$ набора состояний $p, q, r_1, \ldots, r_{n-1}$: $(P, A, q) \to (p, X_1, r_1)(r_1, X_2, r_2)\ldots(r_{n-1}, X_n, q) \in \bar{P}$
2. Те, по которым есть правила перехода в автомате: Если $\delta(p, a) = q$, то $(p, a, q) \to a \in \bar{P}$

$L(A) = L \cap M$?

$w \in L(H)$

Вывод w: сначала правила вывода (1) из ХНФ

$w = a_1 \dots a_n$

$\bar{S} \Rightarrow_H^* (1)(q, a_1, r_1)(r_1, a_2, r_2) \dots (r_{n-1}, a_n, f) \Rightarrow^+ (2) a_1 \dots a_n$

$(q_0, S, f), q = q_0, p = f$

$w \in L \cap M$

■

Распознаватели КСЯ

Мы знаем, что регулярный язык можно распознать за линейное время. Про КСЯ пока ничего не знаем. Но, есть теорема, которая отвечает на этот вопрос. Попытаемся определить вхождение слова в КСЯ.

Алгоритм Кока-Янтера-Касами

$G = < \Sigma, \Gamma, P, S >$ — в ХНФ.

Сначала нужно построить табличку. Пусть есть слово, которое мы проверяем:

$w \in L(G) \Rightarrow \forall i, j, i \neq j : \exists A \in \Gamma : (A \to BC) \in P : A \to w[i..j], B \to w[i..k], C \to w[k+1..j], i \leq k \leq j$

Таблица — верхнетреугольная матрица размера $n \times n$, $|w| = n$

T_{ij}	**Столбец - длина**
Строка - позиция	Нетерминалы, из которых можно вывести подстроку из данной позиции с заданной длиной.

$T_{ij} = \{A | A \Rightarrow_G^+ w[i..i+j-1]\}$ — в ячейке храним нетерминалы, из которых выводится подстрока с позиции i длины j.

Первый столбец заполняется по правилам ХНФ (2):

$T_{i1} = \{A | (A \to w[i]) \in P\}$.

Остальные столбцы заполним, перебрав все возможные "распилы" строки на 2 части:

$T_{ij} = \{A | \exists (A \to BC) \in P, B \in T_{ik}, C \in T_{i+k-1, j-k}, i \leq k < j - 1\}$

Если в $T_{1,n}$ есть S, то $w \in L(G)$

Пример

$S \to A' A | BB' | SS$ $A \to A' A | A' D | c$ $D \to CB'$ $B \to BB' | A' D | c$ $C \to A' D | c$ $A' \to a$ $B' \to b$

$w = aacbcb$

	1	2	3	4	5	6
1	A'	-	S, A	S, A	-	S
2	A'	S, A	A, B, C (acb)	-	-	
3	A,B,C	S, B, D	- (cbc)	S		
4	B'	- (с B' ничего не начинается)	- (bcb)			
5	A,B,C	S, B, D				
6	B'					

$w[1,2] = w[1,1]w[2,2]$ — всего один способ поделить на 2 части

$w[1,3] = w[1,1]w[2,3] = w[1,2]w[3,3]$ — можно поделить двумя способами:

- с позиции 1 длины 1 + с позиции 2 длины 2;
- с позиции 1 длины 2 + с позиции 3 длины 1.

Смысл: берём значение из ячейки слева (X), из ячейки справа (Y), и ищем нетерминал (Z), из которого выводится последовательность XY ($Z \to XY$). Если нашли такой терминал, то записываем.

Сложность: $n * n$ — таблица n — распилы и поиск, итого $O(n)$

> 26.03.2019

$a^n b^n$ — не распознаётся ДКА.

$S \to aSb | \lambda$

МП-автоматы

> Автоматы с магазинной памятью — стеком, PDA — push-down automaton.

|с|л|о|в|о|...|⊣| — входная лента ↑↑ с ←|УУ| конец слова т состояния е к ...

∇

Можем остаться на месте, или сдвинуться вправо $\downarrow (q, a, B) \to (q', \{\_, \to\}, \gamma)$ — $(\cdot)$

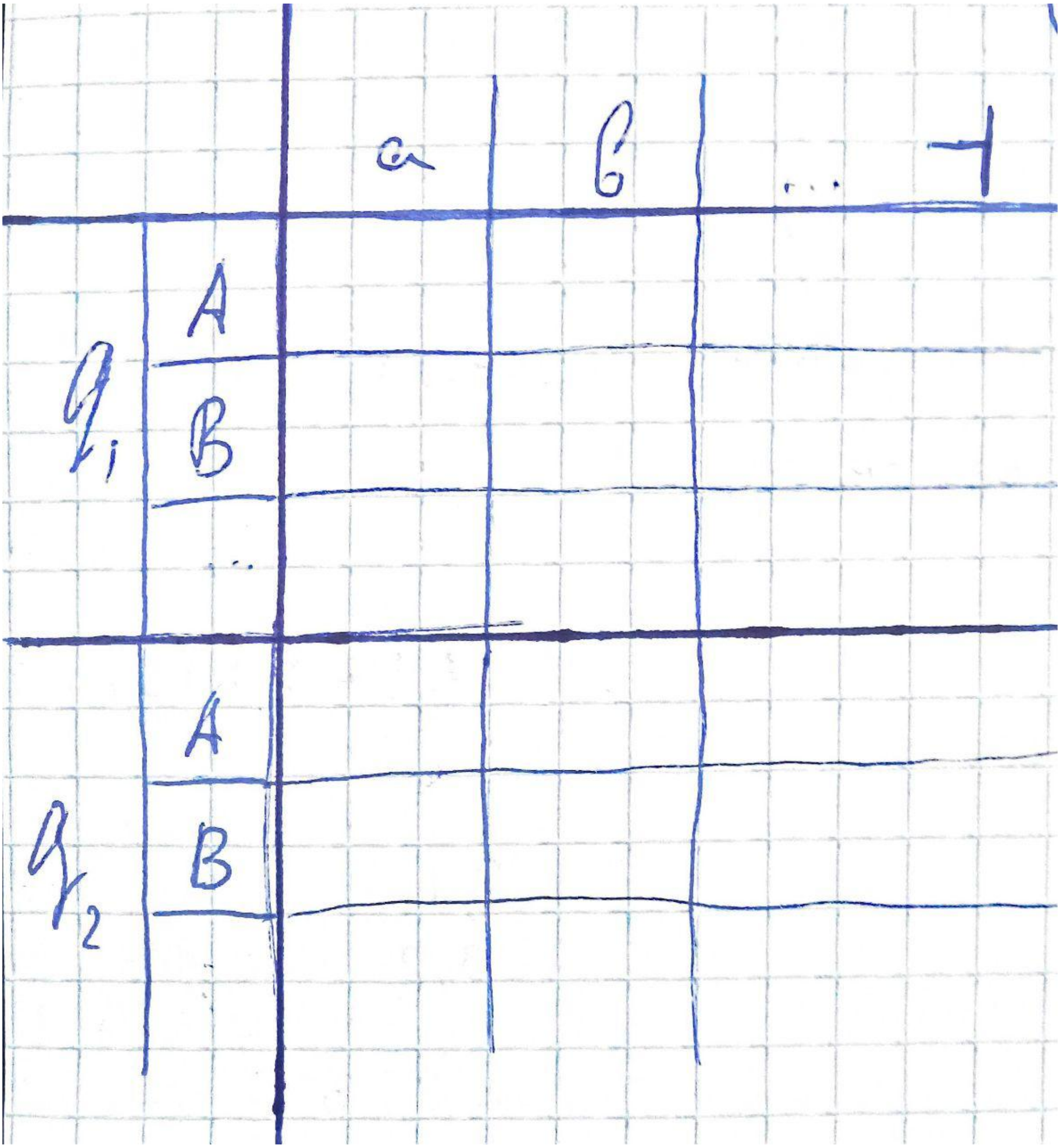
Автомат закончит работу, когда дочитает строку и остановится в заключительном состоянии.

<u>Опр</u>. МП-автомат $M = (\Sigma, \Gamma, Q, \delta, i_0, F, \gamma)$

- Σ — входной алфавит;
- Γ — стековый алфавит;
- Q — множество состояний;
- δ — множество команд вида $(\cdot)$;

- i_0 — начальное состояние;
- F — множество заключительных состояний;
- $\gamma \in \Gamma^*$ — начальное состояние для стека.

> Нарисуем какую-то табличку: по столбцам — символ, который читаем, по строкам — элемент на верхушке стека



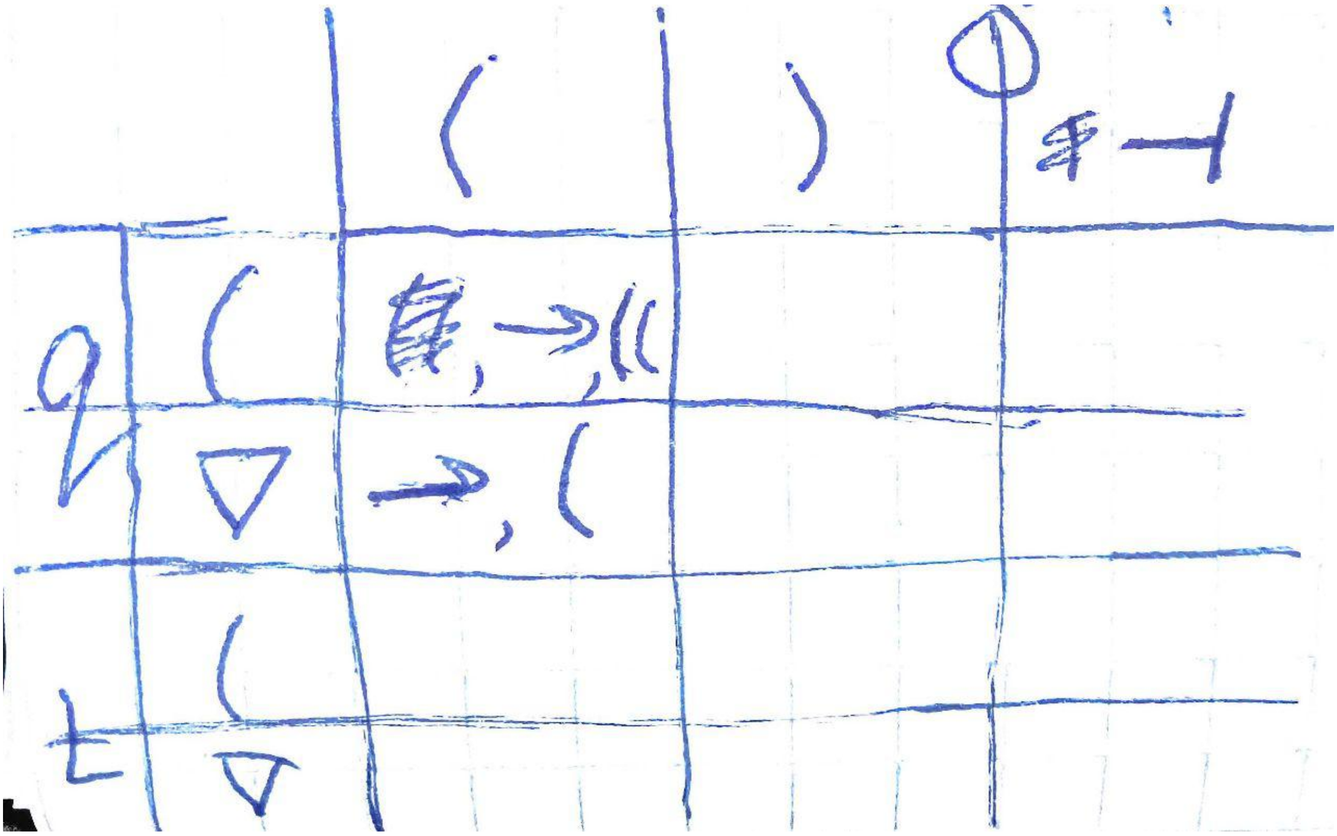
> Сколько мест в стеке, столько строк на каждое состояние

На каждом шаге обязательно надо читать из стека! Элемент при этом оттуда исчезает.

Скобочный язык

> в стеке будет лежать только открывающая скобка

> При разборе — в левом префиксе открывающих скобок не меньше чем закрывающих



Варианты распознавания МП-автомата:

- $(q, \dashv, B) \to \checkmark$ — команда допуска, слово читается.
- пустота стека (можно добавить переходов, которые просто очищают стек).

Опр. **Конфигурация** автомата — снимок его состояния $[q, w, \gamma]$

- q — текущее состояние;
- w — необработанная часть входной строки;
- γ — текущее содержимое стека.

Вершина стека пишется **слева**! (пока)

На множестве конфигурация можно построить отношение: возможность перехода из одной конфигурации в другую.

$[q, w, \gamma] \models [q', w', \gamma']$ — переход за 1 ход.

Опр. МПА **распознаёт** цепочку, если он дочитал её до конца и:

- оказался в заключительном состоянии ИЛИ
- выполнил команду допуска ИЛИ
- закончил работу с пустым стеком

Опр. МПА распознаёт w, если $[i_0 w, \gamma_0] \models^* [t, \lambda, \gamma], t \in F$.

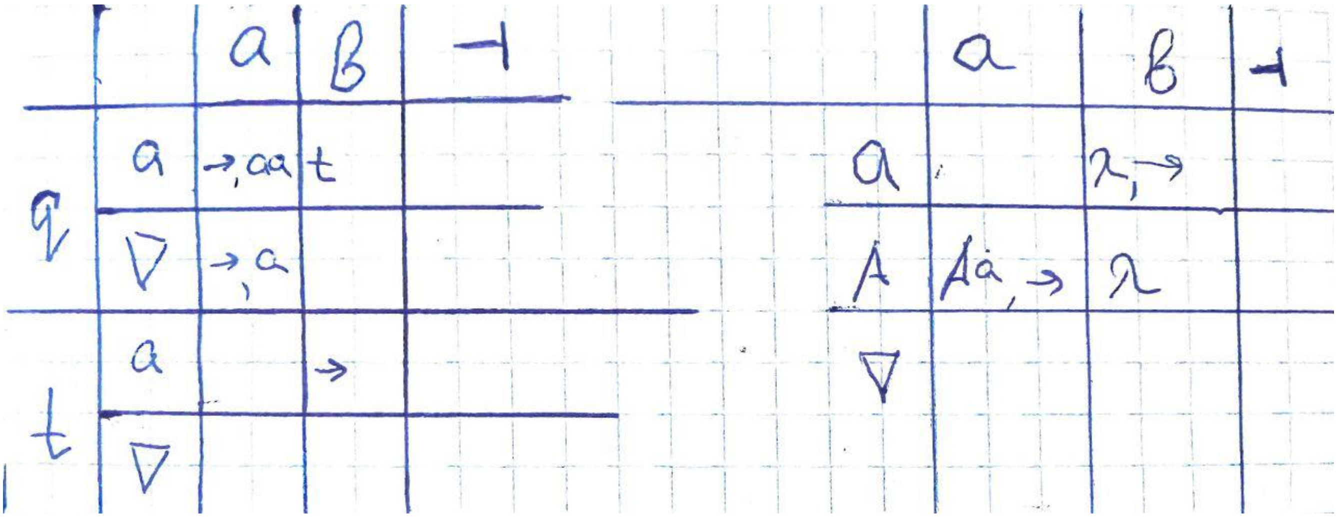
> Введение дополнительных стековых символов позволяет сократить количество состояний

$L(M) = \{w | [i_0 w, \gamma_0] \models^* [t, \lambda, \gamma]\}$

Пример

$a^n b^n$

Нужно следить, чтобы после b не появилось a. Для этого добавим 2 состояния: b ещё не было, b уже была.



Стек будем писать в правой колонке!

> 02.04.2019

НМПА и ДМПА

ДМПА: $(q, a, B) \to (q', \{\_, \to\}, \gamma)$ — не более одной команды с такой левой частью

НМПА: $(q, a, B) \to 2^{(Q \times \{\_, \to\} \times \Gamma^*)_{fin}}$

Теорема. Класс языков, распознаваемых НМПА, строго больше класса языков, распознаваемых ДМПА.

Д-во:

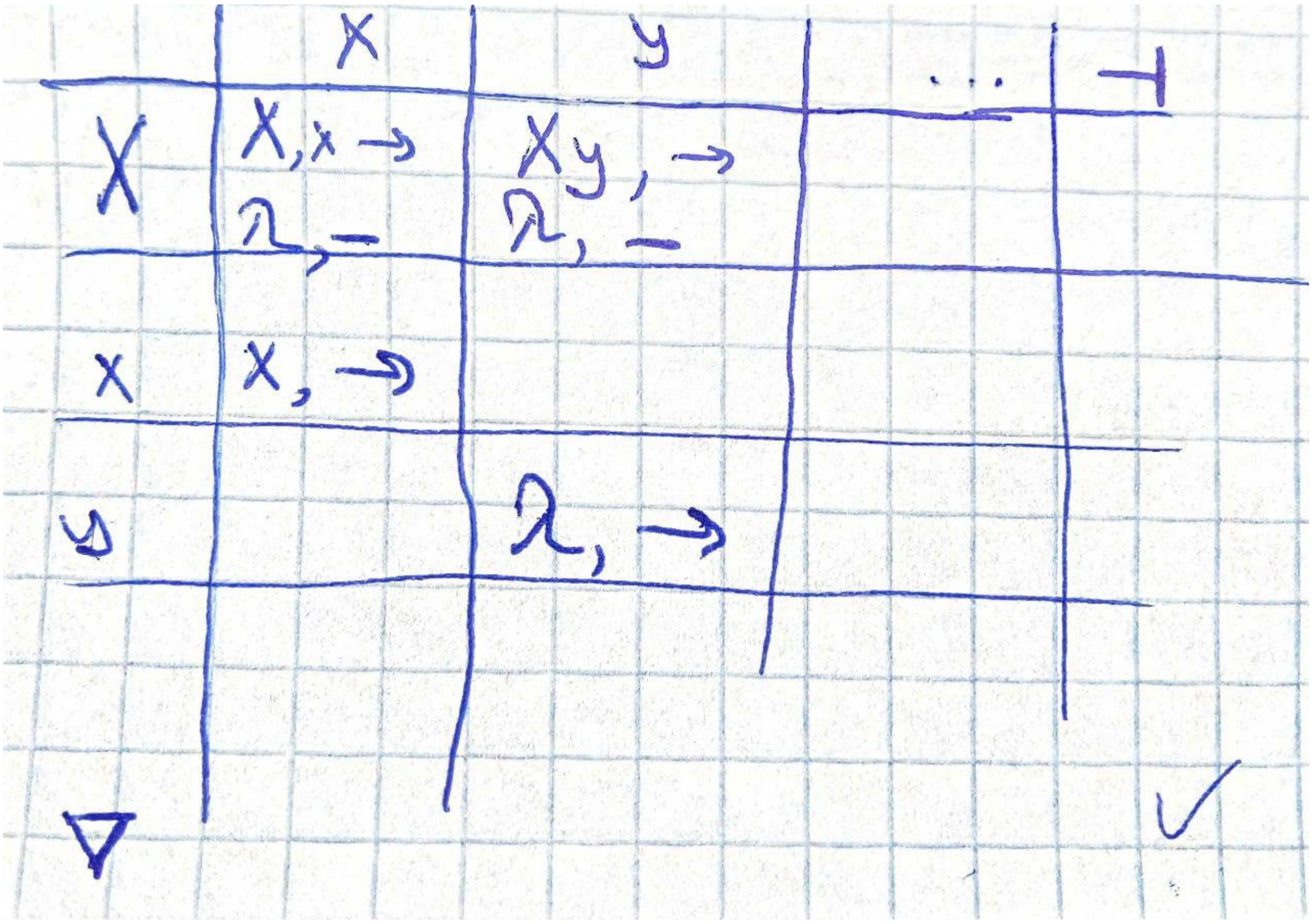
$\overleftarrow{w}$ — слово w, развёрнутое задом наперёд.

$\{w\overleftarrow{w} | w \in \Sigma^*, |\Sigma| \geq 2\}$ — множество палиндромов.

$M = (\Sigma, \Gamma, \delta, X)$ — НМПА. X — символ, указывающий, что перехода к сравнению ещё не было.

$\Gamma = \Sigma \cup \{X\}$ — стековый алфавит.

$x, y \in \Sigma$



> Что значит, что НМПА распознаёт символ?

> Автомат с пустым стеком продолжать работу не может.

О.П. $\exists$ ДМПА, распознающий $\{w\overleftarrow{w}|w \in \Sigma^*, |\Sigma| \geq 2\}$. $x \in \Sigma, w \in \Sigma^*$

$wxx\overleftarrow{w}$ — распознаётся автоматом, потому что тоже палиндром. После прочтения wx автомат начнёт доставать элементы из стека и сравнивать.

Давайте подадим ему на вход $wxxxx\overleftarrow{w}$. Тут он к сравнению тоже перейдёт после wx и не распознает это слово.

■

МПА и КСЯ

Теорема. Любой КСЯ распознаётся НПА с одним состоянием и одной командой допуска.

Д-во:

L — КСЯ, $G = <\Sigma, \Gamma, P, S>$, G — КСГ, $L(G) = L$

> Если состояние одно, то нигде про него говорить не будем. Поэтому тройки станут двойками.

$M = (\Sigma \cup \{\dashv\}, \Sigma \cup \Gamma \cup \{\nabla\}, \delta, S)$, S — начальное значение стека.

> У нас остаётся входной и стековый алфавит

Команды бывают трёх видов:

1. $\forall a \in \Sigma : (B, a) \to (\gamma, \_)$

   $\forall (B \to \gamma) \in P$

   > Для любого входного символа и любого правила для данного нетерминала мы добавляем команду. Команд будет столько, сколько разных правых частей есть для этого нетерминала.

2. $\forall a \in \Sigma : (a, a) \to (\lambda, \to)$
3. $(\nabla, \dashv) \to \checkmark$

$L = L(M)$?

1. $\Rightarrow$

   $w \in L$

   $\exists$ левосторонний вывод w в G

   $S \Rightarrow u_1 B_1 \gamma_1 \Rightarrow u_1 u_2 B_2 \gamma_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow u_1 \ldots u_{n-1} B_{n-1} \gamma_{n-1} \Rightarrow u_1 \ldots u_n$

   Тогда в M реализуема следующая последовательность конфигурация

   $[w, S] = [u_1 \ldots u_n, S] \models [u_1 \ldots u_n, u_1 B_1 \gamma_1] \models^* [u_2 \ldots u_n, B_1 \gamma_1] \models [u_2 \ldots u_n, u_2 B_2 \gamma_2] \models^*$

   $\models^* [u_n, B_{n-1} \gamma_{n-1}] \models [u_n, u_n] \models^* [\lambda, \lambda]$

   u_1 — цепочка из терминалов

   γ_i — цепочка из терминалов и нетерминалов

   Пока мы не дойдём до нетерминала мы продолжим чтение входной строки

   B_{n-1} его правая часть — это какое-то правило, а левое — конец цепочки γ_n

2. $\Leftarrow$

   $w \in L(M)$

   Есть оракул, который говорит, что данная последовательность реализуема

   $[w, S] \models^* [\lambda, \lambda]$

   $\uparrow$ — конечное число тактов m

   $w = a_1 \ldots a_m$, $a_i \in \Sigma \cup \{\lambda\}$

   С помощью этой последовательности закодировали типы применяющихся команд. Если там лямбда, то мы применяли команду типа 1 и не сдвигались по входной строке.

   $[w, S] \models [a_1 \ldots a_m, S] \models [a_1 \ldots a_m, a_{i_1} B_1 \gamma_1] \models [a_{i_1+1} \ldots a_m, B_1 \gamma_1] \models \ldots \models [\lambda, \lambda]$

Вспомогательная лемма. Произведение обработанной части входной строки на содержимое стека — левая форма G.

> **Левая форма** — всё, что может возникнуть в процессе левостороннего вывода.

Д-во. По индукции.

Нулевой шаг: в прочитанном — λ, в стеке — аксиома. $\beta_0 = \lambda \cdot S = S$. Аксиома — это левая и правая форма.

ПИ: обработанная часть: $a_1 \ldots a_{n-1}$. В стеке γ_{n-1}. Произведение — левая форма.

ШИ:

- $a_n \in \Sigma \Rightarrow \gamma_{n-1} = a_n\gamma_n.$

  $\beta_{n-1} = \beta_n$

  > если a_n это символ, то формы равны

- $a_n = \lambda \Rightarrow \gamma_{n-1} = B_{n-1}\gamma'_{n-1}$

  $\beta_{n-1} = a_1 \dots a_{n-1}B_{n-1}\gamma'_{n-1}$

  $\beta_n = a_1 \dots a_{n-1}\gamma\gamma'_{n-1}$

  $(\beta_{n-1} \to \gamma) \in P$

  > применялась команда вида 1. Значит, на вершине стека лежит нетерминал. Тогда применим правило и снова получим левую форму

Вернёмся к доказательству теоремы.

$w \cdot \lambda$ — левая форма (по лемме). Т.к. w — всё, что мы обработали и λ — то, что осталось в стеке, то $w \in L(G)$

■

> Что даёт теорема? Есть КСЯ, можем построить НМПА, его распознающий.

Теорема. Класс КСЯ и класс языков, распознающих КСЯ, совпадают.

Следствие. ДМПА распознаёт собственный подкласс КСЯ.

Пример

$S \to (S)S|\lambda$

Стековый алфавит — все терминалы, нетерминалы и дно стека.

	(	)	$\dashv$
(	$\lambda, \to$		
)		$\lambda, \to$	
S	(S)S λ	(S)S λ	
∇			✓

Прочитаем (()) ⊣

> Слева — прочитанное, справа — стек. Наша цель — получить дерево

Прочитанное	Стек
λ	S
λ	$(S)S$
$($	$S)S$
$($	$(S)S)S$
$(($	$S)S)S$
$(($	$)S)S$
$(()$	$S)S$
$(()$	$)S$
$(())$	S
$(())$	∇

Сноски

---

1. Будем их использовать, чтобы не терять связь грамматики и компиляции.↩
2. Recursively Enumerable↩
3. с таким же деревом вывода↩