



RAPPORT BE

Estimation et filtrage

Navigation absolue, visuelle et inertielle

Maxime Balança / Emilie Spagnolo

29/09/2023

Table des matières

1. Introduction.....	2
2. Modèle de mesure.....	2
3. Initialisation du filtre.....	3
4. Intégration de dynamique.....	5
5. Recalage statique.....	7
6. Filtre de Kalman.....	8
7. Conclusion.....	10

1. Introduction

Dans ce bureau d'étude, nous allons explorer l'utilisation combinée d'une centrale à inertie et d'une caméra pour assurer la navigation absolue d'un engin atterrissant sur une planète, un phénomène pour lequel les techniques de navigation telles que le gps sont insuffisantes.

Nous nous appuyerons sur une carte détaillée de la région concernée. Cette carte répertorie de manière exacte les coordonnées de points distinctifs, détectés via des procédés de traitement d'image et baptisés "amers".

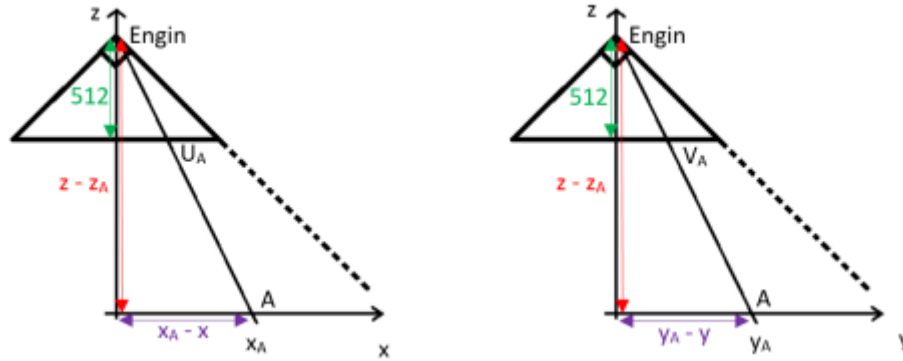
On considère que la centrale à inertie fournit des mesures des composantes du vecteur de vitesse angulaire de l'engin ainsi que des trois composantes de son accélération non gravitationnelle. Quant à la caméra, elle permet d'identifier les amers présents dans son champ de vision, de calculer leurs coordonnées dans le plan image, puis d'associer chaque point de ce plan à l'amer correspondant.

Au cœur de ce schéma de navigation absolue, notre objectif est de mettre en place un système de filtrage permettant de fournir en continu la position de l'engin. Ce système s'appuie sur les mesures de la centrale à inertie ainsi que sur les coordonnées réelles et planimétriques des points détectés dans le champ de vision de la caméra.

2. Modèle de mesure

Dans un premier temps, on souhaite construire le modèle de mesure en établissant les relations liant l'engin et une amer ainsi que l'image de l'amer dans le plan de la camera. On suppose que l'angle d'ouverture est de 90° .

Le problème se présente selon les plans (X,Z) et (Y,Z) comme suit:



On peut alors écrire les relations suivantes :

$$\frac{x_A - x}{z - z_A} = \frac{U_A}{512}$$

$$\frac{y_A - y}{z - z_A} = \frac{V_A}{512}$$

Nous avons donc un système de 2 équations à 3 inconnues. Pour pallier ce problème, il faut s'intéresser à une deuxième amer B de laquelle on déduit les équations suivantes de manière analogue à l'amer A.

$$\frac{x_B - x}{z - z_B} = \frac{U_B}{512}$$

$$\frac{y_B - y}{z - z_B} = \frac{V_B}{512}$$

On obtient ainsi 2 expressions pour Z:

$$Z = \frac{512(x_A - x_B) + z_A U_A - z_B U_B}{U_A - U_B} \text{ si } U_A \neq U_B$$

$$Z = \frac{512(y_A - y_B) + z_A V_A - z_B V_B}{V_A - V_B} \text{ si } V_A \neq V_B$$

3. Initialisation du filtre

On souhaite à présent déduire une estimée de la position de l'engin en considérant tous les couples d'amer possibles. On suppose qu'il n'y a pas de bruit sur la position de l'amer dans le plan image.

```
for i=1:n-1
    ida=image(1,i);
    ua=image(2,i);
    va=image(3,i);
    xa=carte(1,ida);
    ya=carte(2,ida);
    za=carte(3,ida);
    for j=i+1:n
        idb=image(1,j);
        ub=image(2,j);
        vb=image(3,j);
        xb=carte(1,idb);
        yb=carte(2,idb);
        zb=carte(3,idb);

        if (ua~=ub)
            z=(512*(xa-xb)-ub*zb+za*ua)/(ua-ub);
        else % (va~=vb)
            z=(512*(ya-yb)-vb*zb+za*va)/(va-vb);
        end

        x=xa-ua*(z-za)/512;
        y=ya-va*(z-za)/512;
        mx=mx+x;
        my=my+y;
        mz=mz+z;
    end
end
mx=mx/tot;
my=my/tot;
mz=mz/tot;
m=[mx my mz]
```

En utilisant les équations établies dans le modèle pour chaque couple d'amer, on trouve une estimée de moyenne de la position de l'engin $X=(x,y,z)$

$$m_X = [m_x \ m_y \ m_z] = 10^3 \cdot [1.0011 \ 0.0009 \ 0.9999]$$

Une fois que cette moyenne a été trouvée, on calcule la covariance de manière analogue.

```
cx=cx+(x-mx)^2;
cy=cy+(y-my)^2;
cz=cz+(z-mz)^2;
cxy=cxy+(x-mx)*(y-my);
cyz=cyz+(y-my)*(z-mz);
czx=czx+(x-mx)*(z-mz);
end
end

%covariance
cx=cx/tot;
cy=cy/tot;
cz=cz/tot;
cxy=cxy/tot;
cyz=cyz/tot;
czx=czx/tot;
c=[cx cxy czx; cxy cy cyz; czx cyz cz]
```

On obtient alors

$$Cov_X = \begin{bmatrix} C_x & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{yx} & C_y & C_{yz} \\ C_{zx} & C_{zy} & C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 107.4015 & -5.1357 & -4.2251 \\ -5.1357 & 132.2098 & 12.2286 \\ -4.2251 & 12.2286 & 516.5836 \end{bmatrix}$$

On s'intéresse désormais à la vitesse de l'engin.

La vitesse initiale étant de 100 m/s suivant l'axe X avec un écart-type de 2m/s sur chaque axe, on peut construire une estimée de la moyenne et de la matrice de covariance de la vitesse comme suit.

$$V_{\text{moy}} = [100 \ 0 \ 0]$$

$$Cov_V = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

De même, sachant que l'écart type des biais est de 0.2 m/s², on a

$$B_{\text{moy}} = [0 \ 0 \ 0]$$

$$Cov_B = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04 \end{bmatrix}$$

4. Intégration de dynamique

Dans cette partie on souhaite caractériser l'évolution de la moyenne et de la matrice de covariance entre deux mesures.

En prenant le vecteur d'état $X = [x, y, z, Vx, Vy, Vz, bx, by, bz]^T$ il vient

$$\dot{X} = [V_x, V_y, V_z, a_x, a_y, a_z, U_{bx}, U_{by}, U_{bz}]$$

Or, on peut noter que l'accélération s'exprime de la manière suivante :

$$a_{\text{mes}} = \begin{bmatrix} a_{x\text{mes}} \\ a_{y\text{mes}} \\ a_{z\text{mes}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bx \\ by \\ bz \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{ax} \\ U_{ay} \\ U_{az} \end{bmatrix}$$

Ainsi on peut écrire l'équation $\dot{X} = A.X + B.e + u$

$$\text{avec } A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} a_{x\text{mes}} \\ a_{y\text{mes}} \\ a_{z\text{mes}} - g \end{bmatrix}$$

$$\text{et } u = [0 \ 0 \ 0 \ -U_{ax} \ -U_{ay} \ -U_{az} \ U_{bx} \ U_{by} \ U_{bz}]^T$$

Enfin, avec l'équation $X_{k+1} = X(t_{k+1}) = X(t_k + \Delta)$ où $\Delta=0.01s$, on trouve
 $\langle X_{k+1} \rangle = A_\Delta \cdot \langle X_k \rangle + B_\Delta \cdot e$
 où $A_\Delta = I + A \cdot \Delta$ et $B_\Delta = B \cdot \Delta$

Ceci nous permet donc d'obtenir l'évolution des moyennes.

Pour ce qui est de l'évolution de la matrice de covariance, on peut calculer grâce aux moyennes trouvées $Cov_k = E((X_k - \langle X_k \rangle) \cdot (X_k - \langle X_k \rangle)^T)$, soit

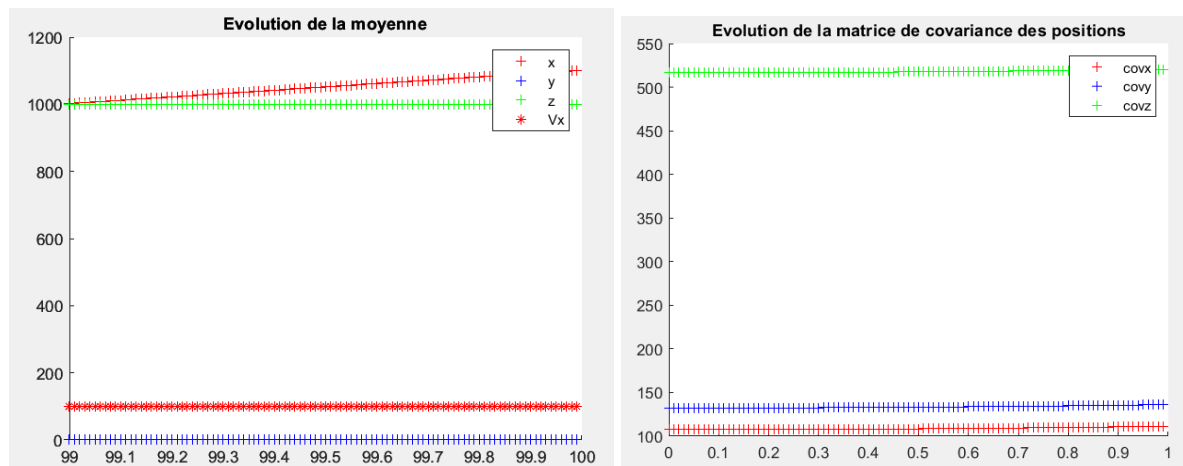
$$Cov_{k+1} = A_\Delta Cov_k A_\Delta^T + \frac{U_k}{\Delta} \text{ où } U \text{ est la puissance du bruit.}$$

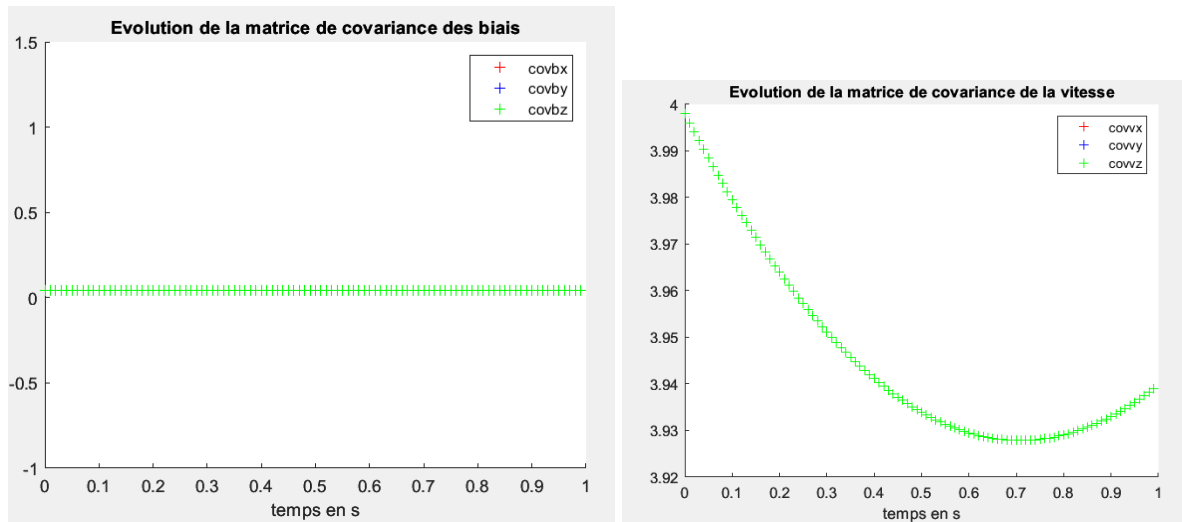
```
if(k ~= 100)
    figure
    hold on;
    X=[x y z Vmoy Bmoy]';
    U=[0;0;0;-2e-5;-2e-5;-2e-5;0;0;0]/delta;
    P=[c zeros(3) zeros(3); zeros(3) Cv zeros(3); zeros(3) zeros(3) Cb];
    for l=0:1:99
        e=measure_accelero(100*k+1+1,2:4)' - [0; 0; 1.622];
        Ad=delta*[zeros(3) eye(3) zeros(3); zeros(3) zeros(3) -eye(3); zeros(3) zeros(3) zeros(3)]+eye(9);
        Bd=delta*[zeros(3); eye(3) ; zeros(3)];

        X=Ad*X+Bd*e;

        P=Ad*P*Ad'+U;
    end
```

On peut alors tracer ces évolutions sur une seconde.





Nous observons alors que l'estimée de x s'éloigne de sa valeur initiale, nous corrigerons cela dans la partie suivante à l'aide d'une correction apportée par le filtre de Kalman. De plus, notons que les composantes n'apparaissant pas dans la légende sont de moyennes nulles et ne sont ici pas affichées. Pour ce qui est des covariances, celles-ci n'évoluent pas excepté pour la covariance de la vitesse.

5. Recalage statique

Pour effectuer le recalage statique de l'estimée de la moyenne, on utilise la formule

$$m_{X/s} = m_X + \Phi_{XX} C^T (C \Phi_{XX} C^T + \langle VV^T \rangle)^{-1} (s - m_s).$$

Afin de trouver C, il faut dériver la mesure S pour des raisons que nous détaillerons dans la partie suivante.

$$S_k = \begin{pmatrix} U_A k \\ V_A k \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n k \\ V_n k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{512(x_k - x_A)}{z_A - z_k} \\ \frac{512(y_k - y_A)}{z_A - z_k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{512(x_k - x_n)}{z_n - z_k} \\ \frac{512(y_k - y_n)}{z_n - z_k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_A \\ V_A \\ \cdot \\ \cdot \\ V_n \\ V_n \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne avec

$$C(Z_k) = \begin{pmatrix} \frac{512}{z_{moy}-z_A} & 0 & \frac{512(x_A-x_{moy})}{(z_{moy}-z_A)^2} \\ 0 & \frac{512}{z_{moy}-z_A} & \frac{512(y_A-y_{moy})}{(z_{moy}-z_A)^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{512}{z_{moy}-z_n} & 0 & \frac{512(x_n-x_{moy})}{(z_{moy}-z_n)^2} \\ 0 & \frac{512}{z_{moy}-z_n} & \frac{512(y_n-y_{moy})}{(z_{moy}-z_n)^2} \end{pmatrix}$$

V représente quant à lui le bruit de mesure que l'on considère de moyenne nulle et de covariance tel que $3\sigma = 3\text{pixels}$ soit $\sigma = 1$.

On implémente donc le code suivant sur matlab

```
s=[];
ms=[]
C=[];
V=eye(2*n);
for i=1:n
    Xi=carte(1,image(1,i));
    Yi=carte(2,image(1,i));
    Zi=carte(3,image(1,i));

    s= [s; image(2:3, i)];
    ms=[ms; 512*(Xi-mx)/(mz-Zi); 512*(Yi-my)/(mz-Zi)]
    C=[C; 512/(mz-Zi) 0 512*(Xi-mx)/((mz-Zi)^2); 0 512/(mz-Zi) 512*(Yi-my)/((mz-Zi)^2)];
end
mrecal=m'+c*C'*inv(C*c*C'+V)*(s-ms)
```

Ainsi, avec une moyenne avant recalage $m = 10^3.[1.0011 \ 0.0009 \ 0.9999]$, on obtient la moyenne après recalage $m_{\text{reca}}=10^3.[0.9021 \ 0.0008 \ 1.0181]$.

6. Filtre de Kalman

Dans cette partie, nous souhaitons estimer les états d'un système dynamique à partir de mesures bruitées tout en apportant une correction suite à l'estimation. Pour cela, nous allons utiliser un filtre de Kalman discret, dont on prendra la période d'échantillonnage plus faible que l'acquisition des mesures telle que $T_{\text{acq}}=n.T_{\text{filtre}}$.

Nous avons vu que notre système peut être décrit par les equations:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= A_{\Delta}.X_k + B_{\Delta}.e + U_{\Delta} \\ S_k &= f(X_k) + V_k \end{aligned}$$

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 521 \frac{x_k - x_1}{z_1 - z_k} \\ 521 \frac{y_k - y_1}{z_1 - z_k} \\ \dots \\ 521 \frac{x_k - x_{500}}{z_{500} - z_k} \\ 521 \frac{y_k - y_{500}}{z_{500} - z_k} \end{pmatrix}$$

où f est une fonction non linéaire telle que

Nous allons donc linéariser cette fonction autour de sa moyenne. On peut alors écrire

$$S = f(X_0) + \frac{df}{dX}(X)(X - X_0) + V$$

En posant $C = \frac{df}{dX}(X)$ on retrouve l'expression donnée dans la partie précédente et on

peut alors écrire $S_k = C.X_k + V_k$

Nous pouvons alors écrire les expressions du filtre de Kalman pour

- la prédiction :

$$z_{k+1} = A_k y_k + B_k e_k$$

$$Y_{k+1} = A_k P_k A_k^T + U_k$$

- la correction :

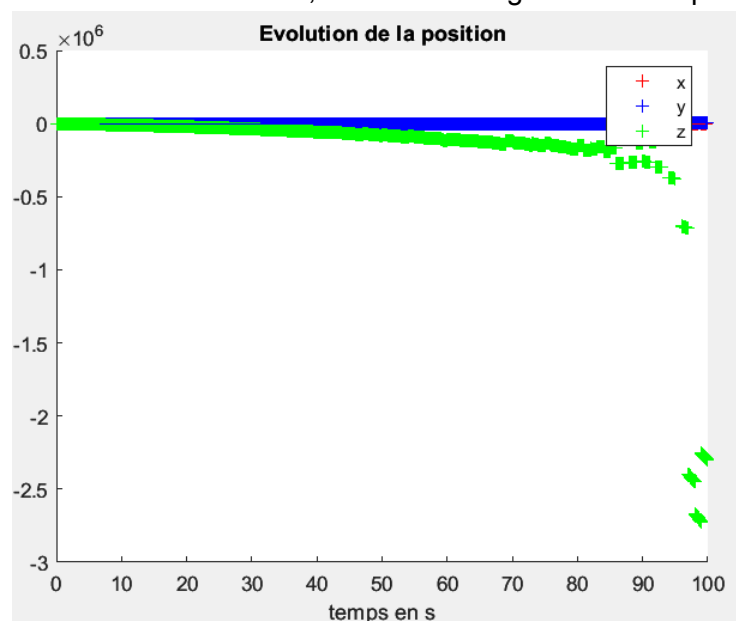
$$y_{k+1} = z_{k+1} + K_{k+1}(s_{k+1} - C_{k+1}z_{k+1})$$

$$P_{k+1} = (I - K_{k+1}C_{k+1})Y_{k+1}$$

$$K_{k+1} = Y_{k+1}C_{k+1}^T (C_{k+1}Y_{k+1}C_{k+1}^T + V_{k+1})^{-1}$$

De cette façon, chaque nouvelle image traitée est utilisée pour calculer la prédiction de la valeur de X . Ensuite, le filtre de Kalman est utilisé pour corriger cette prédiction, fournissant ainsi une nouvelle valeur estimée de l'état du système avant l'arrivée de la prochaine image. Ce processus se répète toutes les secondes pour mettre à jour et raffiner continuellement l'estimation de l'état du système en fonction des nouvelles informations provenant des images traitées.

Ainsi en implémentant le filtre sur matlab, on obtient la figure suivante pour l'évolution des positions.



Malheureusement, nous n'obtenons pas les trajectoires désirées mais nous n'avons pas réussi à résoudre ce problème, provenant peut-être d'une erreur dans la linéarisation qui donne l'expression de C .

7. Conclusion

Ce bureau d'étude a été une exploration fascinante de l'application du filtre de Kalman pour résoudre un problème de navigation absolue. Bien que notre intention fût de déterminer la trajectoire d'un engin, il est regrettable de constater que le filtre de Kalman n'a pas produit les résultats escomptés.

Malgré nos efforts pour évaluer et prédire la position de l'engin en utilisant les mesures bruitées, le recalage nécessaire pour le guidage vers l'endroit prévu n'a pas été atteint avec la précision attendue. Cette expérience souligne la complexité inhérente à l'utilisation de ces méthodes d'estimation notamment pour des cas impliquant de la non linéarité.

En somme, bien que les résultats n'aient pas été conformes à nos attentes, cette expérience nous a dotés d'un apprentissage précieux, mettant en lumière les défis et les aspects à améliorer pour une utilisation du filtre de Kalman dans des scénarios de navigation absolue.