ALEXANDER FILIP

1) a) Veta o jadre a obraze lineárneho zobrazenia:

ak $f: V \to U$, potom $\boxed{\dim V = \dim(Im(f)) + \dim(Ker(f))}$

---

b) $B: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

štandardná báza

$B(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 - x_2,\ -x_1 + x_2)$

$B\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$

$B\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$B\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$Ker\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 0\end{bmatrix}: \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\1 & -1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right] \sim \begin{array}{ccc}a_1 & a_2 & a_3\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & 1 & 0\\1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

$a_3 = 2s,\ s \in \mathbb{R}$

$a_2 = -s$

$a_1 = -s$

$\boxed{Ker(B) = \{(s, s, -2s); s \in \mathbb{R}\} \quad \dim(Ker[B]) = 1}$

$Im(B): \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\1 & -1 & 0 & b\\-1 & 1 & 0 & c\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\1 & -1 & 0 & b\\0 & 0 & 0 & b+c\end{array}\right]$

$0 = b + c$

$-b = +c$

$\boxed{Im(B) = \{(a, b, -b); a, b \in \mathbb{R}\} \quad \dim(Im(B)) = 2}$

VETA O JADRE A ORAZE PLATÍ

ALEXANDER FILIP

Báza Ker(B): 1 vektor (lebo dim=1), inak by boli lineárne závislé

$\langle \vec{k}, \vec{k} \rangle = 1$

$\left\langle \begin{bmatrix} s \\ s \\ -2s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ s \\ -2s \end{bmatrix} \right\rangle = 1$

$s^2 + s^2 + 4s^2 = 1$

$6s^2 = 1$

$s^2 = \frac{1}{6}$

$\boxed{s = \frac{\sqrt{6}}{6}}$

ORTONORMÁLNA BÁZA KER(B):

$\vec{k}_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-\sqrt{6}}{3} \right)$

Báza Im(B): 2 vektory (lebo dim=2)

$\langle \vec{r}, \vec{r} \rangle = 1$

$\left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \\ -b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ b \\ -b \end{bmatrix} \right\rangle = 1$

$a^2 + b^2 + b^2 = 1$

$a^2 + 2b^2 = 1$

VYBEREM SI:

$a = 0 \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \vec{r}_1 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2} \right)$

$b = 0 \quad a = 1$ $\quad \vec{r}_2 = (1, 0, 0)$

SÚ ORTOGONÁLNE?:

$\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle = 0$

$\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 + 0 + 0 = 0$ ✓

ORTONORMÁLNA BÁZA IM(B):

$\vec{r}_1 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2} \right)$

$\vec{r}_2 = (1, 0, 0)$

Alexander Filip

(2) $A_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Kedy je diagonalizovateľná?

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

• ak súčet ~~dim~~ $dim(Ker(A-\lambda_i . I)) = 3$

$$A_\alpha - \lambda . I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A_\alpha - \lambda . I) = (1-\lambda)^2 . (\alpha-\lambda) - (1.\alpha-\lambda) \ominus$$

$(\alpha-\lambda).((1-\lambda)^2-1) = (\alpha-\lambda).(-2\lambda+\lambda^2)$

$\ominus (1-2\lambda+\lambda^2)(\alpha-\lambda) - \alpha + \lambda \ominus$

$\ominus \cancel{\alpha} - 2\alpha\lambda + \alpha\lambda^2 - \cancel{\lambda} + 2\lambda^2 - \lambda^3 - \cancel{\alpha} + \cancel{\lambda} =$

$\ominus -\lambda^3 + \lambda^2(2+\alpha) + \lambda.(-2\alpha) = \lambda(-\lambda^2 + \lambda(2+\alpha) - 2\alpha) = 0$

$\boxed{\lambda_1 = 0}$

$-\lambda^2 + \lambda.(2+\alpha) - 2\alpha = 0$

$D = (2+\alpha)^2 - 4.2\alpha \ominus$

$\ominus 4 + 4\alpha + \alpha^2 - 8\alpha \ominus$

$\ominus \alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0$

$(\alpha-2)(\alpha-2) \geq 0$

ak $\alpha = 2$

$\Downarrow$

$D = 0 = 0$

$\Downarrow$

čiže bude existovať len jeden koreň kvadr. rovnice

$\Downarrow$

$\lambda_2 = \frac{-4+0}{-2} = \boxed{+2}$

λ_3 - neexistuje

ak $\alpha \neq 2$

$\Downarrow$

$D > 0$

$\Downarrow$

budú existovať dva korene kvadratickej rovnice

$\Downarrow$

existuje λ_2 aj λ_3

SKÚSIM: $\alpha = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda . I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det[A - \lambda . I] \ominus$$

$\ominus (1-\lambda)^2 . (2-\lambda) - 2 + \lambda = (1-2\lambda+\lambda^2)(2-\lambda) - 2 + \lambda \ominus$

$\ominus \cancel{2} - 4\lambda + 2\lambda^2 - \cancel{\lambda} + 2\lambda^2 - \lambda^3 - \cancel{2} + \cancel{\lambda} \ominus$

$\ominus \lambda(-\lambda^2 + \lambda(2+2) - 4) = \lambda(-\lambda^2 + 4\lambda - 4) = 0$

$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 2$

ALEXANDER FILIP

$\underline{\alpha = 2}$

$\lambda_1 = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \end{array}\right] \cdot(-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} a_3 = s, \ s \in R \\ a_2 = 0 \\ a_1 = -s \end{array}$$

$$\dim(\mathrm{Ker}(A_2 - \lambda_1 . I)) = \boxed{1}$$

$\lambda_2 = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & \end{array}\right] \cdot 1 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} a_3 = t, \ t \in R \\ a_2 = 0 \\ a_1 = t \end{array}$$

$$\dim(\mathrm{Ker}(A_2 - \lambda_2 . I)) = \boxed{1}$$

ZÁVER:

ak $\alpha = 2$, matica nie je diagonalizovateľná

ak $\alpha \neq 2$, matica je diagonalizovateľná

Súčet dimenzií $\neq 3$. Takže A_2 nie je diagonalizovateľná.

ALEXANDER FILIP

③ $\boxed{T^2 = 2T}$

Ak λ je vlastná hodnota T, potom $\lambda \in \{0,2\}$

$$T.\vec{x} = \lambda.\vec{x}$$

$$(T^2).\vec{x} = T.T.\vec{x} = T.(\lambda.\vec{x}) = \lambda.T.\vec{x} = \boxed{\lambda^2.\vec{x}}$$

$$(2T).\vec{x} = 2.T.\vec{x} = \boxed{2.\lambda.\vec{x}}$$

$$2.\lambda.\vec{x} = \lambda^2.\vec{x}$$

$$2.\lambda = \lambda^2 \quad \text{/}-2.\lambda$$

čísla

$$\lambda^2 - 2.\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda-2) = 0$$

$\boxed{\lambda = 0}$ $\boxed{\lambda = 2}$

$$\boxed{\lambda \in \{0;2\}}$$

④ $S: V \to V$ je INJEKTÍVNA LIN. TRANSFORM. ALEXANDER FILIP

$\langle x, y \rangle_S := \langle Sx, Sy \rangle$ nový skalárny súčin?

1.) SYMETRIA:

$\langle x,y \rangle_S = \langle Sx, Sy \rangle = \langle Sy, Sx \rangle = \langle y, x \rangle_S$ ✓

2.) KONTROLA SČÍTANIA:

$\langle x+y, z \rangle_S = \langle S(x+y), z \rangle = \langle Sx + Sy, Sz \rangle = \langle Sx, Sz \rangle + \langle Sy, Sz \rangle = \langle x, z \rangle_S + \langle y, z \rangle_S$ ✓

3.) KONTROLA NÁSOBENIA:

$\langle \alpha . x, y \rangle_S = \langle S(\alpha . x), Sy \rangle = \langle \alpha . Sx, Sy \rangle = \alpha . \langle Sx, Sy \rangle = \alpha . \langle x, y \rangle_S$ ✓

4.) NEZÁPORNOSŤ:

$\langle x, x \rangle_S \geq 0 \Rightarrow \langle Sx, Sy \rangle \geq 0$ ← nezápornosť bežného skalárneho súčinu

$\langle x, x \rangle_S = 0$ vtedy a len vtedy, ak $x=0$:

$\langle x, x \rangle_S = \langle Sx, Sx \rangle = 0$ ... len ak $Sx = 0$ .... pomocou INJEKTIVITY vieme, že sa platí len ak $x=0$

$\boxed{\langle x, y \rangle_S \text{ teda je skalárny súčin na } V}$

ALEXANDER FILIP

5

a) VLASTNÁ HODNOTA lineárnej transformácie je číslo-skalár, ktorým keď vynásobíme VLASTNÝ VEKTOR, dostaneme rovnaký výsledok (nový vektor) ako pri násobení maticou - lineárnej transformácie:

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

lineárna transformácia

vlastná hodnota

vlastný vektor

---

b) R^{∞} s prvkami: všetky postupnosti $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ reálnych čísel

$$L(a_1, a_2, a_3, a_4 \dots) = (a_2, a_3, a_4, a_5 \dots)$$

a)

Je L lineárna transformácia?:

⊕ $L((a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_1, b_2, b_3, \dots)) = L(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \dots) = (a_2+b_2, a_3+b_3, a_4+b_4, \dots) =$

$= (a_2, a_3, a_4, \dots) + (b_2, b_3, b_4, \dots) = L(a_1, a_2, a_3, \dots) + L(b_1, b_2, b_3, b_4, \dots)$ ✓

⊗ $L(\alpha \cdot (a_1, a_2, a_3, \dots)) = L(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \dots) = (\alpha a_2, \alpha a_3, \alpha a_4, \dots) = \alpha \cdot (a_2, a_3, a_4, \dots) =$

$= \alpha \cdot L(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ ✓

ALEXANDER FILIP

Matica zobrazenia

$L(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_2, a_3, a_4, \dots)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Matica $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \end{bmatrix}$ = všetko nuly okrem jednotiek NAD diagonálou

$$|L - \lambda . I| = \left| \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \right| = (-\lambda)^i = 0 \quad ; i \to \infty$$

$\boxed{\lambda = 0}$

JEDINÁ VLASTNÁ HODNOTA

$\boxed{\lambda = 0}$

$$\mathrm{Ker}(L - 0.I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$a_1 = s \quad , s \in \mathbb{R}$

$a_j = 0 \quad , j \in [2, \infty[$

JEDINÝ VLASTNÝ VEKTOR:

$\vec{v} = \{(s, 0, 0, \dots); s \in \mathbb{R}\}$