

Содержание

1	Линейное пространство	3
2	Скалярное произведение, норма	3
3	Метрика	4
4	Скалярное произведение, норма, метрика в \mathbb{R}^m	4
Конец II семестра ↓		
5	Определения в \mathbb{R}^m , покоординатная сходимость, двойной и повторный предел	5
6	Бесконечно малое отображение, $o(h)$, отображение дифференцируемое в точке	7
7	Комплексная дифференцируемость, единственность производной	7
8	Дифференцируемость координатных функций, частная производная	8
III семестр ↓		
Теоремы:		
3	Дифференцируемость композиции	11
4	Дифференцирование произведений	11
5	Теорема Лагранжа для векторнозначных функций	11
6	Экстремальное свойство градиента	12
7	Независимость частных производных от порядка дифференцирования	13
8	Полиномиальная формула	14
9	Лемма о дифференцировании «сдвига»	15
10	Многомерная формула Тейлора	15
11	Лемма об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора	17
12	Теорема Лагранжа для отображений	18
13	Теорема об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому	18
14	Непрерывность вычисления обратного оператора	18
15	Теорема о непрерывно дифференцируемых отображениях	18
16	Теорема Ферма. Необходимое условие экстремума. Теорема Ролля	19
17	Лемма об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах	20
18	Достаточное условие экстремума	21
19	Лемма о приближённых значениях дифференцируемого отображения	22
20	Теорема о сохранении области	23
21	Следствие о сохранении области для отображений в пространство меньшей размерности	23
22	Теорема о локальной обратимости	24
23	Теорема о неявном отображении	24
30	Теорема Стокса-Зайдля о непрерывности предельной функции	25
30	Следствие для рядов (из теоремы Стокса-Зайдля для последовательностей)	29
31	Метрика в пространстве непрерывных функций на компакте, его полнота	26
32	Теорема о предельном переходе под знаком интеграла для последовательностей	27
32	Следствие для рядов (интегрирование функционального ряда)	29
33	Правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру	27
34	Теорема о предельном переходе под знаком производной	28
34	Дифференцирование функционального ряда	29
35	Дифференцируемость гамма-функции	30
36	Теорема Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда	28
37	Теорема о предельном переходе в суммах	30
38	Теорема о перестановке предельных переходов	31
39	Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда	32
40	Теорема о круге сходимости степенного ряда	32
41	Теорема о равномерной сходимости и непрерывности степенного ряда	33
Определения и формулировки:		
1	Производная по направлению	12
2	Градиент	12

3	Классы $C^r(E)$	13
4	Мультииндекс и обозначения с ним	14
5	Формула Тейлора (различные виды записи)	15
6	n -ый дифференциал	16
7	Норма линейного оператора	16
8	Локальный максимум, минимум, экстремум	19
9	Положительно-, отрицательно-, знако- определенная квадратичная форма	20
10	Диффеоморфизм	22
11	Формулировка теоремы о гладкости обратного отображения	24
12	Формулировка теоремы о локальной обратимости в терминах систем уравнений	24
13	Поточечная сходимость последовательности функций на множестве	25
14	Равномерная сходимость последовательности функций на множестве	25
15	Формулировка критерия Больцано-Коши для равномерной сходимости	27
16	Равномерная сходимость функционального ряда	28
17	Формулировка критерия Больцано-Коши для равномерной сходимости рядов	29
18	Равномерный предел функции двух переменных	31
19	Теорема о перестановке двух предельных переходов	31
20	Степенной ряд, радиус сходимости степенного ряда, формула Адамара	32

1 Линейное пространство

Определение 1: Множество X называется **линейным пространством** (или векторным) над полем K , если заданы две операции

Сложение: $X \times X \rightarrow X \quad ((x, y) \mapsto x + y)$
 Умножение на скаляр: $K \times X \rightarrow X \quad ((\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x)$, удовлетворяющие аксиомам:

$(X, +)$ — абелева группа по сложению

1. $\forall x, y \in X \quad x + y = y + x$ (коммутативность сложения)
2. $\forall x, y, z \in X \quad (x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения)
3. $\forall x \in X \quad \exists 0_X : x + 0_X = x$ (существование нейтрального элемента по сложению)
4. $\forall x \in X \quad \exists (-x) : x + (-x) = 0_X$ (существование обратного элемента по сложению)
5. $\forall x \in X, \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
6. $\forall x, y \in X, \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
7. $\forall x \in X, \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$
8. $\forall x \in X \quad 1_X \cdot x = x$, где $1_X \in K$ — нейтральный элемент по умножению

2 Скалярное произведение, норма

Определение 2: Пусть X — линейное пространство над \mathbb{R} . Отображение $X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad ((x, y) \mapsto \langle x, y \rangle)$ называется **скалярным произведением**, если оно удовлетворяет аксиомам:

1. $\forall x, y \in X \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (симметричность)
2. $\forall x, y, z \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \langle x + \alpha \cdot y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \alpha \langle y, z \rangle$ (линейность)
3. $\forall x \in X \quad \langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$ (положительная определённость)

Определение 3: Отображение $X \rightarrow \mathbb{R} \quad (x \mapsto \|x\|)$ называется **нормой** (X — линейное пространство над \mathbb{R}), если оно удовлетворяет аксиомам:

1. $\forall x \in X \quad \|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$ (положительная определённость)
2. $\forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \|x\|$ (положительная однородность)
3. $\forall x, y \in X \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника для нормы)

Утверждение 1: Отображение $X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ — норма (X — линейное пространство над \mathbb{R})

Доказательство: проверка аксиом нормы:

1. Аксиома 3 скалярного произведения
2. По аксиоме 2 скалярного произведения $\sqrt{\langle \alpha \cdot x, \alpha \cdot x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle}$
3. Нужно доказать, что $\forall x, y \in X \quad \sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$. Обе части положительные, поэтому это неравенство равносильно неравенству

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle &\leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ \langle x, y \rangle &\leq \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (\alpha \mapsto \langle x + \alpha \cdot y, x + \alpha \cdot y \rangle)$.

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f(\alpha) &= \langle x, x + \alpha \cdot y \rangle + \langle \alpha \cdot y, x + \alpha \cdot y \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, \alpha \cdot y \rangle + \langle \alpha \cdot y, x \rangle + \langle \alpha \cdot y, \alpha \cdot y \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

Также $f(\alpha) \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (по аксиоме 3 скалярного произведения) \Rightarrow дискриминант ≤ 0 :
 $(2\langle x, y \rangle)^2 - 4\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle \leq 0$, то есть $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ или $|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$

□

Следствие 1: Из доказательства утв. 1 следует неравенство Коши-Буняковского. Разные виды его записи:

1. $|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$
2. $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$
3. $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$
4. $\left(\sum_{i=1}^m x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^m x_i^2 \sum_{i=1}^m y_i^2 \quad (\text{при } x, y \in \mathbb{R}^m)$
5. $\left| \sum_{i=1}^m x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^m y_i^2} \quad (\text{при } x, y \in \mathbb{R}^m)$

3 Метрика

Определение 4: Пусть X — множество. Отображение $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ называется **метрикой**, если оно удовлетворяет аксиомам:

1. $\forall x, y \in X \quad \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность)
2. $\forall x, y \in X \quad \rho(x, y) \geq 0, \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (невырожденность)
3. $\forall x, y, z \in X \quad \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника для метрики)

Утверждение 2: Пусть X — линейное пространство над \mathbb{R} . Отображение $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in X$
 $\rho(x, y) = \|x - y\|$ — метрика

Доказательство: проверка аксиом метрики:

1. $\forall x, y \in X \quad \|x - y\| = \|(-1) \cdot (y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\|$
 2. Аксиома 1 нормы
 3. По 3 аксиоме нормы $\forall x, y, z \in X \quad \|x - y\| = \|x - y + z - z\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$
-

4 Скалярное произведение, норма, метрика в \mathbb{R}^m

Определение 5: $\mathbb{R}^m = \underbrace{\{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}\}}_{m \text{ раз}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

Утверждение 3: \mathbb{R}^m — линейное пространство над \mathbb{R} с покомпонентным сложением и покомпонентным умножением на скаляр

Доказательство: Очевидно. □

Утверждение 4: Отображение $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^m x_i y_i$ — скалярное произведение в \mathbb{R}^m

Доказательство: проверка аксиом скалярного произведения:

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}^m \quad \sum_{i=1}^m x_i y_i = \sum_{i=1}^m y_i x_i$
 2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^m, \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^m (x_i + \alpha y_i) z_i = \sum_{i=1}^m (x_i z_i + \alpha y_i z_i) = \sum_{i=1}^m x_i z_i + \alpha \sum_{i=1}^m y_i z_i$
 3. $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad \sum_{i=1}^m x_i^2 \geq 0, \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^m x_i^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \Leftrightarrow x = 0$
-

Следствие 2: По утв. 1 $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}$ — норма в \mathbb{R}^m

Следствие 3: По утв. 2 $\forall x, y \in \mathbb{R}^m \quad \rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}$ — метрика в \mathbb{R}^m

5 Определения в \mathbb{R}^m , покоординатная сходимость, двойной и повторный предел

Напоминание определений: т.к. \mathbb{R}^m — метрическое пространство, можно определить ($a \in \mathbb{R}^m, r \in \mathbb{R}$)

6: Шар (открытый) с центром в точке a и радиусом r — $B(a, r) = \{x \mid \|x - a\| < r\}$

7: Сфера с центром в точке a и радиусом r — $S(a, r) = \{x \mid \|x - a\| = r\}$

8: Замкнутый шар с центром в точке a и радиусом r — $\overline{B}(a, r) = \{x \mid \|x - a\| \leq r\}$

9: ε -окрестность точки a — это $B(a, \varepsilon)$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$)

10: Проколотая ε -окрестность точки a — это $\dot{B}(a, \varepsilon) = B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$

11: Множество $G \subset \mathbb{R}^m$ называется **открытым**, если $\forall x \in G \exists \varepsilon_a \in \mathbb{R} : B(a, \varepsilon_a) \subset G$. Если множество G — открытое, то $G = \bigcup_{a \in G} B(a, \varepsilon_a)$:

$G \subset \bigcup_{a \in G} B(a, \varepsilon_a)$: Пусть $x \in G$, тогда, т.к. G — открытое $\exists B(x, r) \subset G$, т.е. $x \in \bigcup_{a \in G} B(a, \varepsilon_a)$

$G \supset \bigcup_{a \in G} B(a, \varepsilon_a)$: Пусть $x \in \bigcup_{a \in G} B(a, \varepsilon_a)$, тогда $\exists a : x \in B(a, \varepsilon_a) \subset G$ □

12: Точка x называется **предельной точкой** множества $D \subset \mathbb{R}^m$, если $\forall \varepsilon > 0 \dot{B}(a, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$

13: Множество $F \subset \mathbb{R}^m$ называется **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки
 $\Leftrightarrow \exists G$ — открытое множество : $F = \mathbb{R}^m \setminus G$

\Rightarrow Пусть $x \in \mathbb{R}^m \setminus F$, тогда $\exists \varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \cap F = \emptyset$, то есть дополнение F открыто

\Leftarrow Пусть x — предельная точка F и $x \notin F$, тогда $x \in G$ и любая ε -окрестность x пересекается с F , то есть G не открыто — противоречие □

14: Точка $a \in \mathbb{R}^m$ называется **пределом последовательности** $x^{(n)}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad \|x^{(n)} - a\| < \varepsilon$$

15: Точка $L \in \mathbb{R}^n$ называется **пределом отображения** $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ при $x \rightarrow a \in \mathbb{R}^m$, a — предельная точка D , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D \text{ если } 0 < \|x - a\| < \delta, \text{ то } \|f(x) - L\| < \varepsilon$$

Равносильное определение (по Гейне):

$$\forall \text{ последовательности } x^{(k)} : \begin{matrix} x^{(k)} \rightarrow a \\ x^{(k)} \neq a \\ x^{(k)} \in D \end{matrix} \quad \text{выполнено } f(x^{(k)}) \rightarrow L$$

Утверждение 5: Сходимость последовательности в \mathbb{R}^m равносильна покоординатной сходимости

$$x^{(n)} \rightarrow a \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad x_i^{(n)} \rightarrow a_i$$

Доказательство:

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad |x_i^{(n)} - a_i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j^{(n)} - a_j)^2} = \|x^{(n)} - a\| \text{ и } \|x^{(n)} - a\| \rightarrow 0 \Rightarrow x_i^{(n)} \rightarrow a_i$$

$$\Leftarrow \text{ Пусть } \alpha^{(n)} = \max_{j=1,2,\dots,m} |x_j^{(n)} - a_j|, \text{ тогда } \alpha^{(n)} \rightarrow 0 \text{ и } \|x^{(n)} - a\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j^{(n)} - a_j)^2} \leq \\ \leq \max_{j=1,2,\dots,m} |x_j^{(n)} - a_j| \sqrt{m} = \sqrt{m} \alpha^{(n)} \rightarrow 0 \Rightarrow \|x^{(n)} - a\| \rightarrow 0$$

□

Следствие 4: Из определения предела отображения по Гейне $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = L_i$$

Ещё напоминание определений:

- 16: $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$; $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $f_i(x)$ называются координатными функциями функции $f(x)$
- 17: Метрическое пространство X называется **компактным**, если из любого покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие:

$\forall \{G_\alpha\}$ — открытое покрытие $\exists G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_n}$ — открытое подпокрытие X

Подмножество $D \subset \mathbb{R}^m$ — компактно $\Leftrightarrow D$ — замкнуто и ограничено $\Leftrightarrow D$ — секвенциально компактно $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ конечная ε -сеть (D — сверхограничено) и замкнуто

- D называется ограниченным, если $\exists B(a, r) \subset \mathbb{R}^m : D \subset B(a, r)$
- D называется секвенциально компактным, если из любой последовательности элементов этого множества можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (к элементу этого множества)
- $N \subset D$ называется ε -сетью, если $\forall x \in D \exists y \in N : \rho(x, y) < \varepsilon$ (конечной ε -сетью, если N — конечно)
- Последовательность $x^{(n)}$ — фундаментальная, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, k > N \rho(x^{(m)}, x^{(k)}) < \varepsilon$
- Метрическое пространство X называется полным, если в нём любая фундаментальная последовательность сходится. В \mathbb{R}^m полное \Leftrightarrow замкнутое

Определение 18: $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a_1 — предельная точка D_1 , a_2 — предельная точка D_2 , $D \subset \mathbb{R}^2$ — множество : $(D_1 \setminus \{a_1\}) \times (D_2 \setminus \{a_2\}) \subset D$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

1. Пусть $\varphi(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow a_2} f(x_1, x_2)$ (если этот предел существует), тогда $\lim_{x_1 \rightarrow a_1} \varphi(x_1)$ называется **повторным пределом**
2. Пусть $\psi(x_2) = \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2)$ (если этот предел существует), тогда $\lim_{x_2 \rightarrow a_2} \psi(x_2)$ тоже называется **повторным пределом**
3. $L = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2}} f(x_1, x_2)$ называется **двойным пределом**, если

$\forall U(L)$ — окрестность точки $L \exists V_1(a_1)$ — окрестности : если $x_1 \in V_1(a_1) \cap D_1$, то $f(x_1, x_2) \in U(L)$
 $V_2(a_2)$ точек a_1, a_2 $x_2 \in V_2(a_2) \cap D_2$

Определение 19: Отображение $f: D \subset X \rightarrow Y$ X, Y — метрические пространства, $G \subset D$, a — предельная точка G . Предел сужения отображения $\lim_{x \rightarrow a} f|_G(x)$ называется **пределом по множеству**
 Если $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ и $C \subset \mathbb{R}^2$ — кривая, то $\lim_{x \rightarrow a} f|_C(x)$ называется **пределом по кривой**.

Утверждение 6: Пусть $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a_1 — предельная точка D_1 , a_2 — предельная точка D_2 , $D \subset \mathbb{R}^2$ — множество : $(D_1 \setminus \{a_1\}) \times (D_2 \setminus \{a_2\}) \subset D$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, тогда

1. Из того, что \forall кривой $C \in C^1(D) : C' \neq 0 \exists \lim_{x \rightarrow a} f|_C(x) = L$ следует $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$
2. Из того, что \forall кривой $C \in C^2(D) : C' \neq 0 \exists \lim_{x \rightarrow a} f|_C(x) = L$ не следует $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Доказательство: Его нету. □

Теорема 1 (О двойном и повторном пределе):

Пусть $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a_1 — предельная точка D_1 , a_2 — предельная точка D_2 , $D \subset \mathbb{R}^2$ — множество : $(D_1 \setminus \{a_1\}) \times (D_2 \setminus \{a_2\}) \subset D$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, \exists двойной предел $\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2}} f(x_1, x_2) = A \in \mathbb{R}$, и $\forall x_1 \in D_1 \setminus \{a_1\} \exists$ конечный $\varphi(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow a_2} f(x_1, x_2)$, тогда \exists повторный предел $\lim_{x_1 \rightarrow a_1} \varphi(x_1) = A$

Доказательство: Пусть $A \in \mathbb{R}$. Так как существует двойной предел, выполнено:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists V_1(a_1) \text{ — окрестности : если } x_1 \in \dot{V}_1(a_1) \cap D_1, \text{ то } \|f(x_1, x_2) - A\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$V_2(a_2) \quad \text{точек } a_1, a_2 \quad x_2 \in \dot{V}_2(a_2) \cap D_2$$

Делая предельный переход в последнем неравенстве при $x_2 \rightarrow a_2$ получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists V_1(a_1) \text{ — окрестность : если } x_1 \in \dot{V}_1(a_1) \cap D_1, \text{ то } \|\varphi(x_1) - A\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$\text{точки } a_1$$

Аналогично при $A = \pm\infty$

□

6 Бесконечно малое отображение, $o(h)$, отображение дифференцируемое в точке

Определение 20: Отображение $\varphi: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **бесконечно малым** в точке $x_0 \in \text{Int } E$, если $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0_{\mathbb{R}^n}$

Определение 21: Пусть $E \subset \mathbb{R}^m : 0_{\mathbb{R}^m} \in \text{Int } E$, $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h \in E$. Говорят, что **$\varphi(h) = o(h)$** при $h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^m}$, если $\frac{\varphi(h)}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^m}} 0_{\mathbb{R}^n}$ (бесконечно малое в точке $0_{\mathbb{R}^m}$).

Определение в \mathbb{R} было: $f, g: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка E , говорят, что $f(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$, если $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ ($g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0)

Определение 22: Отображение $f: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется **дифференцируемым** в точке $a \in \text{Int } E$, если \exists линейный оператор из \mathbb{R}^m в \mathbb{R}^n с матрицей L и \exists бесконечно малое отображение в точке $0_{\mathbb{R}^m}$ $\alpha: U(0_{\mathbb{R}^m}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что

$$f(a + h) = f(a) + Lh + \alpha(h) \cdot \|h\| \quad \text{при } h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^m}$$

или

$$f(x) = f(a) + L(x - a) + \alpha(x - a) \cdot \|x - a\| \quad \text{при } x \rightarrow a$$

Этот линейный оператор (с матрицей L) называется **производным оператором** отображения f в точке a , обозначается $f'(a)$. Получается, что отображение f' действует из \mathbb{R}^m в пространство линейных операторов.

Определение в \mathbb{R} было: Функция $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $a \in \langle a, b \rangle$, если \exists число $A \in \mathbb{R}$ такое, что

$$f(a + h) = f(a) + Ah + o(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0$$

В определении в \mathbb{R}^m можно писать $o(h)$ вместо $\alpha(h) \cdot \|h\|$ и $o(x - a)$ вместо $\alpha(x - a) \cdot \|x - a\|$

7 Комплексная дифференцируемость, единственность производной

Определение 23: Отображение $f: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (Ω — открытое множество) называется **комплексно дифференцируемым** в точке $a \in \Omega$, если \exists число $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что

$$f(a + h) = f(a) + \lambda h + o(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0$$

или

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lambda$$

Замечание 1: Отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ вещественно дифференцируемое (т.е. как в опр. 22) будет комплексно дифференцируемым как отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ только если матрица его производного оператора будет имеет вид $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, т.к. в опр. 23 $\lambda h = (\lambda_1 + \lambda_2 i)(h_1 + h_2 i) = (\lambda_1 h_1 - \lambda_2 h_2) + (\lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1)i$, т.е. $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 h_1 - \lambda_2 h_2 \\ \lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

Утверждение 7: В определении дифференцируемости отображения $f: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (опр. 22) оператор $f'(a)$ определён однозначно

Доказательство: Пусть $h = t \cdot u$, $u \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$, тогда определение можно записать

$$f(a + t \cdot u) = f(a) + t Lu + o(t \cdot u) \quad \text{при } t \rightarrow 0$$

Так как u — фиксированный вектор, $o(t \cdot u) = o(t)$. Можно выразить Lu , перенеся остальное в другую часть и сделав предельный переход при $t \rightarrow 0$:

$$Lu = \frac{f(a + t \cdot u) - f(a)}{t} + \frac{o(t)}{t}, \quad t \rightarrow 0$$

$$Lu = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot u) - f(a)}{t}$$

□

Замечание 2: Определение дифференцируемости (опр. 22) при $n = 1$ (тогда $L = (l_1, l_2, \dots, l_m)$):

$$f((x_1, x_2, \dots, x_m)) = f((a_1, a_2, \dots, a_m)) + (l_1(x_1 - a_1) + l_2(x_2 - a_2) + \dots + l_m(x_m - a_m)) + o(x - a)$$

8 Дифференцируемость координатных функций, частная производная

Лемма 1 (о дифференцируемости отображения и дифференцируемости его координатных функций):

$f: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in \text{Int } E$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, тогда

1. Отображение f дифференцируемо \Leftrightarrow все f_i дифференцируемы
2. Строки матрицы оператора $f'(a)$ это матрицы операторов $f'_1(a), f'_2(a), \dots, f'_m(a)$

Доказательство:

1. \Rightarrow Из опр. 22

$$\begin{pmatrix} f_1(a + h) \\ f_2(a + h) \\ \dots \\ f_n(a + h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \dots \\ f_n(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_{11}h_1 + l_{12}h_2 + \dots + l_{1m}h_m \\ l_{21}h_1 + l_{22}h_2 + \dots + l_{2m}h_m \\ \dots \\ l_{n1}h_1 + l_{n2}h_2 + \dots + l_{nm}h_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(h) \cdot \|h\| \\ \alpha_2(h) \cdot \|h\| \\ \dots \\ \alpha_m(h) \cdot \|h\| \end{pmatrix}$$

В первой строке записано определение дифференцируемости f_1 , во второй — f_2 и т.д.

\Leftarrow Если сначала написать определения дифференцируемости координатных функций f_1, f_2, \dots, f_m , и потом записать их в одну формулу как в предыдущем пункте, то получится определение дифференцируемости f

2. Матрицы операторов $f'_1(a), f'_2(a), \dots, f'_m(a)$ имеют размер $1 \times m$, т.е. строки. Они записаны во втором слагаемом выше и вместе образуют оператор матрицы $f'(a)$.

□

Замечание 3:

1. Если $f = \text{const}$, то $f' \equiv 0_{m \times n}$ и $o(h) \equiv 0_{\mathbb{R}^n}$
2. Если $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение с матрицей A , тогда $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad \mathcal{A}'(x) = A$ (т.к. из-за линейности $\mathcal{A}(x+h) = \mathcal{A}(x) + \underbrace{\mathcal{A}h}_{\mathcal{A}(h)} + 0$ — то есть A это и есть производная по опр. 22)
3. Если $\mathcal{A}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, A — его матрица, и отображение задано так: $x \mapsto u + Ax$ — называется аффинное отображение (линейное со сдвигом), то тоже $\mathcal{A}'(x) = A$ (т.к. $\mathcal{A}(x+h) = u + A(x+h) = u + Ax + Ah = \mathcal{A}(x) + Ah + 0$)

Определение 24: Пусть $f: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int } E$, $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\varphi_k: U(a_k) \rightarrow \mathbb{R}$,

$\varphi_k(u) = f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, u, a_{k+1}, \dots, a_m)$, тогда $\varphi'_k(a_k) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(a_k + t) - \varphi(a_k)}{t}$ (если этот предел существует) называется **k -ой частной производной** функции f в точке a . Обозначение: $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$

Замечание 4: Пусть $f: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — дифференцируемо в точке a , тогда f — непрерывно в точке a (т.е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$). Т.к. переходя к пределу в определении дифференцируемости при $h \rightarrow 0$ получаем $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$. Но если существуют все частные производные, то функция может быть не непрерывной, например

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Здесь $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+t) - f(0, 0)}{t} = 0$, но

предел в точке 0 вдоль прямой $y = x$: $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = 1$, а вдоль прямой $y = 2x$: $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 2t) = \frac{4}{5}$. То есть у f не существует предела в нуле.

Определение 25: Матрица оператора $f'(a)$, $a \in \text{Int } E$ отображения $f: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ (если f — дифференцируемо) называется **матрицей якоби** отображения f в точке a .

Теорема 2 (необходимое условие дифференцируемости):

Пусть отображение $f: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — дифференцируемо в точке $a \in \text{Int } E$, тогда существуют все частные производные всех его координатных функций и

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} \text{ — матрица якоби отображения } f \text{ в точке } a$$

Доказательство: $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ рассмотрим координатную функцию f_i .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} &\stackrel{\text{опр. 24}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_m) - f_i(a)}{t} = \\ &\stackrel{\text{зам. 2}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(a) + l_k(a_k + t - a_k) - f_i(a) + o(t)}{t} = l_k \end{aligned}$$

$k \in \{1, 2, \dots, m\}$, l_k — k -ая компонентна матрицы якоби функции f_i (размер матрицы — $1 \times m$). То есть компонентами l_k матриц якоби координатных функций f_i в точке a являются соответствующие частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ координатных функций f_i в точке a . И по лемме 1 строки матрицы якоби отображения f состоят из матриц якоби координатных функций. \square

Теорема 3 (достаточное условие дифференцируемости):

$f: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int } E$, $\exists r: \text{ в шаре } B(a, r) \subset E \exists \text{ все частные производные } \frac{\partial f}{\partial x_k}$ ($k \in \{1, 2, \dots, m\}$) и они непрерывны в точке a . Тогда функция f — дифференцируема в точке a

Доказательство: При $m = 2$.

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = (f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2)) + (f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2)) =$$

Пусть $g(x_2) = f(x_1, x_2)$, x_1 — фиксировано. Тогда $f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2) = g(x_2) - g(a_2)$. Функция g — дифференцируема на $[a_2, x_2]$ ($g' = \frac{\partial f}{\partial x_2}$) \Rightarrow по теореме Лагранжа $\exists x_0$ между x_2 и $a_2: g(x_2) - g(a_2) = g'(x_0)(x_2 - a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)(x_2 - a_2)$. Поэтому:

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_0)(x_2 - a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0, a_2)(x_1 - a_1) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(x_2 - a_2) + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right)(x_1 - a_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_0) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right)(x_2 - a_2) \end{aligned}$$

Домножим и поделим на $\|x - a\|$ последнюю строку. $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \right) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, т.к. x_0 между x_1 и a_1 ; и $\left| \frac{x_1 - a_1}{\|x - a\|} \right| \leq 1$. Аналогично во втором слагаемом этой строки. Значит теперь в ней написано б.м. $\cdot \|x - a\|$, то есть $o(x - a)$. Получилось определение дифференцируемости f . \square

Правила дифференцирования:

- Линейность:** $f, g: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — дифференцируемы в точке $a \in \text{Int } E$, тогда отображения $f + g$, λg — тоже дифференцируемы в точке a и их производные операторы равны: $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, $(\lambda g)'(a) = \lambda g'(a)$.

Лемма 2 (об оценке нормы линейного оператора):

$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение с матрицей A . Тогда $\forall x \in \mathbb{R}^m \ \|Ax\| \leq C_A \|x\|$, где $C_A = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n,m} a_{ij}^2}$, a_{ij} — элементы матрицы A

Доказательство:

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^m x_j^2 \right)} = \|x\| \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n,m} a_{ij}^2}$$

\square

2. **Дифференцируемость композиции:** $f: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, $g: I \subset \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(E) \subset I$, f — дифференцируемо в точке $a \in \text{Int } E$, g — дифференцируемо в точке $b = f(a) \in \text{Int } I$. Тогда отображение $g \circ f$ — дифференцируемо в точке a и его производный оператор $g(f(a))' = g'(f(a)) f'(a)$.
Доказательство: определения дифференцируемости отображений f и g :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \alpha(h) \|h\|, \quad \alpha(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^m}} 0_{\mathbb{R}^l}$$

$$g(b+k) = g(b) + g'(b)k + \beta(k) \|k\|, \quad \beta(k) \xrightarrow{k \rightarrow 0_{\mathbb{R}^l}} 0_{\mathbb{R}^n}$$

Получаем, что отображение $g \circ f$ дифференцируемо по определению:

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) - g(f(a)) &= g(\underbrace{f(a)}_b + \underbrace{f'(a)h + \alpha(h)\|h\|}_k) - g(f(a)) = \\ &= g(f(a)) + g'(f(a)) (f'(a)h + \alpha(h)\|h\|) + \beta(f'(a)h + \alpha(h)\|h\|) \|f'(a)h + \alpha(h)\|h\| - g(f(a)) = \\ &= g'(f(a)) f'(a)h + \underbrace{g'(f(a)) \alpha(h)\|h\|}_I + \underbrace{\beta(f'(a)h + \alpha(h)\|h\|) \|f'(a)h + \alpha(h)\|h\|}_{II} \\ \|I\| &= \|g'(f(a)) \alpha(h)\| \cdot \|h\| \stackrel{\text{лемма 2}}{\leq} \underbrace{\|\alpha(h)\|}_{\text{б.м. при } h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^m}} C_{g'(f(a))} \|h\| \\ \|II\| &= \|\beta(f'(a)h + \alpha(h)\|h\|)\| \cdot \|f'(a)h + \alpha(h)\|h\| \stackrel{\text{нер-во тр-ка}}{\leq} \|\beta(f'(a)h + \alpha(h)\|h\|)\| \cdot \|f'(a)h\| + \\ &+ \|\beta(f'(a)h + \alpha(h)\|h\|)\| \cdot \|\alpha(h)\|h\| \stackrel{\text{лемма 2}}{\leq} \text{б.м.} \cdot \|h\| C_{f'(a)} + \text{б.м.} \cdot \text{б.м.} \cdot \|h\| \quad \text{при } h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^m} \end{aligned}$$

Тогда $I + II$ это б.м. $\cdot \|h\| \Rightarrow$ получилось определение дифференцируемости отображения $g \circ f$.

3. **Дифференцирование произведений:** Отображения $f, g: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\lambda: E \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемы в точке $a \in \text{Int } E$. Тогда отображения $\lambda f(x) = \lambda(x)f(x)$ и $\langle f, g \rangle(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$ дифференцируемы в точке a . Они действуют на вектор $h \in \mathbb{R}^m$ так:

$$\textcircled{1} (\lambda f)'(a) \cdot h = (\lambda'(a) \cdot h) \cdot f(a) + \lambda(a) \cdot f'(a) \cdot h$$

$$\textcircled{2} \langle f, g \rangle'(a) \cdot h = \langle f'(a) \cdot h, g(a) \rangle + \langle f(a), g'(a) \cdot h \rangle$$

Доказательство:

$$\textcircled{1} \lambda(a+h)f(a+h) \stackrel{\text{опр. 22}}{=} (\lambda(a) + \lambda'(a)h + o(h))(f(a) + f'(a)h + o(h)) = \lambda(a)f(a) + \lambda(a)f'(a)h + \lambda'(a)h f(a) + o(h) — \text{определение дифференцируемости } \lambda f \text{ в точке } a.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \langle f, g \rangle'(a) \cdot h &= \left(\sum_{i=1}^n f_i g_i \right)'(a) \cdot h \stackrel{\text{лин.}}{=} \sum_{i=1}^n (f_i g_i)'(a) \cdot h \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sum_{i=1}^n \underbrace{(f'_i(a) \cdot h)}_{i\text{-ая координата } F'(a) \cdot h} \cdot g_i(a) + f_i(a) \cdot g'_i(a) \cdot h = \\ &= \langle f'(a) \cdot h, g(a) \rangle + \langle f(a), g'(a) \cdot h \rangle \end{aligned}$$

Теорема 4 (Лагранжа для векторнозначных функций):

$f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ — непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) . Тогда $\exists c \in (a, b)$:

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\| \cdot |b - a|$$

Доказательство: Пусть $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \langle f(b) - f(a), f(t) - f(a) \rangle$. Тогда φ — непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = \|f(b) - f(a)\|^2$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|f(b) - f(a)\|^2 &= \varphi(b) - \varphi(a) \stackrel{\text{по обычной теореме Лагранжа } \exists c \in (a, b)}{=} \varphi'(c)(b - a) \stackrel{\textcircled{2}}{=} \langle f(b) - f(a), f'(c) \rangle (b - a) \stackrel{\text{нер-во Коши-Буняковского}}{\leq} \\ &\leq \|f(b) - f(a)\| \cdot \|f'(c)\| \cdot (b - a) \end{aligned}$$

Теперь, деля на $\|f(b) - f(a)\|$ (при $f(b) = f(a)$ доказываемое неравенство очевидно) получаем то, что нужно. \square

Замечание 5: Общее правило дифференцирования функции одной переменной:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируема, задаётся формулой $f(x)$. $f(x) \rightsquigarrow F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, n — количество x -ов в формуле (т.е. нужно пронумеровать все x -ы). Тогда

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, x, \dots, x)$$

Доказательство: Определение дифференцируемости F :

$$\underbrace{F(x+h, \dots, x+h)}_{f(x+h)} = \underbrace{F(x, \dots, x)}_{f(x)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, x, \dots, x) \cdot h}_{\text{число} \Rightarrow \text{это } f'(x)} + o(h) \quad \text{при } h \rightarrow 0$$

Определение 26: Производной по вектору $h \in \mathbb{R}^m$ функции $f: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ в точке a называется

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

обозначение: $\frac{\partial f}{\partial h}(a)$. **Направлением** в \mathbb{R}^m называется вектор $l \in \mathbb{R}^m: \|l\| = 1$. Можно рассматривать производную по направлению.

Определение 27: Пусть функция $f: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируема в точке $a \in \text{Int } E$. Тогда матрица якоби функции f имеет размер $1 \times m$ (строка). Если её транспонировать и считать, что это вектор из \mathbb{R}^m , то определение дифференцируемости можно записать так:

$$f(a+h) = f(a) + \langle f'(a), h \rangle + o(h), \quad \text{при } h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^m}$$

и тогда вектор $f'(a) \in \mathbb{R}^m$ называется **градиентом** функции f в точке a , обозначается $\text{grad } f(a)$.

Замечание 6: $f: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируема в точке $a \in \text{Int } E$, тогда

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) \stackrel{\text{опр. 26}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \stackrel{\text{опр. 22 и т. 2}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)th_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)th_m + o(t)}{t} = \langle \text{grad } f(a), h \rangle$$

Теорема 5 (экстремальное свойство градиента):

Пусть $f: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируема в точке $a \in \text{Int } E$ и $\text{grad } f(a) \neq 0$. Тогда $l = \frac{\text{grad } f(a)}{\|\text{grad } f(a)\|}$ (направление в \mathbb{R}^m) — направление наискорейшего возрастания функции f , т.е.

$\forall h \in \mathbb{R}^m$ такого, что $\|h\| = 1$ выполнено:

$$-\|\text{grad } f(a)\| = -\frac{\partial f}{\partial l}(a) \leq \frac{\partial f}{\partial h}(a) \leq \frac{\partial f}{\partial l}(a) = \|\text{grad } f(a)\|$$

и равенство достигается при $h = l$ (справа) и $h = -l$ (слева)

Доказательство: Так как $\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \langle \text{grad } f(a), h \rangle$ (зам. 6), то из неравенства Коши-Буняковского (сл. 1) следует доказываемое неравенство: $-\|\text{grad } f(a)\| \cdot 1 \leq \langle \text{grad } f(a), h \rangle \leq \|\text{grad } f(a)\| \cdot 1$.

Если в неравенстве Коши-Буняковского $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ $y = \alpha x$, то достигается равенство. В нашем случае, если $h = l$, то α это $1/\|\text{grad } f(a)\|$. \square

Определение 28: $f: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть $\exists k \in \{1, 2, \dots, m\}$ и $\exists U(a)$ — окрестность точки $a \in \text{Int } E$ такие, что можно определить функцию $g: U(a) \rightarrow \mathbb{R}$ так, что $g(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$. Тогда, если $\exists i \in \{1, 2, \dots, m\}$ такое, что $\exists \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$, то эта частная производная называется **частной производной**

II порядка функции f в точке a . Обозначение: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(a)$ или $f''_{x_k x_i}(a)$

По индукции определяется $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}}(a) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_n}} \right)(a)$

Теорема 6 (о независимости частной производной от порядка дифференцирования):

Пусть $f: E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, точка $(x_0, y_0) \in \text{Int } E$, $\exists r > 0$: в шаре $B((x_0, y_0), r) \subset E$ $\exists f''_{xy}, f''_{yx}$ и они непрерывны в точке (x_0, y_0) . Тогда $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

Доказательство: Пусть $\Delta^2 f(h, k) = f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k)$. При фиксированном k определим функцию $\alpha(h) = \Delta^2 f(h, k)$. И пусть обе функции заданы так, чтобы аргументы f попадали в шар $B((x_0, y_0), r)$, т.е. $\Delta^2 f: B((0, 0), r/\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ и $\alpha: [0, r/\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда α непрерывна и дифференцируема на $[0, r/\sqrt{2}]$ и $\alpha(0) = 0$, поэтому, применяя теорему Лагранжа сначала к функции α , затем при фиксированной первой переменной к функции f получаем

$$\alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) = \alpha'(\bar{h}) \cdot h = (f'_x(x_0 + \bar{h}, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \bar{h}, y_0)) \cdot h = (f''_{xy}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})) \cdot h k$$

Аналогично, при фиксированном h можно определить функцию $\beta(k) = \Delta^2 f(h, k)$ и

$$\beta(k) = \beta(k) - \beta(0) = \beta'(\hat{k}) \cdot k = (f'_y(x_0 + h, y_0 + \hat{k}) - f'_y(x_0, y_0 + \hat{k})) \cdot k = (f''_{yx}(x_0 + \hat{h}, y_0 + \hat{k})) \cdot h k$$

Так как при фиксированных k и h $\alpha(h) = \beta(k) = \Delta^2 f(h, k)$, то имеем равенство

$$f''_{xy}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k}) = f''_{yx}(x_0 + \hat{h}, y_0 + \hat{k})$$

и делая в нём предельный переход при $h \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 0$ получаем, что $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$, так как $\bar{h}, \hat{h} \in (0, h)$, и $\bar{k}, \hat{k} \in (0, k)$, то есть $\bar{h}, \hat{h}, \bar{k}, \hat{k}$ стремятся к нулю при $h \rightarrow 0$ и $k \rightarrow 0$. \square

Определение 29: Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, $r \in \mathbb{N}$, тогда **класс $C^r(E)$** — это множество всех функций $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что у них \exists все возможные частные производные порядка r и все эти производные непрерывны. $C(E) \supsetneq C^1(E) \supsetneq C^2(E) \supsetneq \dots$

$$C^\infty(E) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{r=1}^{\infty} C^r(E)$$

Теорема 7 (общая теорема о независимости частной производной от порядка дифференцирования):

Пусть функция $f \in C^r(E)$, $E \subset \mathbb{R}^m$, $r, k \in \mathbb{N}$, $k \leq r$, и наборы индексов i_1, i_2, \dots, i_k и j_1, j_2, \dots, j_k отличаются друг от друга перестановкой. Тогда

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_k} \partial x_{j_{k-1}} \dots \partial x_{j_1}} \quad \text{на множестве } E$$

Доказательство: Сводится к предыдущей теореме, так как любую перестановку можно получить транспозицией соседних элементов. \square

Замечание 7: Классы $C^r(E)$, $r \in \mathbb{N}$ замкнуты относительно сложения, умножения на скаляр (и образуют линейное пространство) и композиции.

Определение 30: Вектор $k = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{R}^m$, где все $k_i \in \mathbb{Z}, k_i \geq 0$ называется **мультииндексом**

1. $|k| \stackrel{\text{def}}{=} k_1 + k_2 + \dots + k_m$ — называется **высотой мультииндекса**
2. $k! \stackrel{\text{def}}{=} k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!$
3. $x^k \stackrel{\text{def}}{=} x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \dots \cdot x_m^{k_m}$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ — вектор из \mathbb{R}^m
4. $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial x^k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|k|} f}{(\partial x_1)^{k_1} (\partial x_2)^{k_2} \dots (\partial x_m)^{k_m}}$ $(\partial x_i)^{k_i}$ означает, что по переменной x_i частная производная берётся k_i раз (это общее обозначение; не только для мультииндекса)

Лемма 3 (полиномиальная формула):

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, т.е. $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, тогда

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_m)^r &= \sum_{n_1=1}^m \sum_{n_2=1}^m \dots \sum_{n_r=1}^m a_{n_1} \cdot a_{n_2} \cdot \dots \cdot a_{n_r} = \\ &= \sum_{\substack{j: |j|=r \\ j - \text{мультииндекс}}} \frac{r!}{j!} \cdot a^j \stackrel{\text{опр. 30}}{=} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_m) \\ j_1 + \dots + j_m = r}} \frac{r!}{j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \dots \cdot a_m^{j_m} \end{aligned}$$

Доказательство: Индукция по r . Обозначим $S_r = \sum \frac{r!}{j!} \cdot a^j$, тогда

База: при $r = 1$

$$S_1 = \sum_{\substack{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ 1 \text{ стоит на месте } i \\ i \in \{1, \dots, m\}}} \frac{1!}{0! \cdot \dots \cdot 0! \cdot 1! \cdot 0! \cdot \dots \cdot 0!} \cdot a_1^0 \cdot \dots \cdot a_{i-1}^0 \cdot a_i^1 \cdot a_{i+1}^0 \cdot \dots \cdot a_m^0 = (a_1 + a_2 + \dots + a_m)^1$$

Переход: от r к $r + 1$. Раскроем скобки в выражении $S_{r+1} = (a_1 + a_2 + \dots + a_m) \cdot S_r$:

$$\sum_{j: |j|=r} \frac{r!}{j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1+1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \dots \cdot a_m^{j_m} + \dots + \sum_{j: |j|=r} \frac{r!}{j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \dots \cdot a_m^{j_m+1}$$

Домножим и поделим каждую сумму на соответствующее $j_i + 1$:

$$\sum_{j: |j|=r} \frac{r! \cdot (j_1 + 1)}{(j_1 + 1)! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1+1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \dots \cdot a_m^{j_m} + \dots + \sum_{j: |j|=r} \frac{r! \cdot (j_m + 1)}{j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot (j_m + 1)!} \cdot a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \dots \cdot a_m^{j_m+1}$$

Изменим в пределе суммирования высоту мультииндекса на $r + 1$, учитывая, что тогда в каждой сумме соответствующее j_i должно быть ≥ 1 :

$$\sum_{\substack{j: |j|=r+1, \\ j_1 \geq 1}} \frac{r! \cdot j_1}{j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \dots \cdot a_m^{j_m} + \dots + \sum_{\substack{j: |j|=r+1, \\ j_m \geq 1}} \frac{r! \cdot j_m}{j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \dots \cdot a_m^{j_m}$$

Каждая сумма умножается на соответствующее j_i , поэтому условие $j_i \geq 1$ не нужно, так как соответствующие слагаемые при $j_i = 0$ будут равны нулю. Вынесем за скобки общий множитель:

$$\sum_{j: |j|=r+1} \frac{r! \cdot (j_1 + j_2 + \dots + j_m)}{j_1! \cdot j_2! \cdot \dots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \dots \cdot a_m^{j_m}$$

Множитель $(j_1 + j_2 + \dots + j_m)$ это по определению высота мультииндекса, то есть он равен $r + 1$. Значит последняя полученная сумма и есть S_{r+1}

□

Лемма 4 (о дифференцировании «сдвига»):

$E \subset \mathbb{R}^m$, $f \in C^r(E)$ ($f: E \rightarrow \mathbb{R}$), $a \in \text{Int } E$. Пусть $h \in \mathbb{R}^m$: при $t \in [-1, 1]$ вектор $a + th \in E$, определим функцию $\varphi(t) = f(a + th)$, тогда $\varphi \in C^r([-1, 1])$ и $\forall k \leq r$

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{\substack{j: |j|=k \\ j - \text{мультииндекс}}} \frac{k!}{j!} \cdot h^j \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a + th) \quad (*)$$

Доказательство: Найдём первую производную функции φ как производную композиции:

$$\varphi'(t) = f'(a + th) \cdot h = f'_{x_1}(a + th) \cdot h_1 + f'_{x_2}(a + th) \cdot h_2 + \dots + f'_{x_m}(a + th) \cdot h_m$$

Это формула (*) при $k = 1$. Вторая производная функции φ :

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \left(\sum_{i=1}^m f'_{x_i}(a + th) \cdot h_i \right)' = \sum_{i=1}^m (f'_{x_i}(a + th))' \cdot h_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}(a + th) \cdot h_i h_j = \\ &= \sum_{i=1}^m f''_{x_i x_i}(a + th) \cdot h_i^2 + 2 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^m f''_{x_i x_j}(a + th) \cdot h_i h_j \end{aligned}$$

В первом слагаемом написано то, что получается в формуле (*) при $k = 2$ в случае, когда мультииндекс выглядит как $(0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0)$, во втором слагаемом — как $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Тогда k -ая производная функции φ :

$$\sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m f^{(k)}_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}(a + th) \cdot h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \stackrel{\text{лемма 3}}{=} \sum_{\substack{j: |j|=k \\ j - \text{мультииндекс}}} \frac{k!}{j!} \cdot h^j \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a + th)$$

Лемма 3 объединяет слагаемые, которые отличаются перестановкой множителей. В левой части последнего равенства каждое такое слагаемое домножено на соответствующую частную производную k -го порядка и эти производные так же отличаются друг от друга только порядком дифференцирования, значит они равны (так как непрерывны на E по условию). Поэтому слагаемые, которые объединяет лемма домножены на одно и тоже число, и его можно дописать множителем при соответствующем слагаемом. \square

Теорема 8 (формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа):

Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, ($f: E \rightarrow \mathbb{R}$) $f \in C^{r+1}(E)$, точка $a \in \text{Int } E$, $R \in \mathbb{R}$: $B(a, R) \subset E$, $x \in B(a, R)$, $h = x - a$, тогда $\exists \theta \in (0, 1)$ такое, что:

$$f(x) = \sum_{\substack{k: |k| \leq r \\ k - \text{мультииндекс}}} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k + \sum_{\substack{k: |k|=r+1 \\ k - \text{мультииндекс}}} \frac{f^{(k)}(a + \theta h)}{k!} \cdot h^k$$

$f^{(k)}$ — это другое обозначение для $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial x^k}$

Доказательство: Определим функцию $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $\varphi(t) = f(a + th)$. Тогда $\varphi \in C^{r+1}([0, 1])$.

Формула Тейлора с центром в точке 0 с остатком в форме Лагранжа для функции φ в единице:

$$\varphi(1) = \sum_{n=1}^r \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \cdot 1^n + \frac{\varphi^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} \cdot 1^{(r+1)}, \quad \theta \in (0, 1)$$

$\varphi(1) = f(a + h) = f(x)$. Используя лемму 4, заменяем производные функции φ . Тогда

$$f(x) = \sum_{n=1}^r \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\substack{k: |k|=n \\ k - \text{мультииндекс}}} \frac{n!}{k!} \cdot h^k \cdot f^{(k)}(a) + \sum_{\substack{k: |k|=r+1 \\ k - \text{мультииндекс}}} \frac{1}{(r+1)!} \cdot \frac{(r+1)!}{k!} \cdot h^k \cdot f^{(r+1)}(a + \theta h)$$

Упрощая, получаем доказываемую формулу. \square

Замечание 8: Явный вид многочлена Тейлора порядка r функции f в точке a :

$$T_r(f, a)(x) = \sum_{k=1}^r \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_m) \\ i_1 + \dots + i_m = k \\ i_1, \dots, i_m \geq 0}} \frac{1}{i_1! \cdot \dots \cdot i_m!} \cdot \frac{\partial^k f}{(\partial x_1)^{i_1} (\partial x_2)^{i_2} \dots (\partial x_m)^{i_m}}(a) \cdot (x_1 - a_1)^{i_1} \cdot (x_2 - a_2)^{i_2} \cdot \dots \cdot (x_m - a_m)^{i_m}$$

Следствие 5: В остатке формулы Тейлора есть множитель

$$h^k = \left(\frac{h_1}{\|h\|} \right)^{k_1} \cdot \left(\frac{h_2}{\|h\|} \right)^{k_2} \cdot \dots \cdot \left(\frac{h_m}{\|h\|} \right)^{k_m} \cdot \|h\|^{r+1}$$

А производная $f^{(k)}(a + \theta h)$ ограничена в некоторой окрестности точки a , замыкание которой содержится в E , потому что $f^{(k)}$ непрерывна на E . Значит остаток в формуле Тейлора это $огр. \cdot \|h\|^r \cdot \|h\| = o(\|h\|^r)$, при $h \rightarrow 0$. Он называется остатком в форме Пеано.

Определение 31: Однородный многочлен от h степени n

$$d^n f(a, h) = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_m) \\ i_1 + \dots + i_m = n \\ i_1, \dots, i_m \geq 0}} \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_m!} \cdot \frac{\partial^n f}{(\partial x_1)^{i_1} (\partial x_2)^{i_2} \dots (\partial x_m)^{i_m}}(a) \cdot h_1^{i_1} \cdot h_2^{i_2} \cdot \dots \cdot h_m^{i_m}$$

называется **n -ым дифференциалом** функции f в точке a .

Тогда формулу Тейлора можно записать в виде $f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^r \frac{d^k f(a, h)}{k!} + o(\|h\|^r)$

§ Линейные отображения

Обозначения:

1. **$Lin(X, Y)$** — множество линейных отображений из X в Y . X, Y — линейные пространства над \mathbb{R} . $(Lin(X, Y))$ является линейным пространством над \mathbb{R} с сложением: $(A + B)(x) = A(x) + B(x)$, умножение на скаляр: $(\alpha A)(x) = \alpha A(x)$

Отображение $A: X \rightarrow Y$ называется линейным, если $\forall x_1, x_2 \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ выполнено $A(\alpha x_1 + x_2) = \alpha A(x_1) + A(x_2)$

2. Пусть $A \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, тогда **$\|A\|$** $\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ \|x\|=1}} \|Ax\|$ называется **нормой линейного оператора**

Замечание 9:

1. $\|A\| \in \mathbb{R}$ (конечное), т.к. из леммы 2 $\|Ax\| \leq C_A \|x\| = C_A$, где $C_A = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n,m} a_{ij}^2}$, a_{ij} — элементы матрицы A .

2. По теореме Вейерштрасса непрерывная функция на компакте достигает своего максимального значения, и так как линейные отображения непрерывны и множество $\{x \mid x \in \mathbb{R}^m, \|x\| = 1\}$ является компактом, то $\|A\| = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ \|x\|=1}} \|Ax\|$ (в конечномерном случае)
3. $\forall x \in \mathbb{R}^m$ выполнено $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$. Доказательство: для $x \neq 0_{\mathbb{R}^m}$ возьмём $\bar{x} = x/\|x\|$, тогда $\|A\bar{x}\| \leq \|A\|$ (т.к. $\|A\bar{x}\|$ это одно из значений, по которым берётся \sup в $\|A\|$) и, домножая на $\|x\|$, получаем доказываемое неравенство ($\|x\| \cdot \|A\bar{x}\| = \|x\| \cdot \|A \cdot x/\|x\|\|$; $1/\|x\|$ — скаляр $\Rightarrow = \|Ax\|$)
4. Если $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}^m \|Ax\| \leq C \cdot \|x\|$, то $\|A\| \leq C$, потому что, поделив на $\|x\|$ первое неравенство, получаем второе (т.к. $\|A \cdot x/\|x\|\|$ это одно из значений, по которым берётся \sup в $\|A\|$)

Лемма 5 (об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора):

Пусть X, Y — линейные пространства, $A \in \text{Lin}(X, Y)$, тогда эквивалентно:

1. A — ограничено (т.е. $\|A\|$ — конечна)
2. A — непрерывно в точке 0_X
3. A — непрерывно на X
4. A — равномерно непрерывно на X

Доказательство: $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ — очевидно.

$2 \Rightarrow 1$: Из определения непрерывности в 0_X : возьмём $\varepsilon = 1$, тогда $\exists \delta > 0$: если $\|x\| \leq \delta$, то $\|Ax\| < 1$, поэтому для $\forall x : \|x\| = 1$ выполнено $\|Ax\| = 1/\delta \cdot \|A(\delta x)\| \leq 1/\delta$, значит $\sup \|Ax\| \leq 1/\delta$

$1 \Rightarrow 4$: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon/\|A\| : \forall x_1, x_2$ если $\|x_2 - x_1\| < \delta$, то $\|Ax_2 - Ax_1\| \leq \varepsilon$, потому что $\|Ax_2 - Ax_1\| = \|A(x_2 - x_1)\| \leq \|A\| \cdot \|x_1 - x_2\| < \|A\| \cdot \delta = \varepsilon$

□

Теорема 9 (о пространстве линейных отображений):

1. $\|\cdot\|$ это норма в $\text{Lin}(X, Y)$
2. Если $A \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), B \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$, то $\|AB\|_{m,l} \leq \|A\|_{m,n} \cdot \|B\|_{n,l}$

Доказательство:

1. Проверка аксиом нормы:

a) $\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ \|x\|=1}} \|Ax\| \geq 0$ и $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0_{\text{Lin}(X,Y)}$

b) $\|\alpha A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ \|x\|=1}} \|\alpha Ax\| = |\alpha| \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ \|x\|=1}} \|Ax\| = |\alpha| \cdot \|A\|$

c) $\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq (\|A\| + \|B\|) \cdot \|x\| = \|A\| + \|B\|$

2. $\|BAx\| \leq \|B\| \cdot \|Ax\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot 1$ — это выполнено для любого $x \in \mathbb{R}^m : \|x\| = 1$, значит выполнено и для $\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ \|x\|=1}} \|BAx\| = \|AB\|$

□

Замечание 10: $\|A\| \stackrel{1}{=} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ \|x\|=1}} \|Ax\| \stackrel{2}{=} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ \|x\| \leq 1}} \|Ax\| \stackrel{3}{=} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ \|x\| < 1}} \|Ax\| \stackrel{4}{=} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ \|x\| \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \stackrel{5}{=} \inf\{C \in$

$$\mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}^m \|Ax\| \leq C \cdot \|x\|\}$$

- 1.

Теорема 10 (Лагранжа для отображений):

Пусть отображение $F: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ дифференцируемо на E (E — открытое), $[a, b] = \{a + \theta(b - a) \mid \theta \in [0, 1]\} \subset E$, тогда $\exists c \in (a, b)$, то есть $\exists \theta \in (0, 1) : c = a + \theta(b - a)$ такое что

$$\|F(b) - F(a)\| \leq \|F'(c)\| \cdot \|b - a\|$$

Доказательство: Пусть $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(t) = F(a + t(b - a))$, тогда f — дифференцируема на $[0, 1]$ и $f'(t) = F'(a + t(b - a))(b - a)$. По теореме 4 $\exists \theta \in (0, 1) : \|f(1) - f(0)\| \leq \|f'(\theta)\| \cdot (1 - 0)$, то есть

$$\|F(b) - F(a)\| \leq \|F'(a + \theta(b - a)) \cdot (b - a)\| \leq \|F'(c)\| \cdot \|b - a\|$$

□

Лемма 6 (о норме обратного отображения):

Пусть $B \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $\exists c > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^m \quad \|Bx\| \geq c\|x\|$, тогда B — обратим и $\|B^{-1}\| < 1/c$

Доказательство: $\text{Ker } B = \{0\}$, значит B — обратим.

Возьмём $y \in \mathbb{R}^m : \|y\| = 1$, тогда $\exists x \in \mathbb{R}^m : y = Bx$, тогда $x = B^{-1}y$, и так как $\|Bx\| \geq c\|x\|$, то $c\|B^{-1}y\| \leq \|BB^{-1}y\| = \|y\|$. Это выполнено $\forall y : \|y\| = 1$, поэтому $\sup_{\|y\|=1} \|B^{-1}y\| \leq 1/c$. □

Замечание 11: Если $A \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — обратим, то $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad \|x\| = \|A^{-1}Ax\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|$, значит $\|Ax\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} \cdot \|x\|$

Обозначение: $\Omega_m = \{A \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \mid A \text{ — обратим}\}$

Теорема 11 (об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому):

Пусть $L \in \Omega_m$, $M \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ — «близкий к обратимому», то есть $\|M - L\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|}$, тогда:

1. $M \in \Omega_m$
2. $\|M^{-1}\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|}$
3. $\|M^{-1} - L^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|} \|M - L\|$

Доказательство: Первые два пункта получаются с помощью леммы 6:

$$\begin{aligned} \|Mx\| &= \|Lx - (L - M)x\| \stackrel{\text{нер-во тр-ка}}{\geq} \|Lx\| - \|(L - M)x\| \stackrel{\text{зам. 11}}{\geq} \\ &\geq \frac{1}{\|L^{-1}\|} \|x\| - \|L - M\| \cdot \|x\| = \left(\frac{1}{\|L^{-1}\|} - \|L - M\| \right) \cdot \|x\| \end{aligned}$$

Третий пункт:

$$\|M^{-1} - L^{-1}\| = \|M^{-1}(L - M)L^{-1}\| \stackrel{\text{т. 9.2}}{\leq} \|M^{-1}\| \cdot \|L - M\| \cdot \|L^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|M - L\|} \|M - L\| \quad \square$$

Следствие 6: Непрерывность вычисления обратного оператора.

Отображение $f: \Omega_m \rightarrow \Omega_m$, $f(L) = L^{-1}$ — непрерывно, так как выполнено определение непрерывности: из последнего пункта теоремы 11 получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \varepsilon \cdot (\|L^{-1}\| \cdot (\|L^{-1}\| + \varepsilon))^{-1} : \forall M \in \Omega_m \text{ если } \|M - L\| < \delta, \text{ то } \|M^{-1} - L^{-1}\| < \varepsilon$$

Теорема 12 (о непрерывно дифференцируемых отображениях):

Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ дифференцируемо на D , то есть \exists отображение $f': D \rightarrow Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Тогда эквивалентно:

1. $f \in C^1(D)$, то есть \exists все $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ и они непрерывны на D ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$)
2. Отображение f' непрерывно на D

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2$: Из определения непрерывности всех $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ на D получаем, что $\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: $\forall \bar{x} \in D$ если $\|x - \bar{x}\| < \delta$, то $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, m\} \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{mn}}$, и с помощью зам. 9.1 получаем

$$\|f'(x) - f'(\bar{x})\| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n,m} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}) \right)^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{\varepsilon^2}{mn}} = \varepsilon$$

получилось определение непрерывности f' на D .

$2 \Rightarrow 1$: Определение непрерывности f' на D :

$$\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \bar{x} \in D \text{ если } \|x - \bar{x}\| < \delta, \text{ то } \|f'(x) - f'(\bar{x})\| < \varepsilon$$

И пусть $h = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^m$, где 1 стоит на k -ом месте, тогда

$$\|(f'(x) - f'(\bar{x}))h\| \leq \|f'(x) - f'(\bar{x})\| \cdot \|h\| < \varepsilon, \text{ то есть } \sqrt{\sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_l}{\partial x_k}(\bar{x}) \right)^2} < \varepsilon$$

тогда и отдельное (i -ое) слагаемое $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{x}) \right| < \varepsilon$ получилось определение непрерывности $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ на D .

□

Определение 32: Пусть $f: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{Int } E$, тогда a называется **точкой локального максимума**, если $\exists U(a)$ — окрестность точки $a: \forall x \in U(a) \cap E f(x) \leq f(a)$, **строгого локального максимума**, если $\exists U(a)$ — окрестность точки $a: \forall x \in U(a) \cap E f(x) < f(a)$. Аналогично определяется **точка (строгого) локального минимума** (знак меняется на противоположный). Точка a называется **точкой (строгого) локального экстремума**, если она является точкой (строгого) локального максимума или точкой (строгого) локального минимума.

Теорема 13 (Ферма):

Пусть функция $f: E \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема на E , $a \in \text{Int } E$ — точка локального экстремума, тогда \forall направления l (опр. 26) $\frac{\partial f}{\partial l}(a) = 0$.

Доказательство: Определим функцию $g: U(0) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = f(a + tl)$, тогда g — дифференцируема в окрестности нуля и $g'(0) = 0$, потому что 0 — точка локального экстремума функции g (т.к. g — сужение f на прямую, проходящую через точку a), при этом

$$g'(t) = f'(a + tl) \cdot l = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a + tl), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a + tl), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a + tl) \right) \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix} \stackrel{\text{зам. 6}}{=} \frac{\partial f}{\partial l}(a + tl)$$

значит $\frac{\partial f}{\partial l}(a) = 0$.

□

Следствие 7: *Необходимое условие экстремума:* Если $a \in \text{Int } E \subset \mathbb{R}^m$ — точка локального экстремума функции $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, то $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ (в теореме Ферма (т. 13) можно взять $l = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\}$, где 1 на i -ом месте).

Следствие 8: *Теорема Ролля:* Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$ — компакт, функция $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на K , дифференцируема на $\text{Int } K$, сужение f на границу $K: f|_{\partial K} = \text{const}$, тогда $\exists a \in \text{Int } K: \text{grad } f(a) = 0$.
Доказательство: по теореме Вейерштрасса f достигает \max и \min на K . Если точки \max и \min находятся на границе K , то $f = \text{const}$, значит $\text{grad } f(a) = 0$. Если точка \max или \min находится в $\text{Int } K$, то по теореме Ферма (т. 13) в этой точке $\text{grad } f = 0$ (потому что все частные производные равны нулю в этой точке).

Определение 33: Отображение $Q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ называется **квадратичной формой**, если $Q(h)$ это однородный многочлен второй степени, то есть, если $Q(h) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} h_i h_j$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

1. Квадратичная форма называется **положительно определённой**, если $\forall h \neq 0_{\mathbb{R}^m} Q(h) > 0$
2. Квадратичная форма называется **отрицательно определённой**, если $\forall h \neq 0_{\mathbb{R}^m} Q(h) < 0$
3. Квадратичная форма называется **неопределённой** (незнакоопределённой), если $\exists h, \bar{h}: Q(h) > 0, Q(\bar{h}) < 0$
4. Квадратичная форма называется **положительной полуопределённой** (положительно определённая, вырожденная), если $\forall h Q(h) \geq 0$ и $\exists h_0 \neq 0_{\mathbb{R}^m}: Q(h_0) = 0$

Лемма 7 (об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах):

1. Пусть $Q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — положительно определённая квадратичная форма, тогда $\exists \gamma_Q > 0: \forall x \in \mathbb{R}^m Q(x) \geq \gamma_Q \cdot \|x\|^2$
2. Пусть $p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ — норма, тогда $\exists c_1, c_2 > 0: \forall x \in \mathbb{R}^m c_1 \cdot \|x\| \leq p(x) \leq c_2 \cdot \|x\|$

Доказательство:

1. Пусть $\gamma_Q = \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ \|x\|=1}} Q(x)$ (по теореме Вейерштрасса минимум достигается), тогда $\gamma_Q > 0$ и

$$Q(x) = \|x\|^2 \cdot Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \|x\|^2 \cdot \gamma_Q$$

2. Пусть $c_1 = \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ \|x\|=1}} p(x)$, $c_2 = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^m \\ \|x\|=1}} p(x)$. Чтобы \min и \max достигались по теореме Вейерштрасса, надо проверить непрерывность функции p :

$$\begin{aligned} |p(x) - p(y)| &\stackrel{\text{нер-во тр-ка для } p}{\leq} p(x - y) \stackrel{\text{разлож. по базису } e_k}{=} p\left(\sum_{k=1}^m (x_k - y_k) e_k\right) \stackrel{\text{нер-во тр-ка для } p}{\leq} \sum_{k=1}^m p((x_k - y_k) e_k) \stackrel{x_k - y_k \text{ — это скаляр}}{=} \\ &= \sum_{k=1}^m |x_k - y_k| \cdot p(e_k) \stackrel{\text{нер-во Коши-Буняковского}}{\leq} \sqrt{\sum_{k=1}^m |x_k - y_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^m (p(e_k))^2} = M \cdot \|x - y\| \end{aligned}$$

значит $\forall x \in \mathbb{R}^m \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon/M: \forall y \in \mathbb{R}^m$ если $\|x - y\| < \delta$, то $|p(x) - p(y)| \leq \varepsilon$. Тогда

$$p(x) = \|x\| \cdot p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq c_1 \cdot \|x\| \quad \text{и аналогично} \quad p(x) \leq c_2 \cdot \|x\|$$

□

Теорема 14 (Достаточное условие экстремума):

Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, $f \in C^2(E)$ ($f: E \rightarrow \mathbb{R}$), $a \in \text{Int } E$, $\text{grad } f(a) = 0_{\mathbb{R}^m}$, Q — квадратичная форма, $Q(h) = d^2 f(a, h)$ (опр. 31), тогда

1. Если Q положительно определённая, то a — точка локального минимума
2. Если Q отрицательно определённая, то a — точка локального максимума
3. Если Q неопределённая, то a не является точкой локального экстремума
4. Если Q полуопределённая, то a может быть, а может не быть точкой локального экстремума

Доказательство:

1. Из формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа (теорема 8) $\exists \theta \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= df(a, h) + \frac{1}{2} d^2 f(a + \theta h, h) = \\ &= \frac{1}{2} (d^2 f(a + \theta h, h) = \frac{1}{2} (Q(h) + d^2 f(a + \theta h, h) - Q(h)) = \\ &= \frac{1}{2} (Q(h) + f''_{x_1 x_1}(a + \theta h) \cdot h_1 h_1 + f''_{x_1 x_2}(a + \theta h) \cdot h_1 h_2 + \dots + f''_{x_1 x_m}(a + \theta h) \cdot h_1 h_m + \dots + \\ &\quad + f''_{x_m x_1}(a + \theta h) \cdot h_m h_1 + f''_{x_m x_2}(a + \theta h) \cdot h_m h_2 + \dots + f''_{x_m x_m}(a + \theta h) \cdot h_m h_m - \\ &\quad - f''_{x_1 x_1}(a) \cdot h_1 h_1 - f''_{x_1 x_2}(a) \cdot h_1 h_2 - \dots - f''_{x_1 x_m}(a) \cdot h_1 h_m - \dots - \\ &\quad - f''_{x_m x_1}(a) \cdot h_m h_1 - f''_{x_m x_2}(a) \cdot h_m h_2 - \dots - f''_{x_m x_m}(a) \cdot h_m h_m) \end{aligned}$$

Модуль выделенных слагаемых $\leq \text{б.м.} \cdot \|h\|^2$ при $h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^m}$ (так как $f''_{x_i x_j}$ — непрерывна на E , то есть $f''_{x_i x_j}(a + \theta h) \xrightarrow{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^m}} f''_{x_i x_j}(a)$, а $|h_i h_j| \leq \|h\|^2$ (и применяем неравенство треугольника, чтобы оценить модуль суммы)). Тогда, т.к. $\forall B \in \mathbb{R} \quad B \geq -|B|$

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &\geq \frac{1}{2} (Q(h) - |\dots|) \geq \frac{1}{2} (Q(h) - \text{б.м.} \cdot \|h\|^2) \geq \frac{1}{2} (\gamma_Q \cdot \|h\|^2 - \text{б.м.} \cdot \|h\|^2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \|h\|^2 \cdot (\gamma_Q - \text{б.м.}) > 0 \quad \text{— в некоторой окрестности точки } a, \text{ т.к. } \gamma_Q > 0 \end{aligned}$$

Значит a — точка строгого локального минимума по определению.

2. У функции $g = -f$ в точке a локальный минимум (из пункта 1), значит у f локальный максимум в точке a .
3. По определению неопределённости квадратичной формы $\exists h^* \in \mathbb{R}^m : Q(h^*) > 0$, тогда $\forall t \in \mathbb{R}^m$ аналогично первому пункту получаем, что

$$f(a + th^*) - f(a) \geq \frac{1}{2} (Q(th^*) - \text{б.м.} \cdot \|th^*\|^2) = \frac{1}{2} (Q(h^*) - \text{б.м.}) \cdot t^2 \quad \text{при } t \rightarrow 0_{\mathbb{R}^m}$$

значит при достаточно маленьком t $f(a + th^*) - f(a) > 0$. Аналогично для вектора $h^\circ \in \mathbb{R}^m : Q(h^\circ) < 0$ при маленьком t $f(a + th^\circ) - f(a) < 0$. Значит в любой окрестности точки a есть точка $(a + th^*)$, в которой значение $> f(a)$ и точка $(a + th^\circ)$, в которой значение $< f(a)$, то есть локального экстремум в точке a нет.

4. *Пример:* $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^4$, $a = (0, 0)$, тогда $\text{grad } f(a) = 0$ и $Q(h) = 2h_1^2$ — полуопределённая квадратичная форма, и в точке a нет локального экстремума (потому что в любой окрестности точки a есть точки $(0, \varepsilon)$ и $(\varepsilon, 0)$, в первой значение отрицательное, во второй положительное), а для функции $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$ всё тоже самое, но есть локальный экстремум в точке a (потому что функция положительная и только в нуле равна нулю).

□

§ Диффеоморфизм

Определение 34: Область в \mathbb{R}^m это открытое, связное множество

Определение 35: Отображение $f: O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (O — область) называется диффеоморфизмом, если оно дифференцируемо, $\exists f^{-1}$ и f^{-1} — дифференцируемо.

Замечание 12: Если f — диффеоморфизм, то, дифференцируя равенство $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, получаем $(f^{-1} \circ f)'(x) = 1_{m \times m}$ или $(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1_{m \times m}$, то есть $(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$, где $y = f(x)$, значит производный оператор диффеоморфизма обратим.

Лемма 8 (о приближённых значениях дифференцируемого отображения):

Пусть $f: O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, f — дифференцируемо в точке $x_0 \in O$ (O — открытое), тогда

1. Если $\det f'(x_0) \neq 0$, то $\exists \delta > 0, c > 0 : \forall h : \|h\| < \delta \quad \|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \geq c \cdot \|h\|$
2. Если $f \in C^1(O)$, $B(x_0, r) \subset O$, то при $\|h\| < r$ выполнено $\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| \leq A \cdot \|h\|$, где $A = \sup_{x \in [x_0, x_0 + h]} \|f'(x) - f'(x_0)\|$, где $[x_0, x_0 + h] = \{x_0 + th \mid t \in [0, 1]\}$

Доказательство:

1. Так как производная — это линейный оператор, то

$$\|h\| = \left\| (f'(x_0))^{-1} \cdot f'(x_0) \cdot h \right\| \leq \left\| (f'(x_0))^{-1} \right\| \cdot \|f'(x_0) \cdot h\| \Rightarrow \|f'(x_0) \cdot h\| \geq \frac{\|h\|}{\left\| (f'(x_0))^{-1} \right\|}$$

значит

$$\begin{aligned} \|f(x_0 + h) - f(x_0)\| &\stackrel{\text{опр. диф-сти}}{=} \|f'(x_0)h + o(h)\| \stackrel{\text{нер-во тр-ка}}{\geq} \|f'(x_0)h\| - \|o(h)\| \geq \\ &\geq \frac{\|h\|}{\left\| (f'(x_0))^{-1} \right\|} - \|б.м.\| \cdot \|h\| \geq \frac{1}{2 \left\| (f'(x_0))^{-1} \right\|} \cdot \|h\| \quad \text{при } h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^m} \end{aligned}$$

потому что из определения бесконечно малой $\exists \delta : \text{если } \|h\| < \delta, \text{ то } \|б.м.\| < \frac{1}{2} \left\| (f'(x_0))^{-1} \right\|^{-1}$

2. Пусть $H(x) = f(x) - f'(x_0) \cdot x$, тогда $H'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. Поэтому

$$H(x_0 + h) - H(x_0) = f(x_0 + h) - f'(x_0) \cdot (x_0 + h) - f(x_0) + f'(x_0) \cdot x_0 = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot h$$

$$\begin{aligned} \text{То есть } \|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| &= \|H(x_0 + h) - H(x_0)\| \stackrel{\text{теор.10}}{\leq} \|H'(x_0 + \theta h)\| \cdot \|h\| = \\ &= \|f'(x_0 + \theta h) - f'(x_0)\| \cdot \|h\| \leq A \cdot \|h\| \quad (\text{т.к. } \sup \leq \text{значений по которым он берётся}) \end{aligned}$$

□

Теорема 15 (о сохранении области):

Пусть отображение $f: O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо на O (O — открытое), $\forall x \in O \det f'(x) \neq 0$, тогда $f(O)$ (образ O) — открытое множество

Доказательство: Возьмём $x_0 \in O$. Нужно доказать, что $f(x_0) \in \text{Int } f(O)$. По лемме 8.1 $\exists c, \delta > 0$: $\forall h \in \overline{B(0, \delta)} \quad \|f(x_0 + h) - f(x_0)\| \geq c \cdot \|h\|$. Пусть r это половина расстояния от $f(x_0)$ до $f(S(x_0, \delta))$ (расстояние от точки w до сферы S это $\inf_{s \in S} \rho(w, s)$), тогда $r > 0$, потому что функция $\varphi: f(S(x_0, \delta)) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\varphi(y) = \rho(y, f(x_0))$ непрерывна (т.к. $|\varphi(a) - \varphi(b)| = |\rho(a, f(x_0)) - \rho(b, f(x_0))| \leq \rho(a, b)$), задана на компакте (т.к. сфера — компактное множество в \mathbb{R}^m , и f — непрерывная функция) и непрерывная функция достигает минимального значения по теореме Вейерштрасса, и оно больше нуля (пусть минимальное значение достигается в точке $y^* = f(x^*)$, тогда $\varphi(y^*) = \|f(x^*) - f(x_0)\| \geq c \cdot \|x^* - x_0\| = c\delta > 0$). Проверим, что $B(f(x_0), r) \subset f(O)$, то есть что $\forall y \in \mathbb{R}^m: \|y - f(x_0)\| < r \quad \exists x \in O: f(x) = y$. Зафиксируем $y: \|y - f(x_0)\| < r$ и определим функцию

$$g: \overline{B(x_0, \delta)} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad g(x) = \|f(x) - y\|^2$$

Тогда $g(x_0) = \|f(x_0) - y\|^2 < r^2$, а на $S(x_0, \delta)$ $g(x) \geq r^2$ (т.к. $\|f(x) - y\| \geq \|f(x) - f(x_0)\| - \|f(x_0) - y\| \geq 2r - r = r$). То есть g достигает минимального значения (т.к. это непрерывная функция, заданная на компакте) внутри шара. По теореме Ферма (т. 13) в этой точке все частные производные равны нулю. Так как $g(x) = (f_1(x) - y_1)^2 + (f_2(x) - y_2)^2 + \dots + (f_m(x) - y_m)^2$, то, вычисляя производные, получаем

$$\begin{cases} g'_{x_1}(x) = 2(f_1(x) - y_1) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + 2(f_2(x) - y_2) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) + \dots + 2(f_m(x) - y_m) \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) = 0 \\ g'_{x_2}(x) = 2(f_1(x) - y_1) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) + 2(f_2(x) - y_2) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) + \dots + 2(f_m(x) - y_m) \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) = 0 \\ \vdots \\ g'_{x_m}(x) = 2(f_1(x) - y_1) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) + 2(f_2(x) - y_2) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x) + \dots + 2(f_m(x) - y_m) \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x) = 0 \end{cases}$$

То есть столбец $2(f(x) - y)^T \cdot f'(x)$ — нулевой. Тогда, домножая $2(f(x) - y)^T \cdot f'(x) = 0$ на $\frac{1}{2}(f'(x))^{-1}$ (обратная матрица существует, т.к. по условию $\det f'(x) \neq 0$), получаем, что $f(x) = y$. Таким образом, $x: f(x) = y$ это точка, в которой $g(x)$ принимает минимальное значение. \square

Следствие 9: Пусть $f: O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, O — открытое, $m > l$, $f \in C^1(O)$, $\forall x \in O \text{ rank}(f'(x)) = l$, тогда $f(O)$ — открытое множество.

Доказательство: Фиксируем $x_0 \in O$. Будем считать, что первые l столбцов производной в точке x_0 линейно не зависимы (иначе можно перенумеровать координаты, чтобы это было так), то есть

$$\det \left(\underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)}_{A_l} \right)_{\substack{i \in \{1, 2, \dots, l\} \\ j \in \{1, 2, \dots, l\}}} \neq 0$$

Тогда \exists окрестность $U(x_0)$, в которой этот определитель не равен нулю (так как определитель — это непрерывная функция, потому что он является суммой и произведением непрерывных функций — частных производных). Пусть $\tilde{f}: O \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\tilde{f}(x) = (f(x), x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_m)$, тогда

$$\det \tilde{f}'(x_0) = \det \begin{pmatrix} A_l & A_{m-l} \\ 0 & E \end{pmatrix} = \det A_l \neq 0$$

Значит по теореме 15 $\tilde{f}(O)$ — открытое множество. А $f(O)$ это проекция $\tilde{f}(O)$ на \mathbb{R}^l (т.е. отображение, сопоставляющее точке $(x_1, x_2, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_m) \in \tilde{f}(O)$ точку $(x_1, x_2, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^l$), и при проекции открытость множества сохраняется (потому что проекция шара это шар и если $B \subset A$, то проекция B содержится в проекции A) \square

Теорема 16 (о гладкости обратимого отображения):

Пусть $f: O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in C^r(O)$ ($r \in \mathbb{N}$), f — обратимо и $\forall x \in O \det f'(x) \neq 0$. Тогда $f^{-1} \in C^r(f(O))$

Доказательство: Нету (нужна только формулировка) □

Теорема 17 (о локальной обратимости):

$f: O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(O)$, $x_0 \in O$, $\det f'(x_0) \neq 0$, тогда $\exists U(x_0) : f|_{U(x_0)}$ — диффеоморфизм.

Доказательство: Если проверить обратимость f , то по теор. 16 обратное отображение будет дифференцируемым. Так как $f'(x_0)$ — обратимый линейный оператор, то (по зам. 11) $\exists c > 0 : \forall h \in \mathbb{R}^m \|f'(x_0) \cdot h\| \geq c \cdot \|h\|$. Возьмём окрестность $U(x_0) = B(x_0, r) \subset O : \forall x \in U(x_0) \det f'(x) \neq 0$ (такая окрестность существует, т.к. $\det f'(x)$ — это непрерывная функция, потому что является суммой и произведением непрерывных функций — частных производных) и $\|f'(x) - f'(x_0)\| < c/4$ (это можно сделать по определению непрерывности отображения f' , оно непрерывно по т. 12). Пусть $x, y \in U(x_0)$, $y = x + h$, тогда

$$f(y) - f(x) = f(x + h) - f(x) = f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \dots + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \dots$$

Значит по неравенству треугольника:

$$\|f(y) - f(x)\| \geq \|f'(x_0)h\| - \|f(x + h) - f(x) - f'(x)h\| - \|f'(x)h - f'(x_0)h\|$$

По т. 8.2 $\|f(x + h) - f(x) - f'(x)h\| \leq A \cdot \|h\|$, где $A = \sup_{t \in [x, x+h]} \|f'(t) - f'(x)\|$ и так как по неравенству треугольника $A \leq \sup_{t \in [x, x+h]} (\|f'(t) - f'(x_0)\| + \|f'(x_0) - f'(x)\|) \leq c/4 + c/4 = c/2$, значит

$$\|f(y) - f(x)\| \geq c \cdot \|h\| - c/2 \cdot \|h\| - c/4 \cdot \|h\| = c/4 \cdot \|x - y\|$$

То есть $f|_{U(x_0)}$ инъективно, поэтому \exists обратное, заданное на $f(U(x_0))$ □

Теорема 18 (о локальной обратимости в терминах систем уравнений):

Пусть $f: O \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(O)$, $x^0 \in O$, $\det f'(x^0) \neq 0$, f_1, f_2, \dots, f_m — координатные функции отображения f , $y^0 = f(x^0)$. Тогда $\exists U(y^0)$ такая, что система

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = y_m \end{cases}$$

имеет решение при любом $y \in U(y^0)$ и $x_1 = g_1(y_1, y_2, \dots, y_m)$, $x_2 = g_2(y_1, y_2, \dots, y_m)$, \dots , $x_m = g_m(y_1, y_2, \dots, y_m)$, где $g = f^{-1} \in C^1(U(y^0))$

Теорема 19 (о неявном отображении):

Пусть $f: O \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, O — открытое, $f \in C^r(O)$, точка $(a, b) \in O$ такая, что $f(a, b) = 0$, $\det f'_y(a, b) \neq 0$, тогда $\exists P(a) \subset \mathbb{R}^m, Q(b) \subset \mathbb{R}^n$ — окрестности точек a и b такие, что \exists единственное отображение $\varphi: P \rightarrow Q$ такое, что $\forall x \in P f(x, \varphi(x)) = 0$, при этом $\varphi \in C^r(P)$

Доказательство: Пусть $\Phi: O \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$, $\Phi(x, y) = (x, f(x, y))$, тогда $\det \Phi'(x) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ f'_x & f'_y \end{pmatrix} = \det f'_y \neq 0$, значит по теореме 17 существует окрестность точки (a, b) , в которой f — диффеоморфизм класса C^r . Возьмём подмножество $\tilde{U} = P_1(a) \times Q(b)$ ($P_1(a), Q(b)$ — окрестности точек a, b), содержащееся в этой окрестности. Пусть $P = \Phi(\tilde{U}) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_{\mathbb{R}^n}\})$ □

§ Функциональные последовательности

Определение 36: Последовательность функций — это отображение из \mathbb{N} в множество функций.

Определение 37: Пусть X — множество, Y — метрическое пространство, $f, f_1, f_2, \dots : X \rightarrow Y$, последовательность отображений f_n **сходится поточечно** к отображению f на множестве $E \subset X$ означает, что $\forall x_0 \in E \ f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$, т.е.

$$\forall x_0 \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \text{ выполнено } \rho(f_n(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$$

Определение 38: Последовательность отображений f_n **сходится равномерно** к отображению f на множестве E если $\sup_{x \in E} \rho(f_n(x), f(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \ \forall x \in E \text{ выполнено } \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Обозначение: $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} f$

Замечание 13:

1. Из равномерной сходимости следует поточечная сходимость (наоборот нет)
2. Если $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} f$ и $E_0 \subset E$, то $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E_0} f$

Лемма 9 (или следующий пункт замечания):

Пусть X — множество, Y — метрическое пространство, $\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ — ограничено}\}$ (f — ограничено означает, что $\exists y_0 \in Y, r \in \mathbb{R} : \forall x \in X$ выполнено $f(x) \in B(y_0, r)$). Тогда функция $\rho_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\rho_{\mathcal{F}}(f_1, f_2) = \sup_{x \in X} \rho(f_1(x), f_2(x))$ является метрикой на \mathcal{F} .

Доказательство: Выполнение первых двух аксиом метрики (опр. 4) следует из их выполнения в метрике на Y . Неравенство треугольника: при любом $x \in X$ выполнено

$$\rho(f_1(x), f_2(x)) \leq \rho(f_1(x), g(x)) + \rho(g(x), f_2(x)) \leq \rho_{\mathcal{F}}(f_1, g) + \rho_{\mathcal{F}}(g, f_2) \quad \forall f_1, f_2, g \in \mathcal{F}$$

Правая часть неравенства не зависит от x , поэтому она является верхней границей (для множества чисел $\{\rho(f_1(x), f_2(x)) \mid x \in X\}$), тогда она больше либо равна точной верхней границы $\Rightarrow \rho_{\mathcal{F}}(f_1, f_2) \leq \rho_{\mathcal{F}}(f_1, g) + \rho_{\mathcal{F}}(g, f_2)$ \square

Теорема 20 (Стокса-Зайдля о непрерывности предельной функции):

Отображение f и последовательность отображений f_n действуют $X \rightarrow Y$, где X, Y — метрические пространства. Пусть все отображения из последовательности непрерывны в точке $c \in X$ и $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f$. Тогда f непрерывна в точке c .

Доказательство: Применяя два раза неравенство треугольника к $\rho(f(x), f(c))$, получаем

$$\rho(f(x), f(c)) \leq \rho(f(x), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f(c)) \leq \rho(f(x), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f_n(c)) + \rho(f_n(c), f(c))$$

Из определения равномерной сходимости f_n к f ($\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \ \sup_{x \in X} \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$) получаем, что $\forall \varepsilon > 0$ первое и последнее слагаемое в правой части неравенства $< \varepsilon$. Из определения непрерывности f_n в точке c ($\forall \varepsilon > 0 \ \exists U(c) : \text{если } x \in U(c), \text{ то } \rho(f_n(x), f_n(c)) < \varepsilon$) получаем, что $\exists U(c)$ — окрестность точки c такая, что если $x \in U(c)$, то второе слагаемое

из правой части неравенства $< \varepsilon$. Складывая, получаем, что $\rho(f(x), f(c)) < 3 \cdot \varepsilon$. Получилось определение непрерывности f в точке c . \square

Следствие 10: Если $f_n \in C(X)$ и $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f$, то $f \in C(X)$.

Замечание 14:

1. В теореме 20 достаточно того, чтобы X было топологическим пространством.
2. В теореме 20 достаточно требовать равномерную сходимость f_n к f только в некоторой окрестности точки c .
3. В следствии (сл. 10) достаточно требовать локальную равномерную сходимость, то есть $\forall x \in X \exists U(x) : f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{U(x)} f$. Из локальной равномерной сходимости не следует обычная.

Например, $X = (0, 1)$, $f_n(x) = x^n$:

Поточечная сходимость: $x^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ на $(0, 1)$.

Локальная равномерная сходимость: $\sup_{(\alpha, \beta)} |x^n - 0| = \beta^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \subset (0, 1), \beta \neq 1$

Обычной равномерной сходимости нет: $\sup_{(0,1)} |x^n - 0| = 1$

Теорема 21 (о полноте пространства непрерывных функций на компакте):

Пусть K — компактное метрическое пространство, тогда $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ — непрерывно}\}$ есть полное метрическое пространство относительно метрики $\rho(f_1, f_2) = \sup_K |f_1(x) - f_2(x)|$

1. $\rho(f_1, f_2) = \sup_K |f_1(x) - f_2(x)|$ является метрикой по лемме 9, т.к. непрерывные функции на компакте — ограничены (теорема Вейерштрасса)
2. Метрическое пространство называется компактным, если из любого покрытия пространства открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.
3. Метрическое пространство называется полным, если в нём любая фундаментальная последовательность сходится.
4. Последовательность x_n называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N \text{ выполнено } \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

5. Если последовательность сходится, то она фундаментальная. Доказательство: $\forall \varepsilon > 0$ из определения сходимости x_n к a ($\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N$ выполнено $\rho(x_n, a) < \varepsilon$) возьмём $n, m > N$, тогда, используя неравенство треугольника, получаем $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(a, x_m) < 2\varepsilon$. Получилось определение фундаментальности.

Доказательство: Нужно доказать, что любая фундаментальная последовательность сходится. Возьмём фундаментальную последовательность f_n . Тогда $\forall x_0 \in K$ последовательность $f_n(x_0)$ — фундаментальная, и она вещественная \Rightarrow она сходится. Обозначим её предел $f(x_0)$. Определение фундаментальности $f_n(x)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N \forall x_0 \in K \text{ выполнено } |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$$

При каждом фиксированном x_0 делаем предельный переход при $m \rightarrow \infty$, получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall x_0 \in K \text{ выполнено } |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

То есть f_n сходится к f равномерно. Тогда f непрерывна на K по теореме 20, то есть $f \in C(K)$, а сходимость последовательности в $C(X)$ — это равномерная сходимость функциональных последовательностей. \square

Замечание 15:

1. Пространство $\mathcal{F} = \{f: X \rightarrow Y \mid f \text{ — ограничено,}\}$, где X — множество, Y — полное метрическое пространство, тоже является полным.

Доказательство останется тем же, только в конце нельзя будет применить теорему 20. Но если $f_n \in \mathcal{F}$ и $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f$, то $f \in \mathcal{F}$. Доказательство: определение ограниченности f_n :

$$\forall n \exists y_n \in Y, r_n \in \mathbb{R} : \forall x \in X \text{ выполнено } f_n(x) \in B(y_n, r_n)$$

Определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall x \in E \text{ выполнено } \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Тогда возьмём $\varepsilon_0 > 0$, найдём соответствующее N , возьмём $n = N + 1$ и для них при любом $x \in X$ будет выполнено $\rho(f(x), f_{N+1}(x)) < \varepsilon_0$ и $\rho(y_{N+1}, f_{N+1}(x)) < r_{N+1} \Rightarrow$ по неравенству треугольника $\rho(f(x), y_{N+1}) < r_{N+1} + \varepsilon_0$, то есть f — ограничено.

2. Пространство $C_M(K) = \{f: K \rightarrow Y \mid f \text{ — непрерывно}\}$, где K — компактное метрическое пространство, Y — полное метрическое пространство, тоже является полным.
3. **Критерий Больцано-Коши равномерной сходимости функциональной последовательности:** так как сходимость последовательности в $C(K)$ — это равномерная сходимость функциональных последовательностей, и $C(K)$ — полное пространство (по теореме 21), то в $C(K)$ равномерная сходимость последовательности $f_n(x) \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N \text{ выполнено } \sup_{x \in K} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Теорема 22 (о предельном переходе под знаком интеграла для последовательностей):

Пусть $f_n \in C[a, b]$ ($f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$) и $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[a, b]} f$, тогда $\int_a^b f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_a^b f$

Доказательство: Используя определение равномерной непрерывности, получаем

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \sup_{[a, b]} |f_n - f| \cdot (b - a) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

По теореме 20 f непрерывна, значит $\int_a^b f$ имеет смысл \square

Теорема 23 (правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру):

Пусть $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, f и f'_y — непрерывны на $[a, b] \times [c, d]$, $\Phi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, тогда Φ — дифференцируема на $[c, d]$ и $\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$

Доказательство: $\forall y \in [c, d], \forall h \in \mathbb{R} : y + h \in [c, d]$ верно:

$$\frac{\Phi(y + h) - \Phi(y)}{h} = \frac{\int_a^b f(x, y + h) dx - \int_a^b f(x, y) dx}{h} \stackrel{\text{т. Лагранжа}}{=} \int_a^b f'_y(x, y + \theta_h h) dx, \quad \theta_h \in (0, 1)$$

По теореме Кантора (непрерывная функция на компакте равномерно непрерывна) f'_y равномерно непрерывна на $[a, b] \times [c, d]$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [a, b] \times [c, d], \text{ если } \|x_1 - x_2\| < \delta, \text{ то } |f'_y(x_1) - f'_y(x_2)| < \varepsilon$$

Пользуясь этим определением, фиксируем $\varepsilon > 0$, находим $\delta > 0$. Тогда, при $|h| < \delta$, так как $\|(x, y + \theta_h h) - (x, y)\| < \delta$, то $|f'_y(x, y + \theta_h h) - f'_y(x, y)| < \varepsilon$ или

$$\left| \int_a^b f'_y(x, y + \theta_h h) dx - \int_a^b f'_y(x, y) dx \right| \leq \int_a^b |f'_y(x, y + \theta_h h) - f'_y(x, y)| dx \leq \varepsilon \cdot (b - a),$$

потому что подынтегральная функция не превосходит ε . Значит

$$\left| \frac{\Phi(y + h) - \Phi(y)}{h} - \int_a^b f'_y(x, y) dx \right| \leq \varepsilon \cdot (b - a), \text{ то есть } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(y + h) - \Phi(y)}{h} = \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

И по определению производной $\Phi'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$. □

Теорема 24 (о предельном переходе под знаком производной):

$f_n \in C^1 \langle a, b \rangle$, $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ поточечно на $\langle a, b \rangle$, $f'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\langle a, b \rangle} \varphi$, тогда $f \in C^1 \langle a, b \rangle$ и $f' = \varphi$ на $\langle a, b \rangle$

Доказательство: Пусть $x_0 \in \langle a, b \rangle$, тогда $\forall x \in \langle a, b \rangle$ по теореме 22 $\int_{x_0}^x f'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{x_0}^x \varphi$, то есть $f_n(x) - f_n(x_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{x_0}^x \varphi$, а по условию $f_n(x) - f_n(x_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x) - f(x_0)$, значит $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x \varphi$, тогда (так как интеграл с переменным верхним пределом дифференцируем) f — дифференцируема и $f'(x) = \varphi(x)$, то есть $f' \in C^1 \langle a, b \rangle$ (по теореме 20 φ непрерывна). □

Определение 39: Пусть $u_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, где X — множество, тогда **функциональный ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **сходится равномерно** (**поточечно**), если сходится равномерно (поточечно) функциональная последовательность из **частичных сумм** $S_k(x) = \sum_{n=1}^k u_n(x)$. Функция $S(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x)$ называется суммой функционального ряда. То есть ряд сходится равномерно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k > N \forall x \in X \text{ выполнено } |S(x) - S_k(x)| < \varepsilon$$

$R_n(x) = S(x) - S_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x)$ называется **остатком** функционального ряда.

Замечание 16:

1. Ряд равномерно сходится на $E \Leftrightarrow R_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} 0$ (следует прямо из определения)
2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E , то $u_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} 0$ (т. к. $u_k(x) = R_{k-1}(x) - R_k(x)$)

Теорема 25 (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда):

Пусть $u_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ (X — множество), $C_n \in \mathbb{R} : |u_n| \leq C_n \forall n \in \mathbb{N}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ — сходится. Тогда функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — сходится равномерно на X .

Доказательство: Чтобы доказать равномерную сходимость функционального ряда, можно проверить сходится ли равномерно остаток ряда к нулю (зам. 16.1)

$$\sup_{x \in X} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \sup_{x \in X} \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} C_n \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

Замечание 17. Критерий Больцано-Коши: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на $E \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in E \text{ выполнено } |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+k}(x)| < \varepsilon$$

Это верно, потому что это критерий Больцано-Коши сходимости функциональной последовательности (зам. 15), записанный для частичных сумм, а равномерная сходимость ряда это равномерная сходимость последовательности из его частичных сумм.

Тогда ряд не сходится равномерно \Leftrightarrow

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n > N, \exists k \in \mathbb{N}, \exists x \in E : \text{ выполнено } |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+k}(x)| > \varepsilon$$

Теорема 26 (Стокса-Зайдля для рядов):

Пусть $u_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывны в точке $x_0 \in X$ (X — метрическое пространство) и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно к функции $S(x)$. Тогда $S(x)$ — непрерывна в точке x_0

Доказательство: Частичная сумма $S_k(x) = \sum_{n=1}^k u_n(x)$ — непрерывна в точке x_0 и $S_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{X} S(x)$ по определению равномерной сходимости ряда (опр. 39). Тогда по теореме Стокса-Зайдля для последовательностей (т. 20) $S(x)$ непрерывна в точке x_0 . □

Теорема 27 (об интегрировании функционального ряда):

Пусть $u_n \in C[a, b]$ ($u_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$), ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно к функции $S(x)$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) = \int_a^b S(x)$$

Доказательство: Частичная сумма $S_k(x) = \sum_{n=1}^k u_n(x) \in C[a, b]$ и $S_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{X} S(x)$ по определению равномерной сходимости ряда (опр. 39). Тогда по теореме 22 $\int_a^b S_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \int_a^b S(x)$. Значит, делая предельный переход при $k \rightarrow \infty$ в равенстве $\sum_{n=1}^k \int_a^b u_n(x) = \int_a^b S_k(x)$, получаем доказываемую формулу. По теореме 20 $\int_a^b S(x)$ имеет смысл, т.к. S_k непрерывны и сходятся равномерно к $S(x)$. □

Теорема 28 (о дифференцировании ряда):

Пусть $u_n \in C^1 \langle a, b \rangle$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится поточечно к $S(x)$ на $\langle a, b \rangle$, и $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ равномерно сходится к $\varphi(x)$ на $\langle a, b \rangle$. Тогда $S(x) \in C^1 \langle a, b \rangle$ и $S'(x) = \varphi$.

Доказательство: Частичная сумма $S_k(x) = \sum_{n=1}^k u_n(x) \in C^1 \langle a, b \rangle$ и сходится поточечно к $S(x)$ по определению поточечной сходимости ряда (опр. 39), а последовательность функций $\sum_{n=1}^k u'_n(x)$ сходится равномерно к $\varphi(x)$, значит из теоремы 24 получаем $S(x) \in C^1 \langle a, b \rangle$ и $S'(x) = \varphi(x)$. □

Следствие 11: Дифференцируемость гамма функции. Запишем формулу Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) \cdot e^{-\frac{x}{k}} \quad (x > 0)$$

Прологарифмируем её

$$-\ln \Gamma(x) = \ln x + \gamma x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right)$$

Равномерная сходимость ряда из производных есть по признаку Вейерштрасса (т. 25):

$$\left(\ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right)' = \frac{1/k}{1 + x/k} - \frac{1}{k} = -\frac{x}{(k+x) \cdot k}$$

Модуль этого выражения это возрастающая функция, поэтому $\forall M \in \mathbb{R}$

$$\left| -\frac{x}{(k+x) \cdot k} \right| = \frac{x}{(k+x) \cdot k} \stackrel{\text{на } [0, M]}{\leq} \frac{M}{(k+M) \cdot k} \quad \text{и ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{(k+M) \cdot k} \text{ сходится.}$$

Значит по теореме 28 сумма ряда дифференцируема, тогда и гамма функция дифференцируема как композиция и произведение дифференцируемых функций:

$$\Gamma(x) = \left(x e^{\gamma x} + e^{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{k}\right) + \frac{x}{k} \right)} \right)^{-1}$$

Теорема 29 (о предельном переходе в суммах):

$u_n: E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$, X — метрическое пространство, $x_0 \in X$ — предельная точка E . Пусть $\forall n \exists \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = a_n$ (конечный), и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на E , тогда

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ — сходится и } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)$$

Доказательство: Чтобы доказать сходимость вещественного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ достаточно проверить фундаментальность $S_N^a = \sum_{n=1}^N a_n$ последовательности частичных сумм. Пусть $S_N(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x)$ — функциональная последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, тогда из зам. 17 (т.к. этот ряд равномерно сходится) $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in E$ выполнено $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$, а для x из некоторой окрестности точки x_0 выполнено $|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| < \varepsilon$ и $|S_n(x) - S_n^a| < \varepsilon$. Тогда, используя неравенство треугольника, получаем

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leq |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a| < 3 \cdot \varepsilon$$

Это определение фундаментальности S_N^a . Теперь определим функции

$$\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \in E \\ a_n, & x = x_0 \end{cases}$$

$\tilde{u}_n(x)$ — непрерывны в точке x_0 (потому что по условию $\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = a_n$) и $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(x)$ равномерно сходится на $E \cup \{x_0\}$, так как

$$\sup_{x \in E \cup \{x_0\}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{u}_k(x) \right| \leq \sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Значит по теореме Стокса-Зайделя для рядов (т. 26) сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(x) = \tilde{S}(x)$ непрерывна в точке x_0 , поэтому $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{S}(x) = \tilde{S}(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ \square

Теорема 30 (о перестановке предельных переходов):

$f_n: E \subset X \rightarrow \mathbb{R}$, (X — метрическое пространство), x_0 — предельная точка E , пусть

1. $\forall n \quad f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A_n$, (A_n — конечный предел)
2. $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} S(x)$

Тогда

1. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ (конечный)
2. $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$

$$\text{т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)$$

Доказательство: Пусть $u_n = f_n - f_{n-1}$ ($u_1 = f_1$), тогда $u_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a_n = A_n - A_{n-1}$ ($a_1 = A_1$) и частичная сумма $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) = f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{E} S(x) \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E , значит по теореме 29

1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а $\sum_{k=1}^n a_k = A_n$, то есть последовательность A_n сходится, обозначим её предел A .
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} S(x)$, а по первому пункту $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, значит $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$. \square

Определение 40: Пусть $f: E \times D \rightarrow \mathbb{R}$, E — множество, $D \subset Y$ — метрическое пространство, тогда функция $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ называется **равномерным пределом** функции f при $t \rightarrow t_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U(t_0) : \text{если } t \in U(t_0), \text{ то } \sup_{x \in E} |f(x, t) - h(x)| < \varepsilon$$

Обозначается $f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0]{} h(x)$

Теорема 31 (о перестановке двух предельных переходов):

$f: E \times D \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset X$, $D \subset Y$ — метрические пространства, x_0 — предельная точка E , y_0 — предельная точка D . Пусть

1. \exists функция $A: D \rightarrow \mathbb{R} : \forall y \in D \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = A(y)$
2. $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{} S(x)$, где $S: E \rightarrow \mathbb{R}$

Тогда

1. $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} A(y) = A$ (конечный)
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = A$

Доказательство: Отсутствует (нужна только формулировка) □

Теорема 32 (признак Дирихле):

Пусть $a_n, b_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ — функциональные последовательности (X — множество) и

1. Частичные суммы $A_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n(x)$ равномерно ограничены, то есть

$$\exists C_A \in \mathbb{R} : \forall x \in X, \forall N \in \mathbb{N} \quad |A_N(x)| \leq C_A$$

2. $\forall x_0 \in X \quad b_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ монотонно, и $b_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} 0$

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ сходится равномерно на X .

Доказательство: Есть равенство:

$$\sum_{k=N}^M a_k(x) \cdot b_k(x) = A_M(x) \cdot b_M(x) - A_{N-1}(x) \cdot b_{N-1}(x) + \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) \cdot A_k(x)$$

Оно верно, потому что... Значит

$$\left| \sum_{k=N}^M a_k(x) \cdot b_k(x) \right| \leq |A_M(x)| \cdot |b_M(x)| + |A_{N-1}(x)| \cdot |b_{N-1}(x)| \pm \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) \cdot |A_k(x)| \leq \\ \leq C_A \cdot (|b_M(x)| + |b_{N-1}(x)| + |b_N(x)| + |b_M(x)|)$$

По признаку Коши равномерной сходимости ряда (зам. 17) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x)$ сходится равномерно, потому что $b_n(x)$ равномерно сходится. □

Определение 41: Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in (0, +\infty)$, тогда $B(z, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\} \subset \mathbb{C}$ называется **кругом** с центром в точке z_0 и радиуса r .

Определение 42: Пусть a_n — комплексная последовательность, $z_0 \in \mathbb{C}$, тогда $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ называется **степенным рядом** ($A: E \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$). Ряд **сходится**, если сходится последовательность частичных сумм. **Сходится абсолютно**, если сходится вещественный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z - z_0)^n|$

Замечание 18: Комплексный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится \Leftrightarrow сходятся вещественные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ (это покомпонентная сходимость, утв. 5). Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ сходится, то и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, так как $|\operatorname{Re} a_n| \leq |a_n|$ и $|\operatorname{Im} a_n| \leq |a_n|$, значит ряды из вещественных и мнимых частей сходятся абсолютно \Rightarrow сходятся.

Теорема 33 (о круге сходимости степенного ряда):

Пусть $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ — степенной ряд, тогда возможно

1. Ряд сходится абсолютно при любом $z \in \mathbb{C}$
2. Ряд сходится абсолютно только при $z = z_0$, иначе расходится
3. $\exists R \in (0, +\infty)$: ряд сходится абсолютно при $|z - z_0| < R$ и расходится при $|z - z_0| > R$

Доказательство:

1. Верхний предел вещественной последовательности x_n это

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad \text{где } y_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$$

2. *Признак Коши сходимости вещественного ряда.* Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ — неотрицательный вещественный ряд, тогда он сходится, если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, и расходится, если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$, причём $x_n \not\rightarrow 0$

По признаку Коши ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z - z_0)^n|$ сходится, если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |z - z_0| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = |z - z_0| \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

То есть может быть 3 случая:

1. Если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, то ряд A сходится при любом $z \in \mathbb{C}$
2. Если $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, то ряд A сходится только при $z = z_0$, и расходится в остальных случаях, т.к. слагаемые не стремятся к 0
3. Если $|z - z_0| < \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, то ряд A сходится абсолютно

Таким образом в последнем пункте $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ — это формула Коши-Адамара. \square

Замечание 19: Был ещё признак Даламбера: Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ — положительный вещественный ряд и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = D$, тогда ряд сходится, если $D < 1$, и расходится, если $D > 1$. Поэтому в теореме 33 радиус круга сходимости можно считать по формуле $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ (если этот предел существует).

Теорема 34 (о равномерной сходимости и непрерывности степенного ряда):

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ — степенной ряд и R — радиус его круга сходимости. Тогда:

1. $\forall r \in (0, R)$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ равномерно сходится на $\overline{B(z_0, r)}$
2. $f(z)$ непрерывна на $B(z_0, R)$

Доказательство:

1. Так как на $\overline{B(z_0, r)}$ $a_n(z - z_0)^n \leq a_n r^n$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ сходится на $\overline{B(z_0, r)}$, потому что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n((z_0 + r) - z_0)^n$ и $(z_0 + r) \in B(z_0, R)$, то по признаку Вейерштрасса (теорема 25) на $\overline{B(z_0, r)}$ равномерно сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.

2. $\forall z \in B(z_0, R)$ возьмём $r \in (|z - z_0|, R)$, тогда в шаре $\overline{B(z_0, r)}$ есть равномерная сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ (из пункта 1), и $a_n(z - z_0)^n$ непрерывна, значит по теореме Стокса-Зайделя (теорема 26) f непрерывна в точке z .

□