

① a) WŁAŚCIWOŚĆ

ALEXANDER FIUD

Veta o jadre a obrazie liniowych mnożenior:

$$\text{ak } f: V \rightarrow W$$

, potem $\boxed{\dim V = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f))}$

D) $B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

standardna' bixxa'

$$B(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, -x_1 + x_2)$$

$$B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad a_3 = 2a_1, a_2 = -a_1, a_1 = -a_2$$

$$B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

je dan $\text{z} A$ [0 0 0] jehož řádky
jsou v lineární závislosti

$$\text{Ker}(B) = \{(n, n_1 - 2n); n \in \mathbb{R}\}$$

$$\dim(\text{Ker}(B)) = 1$$

alebo vektor je v lineární závislosti

alebo vektor je v lineární závislosti

$$\text{Im}(B) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ b+c \end{bmatrix} \right\}$$

$$0 = b + c$$

$$-b = +c$$

$$\text{Im}(B) = \{(a, b, -b); a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$\dim(\text{Im}(B)) = 2$$

VETA O JADRE A ORAZE PLATI

ALEXANDER FILIP

Báza Ker(B): 1 vektor (kebo $\dim=1$), inak by boli lineárne závislé

$$\langle \vec{k}, \vec{k} \rangle = 1$$

$$|\vec{k}|^2 = 1$$

$$n^2 + n^2 + 4n^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2n \end{pmatrix} = 1$$

$$n^2 = 1$$

$$n^2 = \frac{1}{6}$$

$$n = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

ORTONORMÁLNA BÁZA KER(B):

$$\vec{k}_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3} \right)$$

Báza Im(B): 2 vektory (kebo $\dim=2$)

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 1$$

$$a^2 + b^2 + b^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ -b \end{pmatrix} = 1$$

$$a^2 + 2b^2 = 1$$

VYBERIEM S1:

$$a=0$$

$$b=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{x}_1 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$b=0$$

$$a=1$$

$$\vec{x}_2 = (1, 0, 0)$$

SÚ ORTOGONÁLNE?:

$$\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0 \quad \checkmark$$

ORTONORMÁLNA BÁZA IN(B):

$$\vec{x}_1 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\vec{x}_2 = (1, 0, 0)$$

②

$$A_\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Alexander Filip

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Když je diagonálně rozložitelná?• ak níže $\dim(\ker(A - \lambda_i \cdot I)) = 3$

$$\Sigma = (I, \alpha, -\alpha) \text{ res.}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha \neq 0} \\ \xrightarrow{\alpha = 0} \\ \xrightarrow{\alpha = 0} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{res.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$A_\alpha - \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A_\alpha - \lambda \cdot I) = (1-\lambda)^2(\alpha-\lambda) - (1,\alpha-2) \quad \text{③}$$

$$(\alpha-\lambda)(1-\lambda)^2 - 1 = (\alpha-\lambda)(-2\lambda+2^3)$$

$$\text{③ } (1-2\lambda+\lambda^2)(\alpha-\lambda) - \lambda + 2 \quad \text{④} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{res.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{SKÚŠENÍ: } \lambda = 2$$

$$\text{⑤ } -\lambda^2 + \lambda(2+\alpha) + \lambda \cdot (-2\lambda) = \lambda(-\lambda^2 + \lambda(2+\alpha) + 2\alpha) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$-\lambda^2 + \lambda(2+\alpha) - 2\alpha = 0$$

$$A - \lambda \cdot I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det[A - \lambda \cdot I] \quad \text{⑥}$$

$$D = (2+\alpha)^2 - 4 \cdot 2\alpha \quad \text{⑦}$$

$$\text{⑧ } 4 + 4\alpha + \alpha^2 - 8\alpha \geq 0$$

$$\text{⑨ } \alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0$$

$$\text{⑩ } (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda) - 2 + 2 = (1-2\lambda+\lambda^2)(2-\lambda) - 2 + 2 \quad \text{druhá, třetí řádky}$$

$$\text{⑪ } \lambda^2 - 4\lambda + 2\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 2 + 2 \quad \text{výpočet s faktorem výše uvedeným} \quad (\lambda-2)(\lambda-2) \geq 0$$

$$\text{⑫ } 2(-\lambda^2 + \lambda(2+\alpha) - 2\alpha) = 2(-\lambda^2 + 4\lambda - 4) = 0 \quad \text{výpočet s faktorem výše uvedeným}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2$$

ak $\lambda = 2$

$$D = 0 = 0$$

existují když existují
len jeden kořen kvadrat.
rovnice

$$\lambda_2 = \frac{-4 + 0}{-2} = [+] 2$$

x3 - neexistuje

ak $\lambda \neq 2$

$$D > 0$$

lze existovat dva kořeny
kvadratické rovnice

existují λ_2 a λ_3

UVEĎTE ALEXANDERA

ALEXANDER FILIP

zájem o matematiku vyučování učebnictví výpočetní technika

$\lambda = 1$

$\lambda_1 = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{a}_3 = 0, \quad n \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ a_1 &= -2 \end{aligned}$$

$$\dim(\ker(A_2 - \lambda_1 \cdot I)) = 1$$

$\lambda_2 = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot 1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{aligned} a_3 &= 1, \quad n \in \mathbb{R} \\ a_2 &= 0 \\ a_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\cdot 1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\dim(\ker(A_2 - \lambda_2 \cdot I)) = 1$$

ZÁVER:

ak $\lambda = 2$, matice nie je diagonalizovateľná
ak $\lambda \neq 2$, matice je diagonalizovateľná

Súčet dimensie $\neq 3$. Tabuľka A_2 nie je
diagonalizovateľná.

ALEXANDER FILIP

③ $T^2 = 2T$

Ak λ je reálná hodnota T , potom $\lambda \in \{0, 2\}$

$$T \cdot \vec{x} = 2 \cdot \vec{x}$$

$$2 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle 2 \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, 2 \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, (2+2) \vec{x} \rangle = 2 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$$

$$(T^2) \cdot \vec{x} = T \cdot T \cdot \vec{x} = T \cdot (\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot T \cdot \vec{x} = \lambda^2 \cdot \vec{x}$$

$$(2T) \cdot \vec{x} = 2 \cdot T \cdot \vec{x} = 2 \cdot \lambda \cdot \vec{x}$$

$$2 \cdot \lambda \cdot \vec{x} = \lambda^2 \cdot \vec{x}$$

$$2 \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \lambda^2 \cdot \vec{x}, \vec{x} \rangle \quad \text{číslo } 2, (\lambda \cdot \vec{x}) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\vec{x} \cdot \vec{x})$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = 0$$

$$\lambda = 2$$

$$\lambda \in \{0, 2\}$$

$$0 \leq \lambda$$

: $\vec{x} \neq 0$, protože $\vec{x} \neq 0$

④ $S: V \rightarrow V$ je INJEKTÍVNA LIN. TRANSFORM.

$$\langle x, y \rangle_S := \langle Sx, Sy \rangle \quad \text{novy skalarny súčin?}$$

1. SYMETRIA:

$$\langle x, y \rangle_S = \langle Sx, Sy \rangle = \langle Sy, Sx \rangle = \langle y, x \rangle_S \quad \checkmark$$

NEJAKÝ REZULTÁT

2. KONTROLA SCITANIA:

$$\{S, 0\} \in \mathbb{R}^n \text{ vtedy } T \text{ obdobie inverzne } \Rightarrow T \cdot 0 = 0$$

$$T \in \mathbb{R}^n$$

$$\langle x+y, z \rangle_S = \langle S(x+y), Sz \rangle = \langle Sx + Sy, Sz \rangle = \langle Sx, Sz \rangle + \langle Sy, Sz \rangle = \langle x, z \rangle_S + \langle y, z \rangle_S \quad \checkmark$$

$$x \cdot z = z \cdot x = (x \cdot z) \cdot T = x \cdot (z \cdot T) = x \cdot z$$

3. KONTROLA NÁSOBENIA:

$$\langle \lambda \cdot x, y \rangle_S = \langle S(\lambda \cdot x), Sy \rangle = \langle \lambda \cdot Sx, Sy \rangle = \lambda \cdot \langle Sx, Sy \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle_S \quad \checkmark$$

$$x \cdot \lambda \cdot y = x \cdot (\lambda \cdot y) = x \cdot (y \cdot \lambda) = x \cdot y$$

4. NEZAPORNOSŤ:

$$\langle x, x \rangle_S \geq 0 \quad \Rightarrow \langle Sx, Sx \rangle \geq 0 \quad \leftarrow \text{nezapornosť obzíneho skalárneho súčinnika}$$

$$\langle x, x \rangle_S = 0 \quad \text{vtedy a len vtedy, ak } x=0 :$$

$$\langle x, x \rangle_S = \langle Sx, Sx \rangle = 0 \quad \dots \text{len ak } Sx=0 \dots \text{ponorom INJEKTIVITY nime, že so platí len ak } x=0$$

$\langle x, y \rangle_S$ Aeda je skalárny súčin na V

⑤

- a) VLASTNÉ HODNOTY lineárnej transformácie sú čísla-skalár, ktorým keď vynásobíme VLASTNÝ VEKTOR, dostaneme rovnaký výsledok (nový vektor) ako pri násobení matricou.

lineárnej transformácie:

vlastnosť (číslo) faktorom

lineárna transformácia

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A \quad \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

vlastná hodnota

vlastný vektor

b)

\mathbb{R}^{∞} , pravami: riešky postupnosti $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ reálnych čísel

$$L(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) = L(a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$$

Je L lineárna transformácia?

$$\textcircled{1} \quad L((a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_1, b_2, b_3, \dots)) = L(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots) = (a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_1, b_2, b_3, \dots) \quad \text{OK}$$

$$\textcircled{2} \quad (a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_1, b_2, b_3, b_4, \dots) = L(a_1, a_2, a_3, \dots) + L(b_1, b_2, b_3, b_4, \dots) \quad \checkmark$$

$$\textcircled{3} \quad L(\lambda \cdot (a_1, a_2, a_3, \dots)) = L(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \dots) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \dots) = \lambda \cdot (a_1, a_2, a_3, \dots) \quad \text{OK}$$

$$\textcircled{4} \quad L \cdot L(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) \quad \checkmark$$

ALEXANDER FILIP

WIT SĘ MIESIA
Macierz robozrenia

rozwiąż równanie liniowe, iloczynu i ilorazu jasnej postaci maturalnej

$L(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_2, a_3, a_4, \dots)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & \vdots & \ddots & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Macierz $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 1 \\ \dots & & & 0 & 0 \end{bmatrix}$ = niekończysta określona jednostek NAD diagonalon

$$|L - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & -\lambda & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^n = 0 \quad \text{jeśli } \lambda = 0 \quad i \rightarrow \infty$$

(...0, ..., 0, 0, 0) = (...0, ..., 0, 0, 0)

JEDNA VLASTNÁ HODNOTA

$$\boxed{\lambda = 0}$$

$$\ker(L - 0 \cdot I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad a_1 = 0, \quad a_i = 0, \quad i \in [2, \infty[$$

JEDINÝ VLASTNÝ VEKTOR:
 $\vec{n} = \{(0, 0, 0, \dots); \alpha \in \mathbb{R}\}$