

## Лабораторная работы 1.4.2

Старостин Александр, Б01-401

9 Ноября, 2024 год

## Определение ускорения свободного падения при помощи оборотного маятника

### 1 Аннотация

**Цель работы:** определить величину ускорения свободного падения, пользуясь оборотным маятником.

**В работе используются:** оборотный маятник, счётчик числа колебаний, секундамер, штангенциркуль с пределом измерений 1 мм.

### 2 Теоретические сведения

Период колебаний физического маятника  $T$  с моментом инерции относительно ос качения  $I$ , массой  $m$  и расстоянием от центра масс до оси качения  $a$ :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}} \quad (1)$$

Пусть положение грузов на оборотном маятнике таково, что периоды колебаний маятника  $T_1$  и  $T_2$  на призмах  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  совпадают:

$$T_1 = T_2 = T = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{mgl_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{mgl_2}} \quad (2)$$

По теореме Гюенса-Штейнера:

$$I_1 = I_0 + ml_1^2, I_2 = I_0 + ml_2^2 \quad (3)$$

Из (2) и (3), исключая  $I_0$  и  $m$ , получим ( $L$  - расстояние между двумя призмами):

$$g = (l_1 + l_2) \frac{4\pi^2}{T^2} = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \quad (4)$$

Это справедливо при различных  $l_1$  и  $l_2$ .

Тк не существует точного равенства  $T_1 = T_2$ , то:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ml_1^2}{mgl_1}}, T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ml_2^2}{mgl_2}} \quad (5)$$

Тогда получаем, что:

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T_0^2} \quad (6)$$

где:

$$T_0^2 = \frac{l_1 T_1^2 - l_2 T_2^2}{l_1 - l_2} \quad (7)$$

Тогда погрешность ускорения свободного падения будет вычислена по формуле:

$$\varepsilon_g = \sqrt{\varepsilon_L^2 + 4\varepsilon_{T_0}^2} \quad (8)$$

где

$$\varepsilon_{T_0} = \frac{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{l_1 - l_2} \sigma_T \frac{1}{T_0} \quad (9)$$

Для того, чтобы измерения и вычисления были точными должно быть верным, что:

$$1,5 < \frac{l_1}{l_2} < 3 \quad (10)$$

## 3 Ход работы

### 3.1 Измерение масс частей установки

Был снят стержень с установки и были измерены его масса вместе с грузами и призмами, масса стержня отдельно, массы грузов и массы призмы. Массы нужны для того, чтобы была возможность теоритически вычислить центр инерции (масс) стержня вместе с грузами и призмами. Результаты измерений приведены в таблице:

Таблица 1: Массы частей установки

Часть установки	Масса, г
Маятник	$4021.4 \pm 0.3$
Стержень	$891.5 \pm 0.3$
Груз 1	$1495.3 \pm 0.3$
Груз 2	$1481.0 \pm 0.3$
Призма 1	$76.6 \pm 0.3$
Призма 2	$77.2 \pm 0.3$

### 3.2 Установка призм на стержень

Призмы были установлены на стержень таким образом, что концы (острия) призм смотрели внутрь стержня и расстояния от концов стержней до ближайшего острия призм составляло  $24 \pm 0.01$  см. Важно, что груз 1 находился между призмами и груз 2 находился между призмой 2 и ближайшем от неё концом стержня.

### 3.3 Измерение расстояния между концами (остриями) призм

С помощью штангенциркуля было измерено расстояние между концами (остриями) призм. Оно составило  $51.40 \pm 0.01$  см.

### 3.4 Теоретическое вычисление расстояний от концов призм до центра инерции маятника

Изменяя положение грузов 1 и 2 на стержне, мы изменяли положение центра инерции маятника. Взяв определённое отношение  $\frac{l_1}{l_2}$  такое, чтобы оно удовлетворяло неравенству (10), мы можем рассчитать значение  $l_1$  и  $l_2$  и проверить эти значения на практике, т.е. проверить, определяют ли эти значения центр инерции маятника. Результаты вычислений приведены в таблице:

Таблица 2: Теоритические значения  $l_1$  и  $l_2$

$\frac{l_1}{l_2}$	$l_1$ , см	$l_2$ , см
1.74	32.64	18.76

### 3.5 Измерение расстояний от концов призм до центра инерции маятника

Установив маятник на т-образную подставку таким образом, чтобы маятник находился в равновесии, мы измерили расстояния от концов призм до точки равновесия маятника. Результаты измерений приведены в процессе:

Таблица 3: Измеренные значения  $l_1$  и  $l_2$

$l_1$ , см	$l_2$ , см	$\frac{l_1}{l_2}$
$32.66 \pm 0.01$	$18.74 \pm 0.01$	1.7428

### 3.6 Измерение периода $T_2$ колебаний маятника, когда сверху груз 2

Поместив маятник на установку 2-ым грузом вверх, мы измеряли периоды колебаний маятника, чтобы определить средний период колебаний. Амплитуда колебаний составляла  $5^\circ$ . Результаты измерений приведены в таблице:

Погрешность периода:  $\sigma_{T_2} = T_2 \frac{\sigma_{t_2}}{t_2}$

Таблица 4: Определение среднего периода  $\overline{T_2}$ 

$N$ - количество колебаний	$t_2$ - время всех колебаний, с	$T_2 = \frac{t_2}{N}$ - период колебаний, с
20	$29.91 \pm 0.03$	$1.4955 \pm 0.0015$
20	$29.90 \pm 0.03$	$1.4950 \pm 0.0015$
20	$29.90 \pm 0.03$	$1.4950 \pm 0.0015$
20	$29.90 \pm 0.03$	$1.4950 \pm 0.0015$

Погрешность вычисления среднего периода:  $\sigma_{\overline{T_2}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (T_{2i} - \overline{T_2})^2}$

Средний период:  $\overline{T_2} = 1.4951 \pm 0.0001$  с.

### 3.7 Измерение периода $T_1$ колебаний маятника, когда сверху груз 1

Поместив маятник на установку 1-ым грузом вверх, мы измеряли периоды колебаний маятника, чтобы определить средний период колебаний. Амплитуда колебаний составляла  $5^\circ$ . Результаты измерений приведены в таблице:

Таблица 5: Определение среднего периода  $\overline{T_1}$ 

$N$ - количество колебаний	$t_1$ - время всех колебаний, с	$T_1 = \frac{t_1}{N}$ - период колебаний, с
20	$29.43 \pm 0.03$	$1.4715 \pm 0.0015$
20	$29.44 \pm 0.03$	$1.4720 \pm 0.0015$
20	$29.43 \pm 0.03$	$1.4715 \pm 0.0015$
20	$29.43 \pm 0.03$	$1.4715 \pm 0.0015$

Погрешность периода:  $\sigma_{T_1} = T_1 \frac{\sigma_{t_1}}{t_1}$

Погрешность вычисления среднего периода:  $\sigma_{\overline{T_1}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (T_{1i} - \overline{T_1})^2}$

Средний период:  $\overline{T_1} = 1.4716 \pm 0.0001$  с.

### 3.8 Оценка различия значений $\overline{T_1}$ и $\overline{T_2}$

Из-за неидеальности условий проведения измерений  $\overline{T_1}$  и  $\overline{T_2}$  не совпадают. Оценим, на сколько они различаются:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\overline{T_2} - \overline{T_1}}{\overline{T_2}} = 0.0157 = 1.57\%$$

Различие между  $\overline{T_1}$  и  $\overline{T_2}$  незначительное, значит измеренные периоды подходят для определения ускорения свободного падения.

### 3.9 Измерения для определения ускорения свободного падения

Чтобы определить ускорения свободного падения, можно повторить действия из пунктов (5) - (9), построить линейный график и определить коэффициент наклона графика, а по нему и ускорение свободного падения.

Из формул (6) и (7) следует:

$$(T_1^2 l_1 - T_2^2 l_2) \frac{g}{4\pi^2} = l_1^2 - l_2^2 \quad (11)$$

Формула (11) является линейной зависимостью, по которой из углового коэффициента можно найти  $g$ .

Измерения нужных нам величин для построения графика приведены в таблице:

Таблица 6: Величины для построения графика

Номер измерения	$T_1, \text{с}$	$T_2, \text{с}$	$l_1, \text{см}$	$l_2, \text{см}$
1	$1.4716 \pm 0.0001$	$1.4951 \pm 0.0001$	$32.66 \pm 0.01$	$18.74 \pm 0.01$
2	$1.4812 \pm 0.0001$	$1.5116 \pm 0.0001$	$31.10 \pm 0.01$	$18.30 \pm 0.01$
3	$1.4907 \pm 0.0001$	$1.5507 \pm 0.0001$	$33.86 \pm 0.01$	$17.54 \pm 0.01$
4	$1.5050 \pm 0.0001$	$1.5682 \pm 0.0001$	$32.81 \pm 0.01$	$18.59 \pm 0.01$
5	$1.5375 \pm 0.0001$	$1.6241 \pm 0.0001$	$34.66 \pm 0.01$	$16.74 \pm 0.01$
6	$1.5348 \pm 0.0001$	$1.6404 \pm 0.0001$	$33.65 \pm 0.01$	$17.75 \pm 0.01$
7	$1.5257 \pm 0.0001$	$1.6173 \pm 0.0001$	$34.48 \pm 0.01$	$16.92 \pm 0.01$
8	$1.5433 \pm 0.0001$	$1.6431 \pm 0.0001$	$34.73 \pm 0.01$	$16.67 \pm 0.01$
9	$1.4898 \pm 0.0001$	$1.5095 \pm 0.0001$	$31.64 \pm 0.01$	$19.76 \pm 0.01$
10	$1.4844 \pm 0.0001$	$1.5115 \pm 0.0001$	$31.97 \pm 0.01$	$19.43 \pm 0.01$

### 3.10 Построение графика для определения по нему ускорения свободного падения

По данным из пункта 3.10 построим график для зависимости из формулы (11):

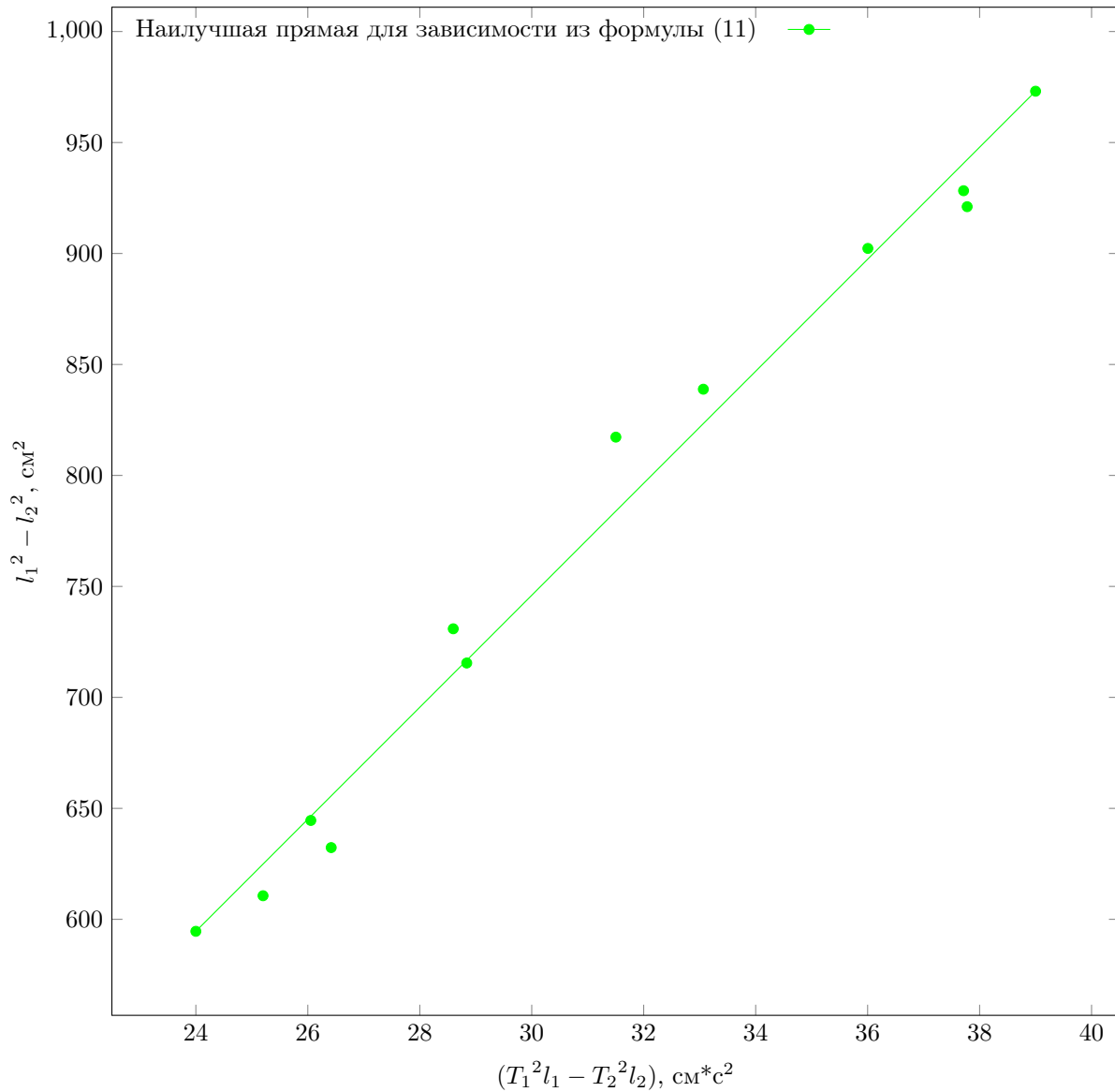


Рисунок 1: Линейная зависимость из формулы (11)

По МНК построим наилучшую прямую  $y = kx + b$  для зависимости из формулы (11):

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = 25.23407, \text{см/с}^2$$

$$b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle = -11.017, \text{см}^2$$

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2} = 1.22299, \text{ см/с}^2$$

### 3.11 Результат измерения ускорения свободного падения

Из коэффициента угла наклона прямой найдём  $g$ :

$$g = 4\pi^2 k = 995.192 \text{ см/с}^2 = 9.95192 \text{ м/с}^2$$

$$\sigma_g = g \frac{\sigma_k}{k} = 48.233 \text{ см/с}^2 = 0.48233 \text{ м/с}^2$$

Тогда ускорение свободного падения составляет:  $g = 9.95192 \pm 0.48233 \text{ м/с}^2$

## 4 Вывод

Мы измерили величину ускорения свободного падения  $g = 9.95192 \pm 0.48233 \text{ м/с}^2$ , используя обратный маятник.