§ Системы множеств

Определение 1: Если множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно не пересекаются (не имеют общих точек), то говорят, что они образуют дизъюнктный набор множеств. Объединение таких множеств обозначается: $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ (дизъюнктное объединение)

Определение 2: Пусть X — множество, $\mathcal{P} \subset 2^X$ называется полукольцом (2^X означает множество всех подмножеств X), если оно удовлетворяет аксиомам:

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$
2. Если $A, B \in \mathcal{P}$, то $A \cap B \in \mathcal{P}$
3. Если $A, B \in \mathcal{P}$, то $\exists\, D_1, D_2, \ldots, D_n \in \mathcal{P}$ (дизъюнктные) такие, что $A \setminus B = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} D_i$

Определение 3: Ячейка в $\mathbb{R}^m$ это множество $[a, b) = \{\, x \in \mathbb{R}^m \mid \forall\, i \in \{\, 1, 2, \ldots, m \,\}\ a_i \leqslant x_i < b_i \,\}$. Множество ячеек (обозначим его $\mathcal{P}^m$) является полукольцом:

1. Если $a, b \in \mathbb{R}^m$ такие, что $\forall\, i \in \{\, 1, 2, \ldots, m \,\}\ a_i > b_i$, то $[a, b) = \varnothing$
2. $[a, b) \cap [c, d) = [u, v)$, где $\forall\, i \in \{\, 1, 2, \ldots, m \,\}, u_i = \max\{\, a_i, c_i \,\}, v_i = \min\{\, a_i, d_i \,\}$
3. Можно увидеть на каритинке...

Замечание 1: Полукольцо ячеек показывает, что если $\mathcal{P}$ — любое полукольцо, то

1. Из того что $A \in \mathcal{P}$ не следует, что $A^{\complement} \in \mathcal{P}$ ($A^{\complement}$ означает дополнение к A)
2. Из того, что $A, B \in \mathcal{P}$ не следует, что $A \cup B \in \mathcal{P}$, $A \setminus B \in \mathcal{P}$
3. И из аксиомы 3 следует, что если $A, B_1, B_2, \ldots, B_k \in \mathcal{P}$, то $\exists\, \underbrace{D_1, D_2, \ldots, D_n}_{\text{дизъюнктные}} \in \mathcal{P}$ такие, что
$$A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i \right) = \bigsqcup_{i=1}^{n} D_i$$

Доказательство: Индукция по k. База: аксиома 3 полукольца. Переход (от k к $k+1$):

$$A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i \right) = \left(A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i \right) \right) \setminus B_{k+1} \overset{\substack{\text{по индукционному предположению} \\ \exists\, D_1, D_2, \ldots D_l \in \mathcal{P}\ \text{(дизъюнктные):}}}{=} \left(\bigsqcup_{i=1}^{l} D_i \right) \setminus B_{k+1} = \bigsqcup_{i=1}^{l} (D_i \setminus B_{k+1}) \overset{\substack{\text{по аксеоме 3 } \exists\, D_1, \ldots D_{l_i} \in \mathcal{P} \\ \text{(дизъюнктные) такие, что}}}{=} \bigsqcup_{i=1}^{l} \bigsqcup_{j=1}^{l_i} D_j$$

Определение 4: Пусть X — множество, $\mathcal{A} \subset 2^X$ называется алгеброй (2^X означает множество всех подмножеств X), если оно удовлетворяет аксиомам:

1. $X \in \mathcal{A}$
2. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \setminus B \in \mathcal{A}$

Свойства алгебры:

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$, так как $\varnothing = X \setminus X$
2. Если $A \in \mathcal{A}$, то $A^{\complement} \in \mathcal{A}$, так как $A^{\complement} = X \setminus A$
3. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cap B \in \mathcal{A}$, так как $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$
4. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}$, так как $A \cup B = \left(A^{\complement} \cap B^{\complement} \right)^{\complement}$
5. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ (по индукции)
6. Алгебра является полукольцом (3 аксиома полукольца следует из 2 аксиомы алгебры, а остальные аксиомы полукольца это свойства 1 и 3 алгебры)

Определение 5: Алгебра $\mathcal{A}$ называется **σ-алгеброй**, если $\forall\, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ — счётного набора множеств, выполнено, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Замечание 2: Пересечение счётного набора множеств из σ-алгебры $\mathcal{A}$ тоже принадлежит $\mathcal{A}$, т.к.

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i) \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{(по 2 свойству алгебры)}$$

§ Объём

Определение 6: Пусть $\mathcal{P}$— полукольцо, тогда функция $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется **конечно-аддитивной**, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. В образе μ нет одновременно $+\infty$ и $-\infty$
3. $\forall\, A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{P}$ (дизъюнктные), если $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{P}$, то $\mu\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

Определение 7: Аддитивная функция $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ ($\mathcal{P}$— полукольцо на мн-ве X) называется **объёмом**, если $\forall\, A \in \mathcal{P} \;\; \mu(A) \geqslant 0$. Если $X \in \mathcal{P}$ и $\mu(X)$ конечный, то μ называется **конечным объём**.

> Если объём μ конечный, то и $\forall\, A \in \mathcal{P}$ $\mu(A)$ — конечен, потому что по аксиоме 3 полукольца $X = A \sqcup (X \setminus A) = A \sqcup \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} D_i$, то есть всё это объединение принадлежит полукольцу, значит $\mu(X) = \mu(A) + \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(D_i) \geqslant \mu(A)$. Такое свойство (что если $B \subset C$, то $\mu(B) \leqslant \mu(C)$) называется **монотонностью объёма**.

Замечание 3:

1. Если объём μ задан на алгебре $\mathcal{A}$, то аксиома 3 (объёма) $\Leftrightarrow \forall\, A, B \in \mathcal{A}$ (не пересекающихся)
$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$$
2. Классический объём в $\mathbb{R}^m$: в полукольце ячеек $\forall\, [a, b) \in \mathcal{P}^m$ определим $\mu[a, b) = \prod\limits_{i=1}^{m} (b_i - a_i)$ и $\mu(\varnothing) = 0$. (Вообще нужно проверять аддитивность...)

Теорема 1 (Свойства объема):

Объём $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ ($\mathcal{P}$— полукольцо) имеет свойства:

1. $\forall\, A, \underbrace{A_1, A_2, \ldots, A_n}_{\text{дизъюнктные}} \in \mathcal{P} : \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset A$ выполняется $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_n) \leqslant \mu(A)$ (усиленная монотонность)
2. $\forall\, A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{P}, A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ выполняется $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ (конечная полуаддитивность)
3. Пусть $A, B, A \setminus B \in \mathcal{P}$, $\mu(B)$ — конечный, тогда $\mu(A \setminus B) \geqslant \mu(A) - \mu(B)$

Доказательство:

1. Из замечания 1.3 $A \setminus \left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} D_k$, где все $D_k \in \mathcal{P}$, тогда по аддитивности объёма (опр. 6)
$$\mu(A) = \mu\Bigg(\underbrace{\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{m} D_k}_{=A,\text{ то есть }\in\mathcal{P}}\Bigg) = \sum_{k=1}^{n}\mu(A_k) + \sum_{k=1}^{m}\mu(D_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n}\mu(A_k)$$

2. Пусть $\forall k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ $B_k = A \cap A_k$, тогда $A = \bigcup\limits_{k=1}^{m} B_k$ (убрали из объединения точки не входящие в A), и все $B_k \in \mathcal{P}$ по 2 аксиоме полукольца. Но множества B_k могут пересекаться, поэтому пусть $C_1 = B_1$ и $\forall k \in \{2, 3, \ldots, m\}$ $C_k = B_k \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} B_i \overset{\text{зам.1.3}}{=} \bigsqcup\limits_{i_k=1}^{l_k} D_{i_k}$, тогда $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} C_k = \bigsqcup\limits_{\substack{k=1,\\ i_k=1}}^{m,l_k} D_{i_k}$, где все $D_{i_k} \in \mathcal{P}$. Значит по аддитивности объёма (опр. 6) $\mu(A) = \sum\limits_{\substack{k=1,\\ i_k=1}}^{m,l_k} \mu(D_{i_k})$ и по пункту 1 $\forall k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ $\sum\limits_{i_k=1}^{l_k} \mu(D_{i_k}) \leqslant \mu(A_k)$ (т.к. $\bigsqcup\limits_{i_k=1}^{l_k} D_{i_k} = C_k \subset B_k \subset A_k$), то есть получаем, что $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m} \mu(A_k)$

3. a) Пусть $B \subset A$, тогда $A = B \sqcup (A \setminus B)$, значит (по аддитивности объёма — опр. 6) $\mu(A) = \mu(B) + \mu(B \setminus A)$ и так как $\mu(B)$ конечен, то можно перенести его через знак равенства.

   b) Пусть $B \not\subset A$, тогда $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ и тут $(A \cap B) \subset A, (A \cap B) \subset B, (A \cap B) \in \mathcal{P}$, значит по пунктам 3a и 1 получаем $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) \geqslant \mu(A) - \mu(B)$

□

§ Мера

Определение 8: Функция $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется **мерой** ($\mathcal{P}$— полукольцо), если она является объёмом, и если она **счётно-аддитивна**, то есть $\forall A_1, A_2, A_3 \ldots \in \mathcal{P}$ (дизъюнктные), если $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{P}$, то
$$\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Теорема 2 (об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полуаддитивности):

Пусть $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объём ($\mathcal{P}$— полукольцо), тогда эквивалентно:

1. μ — мера (т.е. μ — счётно-аддитивна)
2. μ — счётно-полуаддитивна, т.е. $\forall A, A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{P}$, если $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

Доказательство: $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ аналогично доказательству пункта 2 теоремы 1 (заменить конечные суммы и конечные объединения на бесконечные)

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$ Возьмём $A, \underbrace{A_1, A_2, \ldots}_{\text{дизъюнктные}} \in \mathcal{P} : A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, тогда $\forall N$ $\bigsqcup\limits_{i=1}^{N} A_i \subset A$, и по усиленной монотонности $\sum\limits_{i=1}^{N} \mu(A_i) \leqslant \mu(A)$ (свойство 1 объёма), но по условию $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, значит $\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ □

Следствие 1: Если $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{P}$, $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots\}$ $\mu(A_i) = 0$, тогда $\mu(A) = 0$ ($\mathcal{P}$— полукольцо, μ — мера). Это пункт 2 при $\mu(A_i) = 0$

Теорема 3 (о непрерывности меры снизу):

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ — объём (конечный), тогда эквивалентно:

1. μ — мера (т.е. μ — счётно-аддитивна)
2. $\forall\, A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} : A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots,\ A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\ \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$

Доказательство: Нужна только формулировка. Доказывается следующая теорема — о непрерывности меры сверху. $\square$

Теорема 4 (о непрерывности меры сверху):

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ — объём (конечный), тогда эквивалентно:

1. μ — мера (т.е. μ — счётно-аддитивна)
2. $\forall\, A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} : A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots,\ A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\ \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$

Доказательство: $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Пусть $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots\}$ $B_i = A_i \setminus A_{i+1}$, тогда $\forall\, k$ $A_k = A \sqcup \bigsqcup\limits_{i=k}^{\infty} B_i$ и из счётной аддитивности $\mu(A_k) = \mu(A) + \sum\limits_{i=k}^{\infty} \mu(B_i)$. Делая предельный переход при $k \to \infty$, получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$, так как остаток сходящегося ряда стремится к 0 (ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$ сходится, т.к. $\mu(A_1) = \mu(A) + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$ и $\mu(A_1)$ конечен).

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$ Возьмём $C = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ ($C_i \in \mathcal{A}$), тогда для $A_k = \bigsqcup\limits_{i=k+1}^{\infty} C_i = C \setminus \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} C_i \in \mathcal{A}$ выполнено $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ и $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$ (т.к. если $x \in A$, то x должен принадлежать всем A_k и некоторому C_N, но $A_k = C \setminus \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} C_i$), значит $\mu(C) = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu(C_i) + \mu(A_k)$. Делая предельный переход при $k \to \infty$ получаем, что $\mu(C) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ (т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\varnothing) = 0$), то есть μ счётно-аддитивна. $\square$

Теорема о продолжении меры

Определение 9: Мера $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ (где $\mathcal{P}$— полукольцо на множестве X), называется σ-конечной, если $\exists\, P_1, P_2, \ldots \in \mathcal{P}$ такие, что $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots\}$ $\mu(P_i)$ — конечный, и $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i$

Определение 10: Мера $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ (где $\mathcal{A}$ — σ-алгебра) называется полной, если $\forall\, A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0$ выполнено, что $\forall\, B \subset A$ $B \in \mathcal{A}$ (и тогда $\mu(B) = 0$ из-за монотонности объёма)

Теорема 5 (о стандартном (Лебеговоском) продолжении меры):

Пусть $\mu_0\colon \mathcal{P}_0 \to \overline{\mathbb{R}}$ — σ-конечная мера ($\mathcal{P}_0$ — полукольцо на множестве X), тогда существуют σ-алгебра $\mathcal{A} : \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{A}$, и мера $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что $\mu\Big|_{\mathcal{P}_0} = \mu_0$ (т.е. μ является продолжением μ_0) и у них есть свойства:

1. μ — полная
2. $\forall\, \mathcal{P}_1 \subset A$ — полукольцо : $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1$, $\forall\, \mu_1\colon \mathcal{P}_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера такая, что $\mu_1\Big|_{\mathcal{P}_0} = \mu_0$ выполнено, что $\mu\Big|_{\mathcal{P}_1} = \mu_1$
3. Если $\exists\, \mathcal{A}_1$ — σ-алгебра, содержащая $A \supset \mathcal{P}_0$, и если $\exists\, \mu_1\colon A_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ — полная мера такая, что $\mu_1\Big|_{\mathcal{P}_0} = \mu_0$ тогда $\mu_1\Big|_{\mathcal{A}} = \mu$
4. Для $A \in \mathcal{A}$ $\mu(A) = \inf\left\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_0(P_i) \mid P_i \in \mathcal{P}_0 : A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i\right\}$

Замечание 4: $\forall\, A \in \mathcal{A}$ $\exists\, B \in \mathcal{A}$ такое, что $A \subset B$, $\mu(A) = \mu(B)$, $\mu(B \setminus A) = 0$ и B имеет вид $B = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_{ij}\right)$, где $P_{ij} \in \mathcal{P}$

§ Мера Лебега

Лемма 1 (счётная аддитивность классического объема):

Стандартный объём μ на полукольце ячеек $\mathcal{P}^m$ $\left(\forall\, [a,b) \in \mathcal{P}^m\ \mu[a,b) = \prod\limits_{i=1}^{m}(b_i - a_i)\right)$ является σ-конечной мерой.

Доказательство: Проверим счётную полуаддитивность. Пусть $P = [a,b), P_k = [a_k, b_k)$ — ячейки такие, что $P \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$. Возьмём $\varepsilon, b' : [a,b'] \subset [a,b)$; $\mu(P) - \mu[a,b') < \varepsilon$ (чуть «уменьшили» b), и возьмём $a'_k : [a_k, b_k) \subset (a'_k, b_k)$; $\mu[a'_k, b_k) - \mu(P_k) < \varepsilon/2^k$ (чуть «увеличили» a), тогда

$$[a,b'] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a'_k, b_k)$$

Так как $[a,b']$ — компакт, то из его покрытия $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(a'_k, b_k)$ открытыми множествами, можно выбрать конечное подпокрытие:

$$\exists\, N : [a,b') \subset [a,b'] \subset \bigcup_{k=1}^{N}(a'_k, b_k) \subset \bigcup_{k=1}^{N}[a'_k, b_k)$$

Объём конечно-полуаддитивен (свойство 2), значит $\mu[a,b') \leqslant \sum\limits_{k=1}^{N}\mu[a'_k, b_k)$, т.е. $\mu(P) - \varepsilon \leqslant \varepsilon + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(P_k)$, тогда и $\mu(P) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(P_k)$ (можно взять $\varepsilon = 1/n$ и сделать предельный переход при $n \to \infty$). Получили, что μ — счётно полуаддитивен, значит (по теореме 2) μ является мерой. Эта мера σ-конечна, т.к. счётное объединение, например, всех ячеек со стороной 1 равно $\mathbb{R}^m$ $\square$

Определение 11: Стандартное продолжение меры (теорема 5) на полукольце ячеек (т.е. продолжение классического объёма в $\mathbb{R}^m$— замечание 3.2 и лемма 1) называется мерой Лебега. Соответствующая σ-алгебра обозначается $\mathcal{M}^m$, мера Лебега — λ. Множества, принадлежащие $\mathcal{M}^m$, называются измеримыми.

Замечание 5: Так как $\forall\, a \in \mathbb{R}^m$ $a = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Q(a, \frac{1}{n})$, где $Q(a,r) = [a_1 - r, a_1 + r) \times \ldots \times [a_m - r, a_m + r)$ и алгебра замкнута относительно пересечений, то $a \in \mathcal{M}^m$ и $\lambda(a) = 0$, потому что $\lambda\big(Q(a, \frac{1}{n})\big) = \left(\frac{2}{n}\right)^m \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то есть $\inf\big\{\lambda\big(Q(a, \frac{1}{n})\big) \mid n \in \mathbb{N}\big\} = 0$ (воспользовались формулой 4 из теоремы 5, рассматривая покрытие одноточечного множества одной ячейкой; получили, что inf по таким покрытиям равен 0, значит inf и по всевозможным покрытиям будет 0). Тогда любое счётное подмножество $\mathbb{R}^m$ измеримо, и имеет меру 0, так как если $A_n \in \mathcal{M}^m, \lambda(A_n) = 0$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}^m$ (замкнутость σ-алгебры относительно счётного объединения) и $\lambda\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$ (следствие 1).

Лемма 2 (о структуре открытых множеств и множеств меры 0):

1. Пусть $O \in \mathbb{R}^m$ — открытое, тогда $O = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$, где Q_i — рациональная кубическая ячейка (и можно считать, что её координаты — двоично-рациональные числа, т.е. вида $\frac{n}{2^k}, n \in \mathbb{Z}$, и что $\overline{Q_i} \subset O$)
2. Пусть $E \in \mathcal{M}^m : \lambda(E) = 0$, тогда $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, Q_i$ — кубические ячейки такие, что $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(Q_i) < \varepsilon$ (или $\;\exists\, B_i$ — открытые шары $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(B_i) < \varepsilon$)

Доказательство:

1. Для каждого $x \in O$ фиксируем двоично-рациональную ячейку $Q(x) : \overline{Q(x)} \subset O, x \in Q(x)$, тогда $O = \bigcup\limits_{x \in O} Q(x)$, но ячейки рациональные, значит различных ячеек в этом объединении счётное число, поэтому $O = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i(x)$. Но эти ячейки пересекаются, сделаем их дизъюнктными: пусть $Q_1 = Q_1(x), Q_2 = Q_2(x) \setminus Q_1 = \bigsqcup\limits_{i=1}^{l_2} D_i, Q_3 = Q_3(x) \setminus (Q_2 \cup Q_1) = \bigsqcup\limits_{i=1}^{l_3} E_i, \;\ldots$ Тогда $O = Q_1 \sqcup \bigsqcup\limits_{i=1}^{l_2} D_i \sqcup \bigsqcup\limits_{i=1}^{l_3} E_i \sqcup \ldots$ (и ячейки $D_i, E_i, \ldots$ являются двоично-рациональными, так как они являются разностью двоично-рациональной ячейки и объединения двоично-рациональных ячеек; такую разность можно представить в виде дизъюнктного объединения двоично-рациональных ячеек, которые тут обозначены $D_i, E_i, \ldots$)
2. По теореме 5 $\lambda(E) = \inf\left\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i) \mid E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i, P_i \text{ — ячейки}\right\}$. Если $\lambda(E) = 0$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, P_k \text{ — ячейки} : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(P_k) < \varepsilon$$

Ячейки P_k можно покрыть кубическими ячейками Q_{k_i} так, чтобы $\lambda(P_k) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{N_k} \lambda(Q_{k_i}) \leqslant \lambda(P_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$, т.е. тогда $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(Q_i) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{N_k} \lambda(Q_{k_i}) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(P_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(P_k) < 2\varepsilon$

Для шаров: возьмём покрытие E кубическими ячейками Q_i такими, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(Q_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{m^{m/2}}$, тогда шары B_i, описанные вокруг этих ячеек (с радиусом $r = \frac{s\sqrt{m}}{2}$, s — сторона ячейки) будут тоже покрывать E и $\lambda(B_i) \leqslant \lambda(Q_i^*)$, где Q_i^* — кубическая ячейка, описанная вокруг шара (т.е. со стороной $2r$), но $\frac{\lambda(Q_i^*)}{\lambda(Q_i)} = \frac{(2r)^m}{\left(\frac{2r}{\sqrt{m}}\right)^m} = m^{m/2}$, значит $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(B_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(Q_i^*) = m^{m/2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(Q_i) = m^{m/2} \cdot \frac{\varepsilon}{m^{m/2}} = \varepsilon$

$\square$

Следствие 2: Все открытые и замкнутые множества измеримы

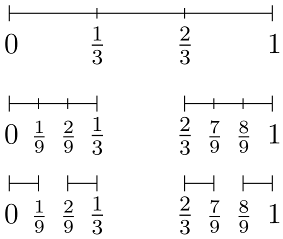
Замечание 6: **Канторовское множество:** (пример множества меры 0 мощности континуум) пусть

$K_0 = [0, 1]$

$K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

$K_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$

$\dots$



Тогда канторовским множеством называется $K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. Мощность K — континуум, т.к. каждому числу из канторовского множества $a \in K$ соответствует последовательность из 0 и 1 $(x_1, x_2, \dots)$. Если $a \in K_n$ принадлежит отрезку $[\alpha, \alpha + \frac{1}{3^n}] \subset K_n$ (левому), то $x_n = 0$, а если a принадлежит отрезку $[\beta - \frac{1}{3^n}, \beta] \subset K_n$ (правому), то $x_n = 0$, где $[\alpha, \beta] \subset K_{n-1}$ — отрезок, которому принадлежит $a \in K_{n-1}$. Это соответствие взаимно однозначно, и множество всех таких последовательностей имеет мощность континуум. Канторовское множество имеет меру 0, потому что $\forall\, n\ \lambda(K) \leqslant \lambda(K_n)$ и $\lambda(K_n) = 2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n \to 0]{} 0$

Замечание 7: **Пример неизмеримого по Лебегу множества:** пусть $\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ a \sim b$, если $a - b \in \mathbb{Q}$ (это отношение эквивалентности). Из каждого класса эквивалентности возьмём по одной точки и получим множество A. Можно считать, что $A \subset [0, 1]$. Рассмотрим множество

$$B = \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (A + q)$$

Объединение дизъюнктное, потому что если $\exists\, x \in (A + q_1) \cap (A + q_2)$, то $\exists\, a, b \in A : x = a + q_1 = b + q_2$, но тогда $a - b = q_2 - q_1$, т.е. $a \sim b$ (но такого не может быть, т.к. в A все точки из разных классов эквивалентности). Заметим, что $[0, 1] \subset B$ (потому что $\forall\, x \in [0, 1]\ \ \exists\, a \in A : x - a \in \mathbb{Q}$ (такое a берётся из класса эквивалентности x), то есть $x = a + q \in B$). Также $B \subset [-1, 2]$. Тогда, если A измеримо, то $\lambda(B) = \sum\limits_{\text{счётн.}} \lambda(A)$ (мера множества не меняется при его сдвиге — следствие 7). Так как $\lambda(B) \leqslant \lambda[-1, 2] = 3$, то $\lambda(A) = 0$ (иначе бесконечная сумма одинаковых чисел $\lambda(A)$ будет равна бесконечности), т.е. $\lambda(B) = 0$. Но также $\lambda(B) \geqslant \lambda[0, 1] = 1$. Значит A — неизмеримое множество.

§ Регулярность меры Лебега

Теорема 6 (регулярность меры Лебега):

Пусть $A \in \mathcal{M}^m$, тогда $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ открытое $G_\varepsilon \supset A : \lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$ и $\exists$замкнутое $F_\varepsilon \subset A : \lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

Доказательство:

1. Если $\lambda(A)$ конечная. Тогда по теореме 5 $\lambda(A) = \inf \left\{ \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i) \mid A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i, P_i \text{ — ячейки} \right\}$, то есть $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, P_k$ — ячейки : $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(P_k) < \lambda(A) + \varepsilon/2$. Пусть $\widetilde{P_k}$ — открытые параллелепипеды такие, что $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{P_k}$ и $\lambda(P_k) < \lambda(\widetilde{P_k}) < \lambda(P_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Возьмём $G_\varepsilon = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{P_k}$, тогда $\lambda(G_\varepsilon) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(\widetilde{P_k}) < \varepsilon/2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(P_k) < \lambda(A) + \varepsilon$, т.е. $\lambda(G_\varepsilon \setminus A) = \lambda(G_\varepsilon) - \lambda(A) < \varepsilon$

2. Если $\lambda(A) = \infty$, то используем σ-конечность λ (т.е. $\exists Q_i : \mathbb{R}^m = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$, где Q_i — ячейки с конечной мерой): $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty}(A \cap Q_i)$. Тогда $\exists G_{\varepsilon_k} \supset (A \cap Q_k) : \lambda\big(G_{\varepsilon_k} \setminus (A \cap Q_k)\big) < \frac{\varepsilon}{2^k}$, и можно взять $G_\varepsilon = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_{\varepsilon_k}$. Тогда $\lambda(G_\varepsilon \setminus A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda\big(G_{\varepsilon_k} \setminus (A \cap Q_k)\big) < \varepsilon$, так как $G_\varepsilon \setminus A = \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_{\varepsilon_k}\right) \setminus \left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty}(A \cap Q_i)\right) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\big(G_{\varepsilon_k} \setminus (A \cap Q_k)\big)$

Про замкнутые: для $A^\complement$ $\exists$ открытое $G_\varepsilon \supset A^\complement : \lambda(G_\varepsilon \setminus A^\complement) < \varepsilon$, тогда можно взять $F_\varepsilon = (G_\varepsilon)^\complement$, так как $G_\varepsilon \setminus A^\complement = A \setminus (G_\varepsilon)^\complement$ □

Определение 12: Наименьшая σ-алгебра $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}^m$, содержащая все открытые множества, называется Борелевской σ-алгеброй.

Следствие 3: $\forall A \in \mathcal{M}^m$ $\exists B, C \in \mathcal{B}$ такие, что $B \subset A \subset C$ и $\lambda(A \setminus B) = \lambda(C \setminus A) = 0$. *Доказательство:* в качестве B и C можно из теоремы 6 взять соответственно $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}}$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_{\frac{1}{n}}$, тогда $\lambda(A \setminus B) \leqslant \lambda(A \setminus F_{\frac{1}{n}}) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\lambda(C \setminus A) \leqslant \lambda(G_{\frac{1}{n}} \setminus C) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Следствие 4: Сразу из предыдущего следствия получается, что любое измеримое множество A можно представить в виде $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \setminus N_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n \cup N_2$, где E_n — открытые, D_n — замкнутые, N_1, N_2 — множества меры 0. Так как любое замкнутое множество D_n представимо в виде объединения компактных множеств $D_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_n \cap Q_{2k}$ (где Q_{2k} — куб с центром в точке 0 и длиной стороны $2k$), то ещё получаем, что $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n \cup N_2$, где K_n — компакты.

Следствие 5: Любое $A \in \mathcal{M}^m$ представимо в виде $A = B \cup N$, где $B \in \mathcal{B}$, N — множество меры 0 (подходит B из следствия 3, $N = A \setminus B$).

Следствие 6: *Регулярность меры Лебега:* пусть A — измеримо, тогда

$$\lambda(A) \overset{1}{=} \inf_{\substack{G: A\subset G \\ G \text{ — откр.}}} \{\, \lambda(G) \,\} \overset{2}{=} \sup_{\substack{F: F\subset A \\ F \text{ — замкн.}}} \{\, \lambda(F) \,\} \overset{3}{=} \sup_{\substack{F: F\subset A \\ F \text{ — компакт.}}} \{\, \lambda(F) \,\}$$

Доказательство:

1. $\lambda(A) = \inf\limits_{\substack{G: A\subset G \\ G \text{ — откр.}}} \{\, \lambda(G) \,\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists$ открытое $G \supset A : \lambda(G) - \lambda(A) < \varepsilon$. Такое G существует по теореме 6.
2. $\lambda(A) = \sup\limits_{\substack{F: F\subset A \\ F \text{ — замкн.}}} \{\, \lambda(F) \,\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists$ замкнутое $F \subset A : \lambda(A) - \lambda(F) < \varepsilon$. Такое F существует по теореме 6.
3. Если A — ограничено, то это пункт 2. Если A — не ограничено, то из пункта 2 для ε_0 возьмём замкнутое $F \subset A : \lambda(A) - \lambda(F) < \varepsilon_0$ и рассмотрим компактные множества $B_n = F \cap Q_{2n}$, где Q_{2n} — куб с центром в точке 0 и длиной стороны $2n$. Тогда из непрерывности меры снизу (теорема 3) $\lambda(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda(F)$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n : \lambda(F) - \lambda(B_n) < \varepsilon$. Значит $\exists n_0 : \lambda(F) - \lambda(B_{n_0}) < \varepsilon_0$ и тогда $\lambda(A) - \lambda(B_{n_0}) < 2\varepsilon_0$. Это выполнено для любого ε_0, поэтому $\lambda(A) = \sup\limits_{\substack{F: F\subset A \\ F \text{ — компакт.}}} \{\, \lambda(F) \,\}$

§ Преобразование меры Лебега при сдвигах и линейных отображениях

Пусть $f\colon X \to Y$, X и Y — множества, тогда $\forall\, A, B \subset X$, $\forall\, C, D \subset Y$ верно:

1. Если $A \subset B$, то $f(A) \subset f(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$; если f — инъекция, то будет равенство
4. $f\left(A^{\complement}\right) = \left(f(A)\right)^{\complement}$, если f — биекция
5. Если $C \subset D$, то $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$
6. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
7. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
8. $f^{-1}\left(C^{\complement}\right) = \left(f^{-1}(C)\right)^{\complement}$

Доказательства: (буквы Л и П обозначают левые и правые части доказываемых равенств)

1. $\text{Л} = \{\, f(x) \mid x \in A \subset B \,\} \subset \{\, f(x) \mid x \in B \,\} = \text{П}$
2. $\text{Л} = \{\, f(x) \mid x \in A \text{ или } x \in B \,\} = \{\, f(x) \mid x \in A \,\} \cup \{\, f(x) \mid x \in B \,\} = \text{П}$
3. $\text{Л} = \{\, y \in Y \mid \exists t \in A : t \in B \text{ и } f(t) = y \,\} \subset \{\, y \in Y \mid \exists t \in A : f(t) = y \,\} \cap \{\, y \in Y \mid \exists t \in B : f(t) = y \,\} = \text{П}$

   если f инъекция, то тут равенство

   тут нужно, чтобы f была биекцией
4. $\text{Л} = \{\, y \in Y \mid \exists t \in A^{\complement} : f(t) = y \,\} = \{\, y \in Y \mid \exists t \notin A : f(t) = y \,\} = \{\, y \in Y \mid \forall t \in A \ f(t) \neq y \,\} = \text{П}$
5. $\text{Л} = \{\, x \in X \mid f(x) \in C \subset D \,\} \subset \{\, x \in X \mid f(x) \in D \,\} = \text{П}$
6. $\text{Л} = \{\, x \in X \mid f(x) \in C \text{ или } f(x) \in D \,\} = \{\, x \in X \mid f(x) \in C \,\} \cup \{\, x \in X \mid f(x) \in D \,\} = \text{П}$
7. $\text{Л} = \{\, x \in X \mid f(x) \in C \text{ и } f(x) \in D \,\} = \{\, x \in X \mid f(x) \in C \,\} \cap \{\, x \in X \mid f(x) \in D \,\} = \text{П}$
8. $\text{Л} = \{\, x \in X \mid f(x) \in A^{\complement} \,\} = \{\, x \in X \mid f(x) \notin A \,\} = \{\, x \in X \mid x \in A \,\}^{\complement} = \text{П}$

Лемма 3 (первая):

Пусть X', X — множества, $\mathcal{A}', \mathcal{A}$ — соответствующие σ-алгебры, μ' — мера на $\mathcal{A}'$, отображение $T\colon X \to X'$ — биекция такая, что $\forall\, A \in \mathcal{A}\ T(A) \in \mathcal{A}'$ (и $T(\varnothing) = \varnothing$), тогда функция $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mu(A) = \mu'\big(T(A)\big)$ является мерой на $\mathcal{A}$

Доказательство: Проверим счётную аддитивность μ (опр. 8). Пусть $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} : A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, тогда используя формулу 2 и счётную аддитивность μ', получаем

$$\mu(A) = \mu'\big(T(A)\big) = \mu'\left(T\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) \overset{(*)}{=} \mu'\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} T(A_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu'\big(T(A_i)\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

$(*)$ — формула 2 используется с дизъюнктным объединением, поэтому T должно быть биекцией

$\square$

Лемма 4 (о сохранении измеримости при непрерывном отображении):

Пусть $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, $\forall\, E \in \mathcal{M}^m : \lambda(E) = 0$ $\ T(E)$ — измеримо. Тогда $\forall\, A \in \mathcal{M}^m$ $\ T(A)$ — измеримо

Доказательство: Любое $A \in \mathcal{M}^m$ представимо в виде $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i \cup N$, где K_i — компакты, N — множество меры 0 (следствие 4). Тогда $T(A) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} T(K_i) \cup T(N)$ (формула 2). Множества $T(K_i)$ — измеримы, т.к. являются компактами, потому что при непрерывном отображении образ компакта — компакт. $\square$

Лемма 5 (о сохранении измеримости при гладком отображении):

Пусть $\varPhi\colon O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \in C^1(O)$, O — область. Тогда $\forall\, A \in \mathcal{M}^m$ $\varPhi(A) \in \mathcal{M}^m$

Доказательство: Пусть E — множество меры 0.

1. Если $\exists P$ — ячейка такая, что $E \subset P \subset \overline{P} \subset O$, то возьмём $L = \max\limits_{x \in \overline{P}} \|\Phi'(x)\|$ ($\overline{P}$ — компакт и по условию Φ' непрерывна на $\overline{P}$, поэтому max достигается), тогда по теореме Лагранжа $\forall x, y \in P$ $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leqslant L \cdot \|x - y\|$, значит $\forall \mathrm{B}(a, r) \subset P$ $\Phi\big(\mathrm{B}(a, r)\big) \subset \mathrm{B}\big(\Phi(a), L \cdot r\big)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По лемме 2.2 $\exists Q(a_i, r_i)$ — кубические ячейки такие, что $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q(a_i, r_i)$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda\big(Q(a_i, r_i)\big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (2r_i)^m < \varepsilon$. Тогда $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{B}(a_i, \sqrt{m} r_i)$ (шары, описанные вокруг ячеек). Значит $\Phi(E) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Phi\big(\mathrm{B}(a_i, \sqrt{m} r_i)\big) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{B}\big(\Phi(a_i), L \cdot \sqrt{m} r_i\big) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q\big(\Phi(a_i), L \cdot \sqrt{m} r_i\big)$. И $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda\Big(Q\big(\Phi(a_i), L \cdot \sqrt{m} r_i\big)\Big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (2 r_i L \sqrt{m})^m < (L\sqrt{m})^m \cdot \varepsilon$, т.е. $\lambda\big(\Phi(E)\big) = 0$
2. Если E — любое, то O можно представить в виде дизъюнктного объединения ячеек D_j (лемма 2.1). Пусть $E_j = E \cap D_j$, тогда $\lambda\big(\Phi(E_j)\big) = 0$ по пункту 1, и $\Phi(E) = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} \Phi(E_j)$, значит $\lambda\big(\Phi(E)\big) = 0$

Поэтому из леммы 4 получаем, что $\forall A \in \mathcal{M}^m$ A — измеримо. $\square$

Следствие 7: Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов: $\forall A \in \mathcal{M}^m$, $\forall a \in \mathbb{R}^m$ выполнено $(a + A) \in \mathcal{M}^m$ (т.к. отображение $x \mapsto x + a$ гладкое) и $\lambda(a + A) = \lambda(A)$ (т.к. из формулы 4 меру множества A можно посчитать как inf сумм мер ячеек P_i по всем покрытиям A ячейками, тогда для множества $a + A$ покрытия будут состоять из ячеек $a + P_i$, и очевидно, что мера ячейки не меняется при сдвиге).

Теорема 7 (о мерах, инвариантных относительно сдвигов):

Пусть μ — мера (не Лебега) на $\mathcal{M}^m$ и

1. μ инвариантна относительно сдвигов (т.е. $\forall A \in \mathcal{M}^m, a \in \mathbb{R}^m$ $(a+A) \in \mathcal{M}^m$ и $\mu(a+A) = \mu(A)$)
2. Мера ограниченного множества конечна

Тогда $\exists k \in [0, \infty) : \forall E \in \mathcal{M}^m$ $\mu(E) = k \cdot \lambda(E)$ (λ — мера Лебега)

Доказательство: Без доказательства. $\square$

Теорема 8 (инвариантность меры Лебега при ортогональном преобразовании):

Пусть $T \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное ортогональное преобразование (т.е. линейное отображение, сохраняющее скалярное произведение). Тогда $\forall E \in \mathcal{M}^m$ $T(E) \in \mathcal{M}^m$ и $\lambda(T(E)) = \lambda(E)$

Доказательство: По лемме 5 измеримость множеств сохраняется (т.к. линейное отображение — гладкое). Для $A \in \mathcal{M}^m$ определим $\mu(A) = \lambda\big(T(A)\big)$.Тогда по лемме 3 μ — мера, и она инвариантна относительно сдвигов: $\mu(A + a) = \lambda\big(T(A + a)\big) = \lambda\big(T(A) + T(a)\big) = \lambda\big(T(A)\big) = \mu(A)$, значит по теореме 7 μ пропорциональна мере Лебега. Коэффициент пропорциональности равен 1, т.к. для шара $A = B(0, r)$ $T(A) = A$ (T — сохраняет расстояние между векторами), т.е. $\lambda\big(T(A)\big) = \lambda(A)$ $\square$

Следствие 8: Пусть $L \subset \mathbb{R}^m$ — линейное подпространство, $\dim L = m - 1$, тогда $\lambda(L) = 0$ (и $\forall A \subset L$ $\lambda(A) = 0$ из-за монотонности меры). *Доказательство:* Применим к L такое ортагональное преобразование T, что $T(L) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_m = 0\}$. Разобьём $T(L)$ на единичные ячейки Q_k: $T(L) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$. Длина их m-ой стороны равна 0; немного увеличим её: возьмём $\varepsilon > 0$ $T(L) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k \times \left[-\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)$. Тогда $\lambda\big(T(L)\big) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$. Это верно для любого $\varepsilon > 0$, значит $\lambda\big(T(L)\big) = 0$, поэтому $\lambda(L) = 0$ по теореме 8.

Лемма 6 («о структуре компактного оператора»):

Пусть $V\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор, $\det V \neq 0$, тогда $\exists$ортонормированные базисы $g_1, g_2, \dots, g_m; h_1, h_2, \dots, h_m$ и числа $s_1, s_2, \dots, s_m > 0$ такие, что $\forall\, x \in \mathbb{R}^m\ V(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} s_k \cdot \langle x, g_k\rangle \cdot h_k$ и $|\det V| = s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_m$ (в стандартном базисе)

Доказательство: Пусть $c_1, c_2, \dots c_m$ — собственные числа оператора $W = V^{\mathrm{T}}V$. В качестве $g_1, g_2, \dots g_m$ возьмём собственные вектора оператора W, составляющие ортонормированный базис $\mathbb{R}^m$. Тогда $\forall\, i \in \{1, 2, \dots, m\}\ c_i > 0$, т.к.

$$c_i = c_i \cdot \|g_i\|^2 = \langle W(g_i), g_i\rangle = \big\langle (V^{\mathrm{T}}V)(g_i), g_i\big\rangle \overset{(*)}{=} \langle V(g_i), V(g_i)\rangle = \|\big(V(g_i)\big)\|^2$$

$(*)$ — V^{T} является матрицей сопряжённого к V оператора, а по определению оператор A называется сопряжённым к V, если $\forall\, x \in \mathbb{R}^m\ \langle x, V(x)\rangle = \langle A(x), x\rangle$

Поэтому возьмём $s_i = \sqrt{c_i}$, $h_i = \frac{1}{s_i} V(g_i)$. Проверим ортогональность векторов $h_1, h_2, \dots, h_m$: $\forall\, i, j \in \{1, 2, \dots, m\}, i \neq j$

$$\langle h_i, h_j\rangle = \frac{1}{s_i s_j}\langle V(g_i), V(g_j)\rangle = \frac{1}{s_i s_j}\langle W(g_i), g_j\rangle = \frac{1}{s_i s_j}\langle c_i g_i, g_j\rangle = 0$$

Проверим формулу для вычисления значения V в точке x

$$V(x) = V\left(\sum_{i=1}^{m}\langle x, g_i\rangle\, g_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\langle x, g_i\rangle\, V(g_i) = \sum_{i=1}^{m} s_i \langle x, g_i\rangle\, h_i$$

Посчитаем определитель V

$$(\det V)^2 = \det V^{\mathrm{T}}V = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_m \quad \Rightarrow \quad \det V = s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_m$$

Это определитель матрицы оператора V в базисе $g_1, g_2, \dots, g_m$, но так как этот базис и стандартный базис ортонормированные, то определители матриц оператора V в этих базисах совпадают. □

Теорема 9 (преобразование меры Лебега при линейных отображениях):

Пусть $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение. Тогда $\forall\, A \in \mathcal{M}^m\ T(A) \in \mathcal{M}^m$ и $\lambda\big(T(A)\big) = |\det T| \cdot \lambda(A)$

Доказательство: По лемме 5 измеримость множеств сохраняется (т.к. линейное отображение — гладкое)

1. Если $\det T = 0$, то образ L отображения T лежит в $\mathbb{R}^m$ и не совпадает с ним. Образ является линейным подпространством, значит по следствию 8 $\lambda(L) = 0$. Из-за монотонности меры $\forall\, A \in \mathcal{M}^m\ \lambda\big(T(A)\big) = 0$, что соответствует формуле $\lambda\big(T(A)\big) = |\det T| \cdot \lambda(A)$
2. Если $\det T \neq 0$, то для $A \in \mathcal{M}^m$ определим $\mu(A) = \lambda\big(T(A)\big)$.Тогда по лемме 3 μ — мера и она инвариантна относительно сдвигов: $\mu(A + a) = \lambda\big(T(A + a)\big) = \lambda\big(T(A) + T(a)\big) = \lambda\big(T(A)\big) = \mu(A)$, значит по теореме 7 μ пропорциональна мере Лебега. Чтобы найти коэффициент пропорциональности, используя лемму 6 (и обозначения из неё), посчитаем меру образа единичного куба Q построенного на векторах $g_1, g_2, \dots, g_m$. Из этой леммы получаем, что $\forall\, i \in \{1, 2, \dots, m\}\ T(g_i) = s_i h_i$, значит $\lambda\big(T(Q)\big) = s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_m = |\det T|$ (длина векторов h_i равна 1), а $\lambda(Q) = 1$. То есть коэффициент пропорциональности равен $|\det T|$.

□

§ Измеримые функции

Определение 13: Пусть X — множество, $\mathcal{A} \subset 2^X$ — σ-алгебра, $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера. Тогда тройка $(X, \mathcal{A}, \mu)$ называется пространством с мерой.

Определение 14: Пусть X — множество, тогда совокупность подмножеств $E_1, E_2, \ldots, E_n \subset X$ называется разбиением множества X, если $X = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} E_i$

Определение 15: Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ (X — множество) называется ступенчатой, если $\exists$ разбиение $E_1, E_2, \ldots, E_n$ множества X такое, что $\forall\, k \in \{\,1, 2, \ldots n\,\}$ $f\Big|_{E_k} = c_k$, где $c_k \in \mathbb{R}$. Это разбиение называется допустимым.

Замечание 8:

1. *Пример ступенчатой функции:* пусть X — множество, $E \subset X$, тогда характеристическая функция множества E $\chi_E\colon X \to \{\,0, 1\,\}$, где $\chi_E(x) = 1$, если $x \in E$ и $\chi_E(x) = 0$, если $x \notin E$ является ступенчатой (разбиение: $E, X \setminus E$)
2. Общий вид ступенчатой функции: (обозначения из опр. 15) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \chi_{E_k}(x) \cdot c_k$ (x принадлежит какому-то одному E_k, поэтому все слагаемые будут равны 0, кроме одного, которое соответствует этому E_k, и на нём значение f равно c_k)
3. Если $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ — две ступенчатые функции (X — множество), то $\exists$ (общее для них) разбиение $E_1, E_2, \ldots E_n$ множества X такое, что $\forall\, k \in \{\,1, 2, \ldots n\,\}$ $f\Big|_{E_k} = c_k$, $g\Big|_{E_k} = h_k$ ($c_k, h_k \in \mathbb{R}$)
   Доказательство: из опр. 15 $\exists$ разбиения $A_1, A_2, \ldots A_s$ и $B_1, B_2, \ldots B_l$ множества X такие, что $\forall\, i \in \{\,1, 2, \ldots s\,\}, \forall\, j \in \{\,1, 2, \ldots l\,\}$ $f\Big|_{A_i} = c_i$, $g\Big|_{B_j} = h_j$, значит $E_k = A_i \cap B_j$
4. Если $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ — две ступенчатые функции (X — множество), $\alpha \in \mathbb{R}$, то функции $f+g$, fg, αf, $\max(f, g)$, $|f|$ тоже ступенчатые (общее разбиение для f и g (из предыдущего пункта) будет нужным разбиением для всех этих функций)

Определение 16: Пусть $f\colon E \subset X \to \overline{\mathbb{R}}$ (X — множество), $a \in \mathbb{R}$. Лебеговыми множествами функции f называются множества $\{\,x \in E \mid f(x) < a\,\}$ (и аналогично с $\leqslant$, $>$, $\geqslant$). Обозначение: $E(f < a)$

Замечание 9:

1. $E(f > a) = E \setminus E(f \leqslant a)$ (так как $\{\,x \in E \mid f(x) > a\,\} = \{\,x \in E \mid f(x) \leqslant a$ — не верно $\}$)
2. $E(f \leqslant a) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E(f < a + \frac{1}{n})$

Определение 17: Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $E \in \mathcal{A}$. Функция f называется измеримой на множестве E, если $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $E(f < a) \in \mathcal{A}$. Функция f называется измеримой, если она измерима на множестве X. Если $X = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{A} = \mathcal{M}^m$, μ — мера Лебега, то измеримая функция называется измеримой по Лебегу.

Замечание 10: Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $E \in \mathcal{A}$, тогда эквивалентно:

1. $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $E(f < a) \in \mathcal{A}$
2. $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $E(f \leqslant a) \in \mathcal{A}$
3. $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $E(f > a) \in \mathcal{A}$
4. $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $E(f \geqslant a) \in \mathcal{A}$

Доказательство: $\boxed{1 \Rightarrow 2}$, $\boxed{3 \Rightarrow 4}$ Из замечания 9.2 ($\mathcal{A}$ замкнута относительно счётных пересечений).
$\boxed{2 \Rightarrow 3}$, $\boxed{4 \Rightarrow 1}$ Из замечания 9.1 (разность двух множеств из $\mathcal{A}$ принадлежит $\mathcal{A}$).

Замечание 11: *Пример измеримых функций:*

1. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $E \in \mathcal{A}$. Характеристическая функция множества E (зам. 8.1) измерима на E (т.к. $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $E(\chi_E < a) = X \in \mathcal{A}$, если $a > 1$, $E(\chi_E < a) = E^{\complement} \in \mathcal{A}$, если $0 < a \leqslant 1$ и $E(\chi_E < a) = \varnothing \in \mathcal{A}$, если $a \leqslant 0$)
2. Если $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ непрерывна в $\mathbb{R}^m$, то f измерима по Лебегу (т.к. при непрерывном отображении прообраз открытого множества открыт, и $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\mathbb{R}^m(f < a)$ — прообраз открытого множества $\{\, y \in \mathbb{R} \mid y < a \,\}$, а открытые множества измеримы)

Замечание 12: *Свойства измеримых функций:* пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $E \in \mathcal{A}$, тогда

1. Если f измерима на E, то $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $E(f = a) \in \mathcal{A}$ (т.к. $E(f = a) = E(f \leqslant a) \cap E(f \geqslant a) \in \mathcal{A}$)
2. Если f измерима на E, то $-f$ и αf $(\forall\, \alpha > 0)$ измеримы на E (т.к. $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $E(-f > a) = \{\, x \in E \mid -f(x) > a \,\} = \{\, x \in E \mid f(x) < -a \,\} = E(f < -a) \in \mathcal{A}$ и $E(\alpha f > a) = E(f > \frac{a}{\alpha})$)
3. Если f измерима на $E_k \in \mathcal{A}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то f измерима на $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ (т.к. $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k\right)(f < a)$ $= \{\, x \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \mid f(x) < a \,\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{\, x \in E_k \mid f(x) < a \,\} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \big(E_k(f < a)\big) \in \mathcal{A}$)
4. Если f измерима на E, $E' \subset E$, $E' \in \mathcal{A}$, то f измерима на E' (т.к. $E'(f < a) = E(f < a) \cap E') \in \mathcal{A}$)
5. Если f измерима на E и $f \neq 0$ на E, то $\frac{1}{f}$ измерима на E (т.к. для $a > 0$ $E(\frac{1}{f} < a) = \big(E(f > \frac{1}{a}) \cap E(f > 0)\big) \cup \big(E(f < \frac{1}{a}) \cap E(f < 0)\big) \in \mathcal{A}$) — т.е. разные множества при $f > 0$ и $f < 0$; аналогично для $a < 0, a = 0$
6. Если f измерима на E, $f \geqslant 0$ на E, то $\forall\, \alpha > 0$ f^{α} измерима на E (т.к. $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $E(f^{\alpha} < a) = E(f < a^{\frac{1}{\alpha}}) \in \mathcal{A}$)

> Определение верхнего и нижнего предела последовательности $x_n \in \mathbb{R}$:
> $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{\, x_n, x_{n+1}, \ldots \,\}$ $\qquad$ $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{\, x_n, x_{n+1}, \ldots \,\}$

Теорема 10 (об измеримости пределов и супремумов):

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \in \mathcal{A}$, функции $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ измеримы на E, тогда

1. $\sup\limits_n f_n(x)$, $\inf\limits_n f_n(x)$ измеримы на E
2. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ измеримы на E
3. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, то он измерим на E

Доказательство:

1. $E\big(\sup\limits_n f_n(x) > a\big) = \{\, x \in E \mid \sup\limits_n f_n(x) > a \,\} = \{\, x \in E \mid \exists\, N : a < f_N(x) \leqslant \sup\limits_n f_n(x) \,\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{\, x \in E \mid f_n(x) > a \,\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E(f_n > a) \in \mathcal{A}$. Аналогично с inf.
2. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_n \sup\{\, f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots \,\}$. По первому пункту эта функция измерима на E.
3. Если предел существует, то он совпадает с верхним пределом, который измерим на E по второму пункту.

$\square$

> Определение положительной и отрицательной срезки для функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ (X — множество):
> $f_+(x) = \max\{\, f(x), 0 \,\}$ $\qquad$ $f_-(x) = \max\{\, -f(x), 0 \,\}$

Следствие 9: Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $f\colon X \to \mathbb{R}$ измерима на $E \in \mathcal{A}$, тогда $f_-, f_+, |f|$ измеримы на E (т.к. $f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}, |f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\}$), т.е. по первому пункту теоремы они измеримы на E, потому что функции 0 и f измеримы на E

Теорема 11 *(характеризация измеримых функций с помощью ступенчатых):*

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — неотрицательная, измеримая функция, тогда $\exists$ последовательность ступенчатых функций f_n такая, что $\forall x \in X$ $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant \ldots \leqslant f(x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

Доказательство: $\forall n \in \{1, 2, \ldots\}$ построим функцию g_n. Для этого разобьём отрезок $[0, n]$ на n^2 равных частей длины $\frac{1}{n}$ каждая. Обозначим $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n^2 - 1\}$ $E_k = X(\frac{k}{n} \leqslant f < \frac{k+1}{n}) \subset X$ и $E_{n^2} = X(f \geqslant n)$, тогда $\{E_k\}_{k=1}^{n^2}$ это разбиение множества X. Теперь $\forall x \in X$ определим $g_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n^2} \frac{k}{n}\chi_{E_k}(x)$, тогда $0 \leqslant g_n(x) \leqslant f(x)$ (т.к. $g_n(x) = \frac{k_0}{n} \geqslant 0$, где $k_0 \in \{1, 2, \ldots, n^2\} : x \in E_{k_0}$, и по определению множества E_{k_0} на нём $\frac{k_0}{n} \leqslant f$). Проверим, что $\forall x \in X$ $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$. Если $f(x)$ — конечное число, то при $n > f(x)$ $|f(x) - g_n(x)| < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (т.к. x принадлежит некоторому E_{k_0} и $k_0 \neq n^2$ (потому что $f(x) < n$), то по определению множества E_{k_0} на нём $f < \frac{k_0+1}{n}$, значит $f(x) - g_n(x) < \frac{k_0+1}{n} - \frac{k_0}{n} = \frac{1}{n}$), а если $f(x)$ — бесконечность (т.е. $x \in E_{n^2}$), то $g_n(x) = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty = f(x)$. В качестве $f_n(x)$ ($\forall n \in \{1, 2, \ldots\}$) можно взять функцию $\max\{g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)\}$. Тогда очевидно, выполняется свойство $\forall x \in X$ $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant \ldots \leqslant f(x)$ и $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, т.к. $g_n(x) \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$. □

Замечание 13: Из доказательства ясно, что все эти ступенчатые функции f_n измеримы, так как допустимые разбиения для этих функций состоят из таких множеств E_k, что $E_k \in \mathcal{A}$. (в доказательстве $E_k = X(\frac{k}{n} \leqslant f < \frac{k+1}{n})$ и это принадлежит $\mathcal{A}$, т.к. f — измеримая функцию). То, что любая ступенчатая функция, у которой допустимое разбиение состоит из измеримых множеств, измерима, получается просто из определения измеримой функции, потому что любое множество Лебега для такой ступенчатой функции будет состоять из объединения этих измеримых множеств.

Следствие 10: Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — измерима ($(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой), тогда $\exists$ ступенчатые функции $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ такие, что $\forall x \in X$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ и $\forall n$ $|f_n(x)| \leqslant |f(x)|$ *Доказательство:* f можно разложить в разность положительных измеримых функций $f = f_+ - f_-$ (сл. 9) и взять $f_n = (f_+)_n - (f_-)_n$, где $(f_+)_n$ и $(f_-)_n$ — соответствующие последовательности ступенчатых функций, полученные из теоремы 11. В этой разности, при x, в которых f отрицательна, слагаемое $(f_+)_n(x)$ нулевое, а когда f положительна, то второе слагаемое 0)

Следствие 11: Пусть $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ — измеримы ($(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой), тогда функция $f \cdot g$ измерима (и считаем, что $0 \cdot \infty = 0$). *Доказательство:* из предыдущего следствия $\exists$ ступенчатые функции $f_n, g_n\colon X \to \mathbb{R}$ такие, что $\forall x \in X$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$), значит $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)g_n(x) = f(x)g(x)$. Произведение ступенчатых функций — ступенчатая функция (зам. 8.4), поэтому получилось, что fg это предел последовательности ступенчатых функций, которые измеримы (зам. 13). Значит fg — измерима, как предел измеримых функций (т. 10.3).

Следствие 12: Пусть $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ — измеримы ($(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой), тогда функция $f + g$ измерима (и считаем, что $\forall x \in X \{f(x), g(x)\} \neq \{+\infty, -\infty\}$). Доказывается аналогично предыдущему следствию.

Теорема 12 (измеримость функции непрерывной на множестве полной меры):

Пусть функция $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ непрерывна на $E' = E \setminus e$, где $e \subset E$ и $\lambda(e) = 0$ (E, e — множества измеримые по Лебегу). Тогда функция f измерима на E.

Доказательство: Нужно доказать, что $\forall\, a \in \mathbb{R}$ множество $E(f < a)$ — измеримо (опр. 16, опр. 17). Оно измеримо, т.к. $E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$. Первое из этих множеств измеримо, потому что f непрерывна на E' по условию (зам. 11.2), второе измеримо, потому что оно содержится в e и $\lambda(e) = 0$ (мера Лебега является полной — опр. 10, опр. 11). $\square$

Следствие 13: Если $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $E, e, \in \mathcal{A} : e \subset E, \mu(e) = 0$, и функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима на $E' = E \setminus e$, то f можно изменить на e так, чтобы она стала измеримой (например, определить $f\Big|_e = 0$, и доказать измеримость новой f аналогично тому, как в теореме)

Следствие 14: Монотонная функция измерима ...

§ Сходимость почти везде и сходимость по мере

Определение 18: Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $\omega(x)$ — утверждение, зависящее от точки $x \in X$. Будем говорить, что $\omega(x)$ выполняется почти везде на $E \in \mathcal{A}$, если $\exists\, e \subset E$, $e \in \mathcal{A}$, $\mu(e) = 0$ такое, что $\omega(x)$ выполняется $\forall\, x \in E \setminus e$.

Замечание 14: Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $\forall\, n \in \{1, 2, \dots\}$ утверждения $u_n(x)$ выполнены почти везде на X. Тогда утверждение $\big(\forall\, n\ u_n(x)\big)$ выполнено почти везде на X (пусть $u_n(x)$ нарушается при $x \in e_n$, где $e_n \in \mathcal{A}, \mu(e_n) = 0$, тогда утверждение $\big(\forall\, n\ u_n(x)\big)$ нарушается на множестве $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n$, и оно тоже имеет нулевую меру)

Замечание 15:

1. Пусть $f_n, f\colon X \to \mathbb{R}$ ($(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой), μ — полная, f_n — измеримы, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ почти везде на $E \in \mathcal{A}$. Тогда f — измерима. *Доказательство:* нужно проверить, что $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $E(f < a) \in \mathcal{A}$ (опр. 17). Известно, что $\forall\, x \in E' = E \setminus e$ $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ (где $e \subset E, e \in \mathcal{A}, \mu(e) = 0$), значит из теоремы 10.3 $E'(f < a) \in \mathcal{A}$. А множество $e(f < a)$ содержится в e, значит $e(f < a) \in \mathcal{A}$ (т.к. μ полная по условию — опр. 10), поэтому $E(f < a) \in \mathcal{A}$ (т.к. $E(f < a) = E'(f < a) \cup e(f < a)$)
2. Пусть $f_n, f\colon X \to \mathbb{R}$ ($(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой), f_n — измеримы, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ почти везде на $E \in \mathcal{A}$. Тогда f можно изменить на множестве меры 0 так, чтобы она стала измеримой (доказывается аналогично сл. 13 + предыд. пункт замечания)
3. Пусть $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ ($(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой), f —измерима на $E \in \mathcal{A}$, μ — полная, $g = f$ почти везде на E, тогда g — измерима на E. (т.к. $\forall\, a \in \mathbb{R}$ $E(g < a) = E'(f < a) \cup e(g < a)$, где e — множество меры 0, на котором $g \neq f$, $E' = E \setminus e$, тогда $e(g < a) \subset e$, поэтому измеримо, и из зам. 12.4 f измерима на $E' \subset E$)

Определение 19: Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \in \mathcal{A}$, $f, g\colon X \to \mathbb{R}$, тогда функции f и g называются эквивалентными, если $f = g$ почти везде на E.

Определение 20: Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, функции $f_n, f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримы и почти везде конечны. Тогда f_n сходится к f по мере μ на X при $n \to \infty$ $\Big($обозначение: $f_n \overset{\mu}{\underset{n\to\infty}{\Longrightarrow}} f\Big)$, если $\forall\, \varepsilon > 0$ $\mu\big(X(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Замечание 16: На самом деле в этом определении мы не можем записать $f_n - f$ на множестве точек, где обе эти функции принимают бесконечное значение. Но они принимают его только на множестве меры 0. Поэтому вообще можно записать $\mu\big((X \setminus E)(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)\big)$, где $\mu(E) = 0$. Но так как мера не будет меняться, если включать или не включать множество нулевой меры, поэтому записываем без E. И мы имеем в виду, что любое множество меры 0 может так же не учитываться в определении, поэтому если $f = g$ почти везде, и $f_n \xRightarrow[n\to\infty]{\mu} f$, то $f_n \xRightarrow[n\to\infty]{\mu} g$ или, если $\forall\, n\ f_n = g_n$ почти везде, то $g_n \xRightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ тоже.

Теорема 13 (Лебега о сходимости почти везде и сходимости по мере):

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $\mu(X)$ — конечна, $f_n, f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримы и почти везде конечны, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ почти везде. Тогда $f_n \xRightarrow[n\to\infty]{\mu} f$.

Доказательство: Заменив f_n и f (например на 0) на множестве меры 0 (на котором $f_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} f$ или $f_n = \infty$ или $f = \infty$), можно считать, что $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)\ \forall\, x \in X$ (зам. 16).

1. Пусть $\forall\, x \in X\ f(x) = 0$, последовательность $f_n(x)$ монотонна (по n) и $\forall\, n\ f_n(x) \geqslant 0$. Тогда (из-за убывания f_n) $\forall\, \varepsilon > 0$ будет выполнено, что $X(f_n \geqslant \varepsilon) \supset X(f_{n+1} \geqslant \varepsilon) \supset \ldots$ Значит по теореме о непрерывности меры сверху (т. 4) $\mu\big(X(f_n \geqslant \varepsilon)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X(f_n \geqslant \varepsilon)\right) = \mu(\varnothing) = 0$ (так как если этому пересечению принадлежит хотя бы одна точка x_0, то $\forall\, n\ f_n(x_0) \geqslant \varepsilon$, то есть $f_n(x_0) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$). То есть по определению f_n сходится по мере к $0 = f$ (опр. 20).
2. Пусть f_n, f — любые. Тогда возьмём $\varphi_n(x) = \sup\limits_{k>n}\{\, |f_k(x) - f(x)|\, \}$. Для этой функции будет выполнено, что $\forall\, x \in X\ \varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (т.к. по условию $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$), последовательность $\varphi_n(x)$ монотонна (по n) (каждый раз sup берётся по меньшему множеству) и $\forall\, n\ \varphi_n(x) \geqslant 0$. Поэтому, применяя первый пункт к последовательности функций φ_n, получаем, что она сходится по мере к нулю. И так как $\forall\, n\ X\big(|f_n - f| \geqslant \varepsilon\big) \subset X(\varphi_n \geqslant \varepsilon)$ (из определения φ_n, т.к. sup больше или равен значений, по которым он берётся, т.е. если $\varphi_n < \varepsilon$, то тем более $|f_n - f| < \varepsilon$). Значит (из-за монотонности меры), f_n сходится по мере к f по определению (опр. 20): $\mu\big(X(|f_n - f| \geqslant \varepsilon)\big) \leqslant \mu\big(X(\varphi_n \geqslant \varepsilon)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$\square$

Теорема 14 (Рисса о сходимости по мере и сходимости почти везде):

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $f_n, f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ измеримы и почти везде конечны, $f_n \xRightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ на X. Тогда $\exists$ подпоследовательность f_{n_k} такая, что $f_{n_k} \xrightarrow[n_k\to\infty]{} f$ почти везде на X.

Доказательство: Из определения сходимости по мере $\forall\, k > 0\ \mu\big(X(|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k})\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.е. по определению сходимости к нулю $\exists\, n_k : \forall\, n > n_k\ \mu\big(X(|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k})\big) < \frac{1}{2^k}$. Возьмём $E_k = \bigcup\limits_{j=k}^{\infty} X\big(|f_{n_j} - f| \geqslant \frac{1}{j}\big)$, $E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, тогда $\forall\, k\ E_k \supset E_{k+1}$ (в E_{k+1} включено меньше множеств), то есть $\mu(E_k) \leqslant \sum\limits_{j=k}^{\infty} \mu\big(X(|f_{n_j} - f| \geqslant \frac{1}{j})\big) \leqslant \sum\limits_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{2}{2^k}$ (счётная полуаддитивность меры — т. 2). По теореме о непрерывности меры сверху (т. 4) $\mu(E_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu(E)$, при этом $\mu(E_k) = \frac{2}{2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, значит $\mu(E) = 0$. Проверим, что $\forall\, x \notin E\ f_{n_j} \xrightarrow[n_j\to\infty]{} f$. Возьмём $x \notin E$, тогда $\exists\, k : x \notin E_k$ (из определения E), значит x не принадлежит ни одному из множеств $X\big(|f_{n_j} - f| \geqslant \frac{1}{j}\big)$ при $j \geqslant k$ (из определения E_k), т.е. для этого x $|f_{n_j}(x) - f(x)| < \frac{1}{j}$. Это и значит, что $f_{n_j} \xrightarrow[n_j\to\infty]{} f$ на $X \setminus E$. $\square$

Следствие 15: Пусть $f_n, f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ ($(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой), $f_n \xRightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ на X и $\exists$ измеримая функция $g\colon X \to \mathbb{R}$ такая, что $\forall\, n\ |f_n| \leqslant g$ почти везде на X. Тогда $|f| \leqslant g$ почти везде на

X (по теореме сущеспвует подпоследовательность, сходящаяся к f, тогда делая предельный переход получаем)

§ Интеграл Лебега

Определение 21: Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $f\colon X \to \mathbb{R}$. Интегралом Лебега $\int\limits_X f\,d\mu$ функции f называется

1. Если f — ступенчатая функция, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — допустимое разбиение для f, и α_k — значение, которое f принимает на X_k), то

$$\int_X f\,d\mu \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \mu(X_k)$$

2. Если $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — неотрицательная, измеримая функция, то

$$\int_X f\,d\mu \overset{\text{def}}{=} \sup\left\{\int_X g\,d\mu \mid g \text{ — ступенчатая функция} : 0 \leqslant g \leqslant f\right\}$$

3. Если $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая функция и хотя бы один из $\int\limits_X f_+\,d\mu$, $\int\limits_X f_-\,d\mu$ — конечен, то

$$\int_X f\ \ d\mu \overset{\text{def}}{=} \int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu$$

4. Если $E \in \mathcal{A}$, $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима на E, то $\displaystyle\int_E f\,d\mu \overset{\text{def}}{=} \int_X f \cdot \chi_E\,d\mu$

Замечание 17: *Корректность определения (опр. 21):* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой

1. В первом пункте интеграл не зависит от представления f: если $f = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \chi_{X_k} = \sum\limits_{l=1}^{m} \beta_l \cdot \chi_{E_l}$, то $f = \sum\limits_{k,l=1}^{n,m} \alpha_k \cdot \chi_{X_k \cap E_l} = \sum\limits_{k,l=1}^{n,m} \beta_k \cdot \chi_{X_k \cap E_l}$ (на множествах $X_k \cap E_l$ $\alpha_k = \beta_l$), т.е.каждое X_k разбиваем на множества $X_k \cap E_l$, тогда $\mu(X_k) = \sum\limits_{l=1}^{m} X_k \cap E_l$, значит

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \mu(X_k) = \sum_{k,l=1}^{n,m} \alpha_k \cdot \mu(X_k \cap E_l) = \sum_{k,l=1}^{n,m} \beta_l \cdot \mu(X_k \cap E_l) = \sum_{l=1}^{m} \beta_l \cdot \mu(E_l)$$

2. Если $f\colon X \to \mathbb{R}$ — ступенчатая функция, то её интеграл из второго пункта совпадает с интегралом из первого пункта. (из определения интеграла для ступенчатых функций очевидно, что для g, h — ступенчатых, если $g < h$, то $\int_X g\,d\mu < \int_X h\,d\mu$, так как на каждом множестве из общего допустимого разбиения (зам. 8.3) будет $f < g$); тогда в пункте 2 определения интеграла sup равен $\int f\,d\mu$, потому что этот интеграл есть в множестве, по которому берётся sup, и он наибольший)
3. Если $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — неотрицательная измеримая функция, то её интеграл из третьего пункта совпадает с интегралом из второго пункта (положительная срезка совпадает с самой f, а отрицательная срезка — нулевая функция, её интеграл равен нулю по 1 пункту определения)
4. Интеграл в пункте 4 не зависит от значений f вне множества E

Определение 22: Пусть $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая функция, тогда она называется суммируемой на X, если $\int_X f_+\,d\mu$ и $\int_X f_-\,d\mu$ конечны.

Замечание 18: *Свойства интеграла:* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримые

1. Если $f \leqslant g$ на X, то $\int_X f\,d\mu \leqslant \int_X g\,d\mu$
2. Пусть $E \in \mathcal{A}$, тогда $\int_E 1\,d\mu = \mu(E)$ и $\int_E 0\,d\mu = 0$
3. Пусть $E \in \mathcal{A} : \mu(E) = 0$, тогда $\int_E f\,d\mu = 0$
4. Пусть $\alpha > 0$, тогда $\int_X \alpha f\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu$
5. $\int_X -f\,d\mu = -\int_X f\,d\mu$
6. Пусть $E \in \mathcal{A}$, тогда $\left|\int_E f\,d\mu\right| \leqslant \int_E |f|\,d\mu$
7. Если $a, b \in \mathbb{R} : a \leqslant f(x) \leqslant b$ на $E \in \mathcal{A}$, то $a \cdot \mu(E) \leqslant \int_E f\,d\mu \leqslant b \cdot \mu(E)$
8. Если f — суммируема на $E \in \mathcal{A}$, то f почти везде конечна на E

Доказательство:

1. Для неотрицательных функций из второго пункта определения интеграла (опр. 21) видно, что это свойство выполняется, т.к. в sup для большей функции будут находится ступенчатые, которые больше либо равны ступенчатых для меньшей функции (для ступенчатых функций это свойство есть в доказательстве зам. 17.2), поэтому мы знаем, что $\int_X f_+\,d\mu \leqslant \int_X g_+\,d\mu$ и $\int_X f_-\,d\mu \geqslant \int_X g_-\,d\mu$, значит, вычитая эти неравенства получаем $\int_X f\,d\mu = \int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu \leqslant \int_X g_+\,d\mu - \int_X g_-\,d\mu = \int_X g\,d\mu$.
2. По определению интеграла для ступенчатой функции (первый пункт опр. 21).
3. Идём по пунктам определения интеграла (опр. 21): для ступенчатых функций $\mu(X_k \cap E) = 0$, значит и интеграл равен нулю, для неотрицательных измеримых функций $\sup = 0$, т.к. он будет браться по нулевому множеству, тогда для измеримой f будет $\int_E f_+\,d\mu = \int_E f_-\,d\mu = 0$, значит $\int_E f\,d\mu = 0$.
4. Идём по пунктам определения интеграла (опр. 21): для ступенчатых функций α можно вынести из суммы, для неотрицательных измеримых множества, по которым берётся sup, (для f и αf) различаются тем, что их элементы домножаются на α, которое можно вынести из sup, для измеримых функций тогда, просто просто выносим α из интеграла неотрицательной функции и за скобку.
5. Так как $(-f)_+ = f_-$ и $(-f)_- = f_+$), тогда из определения (третий пункт опр. 21) получаем это свойство.
6. $-\int_E |f|\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu \leqslant \int_E |f|\,d\mu$, т.к. $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, то есть $\left|\int_E f\,d\mu\right| \leqslant \int_E |f|\,d\mu$.
7. Получается, если проинтегрировать неравенство $a \cdot \chi_E \leqslant f \leqslant b \cdot \chi_E$.
8. Для $f \geqslant 0$, если $f = \infty$ на некотором множестве $A \in \mathcal{A} : \mu(A) \neq 0$, то $\forall n \in \mathbb{R}\ f \geqslant n$, значит $\int_E f\,d\mu \geqslant n \cdot \mu(E)$, то есть $\int_E f\,d\mu = \infty$ и сейчас $f = f_+$ (противоречит определению суммируемой функции — опр. 22). А если f любого знака, то применяем это рассуждение для f_+ или f_- и получаем, что один из этих интегралов не будет конечным, если f принимает бесконечное значение на каком-нибудь множестве не нулевой меры.

Следствие 16: f — измерима и ограничена на $E \in \mathcal{A}$, $\mu(E)$ — конечна, тогда f — суммируема на E

Лемма 7 (о счётной аддитивности интеграла ступенчатой функции (по множеству)):

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $A, A_i \in \mathcal{A} : A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $g\colon X \to \mathbb{R}$ — неотрицательная, ступенчатая функция. Тогда $\int\limits_A g\,d\mu = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} g\,d\mu$.

Доказательство: Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — допустимое разбиение для функции g, α_k — значение, которое g принимает на X_k, тогда

$$\int_A g\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \mu(X_k \cap A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_k \cdot \mu(X_k \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \mu(X_k \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} g\,d\mu$$

$\square$

Теорема 15 (Счетная аддитивность интеграла (по множеству)):

Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $A, A_i \in \mathcal{A} : A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — неотрицательная, измеримая (на A) функция. Тогда $\int\limits_A f\,d\mu = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} f\,d\mu$

Доказательство: Проверим, что $\int\limits_A f\,d\mu \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} f\,d\mu$. Возьмём ступенчатую $g\colon X \to \mathbb{R}$ такую, что $g \leqslant f$ на A, тогда $\int\limits_A g\,d\mu = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} g\,d\mu$ (из леммы 7) и $\forall\, i \in \{1, 2, \dots\}$ $\int\limits_{A_i} g\,d\mu \leqslant \int\limits_{A_i} f\,d\mu$ (зам. 18.1), значит $\int\limits_A g\,d\mu \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} f\,d\mu$. Переходя к sup по всем таким ступенчатым функциям g в последнем неравенстве, получаем $\int\limits_A f\,d\mu \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} f\,d\mu$ (из второго пункта определения интеграла (опр. 21)).

Теперь проверим, что $\int\limits_A f\,d\mu \geqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} f\,d\mu$. Для двух множеств, то есть если $A = A_1 \sqcup A_2$, возьмём ступенчатые функции $g_1, g_2\colon X \to \mathbb{R}$ такие, что $g_1 \leqslant f$ на A_1, $g_2 \leqslant f$ на A_2 (можно считать, что $\exists$ступенчатая функция $g\colon X \to \mathbb{R}$ такая, что $g_1 = g \cdot \chi_{A_1}$, $g_2 = g \cdot \chi_{A_2}$, тогда $g = g_1 + g_2$), значит $g = g_1 + g_2 \leqslant f$ на A, и тогда $\int_{A_1} g_1\,d\mu + \int_{A_2} g_2\,d\mu \leqslant \int_A f\,d\mu$ (используем тут лемму 7 и зам. 18.1). Переходя к sup в последнем неравенстве сначала по g_1, потом по g_2, получаем по второму пункту определения интеграла, что $\int_{A_1} f\,d\mu + \int_{A_2} f\,d\mu \leqslant \int_A f\,d\mu$. То есть по индукции имеем, что для конечного числа множеств $A_1, A_2, \dots A_n$ выполняется $\sum\limits_{i=1}^{n} \int_{A_i} f\,d\mu \leqslant \int_A f\,d\mu$. Чтобы получить то же самое для бесконечного числа множеств, возьмём $B_n = \bigsqcup\limits_{i=n+1}^{\infty} A_i$, и запишем $A = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n \sqcup B_n$ — конечное объединение. Тогда $\int\limits_A f\,d\mu \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{A_i} f\,d\mu + \int\limits_{B_n} f\,d\mu \geqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{A_i} f\,d\mu$. Получилось, что $\forall\, n$ интеграл $\int\limits_A f\,d\mu$ больше или равен, чем (любая) частичная сумма ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} f\,d\mu$, значит он больше либо равен суммы самого ряда. $\square$

Следствие 17: Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируема на A и $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где все $A_i \in \mathcal{A}$. Тогда $\int\limits_A f\,d\mu = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} f\,d\mu$. (получаем, применяя теорему к положительной и отрицательной срезки, и суммируя ряды для них)

Следствие 18: Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — любая неотрицательная, измеримая функция. В теореме проверена счётная аддитивность функции $\nu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$, $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$. Значит эта функция является мерой на $\mathcal{A}$ (по определению).

Замечание 19: Если $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $A, B \in \mathcal{A} : B \subset A$, $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — неотрицательные, измеримые функции такие, что $f \leqslant g$ на A, тогда $\int_B f\,d\mu \leqslant \int_A g\,d\mu$ (т.к. $\int_B f\,d\mu = \int_A f\,d\mu - \int_{A \setminus B} f\,d\mu \leqslant \int_A f\,d\mu \leqslant \int_A g\,d\mu$)

§ Предельный переход под знаком интеграла

Теорема 16 (Леви):

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $f_n, f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримы, такие, что $\forall\, n$ $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$

почти везде, и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ почти везде (кроме тех множеств, где $\exists\, n$, для которого не выполнено $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$). Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\, d\mu = \int\limits_X f\, d\mu$.

Доказательство: Заменив f_n и f (например на 0) на множестве меры 0 (которое состоит из объединения (по n) множеств, где не выполнено $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$), можно считать, что $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)\ \forall\, x \in X$. Проверим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\, d\mu \leqslant \int\limits_X f\, d\mu$. Так как $\forall\, n\ f_n \leqslant f$, то $\int\limits_X f_n\, d\mu \leqslant \int\limits_X f\, d\mu$ (зам. 18.1), значит $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \leqslant \int_X f\, d\mu$.
Теперь проверим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\, d\mu \geqslant \int\limits_X f\, d\mu$. Для этого возьмём ступенчатую функцию $g\colon X \to \mathbb{R}$ такую, что $0 \leqslant g \leqslant f$, число $c \in (0,1)$ и множества $X_n = X(f_n \geqslant cg)$, тогда т.к. f_n возрастают, то $X_n \subset X_{n+1} \subset \ldots$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n = X$ (если $x_0 \in X$, то $cg(x_0) < f(x_0)$ и т.к. $f_n(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$, то $\exists\, n : f_n(x_0) \geqslant cg(x_0)$, т.е. $\exists\, n : x_0 \in X_n$). Значит $\int_X f_n\, d\mu \geqslant \int_{X_n} f_n\, d\mu \geqslant \int_{X_n} cg\, d\mu = c\int_{X_n} g\, d\mu$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \geqslant c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \int_{X_n} g\, d\mu = c\int_X g\, d\mu$ (по непрерывности меры из сл. 18 сверху (т. 4)). Это верно $\forall\, c \in (0,1)$, значит верно и для $c = 1$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \geqslant \int_X g\, d\mu$. Переходя в этом неравенстве к sup по всем таким и g получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\, d\mu \geqslant \int\limits_X f\, d\mu$. □

Теорема 17 (линейность интеграла Лебега):

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, пусть $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — неотрицательные, измеримые на $E \in \mathcal{A}$ функции, тогда $\int_E (f+g)\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu$.

Доказательство: Возьмём последовательности f_n и g_n такие, что $\forall\, n\ 0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ и $0 \leqslant g_n \leqslant g_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ (теорема 11). Тогда $\forall\, n$ будет выполнено, что $f_n + g_n \leqslant f_{n+1} + g_{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n + g_n = f + g$. Для ступенчатых функций из определения интеграла понятно, что $\int_E (f_n + g_n)\, d\mu = \int_E f_n\, d\mu + \int_E g_n\, d\mu$, поэтому, делая предельный переход в этом равенстве (или переходя к sup — это тоже самое, т.к. последовательность возрастает), получаем, что $\int_E (f+g)\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu$. □

Следствие 19: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, пусть $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измерима, тогда f — суммируема $\Leftrightarrow \int_X |f|\, d\mu$ — конечен. *Доказательство:* $\int_X |f| = \int_X (f_+ + f_-)\, d\mu = \int_X f_+\, d\mu + \int_X f_-\, d\mu$, значит, если с одной стороны конечное число, то и с другой тоже.

Следствие 20: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, пусть $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — суммируемые на $E \in \mathcal{A}$ функции, тогда $f + g$ — суммируема на E и $\int_E (f+g)\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu$. *Доказательство:* суммируемость получается, если проинтегрировать неравенство $(f+g)_\pm \leqslant |f+g| \leqslant f_+ + g_+ - f_+ + g_-$. Обозначим $h = f + g$ и запишем это через срезки: $h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-$. Перенесём слагаемые, чтобы везде был плюс: $h_+ + f_- + g_- = f_+ + g_+ + h_-$. Проинтегрируем это равенство: $\int_E h_+\, d\mu + \int_E f_- +\, d\mu \int_E g_-\, d\mu = \int_E f_+\, d\mu + \int_E g_+\, d\mu + \int_E h_-\, d\mu$. И перенесём всё обратно: $\int_E h_+\, d\mu - \int_E h_-\, d\mu = \int_E f_+\, d\mu - \int_E f_-\, d\mu + \int_E g_+\, d\mu - \int_E g_-\, d\mu$, получили $\int_E (h_+ - h_-)\, d\mu = \int_E (f_+ - f_-)\, d\mu + \int_E (g_+ - g_-)\, d\mu$, т.е. то, что нужно.

Теорема 18 (Теорема об интегрировании положительных рядов):

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, пусть $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — неотрицательные, измеримые на $E \in \mathcal{A}$ функции. Тогда

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_E f_n\, d\mu \right)$$

Доказательство: Частичные суммы $S_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$ образуют возрастающую последовательность (т.к. ряд положительный), и $S_N \xrightarrow[N\to\infty]{} S$ (где S — сумма ряда), значит по теореме Леви (т.16) $\int_E S_N\, d\mu \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_E S\, d\mu$. С другой стороны $\lim\limits_{N\to\infty} \int_E S_N\, d\mu = \lim\limits_{N\to\infty} \int_E \sum\limits_{n=1}^{N} f_n\, d\mu \overset{\text{т.17}}{=} \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \int_E f_n\, d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_E f_n\, d\mu$. Значит $\int_E S\, d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_E f_n\, d\mu$. $\square$

Следствие 21: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $f_n\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ — измеримые на $E \in \mathcal{A}$ функции, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n|\, d\mu$ — сходится (т.е. $< \infty$), тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|\, d\mu$ сходится почти везде на E. *Доказательство:* пусть $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|\, d\mu$, тогда по теореме $\int_E S(x)\, d\mu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n|\, d\mu$ и этот ряд сходится (т.е. $< \infty$). Значит по следствию 19 и замечанию 18.8 сумма ряда $S(x)$ почти везде конечна на E.

Замечание 20: *Пример:* пусть x_n — вещественная последовательность, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, тогда функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{|x-x_n|}}$ сходится абсолютно почти везде. *Доказательство:* проверим, что $\forall\, A \in \mathbb{R}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}}$ сходится почти везде на $[-A, A]$: λ — мера Лебега

$$\int\limits_{[-A,A]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}}\, d\lambda \overset{1}{=} \int_{-A}^{A} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}}\, dx \overset{2}{=} |a_n| \int\limits_{-A-x_n}^{A-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \overset{3}{\leqslant} |a_n| \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 2|a_n|\sqrt{x}\Big|_{-A}^{A} = 4|a_n|\sqrt{A}$$

1. Интеграл по мере равен обычному интегралу, доказательство потом
2. Замена $x - x_n$ на x
3. Можно посмотреть на картинке...

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4\sqrt{A}\,|a_n| = 4\sqrt{A} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится почти везде (на $[-A, A]$) по условию, значит ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{[-A,A]} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}}\, d\lambda$ тоже сходится почти везде на $[-A, A]$, тогда по следствию 21 $\forall\, A \in \mathbb{R}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}}$ сходится почти везде на $[-A, A]$. Это выполнено $\forall\, A \in \mathbb{R}$, поэтому он сходится почти везде на $\mathbb{R}$.

Теорема 19 (абсолютная непрерывность интеграла):