# Теоретико-информационный анализ нейронных сетей
# &
# Оптимальные разбиения множеств на части меньшего диаметра

Александр Толмачев

Московский физико-технический институт, Сколковский институт науки и технологий

Научные руководители: Алексей Фролов / Андрей Райгородский

16 декабря 2023 г.

# Постановка задачи

## Information Bottleneck

Теоретико-информациооный анализ предлагает оценивать динамику двух значений взаимной информации в нейронных сетях: между входом и скрытым слоем, и между скрытым слоем и истинной меткой класса.

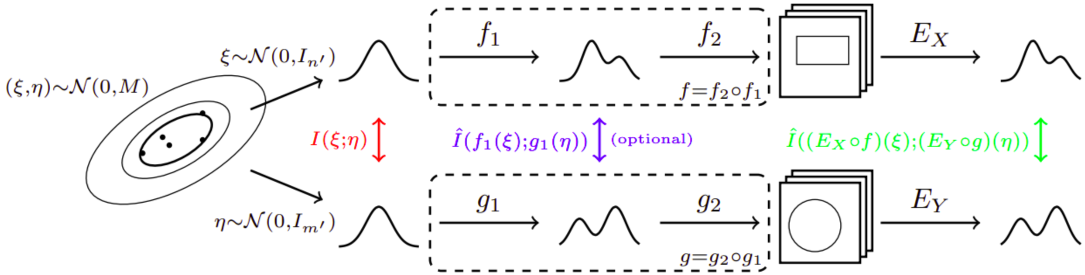
## Проблема

Взаимная информация между многомерными случайными величинами трудно оценивать, поэтому предлагаемые ранее гипотезы об упомянутых выше величинах были проверены либо на маленьких “игрушечных“ сетях, либо на нейронных сетях опреденного вида.

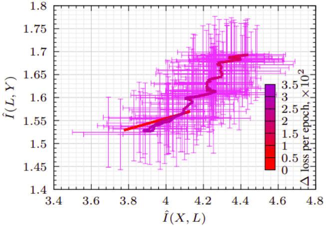
## Предлагаемое решение

В нашем подходе предлагается оценивать взаимную информацию по **сжатым** представлениям, которые получены с помощью обученных автоэнкодеров.

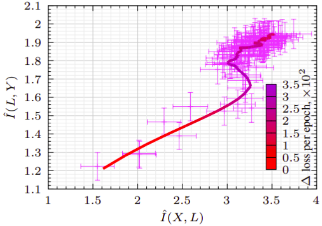
# Краткое описание алгоритма для синтетических данных



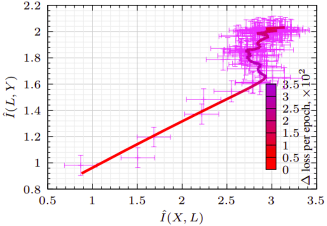
# Результаты анализа обучени CNN-классификатора на датасете MNSIT



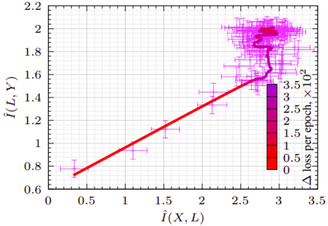

(a) $L_2$ (convolutional, LeakyReLU)




(b) $L_3$ (convolutional, LeakyReLU)




(c) $L_4$ (fully-connected, LeakyReLU)




(d) $L_5$ (fully-connected, LogSoftMax)

Спасибо за внимание! Однако, это еще не всё...

# Разбиения множеств на плоскости

## Определение 1

Пусть $F$ — произвольное ограниченное множество на плоскости, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$d_n(F) = \inf\{x \in \mathbb{R}^+ : \exists F_1, \dots, F_n : F \subseteq F_1 \cup \dots \cup F_n,\ \forall i \operatorname{diam}(F_i) \leqslant x\}.$$

## Определение 2

Пусть

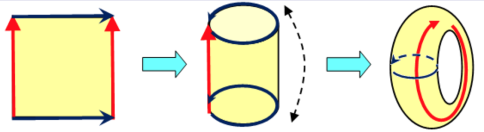
$$d_n = \sup_{\Omega \subset \mathbb{R}^2} d_n(\Omega) = \sup_{\Omega \subset \mathbb{R}^2} \inf \max_{1 \le i \le n} \operatorname{diam} \Omega_i, \quad \operatorname{diam} \Omega = 1.$$

Заметим, что $d_1 = d_2 = 1$ и $d_n \geqslant d_{n+1}$, т.к. одно из множеств разбиения может быть пустым, а также мы можем рассматривать покрытия замкнутыми выпуклыми множествами постоянной ширины 1.

# Разбиения поверхности двумерного тора

## Поверхность двумерного тора

Представим поверхность двумерного тора как факторпространство $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Неформально говоря, это квадрат со стороной 1, пары противоположных сторон которого “склеены“.



## Актуальность задачи

- Разбиение поверхности тора является естественным обобщением известной задачи по разбиениям плоских множеств
- Изучение структуры близких к оптимальным разбиений поверхности тора позволит заметить новые закономерности и улучшить оценки для разбиения множеств пространствах большей размерности
- Отдельно отметим, что такая задача рассматривается **впервые** в данной работе

# Основной алгоритм

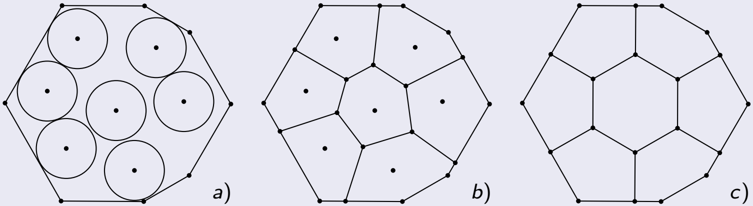
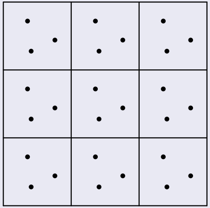
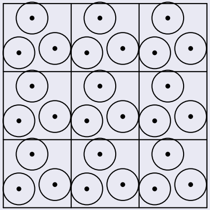


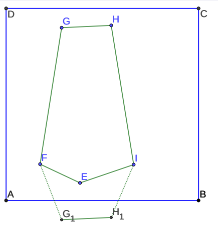

Рис.: Грубое приближение в задаче плотной упаковки кругов (a), диаграмма Вороного (b) и окончательное разбиение (c)

# Адаптация алгоритма для тора

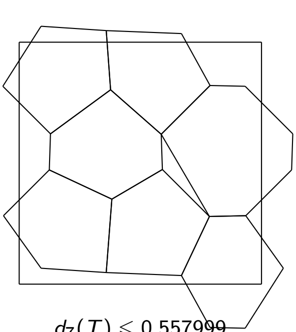
1. Множество $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ является квадратом $3 \times 3$
2. Каждая точка присутствует в 9 экземплярах в каждом квадратике
3. При обновлении текущего оптимума $X^* := X_1$ дополнительно проверяем что данное разбиение "корректно"



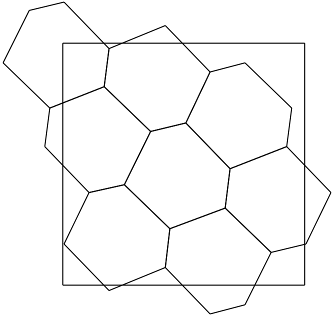




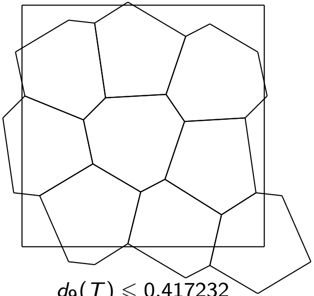
# Разбиение множеств на торе. Верхние оценки



$d_7(T) \leqslant 0.557999$



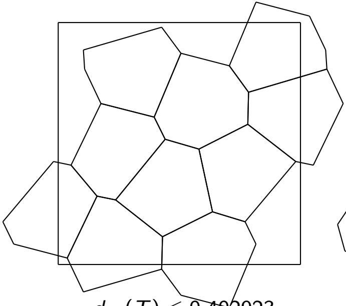
$d_8(T) \leqslant 0.441957$



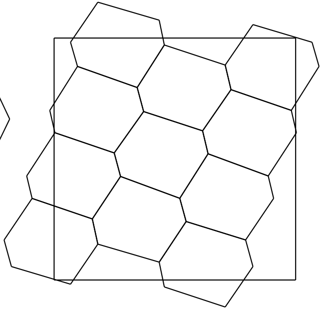
$d_9(T) \leqslant 0.417232$

Рис.: Разбиение тора на $7, 8, 9$ частей

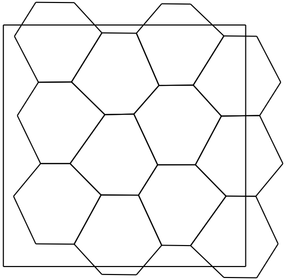
# Разбиение множеств на торе. Верхние оценки



$d_{10}(T) \leqslant 0.402923$



$d_{11}(T) \leqslant 0.388553$



$d_{12}(T) \leqslant 0.361210$

Рис.: Разбиение тора на $10, 11, 12$ частей

БУДЕТ ДОПОЛНЕНО ДО 16 ДЕКАБРЯ...

# Спасибо за внимание!