

Лабораторные работы 1.3.1 и 1.3.2

Старстин Александр, Б01-401

March 1, 2025

Определение модуля Юнга на основе исследования деформации растяжения. Определение модуля кручения.

1 Аннотация

Цель работы: Экспериментально получить зависимость между напряжением и деформацией для одностороннего растяжения; по результатам эксперимента вычислить модуль Юнга.

В работе используются: Прибор Лермантова, проволока из исследуемого материала, зрительная трубка со шкалой, набор грузов, микрометр, рулетка или линейка. Проволока из исследуемого материала, грузы, секундомер, микрометр, рулетка, линейка.

2 Определение модуля Юнга по измерению растяжения проволоки

2.1 Теоретические сведения

Связь между удлинением проволоки Δl и силой P , вызывающей это удлинение, выражается законом Гука:

$$\frac{P}{S} = E \frac{\Delta l}{l} \quad (1)$$

где l - начальная длина проволоки, S - её сечение, E - константа, характеризующая упругие свойства материала (модуль Юнга).

Опыт проводится на приборе Лермантова (рис. прибора см. ниже).

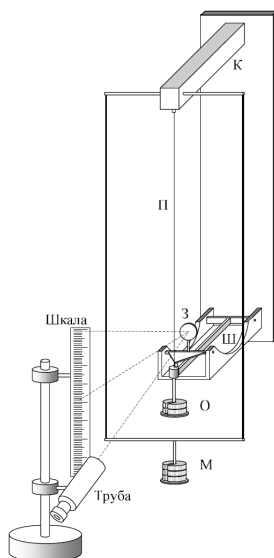


Рисунок 1: Прибор Лермантова

2.2 Ход работы

2.2.1 Подготовка прибора Лермантова

Зрительная труба на приборе Лермантова была направлена на зеркальце 3 так, что в неё было чётко видно отражение шкалы на зеркальце.

Формула, связывающая отсчёт по шкале n , расстояние от шкалы до зеркала h , длину рычага r и удлинение проволоки Δl :

$$\Delta l = \Delta n \frac{r}{2h} \quad (2)$$

Значения r и h в опыте:

r , мм	h_1 , см	h_2 , см	$\langle h \rangle$, см	σ_h , мм
15	1445	1445	1445	1

Таблица 1: Таблица измерений размеров утановки.

$$\sigma_r = 1 \text{ мм.}$$

$$\sigma_h = 0,1 \text{ см.}$$

2.2.2 Сечение проволоки

Сечение проволоки диаметром d вычисляется по формуле:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} \quad (3)$$

Велечина диаметра проволоки составляет: $d = 0.46 \pm 0.01$ мм.

Сечение проволоки составляет: $S = 0.17$ мм².

Погрешность сечения: $\sigma_S = 2S \frac{\sigma_d}{d} = 0.01$ мм².

2.2.3 Длина проволоки

l_1 , см	l_2 , см	$\langle l \rangle$, см	σ_l , см
177	177	177	0.1

Таблица 2: Таблица измерений длины проволоки.

2.2.4 Оценка величины максимальной нагрузки

Во время выполнения работы рабочее напряжение σ было < 265 Н/мм² (см таблицу с расчётом механического напряжения). Значит в течение всей работы напряжение не превышало максимальную нагрузку на проволоку.

2.2.5 Основные измерения

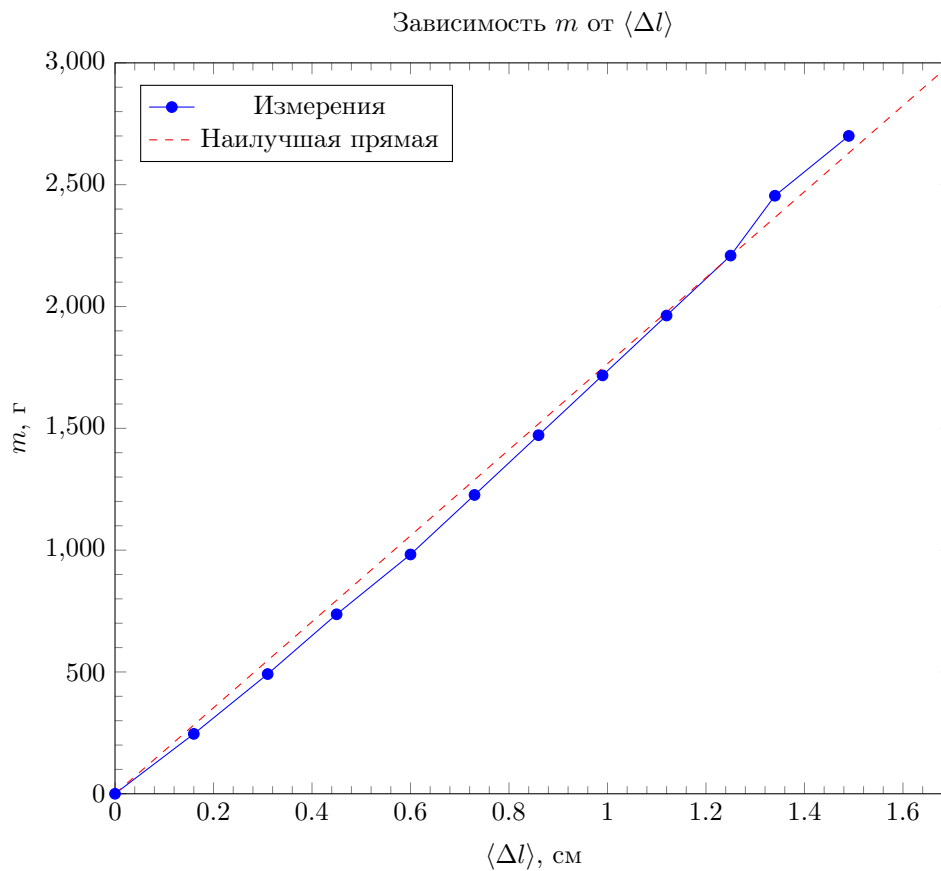
	m , г	P , Н	σ , Н/мм ²	->	<-	->	<-	$\langle \Delta n \rangle$, см	$\langle \Delta l \rangle$, мм	$E * 10^{11}$, Па
1	0	0	0	18,0	18,0	18,0	18,0	0	0	-
2	245,8	2,4	14,0	21,1	21,1	21,1	21,0	3,1	0,16	1,562
3	491,4	4,8	28,2	24,0	24,0	24,0	23,9	6,0	0,31	1,612
4	736,7	7,2	42,4	26,7	26,6	26,7	26,6	8,7	0,45	1,666
5	982,2	9,6	56,5	29,4	29,3	29,4	29,3	11,4	0,60	1,666
6	1226,5	12,0	70,6	32,0	31,9	31,9	32,0	14,0	0,73	1,712
7	1471,8	14,4	84,7	34,5	34,5	34,5	34,5	16,5	0,86	1,743
8	1717,3	16,8	98,8	36,9	37,1	37,0	37,1	19,0	0,99	1,767
9	1962,9	19,2	113,0	39,6	39,3	39,6	39,6	21,5	1,12	1,785
10	2209,0	21,6	127,1	42,0	41,6	42,0	42,2	24,0	1,25	1,799
11	2454,6	24,0	141,2	44,4	43,9	44,3	44,3	26,2	1,34	1,865
12	2700,2	26,5	155,9	47,0	47,0	46,6	46,6	28,8	1,49	1,852

Таблица 3: Таблица основных измерений

Среднее $\langle E \rangle = 1,730 * 10^{11}$ Па.

2.2.6 График

Построим график зависимости нагрузки $m()$ от удлинения проволоки $\langle \Delta l \rangle()$. Найдём уравнение получившейся прямой по МНК. По наклону прямой определим модуль Юнга.



Расчёт по МНК:

$$k = \frac{\langle m \langle \Delta l \rangle \rangle}{\langle (\Delta l)^2 \rangle} = 1765,3 \text{ г/мм.}$$

Расчёт модуля юнга через график: $E = k * \frac{g * \langle l \rangle}{S} = 1,801 * 10^{11}$ Па.

2.2.7 Погрешность измерения модуля юнга.

Случайной погрешностью в данном можно пренебречь, тк она мала. Тогда, будем учитывать приборную погрешность:

Масса: $\sigma_m = 0,03$ г и $\bar{m} = 1349,87$ г.

Сечение: $\sigma_S = 0,01$ мм² и $\bar{S} = 0,17$ мм².

Длина: $\sigma_l = 0,1$ см и $\bar{l} = 177,0$ см.

Удлинение: $\sigma_{\Delta l} = 0,05$ мм и $\bar{\Delta l} = 0,78$ мм.

$$\sigma_{\Delta l} = \bar{\Delta l} * \sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta l}}{\bar{\Delta l}}\right)^2} = 0,05 \text{ мм.}$$

$$\text{Погрешность } \bar{E}: \sigma_E = E * \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{\bar{m}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_S}{\bar{S}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{\bar{l}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta l}}{\bar{\Delta l}}\right)^2} = 0,15 * 10^{11} \text{ Па.}$$

Тогда результат измерений Модуля Юнга: $E = (1,73 \pm 0,15) * 10^{11}$ Па.

3 Измерение модуля кручения и модуля сдвига динамическим способом

Цель работы: Измерение углов закручивания в зависимости от приложенного момента сил, определение модулей кручения и сдвига для проволоки по измерениям периодов крутильных колебаний подвешенного на ней маятника.

В работе используются: Проволка из исследуемого материала, грузы, секундомер, микрометр, рулетка, линейка.

3.1 Теоретические сведения

Модуль кручения f связан с модулем сдвига G соотношением:

$$G = \frac{2l}{\pi R^4} f \quad (4)$$

где R - радиус крутящегося цилиндра.

Период колебаний системы связан с расстоянием r от оси вращения до грузов и моментом инерции стержня I_0 следующим образом:

$$T^2 = (2\pi)^2 \frac{I}{f} = (2\pi)^2 \frac{I_0}{f} + (2\pi)^2 \frac{(m_1 + m_2)}{f} r^2 \quad (5)$$

Эта зависимость верна для незатухающих колебаний. Из неё, найдя f , получим G .

Схема установки:

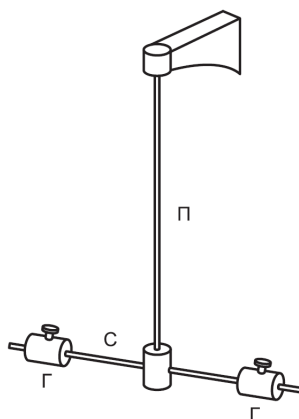


Рисунок 2: Крутильная установка.

3.2 Ход работы

3.2.1 Проверка того, что при разных амплитудах периоды крутильных колебаний одинаковые.

$\varphi, ^\circ$	Время $t, \text{с}$	Количество колебаний N	Период $T, \text{с}$
15	72,07	20	3.64
15	72,07	20	3.64
25	72,07	20	3.64
25	72,04	20	3.62

Таблица 4: Таблица измерений периодов при разных амплитудах

Все периоды можно считать равными. Значит, при разных амплитудах периоды колебаний одинаковые и, следовательно, период колебаний не зависит от начальной амплитуды.

3.2.2 Проверка того, что колебания можно считать незатухающими.

Измерим амплитуду колебаний в начале колебаний и через 50 периодов:

Количество прошедших колебаний N	φ , °
1	15
50	12,5

Таблица 5: Таблица измерений амплитуды колебаний

Спустя 50 колебаний амплитуда колебаний изменилась в $\frac{15}{12,5} = 1,2$ раза. Тк амплитуда за 50 колебаний уменьшается меньше, чем в два раза ($1,2 < 2$), то колебания можно считать не затухающими.

3.2.3 Измерение модуля кручения и вычисление модуля сдвига.

Установим грузы на одинаковом расстоянии r от оси вращения проволоки до центра масс каждого груза. Меняя r , будем считать для каждого случая период колебаний:

r , см	$T1$, с	$T2$, с	\bar{T} , с
12,0	3,60	3,60	3,60
13,0	3,82	3,82	3,82
14,0	4,05	4,05	4,05
15,0	4,31	4,31	4,31
16,0	4,54	4,54	4,54
17,0	4,79	4,79	4,79
18,0	5,02	5,02	5,02

Таблица 6: Таблица измерений периодов колебаний при разных r

Из формулы (5) видно, что T^2 зависит линейно от r^2 . Значит, зная массы грузов, можно найти из графика зависимости угловой коэффициента наклона прямой и из него найти модуль кручения.

Массы грузов:

$m1$, г	$m2$, г	$m1 + m2$, г
202,5	204,9	407,4

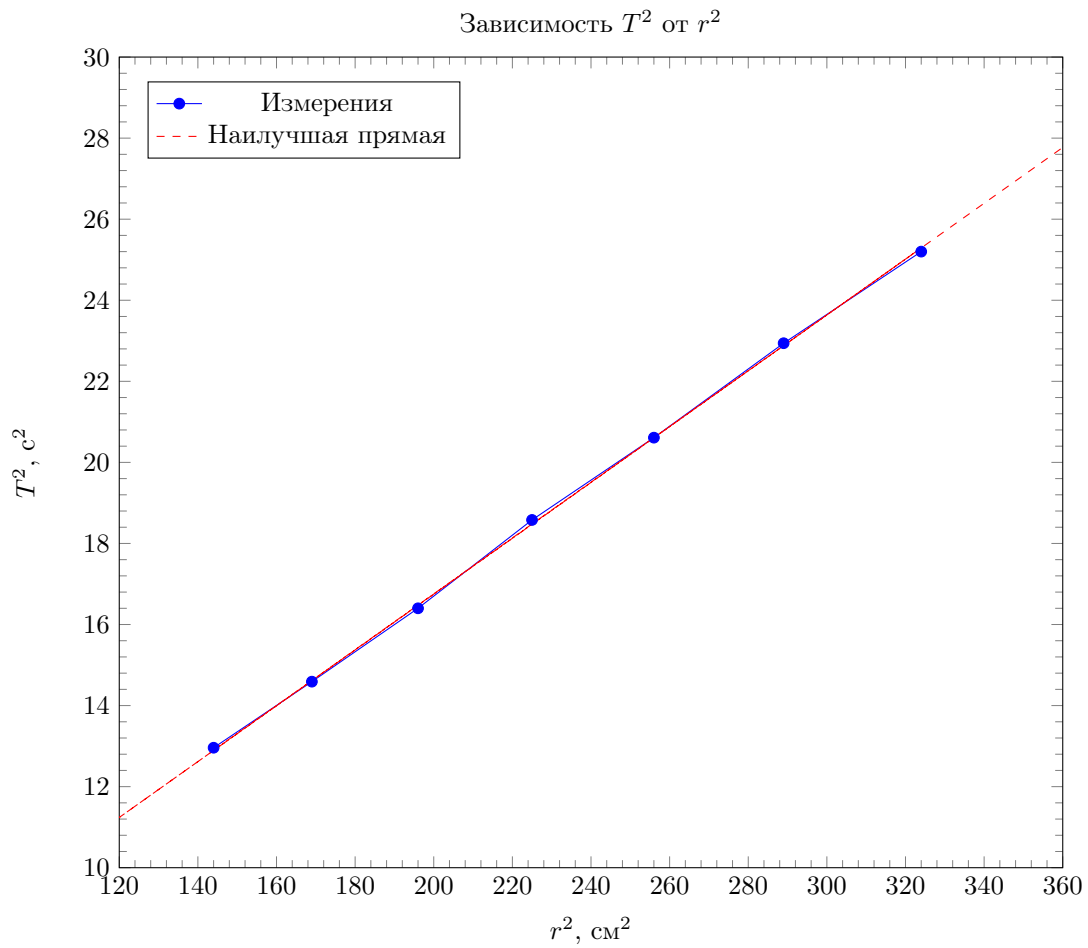
Таблица 7: Таблица измерений масс грузов

Точки для графика:

r , см ²	T^2 , с ²
144,0	12,96
169,0	14,59
196,0	16,40
225,0	18,58
256,0	20,61
289,0	22,94
324,0	25,20

Таблица 8: Таблица измерений масс грузов

Построим график и наилучшую прямую для него по МНК:



Расчёты по МНК:

$$a = \frac{\langle T^2 r^2 \rangle - \langle T^2 \rangle \langle r^2 \rangle}{\langle r^4 \rangle - (\langle r^2 \rangle)^2} = 0,068868 \text{ с}^2 / \text{см}^2 = 688,68 \text{ с}^2 / \text{м}^2$$

$$b = \langle T^2 \rangle - a * \langle r^2 \rangle = 2,98 \text{ с}^2$$

Наилучшая прямая: $T^2 = a * r^2 + b$

Выразим жёсткость кручения f через a :

$$f = 4\pi^2 * \frac{2(m1 + m2)}{a} \quad (6)$$

Тогда $f = 4,67 * 10^{-2} \text{ Н*м}$.

Найдём длину проволоки:

$l = 173 \text{ см}$.

Найдём диаметр и радиус проволоки:

Номер измерения	d , мм
1	1.56
2	1.55
3	1.56
4	1.57
5	1.55
6	1.55
7	1.56
8	1.57
9	1.56
10	1.56

Таблица 9: Таблица измерений диаметра проволоки

Средний диаметр $\bar{d} = 1,56$ мм.

Средний радиус $\bar{R} = 0,78$ мм.

Тогда по формуле (4) модуль сдвиг: $G = 1,39 * 10^{11}$ Па.

3.2.4 Погрешности.

Случайной погрешностью в данном можно пренебречь, тк она мала. Тогда, будем учитывать приборную погрешность:

Период: $\sigma_T = 0,03$ с.

Расстояние: $\sigma_r = 0,1$ см.

Масса: $\sigma_m = 0,3$ г.

Длина: $\sigma_l = 0,2$ см.

Радиус: $\sigma_R = 0,01$ мм.

Погрешность G: $\sigma_G = G * \sqrt{(\frac{\sigma_m}{m})^2 + (\frac{\sigma_l}{l})^2 + (\frac{\sigma_R}{R})^2} = 0.02 * 10^{11}$ Па.

Тогда результат измерений модуля сдвига: $G = (1,39 \pm 0.02) * 10^{11}$ Па.

4 Вывод

Измерен модуль Юнга с помощью прибора Лермантова; результат измерений не сильно отличается от расчёта модуля Юнга из графика наилучшей прямой; погрешность измерения приемлимая, что говорит о хорошей точности измерений.

Измерены модули кручения и сдвига с помощью крутильных колебаний; погрешность измерения приемлимая, что говорит о хорошей точности измерений.