

## Лабораторной работы 1.2.3

Старостин Александр, Б01-401

12 Октября, 2024 год

## 1 Аннотация

**Цель работы:** измерение момента инерции тел и сравнение результатов с расчетами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера.

**В работе используются:** трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор тел, момент инерции которых надлежит измерить (диск, стержень, полный цилиндр и другие).

## 2 Теоретические сведения

Инерционность при вращении тела относительно оси определяется моментом инерции тела относительно этой оси. Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения вычисляется по формуле:

$$I = \int r^2 dm \quad (1)$$

где  $r$  - расстояние от оси вращения до любой материальной точки тела  $dm$  - масса любой материальной точки.

Для тел сложной формы можно посчитать момент инерции с помощью трифилярного подвеса:

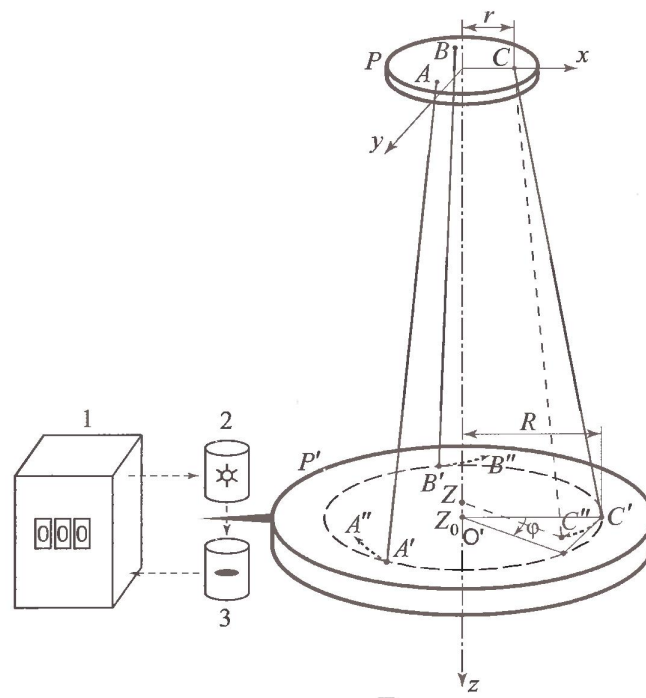


Рисунок 1: Трифилярный подвес

С помощью него создаются крутильные колебания. Если считать их незатухающими, то из решения уравнения колебания получаем для системы - тело и подвижная платформа:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I z_0}{mgRr}} \quad (2)$$

и

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0} \quad (3)$$

где  $I$  - момент инерции системы,  $m$  - суммарная масса системы,  $R$  - радиус подвижной платформы,  $r$  - радиус неподвижной платформы,  $T$  - период вращательных колебаний,  $z_0$  - Расстояние между центрами платформ до начала колебаний.

Тк для одного и того же подвеса  $R$ ,  $r$  и  $z_0$  постоянные, то:

$$I = kmT^2 \quad (4)$$

где  $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} = const$

Таким образом, момент инерции тела будет равен разности момента инерции системы и момента инерции подвижной платформы.

В ходе работы нужно будет проверить закон аддитивности для моментов инерции и теорему Гюгенса-Штейнера.

Закон аддитивности:

Момент инерции сложного тела равен сумме моментов инерции всех частей тела, из которых оно состоит. Чтобы это проверить, посчитаем моменты инерции для кастрюли, крышки и их соединения. Сравнив сумму первых двух с третьем, увидим, что закон аддитивности верен.

Теорема Гюгенса-Штейнера:

Момент инерции относительно произвольной оси равен сумме момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр тела, и произведение массы тела на квадрат расстояния между ними.

$$I = I_0 + m * a^2 \quad (5)$$

Из формул (3) и (4) получаем, что  $T^2$  линейно зависит от  $a^2$ . Проверив это, мы сможем доказать справедливость теоремы Гюгенса-Штейнера.

## 3 Ход работы

### 3.1 Проверка установки.

Измерения проходят для ненагруженной платформы.

При возбуждении крутильных колебаний устройство функционирует нормально. Нежелательные маятниковообразные движения платформы не возникают. Счётчик числа колебаний работает нормально. Значит, на данной установке можно проводить работу.

### 3.2 Проверка того, что колебания можно считать незатухающими.

Измерения проходят для ненагруженной платформы.

Измерим амплитуду колебаний в начале колебаний и через 30 периодов:

Количество прошедших колебаний $N$	$\varphi, ^\circ$
1	35
30	30

Таблица 1: Таблица измерений амплитуды колебаний

Спустя 30 колебаний амплитуда колебаний изменилась в  $\frac{30}{35} = 0,86$  раза. Тк амплитуда за 30 колебаний уменьшается меньше, чем в два раза ( $0,86 < 2$ ), то колебания можно считать не затухающими.

### 3.3 Проверка того, что при разных амплитудах периоды крутильных колебаний одинаковые.

$\varphi, ^\circ$	Время $t, \text{с}$	Количество колебаний $N$	Период $T, \text{с}$
20	87,44	20	4,37
30	88,33	20	4,42

Таблица 2: Таблица измерений периодов при разных амплитудах

Все периоды можно считать равными. Значит, при разных амплитудах периоды колебаний одинаковые и, следовательно, период колебаний не зависит от начальной амплитуды.

### 3.4 Параметры установки.

Длина любой проволоки:  $l = 124,4 \pm 0,1 \text{ см}$ .

Расстояние от центра диска до любой из точек крепления проволок к диску  $R_0 = 10,4 \pm 0,1 \text{ см}$ .

Диаметр нижнего диска:  $d = 2R = 24,8 \pm 0,2 \text{ см}$ .

Радиус нижнего диска:  $R = 12,4 \pm 0,1 \text{ см}$ .

Радиус верхнего диска:  $r = 3,02 \pm 0,03 \text{ см}$ .

Вертикальное расстояние:  $z_0 = \sqrt{l^2 - R_0^2} = 124,0 \pm 0,1 \text{ см}$ .

Коэффициент  $k$ :  $k = \frac{gR_0r}{4\pi^2z_0} = 6,29 \text{ см}^2/\text{с}^2 = 6,29 * 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2$

Погрешность коэффициента:  $\sigma_k = k * \sqrt{(\frac{\sigma_{R_0}}{R_0})^2 + (\frac{\sigma_{z_0}}{z_0})^2 + (\frac{\sigma_r}{r})^2} = 0,09 * 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2$ .

Тогда  $k = (6,29 \pm 0,09) * 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2$ .

### 3.5 Момент инерции платформы.

Масса платформы:  $m_0 = 1066,0 \pm 0,3 \text{ г}$ .

Период для платформы:  $T_0 = 4,39 \pm 0,03 \text{ с}$ .

По формуле (4) момент инерции платформы:  $I_0 = 0,0129 \text{ кг} * \text{м}^2$ .

Погрешность момента инерции платформы:  $\sigma_{I_0} = I_0 * \sqrt{(\frac{\sigma_k}{k})^2 + (\frac{\sigma_m}{m})^2 + 4 * (\frac{\sigma_T}{T})^2} = 0,0003 \text{ кг} * \text{м}^2$ .

Тогда момент инерции платформы:  $I_0 = 0,0129 \pm 0,0003 \text{ кг} * \text{м}^2$ .

### 3.6 Измерение моментов инерции тел, проверка закона аддитивности, теоретическое вычисление моментов инерции тел.

Измерение моментов инерции тел:

тело	масса тела $m, \text{г}$	Период для тела с платформой $T, \text{с}$	Момент инерции тела и платформы, $\text{кг} * \text{м}^2$
Крышка	$580,3 \pm 0,3$	$3,94 \pm 0,03$	$0,0161 \pm 0,0003$
Кастрюля	$734,4 \pm 0,3$	$4,24 \pm 0,03$	$0,0204 \pm 0,0003$
Вместе	$1314,7 \pm 0,3$	$3,98 \pm 0,03$	$0,0237 \pm 0,0003$

Таблица 3: Таблица измерений амплитуды колебаний

Момент инерции крышки:  $I_1 = 0,0161 - 0,0129 = 0,0032 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

Погрешность момента инерции крышки:  $\sigma_{I_1} = I_1 * \sqrt{\sigma_{I_0}^2 + \sigma_{I_{10}}^2} = 0,0004 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

Тогда момент инерции крышки:  $I_1 = 0,0032 \pm 0,0004 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

Момент инерции кастрюли:  $I_2 = 0,0204 - 0,0129 = 0,0075 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

Погрешность момента инерции кастрюли:  $\sigma_{I_2} = I_2 * \sqrt{\sigma_{I_0}^2 + \sigma_{I_{20}}^2} = 0,0004 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

Тогда момент инерции кастрюли:  $I_2 = 0,0075 \pm 0,0004 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

Момент инерции суммарный:  $I_3 = 0,0237 - 0,0129 = 0,0108 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

Погрешность суммарного момента инерции:  $\sigma_{I_3} = I_3 * \sqrt{\sigma_{I_0}^2 + \sigma_{I_{30}}^2} = 0,0004 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

Тогда суммарный момент инерции:  $I_3 = 0,0108 \pm 0,0004 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

$I_1 + I_2 = 0,0107 \approx 0,0108 = I_3$ . Значит закон аддитивности верен.

Теоретические вычисления моментов инерции тел:

Из формулы (1) момент инерции сплошного однородного цилиндра:  $I = \frac{1}{2} * m * R^2 = \frac{1}{8} * m * d^2$  Из формулы (1) момент инерции пологого однородного цилиндра:  $I = \frac{1}{2} * m * (R^2 + r^2) = \frac{1}{8} * m * (D^2 + d^2)$

Для крышки:

Размеры: диаметр ручки = 1,00 см; высота ручки = 2,90 см; диаметр диска = 17,05 см; высота ручки = 0,35 см. (Погрешность составляет 0,01 см). Теоретический  $I_1 = 0,0030 \pm 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

Для кастрюли:

Размеры: диаметр внешний = 16,7 см; высота = 4,06 см; диаметр внутренний = 14,73 см; высота ручки = 0,35 см. (Погрешность составляет 0,01 см). Теоретический  $I_2 = 0,0064 \pm 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

Теоретические расчёты приблизительно совпали с результатами измерений. Значит, метод измерения моментов инерции тел верен.

### 3.7 Проверка теоремы Гюгенса-Штейнера.

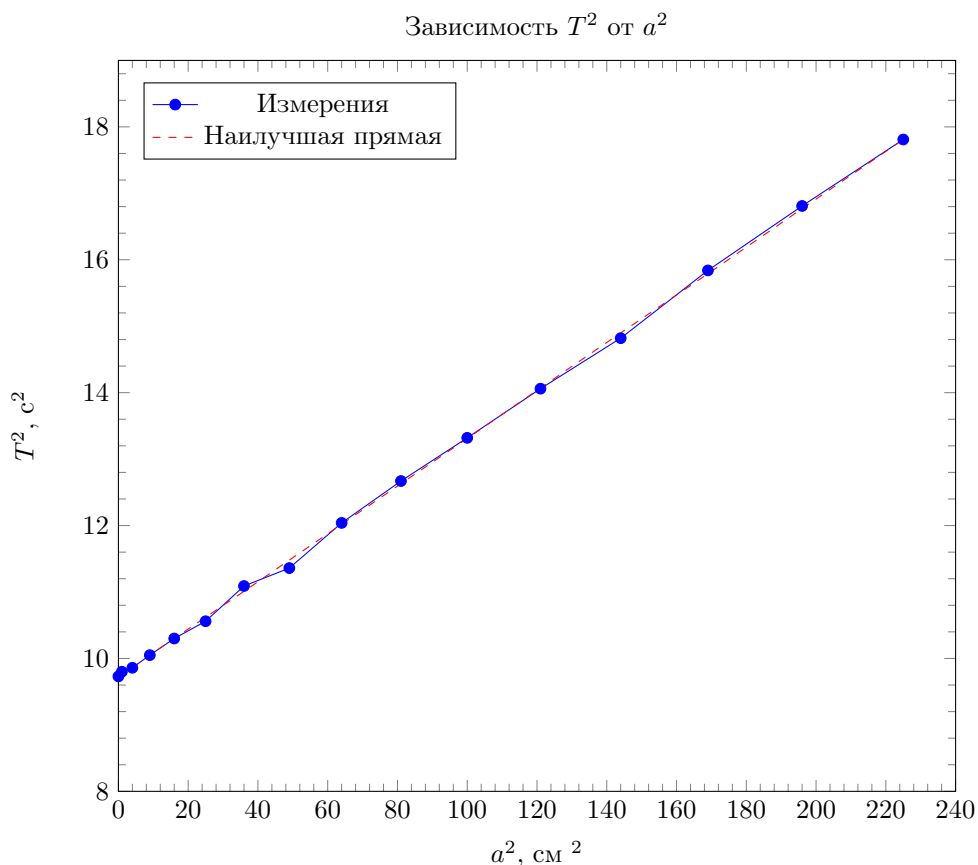
Из теоретической части следует, что теорема верна если  $T^2$  линейно зависит от  $a^2$ .

Возьмём диск, разрезанный по диаметру. Вычислим для него периоды для каждого смещения его частей вдоль диска и построим график зависимости  $T^2$  от  $a^2$ :

Расст. между центрами полудисков $a$ , см	Время $t_1$ , с	Время $t_2$ , с	Колчество колебаний $N$	Средний период $T$ , с
0.0	31,26	31,16	10	3,12
1.0	31,29	31,22	10	3,13
2.0	31,39	31,42	10	3,14
3.0	31,76	31,67	10	3,17
4.0	32,18	32,06	10	3,21
5.0	32,49	32,56	10	3,25
6.0	33,37	33,28	10	3,33
7.0	33,79	33,93	10	3,37
8.0	34,72	34,63	10	3,47
9.0	35,56	35,58	10	3,56
10.0	36,5	36,49	10	3,65
11.0	37,52	37,56	10	3,75
12.0	38,42	38,50	10	3,85
13.0	39,69	39,81	10	3,98
14.0	40,96	41,01	10	4,10
15.0	42,10	42,23	10	4,22

Таблица 4: Таблица измерений периодов колебаний и расстояний между центрами дисков.

Построим график зависимости  $T^2$  от  $a^2$ .



Расчёты по МНК:

$$c = \frac{\langle T^2 a^2 \rangle - \langle T^2 \rangle \langle a^2 \rangle}{\langle a^4 \rangle - (\langle a^2 \rangle)^2} = 0,035945 \text{ с}^2/\text{см}^2 = 359,45 \text{ с}^2/\text{м}^2$$

$$b = \langle T^2 \rangle - c * \langle a^2 \rangle = 9,72 \text{ с}^2$$

Наилучшая прямая:  $T^2 = c * a^2 + b$

Из графика видно, что  $T^2$  действительно зависит линейно от  $a^2$ .

Из формул (4) и (5) следует, что:

$$T^2 = \frac{I_0}{km} + \frac{1}{k} a^2 \quad (6)$$

Из графика:  $\frac{I_0}{km} = 9,72 \text{ с}^2$ .

Масса диска  $m = 1990,0 \pm 0,3 \text{ г}$ .

Из данных работы:  $\frac{I_0}{km} = 10,31 \pm 0,28 \text{ с}^2$ .

Отношения приблизительно равны. Это говорит о справедливости теоремы Гюгенса-Штейнера.

## 4 Вывод

Были измерены моменты инерции двух тел. Измерения моментов инерции совпали с теоритическими ожиданиями. Проверена верность закона аддитивности для моментов инерции тел и теоремы Гюгенса-Штейнера. Погрешность измерений приемлимая, что говорит о хорошей точности измерений.