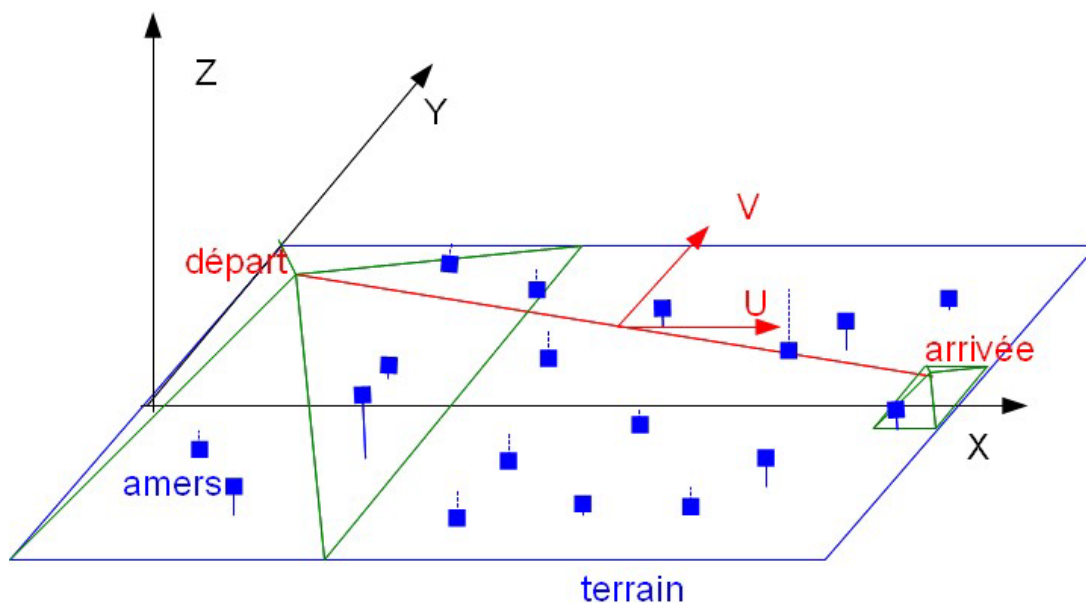


# BE Estimation Filtrage : Navigation absolue, visuelle et inertielle

Jean-Baptiste VIDAUD  
Raphaël ATLAN



# Sommaire

|                                    |    |
|------------------------------------|----|
| Introduction.....                  | 03 |
| I.  Modèle de mesure.....          | 03 |
| II. Initialisation du filtre.....  | 04 |
| III. Intégration de dynamique..... | 06 |
| IV. Recalage statique.....         | 11 |
| V.  Théorie.....                   | 13 |
| VI. Filtre.....                    | 13 |
| VII. Evaluation.....               | 14 |
| Conclusion.....                    | 15 |

## Introduction

L'objectif de ce bureau d'étude est d'estimer la position d'un engin spatial atterrissant sur une planète à partir d'une centrale inertielle et d'une caméra. Nous disposons d'une carte de l'environnement où l'engin évolue sur laquelle sont placés des repères fixes de coordonnées connues (les amers). A l'aide des données d'accélération de l'engin fournies par la centrale inertielle, nous allons mettre en place un filtre permettant de connaître la position et l'altitude de l'engin à chaque instant.

### I. Modèle de mesure

On suppose que l'angle d'ouverture de la caméra est de  $90^\circ$  et que l'engin (de coordonnées  $X, Y$  et  $Z$  dans le plan réel) prend une image de  $1024 \times 1024$  pixels sur laquelle se trouve un amer (de coordonnées  $X_A, Y_A$  et  $Z_A$  dans le plan réel). Les coordonnées de l'amer dans l'image  $A$  sont  $U_A$  et  $V_A$ , par rapport à l'axe de la caméra. On en déduit le schéma suivant :

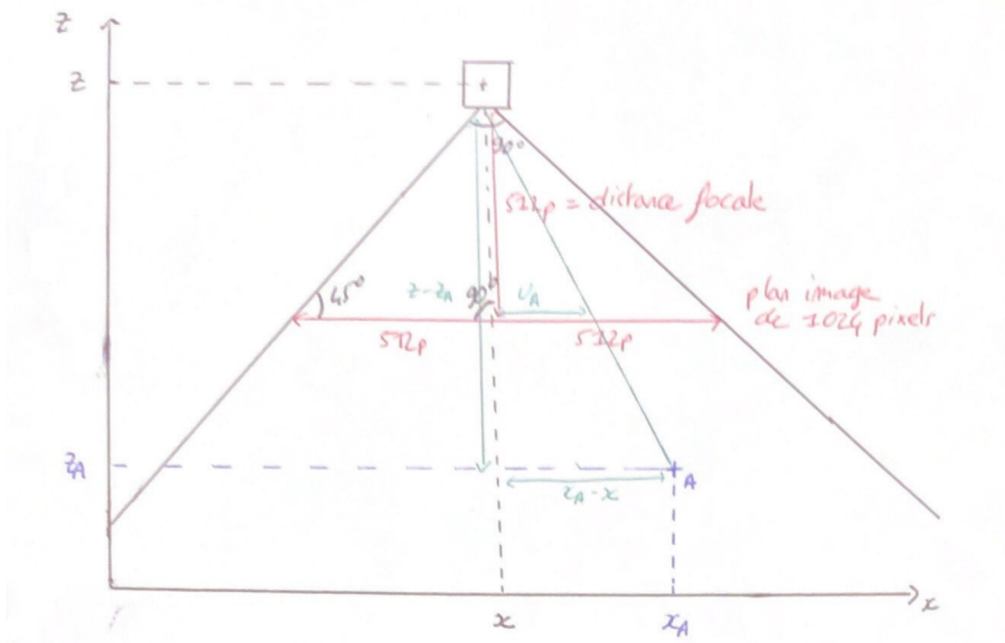


Figure 1 : Schéma du dispositif

On applique le théorème de Thalès afin de déterminer les relations entre les différentes coordonnées et on obtient :

$$U_A = 512 * \frac{X_A - X}{Z - Z_A}$$
$$V_A = 512 * \frac{Y_A - Y}{Z - Z_A}$$

Il faut prendre en compte l'incertitude sur la mesure de la position de l'amer, qui est de 3 pixels. On peut interpréter cette incertitude comme un écart type sur les mesures égale à  $3\sigma_U$  ou  $3\sigma_V$ . On obtient donc les relations suivantes :

$$U_A = 512 * \frac{X_A - X}{Z - Z_A} + 3\sigma_U$$

$$V_A = 512 * \frac{Y_A - Y}{Z - Z_A} + 3\sigma_V$$

## II. Initialisation du filtre

En supposant que le bruit sur la position de l'amer dans le plan image est nul, on cherche à obtenir les coordonnées x,y et z grâce à un couple de deux amers. On considère deux amers A et B, grâce aux équations précédentes, on obtient un système à 4 équations avec 3 inconnues :

$$U_A = 512 * \frac{X_A - X}{Z - Z_A}$$

$$V_A = 512 * \frac{Y_A - Y}{Z - Z_A}$$

$$U_B = 512 * \frac{X_B - X}{Z - Z_B}$$

$$V_B = 512 * \frac{Y_B - Y}{Z - Z_B}$$

On isole x, y et z et on obtient :

$$Z = \frac{512(Y_A - Y_B) + U_A Z_A - U_B Z_B}{V_A - V_B}$$

$$Z = \frac{512(X_A - X_B) + U_A Z_A - U_B Z_B}{U_A - U_B}$$

$$X = \frac{512X_A + U_A(Z_A - Z)}{512}$$

$$Y = \frac{512Y_A + V_A(Z_A - Z)}{512}$$

Il est important de garder les deux équations définissant Z, car l'annulation du dénominateur est possible si les deux amers ont des coordonnées images égales selon une des deux directions. Il faut donc utiliser l'une ou l'autre selon le cas.

On cherche maintenant à construire une estimation de la moyenne et de la matrice de covariance de la position de l'engin. Le but étant d'initialiser le filtre, l'image utilisée est "image000". On détermine le nombre N de couples de amers possible présents sur l'image. Soit n le nombre de amers présents sur l'image, on obtient :

$$N = \sum_{k=1}^n k$$

On obtient ensuite la moyenne de chaque coordonnées :

$$m_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$m_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

$$m_z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i$$

On obtient ainsi le vecteur moyenne  $M_x = [m_x \ m_y \ m_z]$ .

On peut maintenant calculer la matrice de covariance :

$$covariance = \begin{bmatrix} cov_{xx} & cov_{xy} & cov_{xz} \\ cov_{xy} & cov_{yy} & cov_{yz} \\ cov_{xz} & cov_{yz} & cov_{zz} \end{bmatrix}$$

avec :

$$cov_{xx} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - m_x)^2$$

$$cov_{xy} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - m_x) * (y_i - m_y)$$

On considère maintenant une vitesse initiale  $v_0 = 100$  m/s selon l'axe X avec un écart type  $\sigma^2 = 2$  m/s selon les 3 axes. De même que précédemment, on construit une estimation de la moyenne et de la matrice de covariance de la vitesse. En considérant qu'il n'y a aucune corrélation entre les trois composantes, on a cette fois :

$$M_v = [v_0 \ 0 \ 0]$$

$$cov_{vit} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

On construit maintenant l'estimation de la moyenne et de la matrice de covariance des biais en considérant un écart-type des biais  $\sigma_b^2 = 0.2$  m/s. En considérant qu'il n'y a aucune corrélation entre les trois composantes, on a alors :

$$M_b = [0 \ 0 \ 0]$$

$$cov_{bi\grave{a}is} = \begin{pmatrix} 0,2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2^2 \end{pmatrix}$$

On peut alors initialiser le filtre sur Matlab en utilisant les résultats obtenus.

### III. Intégration de dynamique

On cherche à caractériser l'évolution de la moyenne et la matrice de covariance de l'état entre deux mesures. On note le vecteur d'état  $Y = [X V b]^t$ , avec  $X = [x y z]^t$ ,  $V = [v_x v_y v_z]^t$  et  $b = [b_x b_y b_z]^t$ . La centrale à inertie mesure les trois composantes de l'accélération non gravitationnelle de l'engin. Il faut donc rajouter à celle-ci l'accélération gravitationnelle de la Lune  $g$  égale à  $1.622 \text{ m/s}^2$  sur l'axe  $z$ . Cette mesure étant soumise à des biais de mesure  $b$  et un bruit de moyenne nulle  $u_a$ , on a donc :

$$a_{\text{mesurée}} + u_a = a - g + b$$

On cherche à mettre les équations sous la forme  $Y' = AY + Be + U$ :

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} V \\ a \\ u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ a_{\text{mesurée}} + g - b + u_a \\ u_b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & -I_d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A Y + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I_d \\ 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{(a_{\text{mesurée}} + g)}_e + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ u_a \\ u_b \end{bmatrix}}_U$$

Afin d'implémenter ces équations sur Matlab, nous devons tout d'abord les discréditer. Nous réalisons donc un échantillonnage de période  $\Delta = 0.01\text{s}$  qui est la période d'échantillonnage des mesures de l'accélération. On obtient donc :

$$Y_{k+1} = Y(t_{k+1}) = Y(t_k + \Delta) \approx Y(t_k) + A * Y(t_k) * \Delta + B * e(t_k) * \Delta + u_k$$

On obtient donc ainsi au temps  $k+1$ , en notant  $M$  le vecteur moyenne  $[M_x M_v M_b]^t$ :

$$M_{k+1} = (I_d + A * \Delta) * M_k + B * \Delta * (a_{\text{mesurée } k} + g)$$

Ainsi que la matrice de covariance de l'état entre deux mesures donnée par :

$$COV_{k+1} = (I_d + A * \Delta) * COV_k * (I_d + A * \Delta)^t + U_\Delta$$

avec  $U_\Delta = \frac{U}{\Delta}$  la variance du bruit Gaussien de l'accéléromètre dont la moyenne est nulle,  $U$  la puissance égale à  $2 * 10^{-5} (\text{m/s}^2)^2$ , ainsi que :

$$COV = \begin{bmatrix} \text{covariance} & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & \text{cov}_{vir} & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & \text{cov}_{bias} \end{bmatrix}$$



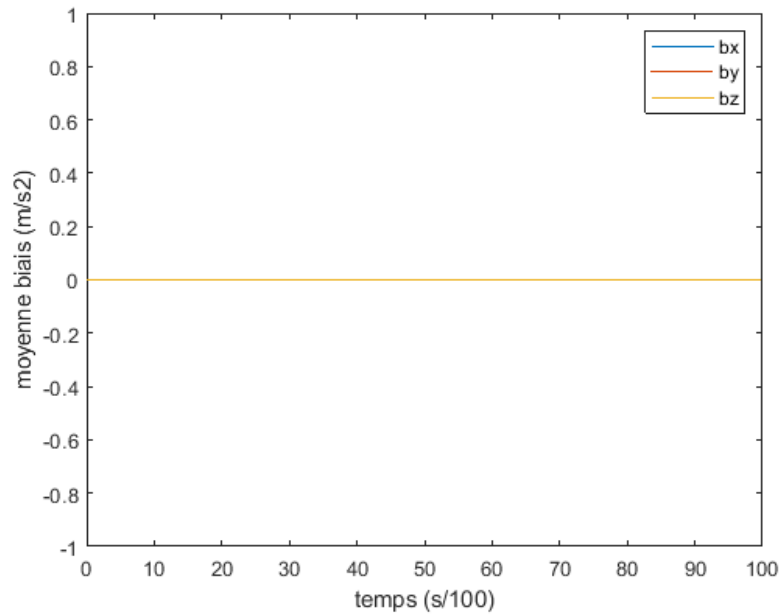


Figure 4 : Evolution de la moyenne du biais selon les 3 axes en fonction du temps

Par soucis d'échelle nous traçons aussi séparément l'évolution de la moyenne de la position selon z en fonction du temps, pour mieux percevoir son évolution :

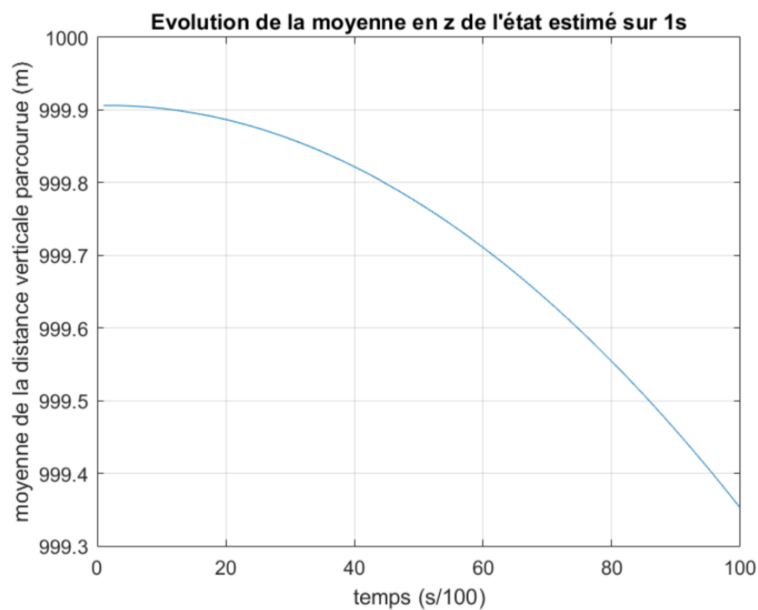


Figure 5 : Evolution de la moyenne de la position selon z en fonction du temps

On observe sur la Figure 2 qu'en une seconde la position de l'engin spatial varie d'environ 100 mètres selon l'axe x. En effet, d'après l'énoncé, l'engin possède une vitesse de 100 m/s suivant cet axe. Son altitude (position selon l'axe z) diminue à cause de l'attraction lunaire (cf Figure 5) et l'engin reste quasiment stable sur l'axe y (cf Figure 2).



Pour la covariance :

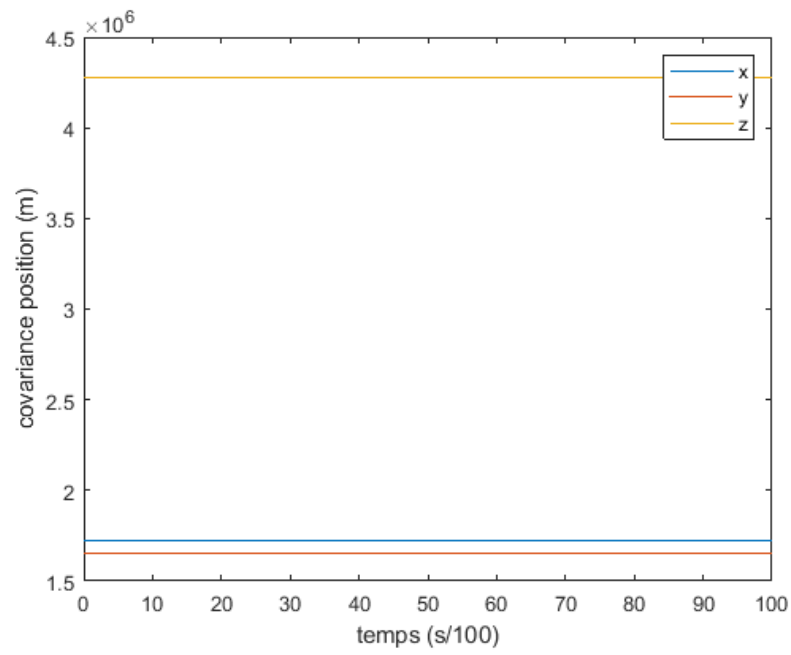


Figure 6 : Evolution de la covariance de la position selon les 3 axes en fonction du temps

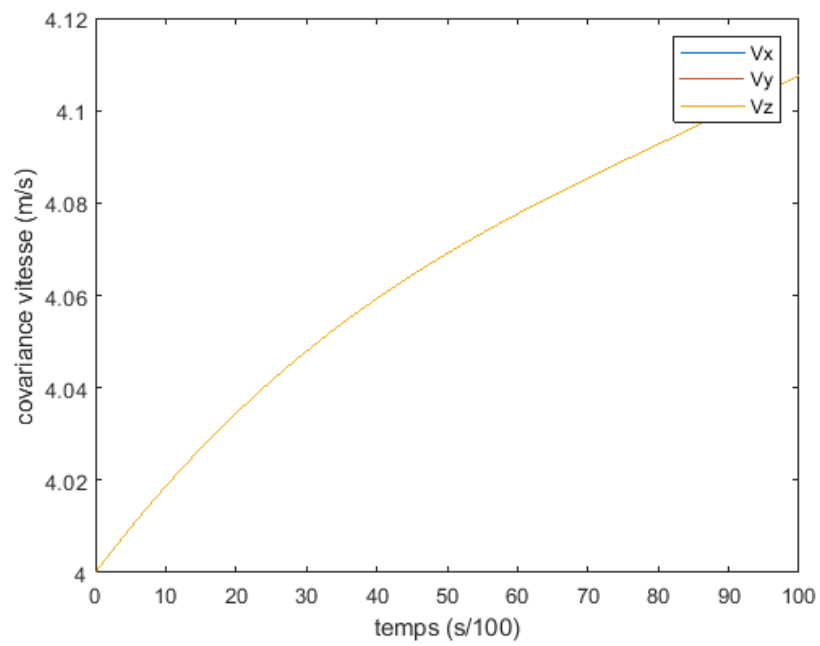


Figure 7 : Evolution de la covariance de la vitesse selon les 3 axes en fonction du temps

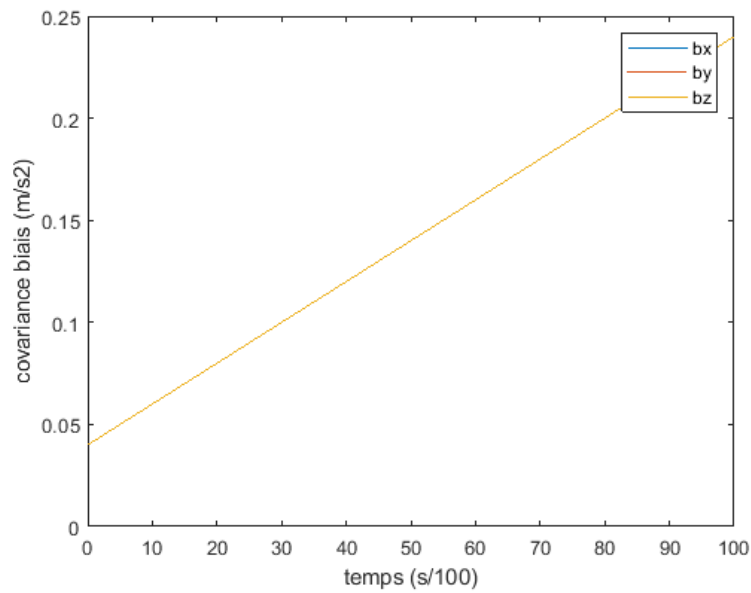


Figure 8 : Evolution de la covariance du biais selon les 3 axes en fonction du temps

Ici aussi, par soucis d'échelle nous traçons aussi séparément l'évolution de la covariance de la position selon y en fonction du temps, pour mieux percevoir son évolution :

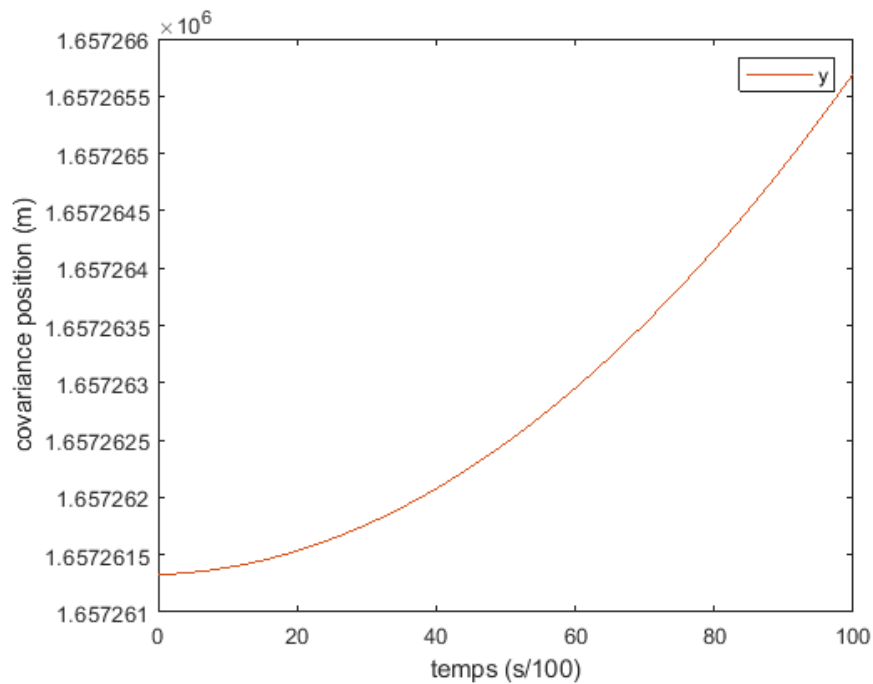


Figure 9 : Evolution de la covariance de la position selon y en fonction du temps

On peut observer ici que les prédictions sur les vitesses et les biais d'accélération semblent conformes aux mesures. En effet, on observe une faible covariance image de la dispersion des prédictions. Cependant, la covariance sur les prédictions des positions est très élevée. Les mesures de l'accéléromètre semblent donc insuffisantes pour estimer convenablement la position de l'engin. Afin d'améliorer cela, nous effectuons une correction en utilisant les mesures provenant de la caméra.

## IV. Recalage statique

Pour une image donnée, on va maintenant effectuer un recalage de l'estimation de la moyenne et de la covariance d'un état constitué de la position, de la vitesse et des biais d'accélération. L'objectif de ce recalage est de corriger l'erreur en prédiction de la position grâce aux mesures de la caméra.

On note  $s_k$  les vraies mesures,  $\sigma_k$  les mesures prédites,  $y_k$  l'estimation des positions après correction et  $K_k$  un gain donnant la valeur la plus vraisemblable de l'état. On a alors :

$$y_k = z_k + K_k(s_k - \sigma_k)$$

Soit  $s_k = f(X_k, X_{amers})$  la fonction retournant  $(U_{amers}, V_{amers})$ , coordonnées dans le plan image à partir des coordonnées réelles de la position de l'engin  $X_k$  et des coordonnées des amers  $X_{amers}$ . On a alors :

$$\sigma_k = f(Z_k, X_{amers})$$

Donc :

$$s_k = f(X_k, X_{amers}) = f(Z_k + (X_k - Z_k), X_{amers})$$

et par approximation linéaire :

$$s_k \approx f(Z_k, X_{amers}) + \left( \frac{\partial f(X, X_{amers})}{\partial X} \right)_{X=Z_k} * (X_k - Z_k)$$

La dérivée partielle est notée  $C(Z_k)$  et son expression est pour les 3 axes :

$$C(Z_k) = \begin{pmatrix} -\frac{512}{z_k - z_a} & 0 & -\frac{512(x_a - x_k)}{(z_k - z_a)^2} \\ 0 & -\frac{512}{z_k - z_a} & -\frac{512(y_a - y_k)}{(z_k - z_a)^2} \end{pmatrix}$$

Ainsi, l'écart entre les vraies mesures  $s_k$  et les mesures prédites  $\sigma_k$  devient donc :

$$s_k - \sigma_k = C(Z_k) * (X_k - Z_k) + v_k$$

avec  $v_k$  le vecteur des biais de mesures sur les amers, de puissance  $V$  (de trois pixels).

On a alors :

$$K_k = cov_{Xk} * C^T(Z_k) * (C(Z_k) * cov_{Xk} * C^T(Z_k) + V)^{-1}$$

La nouvelle covariance d'erreur sur les positions devient après recalage :

$$cov'_{Xk} = (I_d - K_k C(Z_k)) * cov_{Xk}$$

Montrons un exemple de recalage en observant sur une seconde la moyenne de position avant recalage, la moyenne de position après recalage, l'erreur de position des amers dans l'image avant recalage et l'erreur de position des amers dans l'image après recalage. Puis nous observons de même pour la covariance.

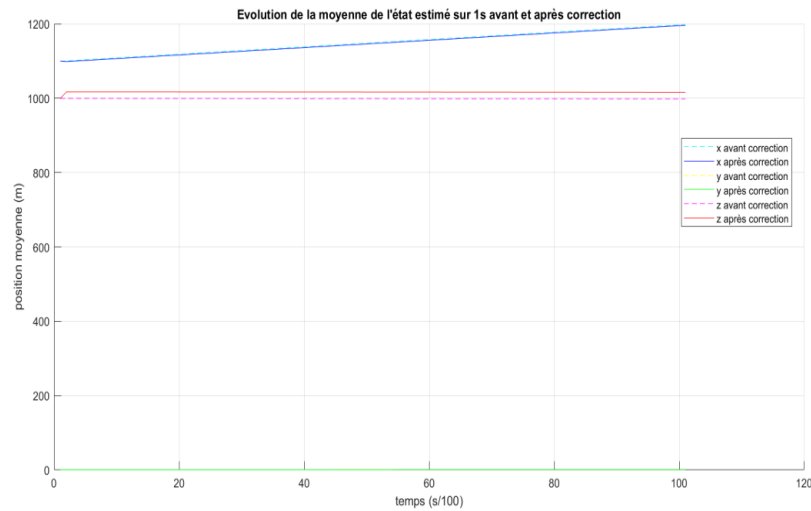


Figure 10 : Evolution de la moyenne de l'état estimé avant et après correction en fonction du temps

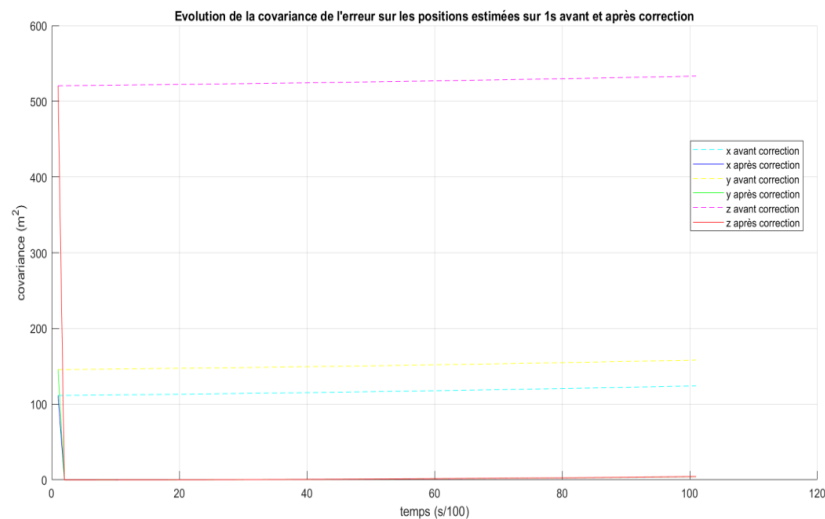


Figure 11 : Evolution de la covariance de l'erreur sur les positions estimées avant et après correction en fonction du temps

On peut observer sur ces courbes une nette amélioration de la covariance de l'erreur sur les positions après correction sur les 3 axes, surtout sur z. Le recalage statique est donc satisfaisant.

On peut chercher à estimer l'erreur de position des amers dans le plan image avant le recalage et après le recalage. Pour cela, nous traçons pour chaque amer l'erreur quadratique :

$$\sqrt{(U_a - \overline{U_a})^2 + (V_a - \overline{V_a})^2}$$

Nous n'avons malheureusement pas réussi à tracer cette courbe supplémentaire, par manque de temps. Mais celle-ci aurait été intéressante à exploiter.

## V. Théorie

L'objectif est maintenant de mettre en place un filtre de Kalman. Pour cela, on donne tout d'abord un modèle de filtre de Kalman pour lequel la dynamique est intégrée avec une période d'échantillonnage plus faible que l'acquisition des mesures. On fera l'hypothèse que la période d'acquisition des mesures est un nombre entier de fois la période d'intégration.

Un tel filtre permet d'estimer les états du système dynamique grâce aux mesures précédentes. Il faut donc en quelque sorte généraliser le recalage statique pour chaque nouvelle image disponible.

Le processus à temps discret est donné ci-dessous :

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A_{\Delta} x_k + B_{\Delta} e_k + u_k \text{ avec } u_k \sim N(0, U_{\Delta}) \\s_k - \sigma_k &\approx C(z_k) * (x_k - z_k) + v_k \text{ avec } v_k \sim N(0, U_{\Delta})\end{aligned}$$

On a alors la prédiction de l'état  $x_{k+1}$  qui est donnée par :

$$\begin{aligned}z_{k+1} &= A_{\Delta} y_k + B_{\Delta} e_k \\cov_{Xk+1} &= A_{\Delta} cov_{Xk} A_{\Delta}^T + U_{\Delta}\end{aligned}$$

Puis la correction de cet état donnée par :

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= z_{k+1} + K_{k+1}(s_{k+1} - \sigma_{k+1}) \\cov_{Xk+1} &= (I_d - K_{k+1}C(z_{k+1}))Y_{k+1} \\K_{k+1} &= cov_{Xk+1}C^T(z_{k+1}) * (C(z_{k+1})cov_{Xk+1}C^T(z_{k+1}) + V)^{-1}\end{aligned}$$

avec  $K$  le gain de Kalman et  $V$  la matrice de covariance de la mesure de position des amers dans le plan image :

$$V = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

avec  $\sigma = 1$  car la mesure est réalisée à trois pixels près ( $3\sigma = 3$ )

## VI. Filtre

A partir des résultats développés dans la partie précédente, de l'intégration dynamique et du recalage statique, nous mettons en place un filtre de Kalman traitant le problème de navigation. L'initialisation de celui-ci se fait grâce à l'image 0 à partir de laquelle, en estimant les positions, les vitesses, et les biais d'accélération par rapport aux amers, nous pouvons exprimer les matrices des moyennes et des covariances. Ces deux matrices évoluent image par image : on estime tout d'abord l'état par rapport à la première image puis on intègre la dynamique afin d'estimer l'état de l'engin sur une plage de 1s. Puis, on considère l'image suivante afin de réaliser le recalage statique puis de la même manière la dynamique sera intégrée pour estimer l'état de l'engin sur la seconde suivante et ainsi de suite.

## VII. Evaluation

On exécute ensuite ce filtre mis en place sur les données de 0 à 100 secondes, et on trace l'évolution de l'estimation des moyennes de la position, de la vitesse et des biais, ainsi que quelques éléments importants de la matrice de covariance.

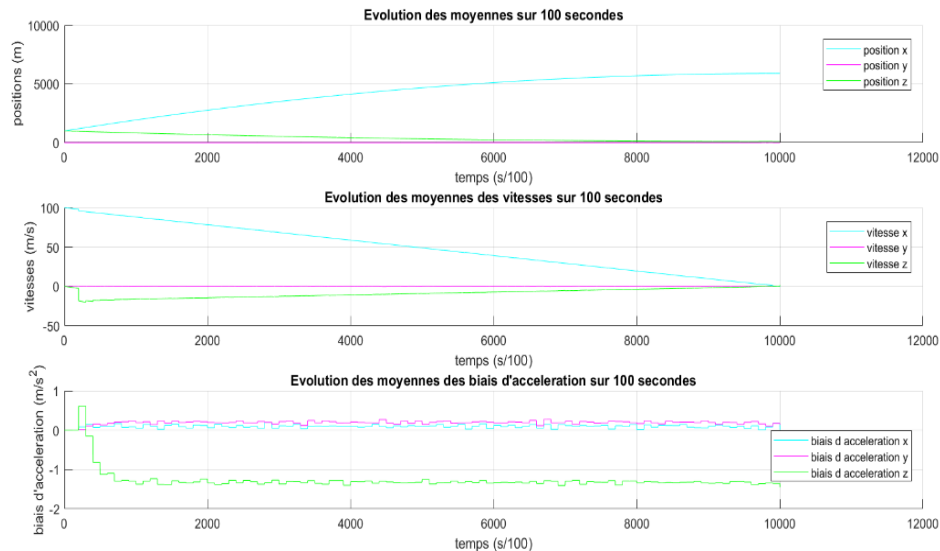


Figure 12 : Evolution des moyennes des positions, des vitesses et des biais en fonction du temps sur 100 secondes

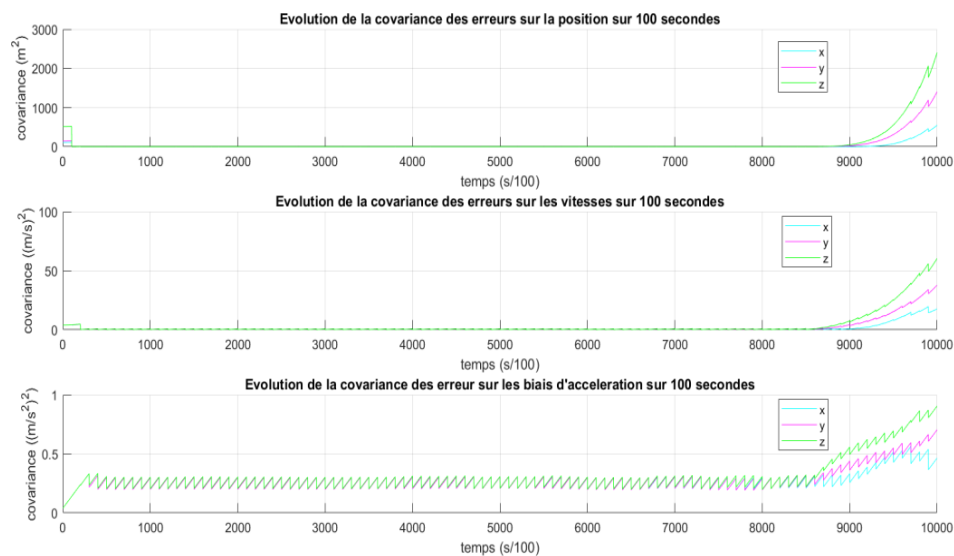


Figure 13 : Evolution de la covariance de l'erreur des positions, des vitesses et des biais en fonction du temps sur 100 secondes

On peut observer sur ces différentes courbes que le comportement attendu est vérifié au niveau des positions et des vitesses finales. L'effet du recalage à chaque nouvelle image est visible en zoomant sur les courbes de position par exemple. On observe aussi une augmentation des covariances due à la préparation de l'atterrissage réalisée par l'engin spatial : en effet, celui-ci descend (vitesse négative selon l'axe z) et freine brusquement, ce qui crée une forte variation de vitesse et d'accélération, faussant les données et ainsi augmentant les covariances des erreurs.

## Conclusion

Ce Bureau d'Étude a permis de mettre en place un filtre de Kalman complexe, prenant en compte des mesures de deux sources différentes, permettant d'estimer l'état et les covariances d'un système dynamique et lui aussi complexe. Nous avons pu, grâce à celui-ci obtenir une estimation fidèle de la position du satellite. La manipulation d'un tel filtre est importante car celui-ci est très présent dans l'industrie.