Содержание

Конец II семестра ↓

III семестр ↓

---

1 Линейное пространство

Определение 1: Множество X называется **линейным пространством** (или векторным) над полем K, если заданы две операции

$$\begin{array}{lll} \text{Сложение:} & X \times X \to X & ((x,y) \mapsto x+y) \\ \text{Умножение на скаляр:} & K \times X \to X & ((\alpha,x) \mapsto \alpha \cdot x) \end{array}$$

, удовлетворяющие аксиомам:

$(X,+)$ — абелева группа по сложению

1. $\forall x,y \in X \quad x+y=y+x$ (коммутативность сложения)
2. $\forall x,y,z \in X \quad (x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативность сложения)
3. $\forall x \in X \quad \exists\, 0_X : x+0_X=x$ (существование нейтрольного элемента по сложению)
4. $\forall x \in X \quad \exists\,(-x) : x+(-x)=0_X$ (существование обратного элемента по сложению)
5. $\forall x \in X, \forall \alpha,\beta \in K \quad (\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$
6. $\forall x,y \in X, \forall \alpha \in K \quad \alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$
7. $\forall x \in X, \forall \alpha,\beta \in K \quad (\alpha\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x)$
8. $\forall x \in X \quad 1_X\cdot x=x$, где $1_X \in K$ — нейтральный элемент по умножению

2 Скалярное произведение, норма

Определение 2: Пусть X — линейное пространство над $\mathbb{R}$. Отображение $X\times X \to \mathbb{R}$ $((x,y) \mapsto \langle x,y\rangle)$ называется **скалярным произведением**, если оно удовлетворяет аксиомам:

1. $\forall x,y \in X \ \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ (симметричность)
2. $\forall x,y,z \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \langle x+\alpha\cdot y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \alpha\langle y,z\rangle$ (линейность)
3. $\forall x \in X \ \langle x,x\rangle \geqslant 0, \quad \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0_X$ (положительная определённость)

Определение 3: Отображение $X \to \mathbb{R}$ $(x \mapsto \|x\|)$ называется **нормой** (X — линейное пространство над $\mathbb{R}$), если оно удовлетворяет аксиомам:

1. $\forall x \in X \ \|x\| \geqslant 0, \quad \|x\|=0 \Leftrightarrow x=0_X$ (положительная определённость)
2. $\forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \|\alpha\cdot x\| = |\alpha|\,\|x\|$ (положительная однородность)
3. $\forall x,y \in X \ \|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$ (неравенство треугольника для нормы)

Утверждение 1: Отображение $X \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sqrt{\langle x,x\rangle}$ — норма (X — линейное пространство над $\mathbb{R}$)

Доказательство: проверка аксиом нормы:

1. Аксиома 3 скалярного произведения
2. По аксиоме 2 скалярного произведения $\sqrt{\langle \alpha\cdot x, \alpha\cdot x\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle x,x\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle x,x\rangle}$
3. Нужно доказать, что $\forall x,y \in X \ \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle}$. Обе части положительные, поэтому это неравенство равносильно неравенству
$$\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \leqslant \langle x,x\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle} + \langle y,y\rangle$$
$$\langle x,y\rangle \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}$$
Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (\alpha \mapsto \langle x+\alpha\cdot y, x+\alpha\cdot y\rangle)$.
$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f(\alpha) &= \langle x, x+\alpha\cdot y\rangle + \langle \alpha\cdot y, x+\alpha\cdot y\rangle = \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,\alpha\cdot y\rangle + \langle \alpha\cdot y, x\rangle + \langle \alpha\cdot y, \alpha\cdot y\rangle = \\ &= \langle x,x\rangle + 2\alpha\langle x,y\rangle + \alpha^2\langle y,y\rangle \end{aligned}$$
Также $f(\alpha) \geqslant 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (по аксиоме 3 скалярного произведения) $\Rightarrow$ дискриминант $\leqslant 0$: $(2\langle x,y\rangle)^2 - 4\langle y,y\rangle\langle x,x\rangle \leqslant 0$, то есть $\langle x,y\rangle^2 \leqslant \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$ или $|\langle x,y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle}$

$\square$

Следствие 1: Из доказательства утв. 1 следует неравенство Коши-Буняковского. Разные виды его записи:

1. $|\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle}\,\sqrt{\langle y, y\rangle}$
2. $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$
3. $\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle\,\langle y, y\rangle$
4. $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2\,\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2$ (при $x, y \in \mathbb{R}^m$)
5. $\left|\sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2}\,\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2}$ (при $x, y \in \mathbb{R}^m$)

3 Метрика

Определение 4: Пусть X — множество. Отображение $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ называется метрикой, если оно удовлетворяет аксиомам:

1. $\forall\, x, y \in X \;\; \rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность)
2. $\forall\, x, y \in X \;\; \rho(x, y) \geqslant 0, \quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (невырожденность)
3. $\forall\, x, y, z \in X \;\; \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника для метрики)

Утверждение 2: Пусть X — линейное пространство над $\mathbb{R}$. Отображение $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$, $\forall\, x, y \in X$ $\rho(x, y) = \|x - y\|$ — метрика

Доказательство: проверка аксиом метрики:

1. $\forall\, x, y \in X \;\; \|x - y\| = \|(-1)\cdot(y - x)\| = |-1|\,\|y - x\| = \|y - x\|$
2. Аксиома 1 нормы
3. По 3 аксиоме нормы $\forall\, x, y, z \in X \;\; \|x-y\| = \|x-y+z-z\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leqslant \|x-z\|+\|z-y\|$

$\square$

4 Скалярное произведение, норма, метрика в $\mathbb{R}^m$

Определение 5: $\mathbb{R}^m = \{\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\text{m раз}}\} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

Утверждение 3: $\mathbb{R}^m$ — линейное пространство над $\mathbb{R}$ с покоординатным сложением и покоординатным умножением на скаляр

Доказательство: Очевидно. $\square$

Утверждение 4: Отображение $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$

Доказательство: проверка аксиом скалярного произведения:

1. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^m \;\; \sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i x_i$
2. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^m, \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \;\; \sum\limits_{i=1}^{m} (x_i + \alpha y_i) z_i = \sum\limits_{i=1}^{m} (x_i z_i + \alpha y_i z_i) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i z_i + \alpha \sum\limits_{i=1}^{m} y_i z_i$
3. $\forall\, x \in \mathbb{R}^m \;\; \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 \geqslant 0$, и $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\} \;\; x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\square$

Следствие 2: По утв. 1 $\forall\, x \in \mathbb{R}^m$ $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_m^2}$ — норма в $\mathbb{R}^m$

Следствие 3: По утв. 2 $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^m$ $\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$ — метрика в $\mathbb{R}^m$

5 Определения в $\mathbb{R}^m$, покоординатная сходимость, двойной и повторый предел

Напоминание определений: т.к. $\mathbb{R}^m$ — метрическое пространство, можно определить $(a \in \mathbb{R}^m, r \in \mathbb{R})$

6: Шар (открытый) с центром в точке a и радиусом r — $\mathrm{B}(a,r) = \{\, x \mid \|x-a\| < r \,\}$

7: Сфера с центром в точке a и радиусом r — $\mathrm{S}(a,r) = \{\, x \mid \|x-a\| = r \,\}$

8: Замкнутый шар с центром в точке a и радиусом r — $\overline{\mathrm{B}(a,r)} = \{\, x \mid \|x-a\| \leqslant r \,\}$

9: ε-окрестность точки a — это $\mathrm{B}(a,\varepsilon)$ $(\varepsilon \in \mathbb{R})$

10: Проколотая ε-окрестность точки a — это $\dot{\mathrm{B}}(a,\varepsilon) = \mathrm{B}(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$

11: Множество $G \subset \mathbb{R}^m$ называется открытым, если $\forall\, x \in G \;\; \exists \varepsilon_a \in \mathbb{R} : \mathrm{B}(a,\varepsilon_a) \subset G$. Если множество G — открытое, то $G = \bigcup\limits_{a \in G} \mathrm{B}(a,\varepsilon_a)$:

> $G \subset \bigcup\limits_{a \in G} \mathrm{B}(a,\varepsilon_a)$: Пусть $x \in G$, тогда, т.к. G — открытое $\exists \mathrm{B}(x,r) \subset G$, т.е. $x \in \bigcup\limits_{a \in G} \mathrm{B}(a,\varepsilon_a)$
>
> $G \supset \bigcup\limits_{a \in G} \mathrm{B}(a,\varepsilon_a)$: Пусть $x \in \bigcup\limits_{a \in G} \mathrm{B}(a,\varepsilon_a)$, тогда $\exists a : x \in \mathrm{B}(a,\varepsilon_a) \subset G$ □

12: Точка x называется предельной точкой множества $D \subset \mathbb{R}^m$, если $\forall\, \varepsilon > 0 \;\dot{\mathrm{B}}(a,\varepsilon) \cap D \neq \varnothing$

13: Множество $F \subset \mathbb{R}^m$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки $\Leftrightarrow \;\exists G$ — открытое множество : $F = \mathbb{R}^m \setminus G$

> $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $x \in \mathbb{R}^m \setminus F$, тогда $\exists \varepsilon > 0 : \mathrm{B}(a,\varepsilon) \cap F = \varnothing$, то есть дополнение F открыто
>
> $\boxed{\Leftarrow}$ Пусть x — предельная точка F и $x \notin F$, тогда $x \in G$ и любая ε-окрестность x пересекается с F, то есть G не открыто — противоречие □

14: Точка $a \in \mathbb{R}^m$ называется пределом последовательности $x^{(n)}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : \forall n > N \;\; \left\|x^{(n)} - a\right\| < \varepsilon$$

15: Точка $L \in \mathbb{R}^n$ называется пределом отображения $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ при $x \to a \in \mathbb{R}^m$, a — предельная точка D, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall x \in D \text{ если } 0 < \|x-a\| < \delta, \text{ то } \; \|f(x) - L\| < \varepsilon$$

Равносильное определение (по Гейне):

$$\forall \text{ последовательтости } x^{(k)} : \begin{array}{l} x^{(k)} \to a \\ x^{(k)} \neq a \\ x^{(k)} \in D \end{array} \quad \text{выполнено } f(x^{(k)}) \to L$$

Утверждение 5: Сходимость последовательности в $\mathbb{R}^m$ равносильна покоординатной сходимости

$$x^{(n)} \to a \Leftrightarrow \forall i \in \{1,2,\ldots,m\} \; x_i^{(n)} \to a_i$$

Доказательство:

$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall i \in \{1,2,\ldots,m\} \left|x_i^{(n)} - a_i\right| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m} \left(x_j^{(n)} - a_j\right)^2} = \left\|x^{(n)} - a\right\|$ и $\left\|x^{(n)} - a\right\| \to 0 \Rightarrow x_i^{(n)} \to a_i$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\alpha^{(n)} = \max\limits_{j=1,2,\ldots,m} \left|x_j^{(n)} - a_j\right|$, тогда $\alpha^{(n)} \to 0$ и $\left\|x^{(n)} - a\right\| = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m} \left(x_j^{(n)} - a_j\right)^2} \leqslant$

$\leqslant \max\limits_{j=1,2,\ldots,m} \left|x_j^{(n)} - a_j\right| \sqrt{m} = \sqrt{m}\,\alpha^{(n)} \to 0 \Rightarrow \left\|x^{(n)} - a\right\| \to 0$

□

Следствие 4: Из определения предела отображения по Гейне $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall i \in \{1,2,\ldots,n\} \;\lim_{x \to a} f_i(x) = L_i$$

Ещё напоминание определений:

16: $f\colon D\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x))$; $\forall\, i\in\{1,2,\ldots,n\}$ $f_i(x)$ называются координатными функциями функции $f(x)$

17: Метрическое пространство X называется компактным, если из любого покрытия открытыми множествами множно выбрать конечное подпокрытие:

$$\forall\ \{G_\alpha\}\ \text{— окрытое покрытие}\ \ \exists\, G_{\alpha_1},G_{\alpha_2},\ldots,G_{\alpha_n}\ \text{— открытое подпокрытие}\ X$$

Подмножество $D\subset\mathbb{R}^m$ — компактно $\Leftrightarrow$ D — замкнуто и ограничено $\Leftrightarrow$ D — секвенциально компактно $\Leftrightarrow$ $\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists$ конечная ε-сеть (D — сверхограничено) и замкнуто

- D называется ограниченным, если $\exists\,\mathrm{B}(a,r)\subset\mathbb{R}^m : D\subset\mathrm{B}(a,r)$
- D назвается секвинциально комактным, если из любой последовательности элементов этого множества можно выбрать сходящуся подпоследовательность (к элементу этого множества)
- $N\subset D$ называется ε-сетью, если $\forall\, x\in D\ \ \exists\, y\in N : \rho\,(x,y)<\varepsilon$ (конечной ε-сетью, если N — конечно)
- Последовательность $x^{(n)}$ — фундоментальная, если $\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\, N:\forall\, m,k>N\quad \rho\left(x^{(m)},x^{(k)}\right)<\varepsilon$
- Метрическое пространство X называется полным, если в нём любая фундоментальная последовательность сходится. В $\mathbb{R}^m$ полное $\Leftrightarrow$ замкнутое

Определение 18: $D_1,D_2\subset\mathbb{R}$, a_1 — предельная точка D_1, a_2 — предельная точка D_2, $D\subset\mathbb{R}^2$ — множество : $\big(D_1\setminus\{a_1\}\big)\times\big(D_2\setminus\{a_2\}\big)\subset D$, $f\colon D\to\mathbb{R}$

1. Пусть $\varphi(x_1)=\lim\limits_{x_2\to a_2} f(x_1,x_2)$ (если этот предел существует), тогда $\lim\limits_{x_1\to a_1}\varphi(x_1)$ называется повторным пределом
2. Пусть $\psi(x_2)=\lim\limits_{x_1\to a_1} f(x_1,x_2)$ (если этот предел существует), тогда $\lim\limits_{x_2\to a_2}\psi(x_2)$ тоже называется повторным пределом
3. $L=\lim\limits_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2}} f(x_1,x_2)$ называется двойным пределом, если

$$\forall\, U(L)\ \text{— окрестность точки}\ L\ \ \exists\begin{array}{c}V_1(a_1)\\ V_2(a_2)\end{array}\ \text{—}\begin{array}{l}\text{окрестности}\\ \text{точек}\ a_1,a_2\end{array}:\ \text{если}\ \begin{array}{l}x_1\in\dot V_1(a_1)\cap D_1\\ x_2\in\dot V_2(a_2)\cap D_2\end{array},\ \text{то}\ f(x_1,x_2)\in U(L)$$

Определение 19: Отображение $f\colon D\subset X\to Y$ X,Y — метрические пространства, $G\subset D$, a — предельная точка G. Предел сужения отображения $\lim\limits_{x\to a} f\big|_G(x)$ называется пределом по множеству Если $f\colon D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ и $C\subset\mathbb{R}^2$ — кривая, то $\lim\limits_{x\to a} f\big|_C(x)$ называется пределом по кривой.

Утверждение 6: Пусть $D_1,D_2\subset\mathbb{R}$, a_1 — предельная точка D_1, a_2 — предельная точка D_2, $D\subset\mathbb{R}^2$ — множество : $\big(D_1\setminus\{a_1\}\big)\times\big(D_2\setminus\{a_2\}\big)\subset D$, $f\colon D\to\mathbb{R}$, тогда

1. Из того, что $\forall$ кривой $C\in C^1(D) : C'\neq 0\ \ \exists\lim\limits_{x\to a} f\big|_C(x)=L$ следует $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$
2. Из того, что $\forall$ кривой $C\in C^2(D) : C'\neq 0\ \ \exists\lim\limits_{x\to a} f\big|_C(x)=L$ **не** следует $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

Доказательство: Его нету. ☐

Теорема 1 (О двойном и повторном пределе):

Пусть $D_1,D_2\subset\mathbb{R}$, a_1 — предельная точка D_1, a_2 — предельная точка D_2, $D\subset\mathbb{R}^2$ — множество : $\big(D_1\setminus\{a_1\}\big)\times\big(D_2\setminus\{a_2\}\big)\subset D$, $f\colon D\to\mathbb{R}$, $\exists$ двойной предел $\lim\limits_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2}} f(x_1,x_2)=A\in\overline{\mathbb{R}}$, и $\forall\, x_1\in D_1\setminus\{a_1\}$ $\exists$ конечный $\varphi(x_1)=\lim\limits_{x_2\to a_2} f(x_1,x_2)$, тогда $\exists$ повторный предел $\lim\limits_{x_1\to a_1}\varphi(x_1)=A$

Доказательство: Пусть $A \in \mathbb{R}$. Так как существует двойной предел, выполнено:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists \begin{matrix} V_1(a_1) \\ V_2(a_2) \end{matrix} \ - \begin{matrix} \text{окрестности} \\ \text{точек } a_1, a_2 \end{matrix} : \text{если } \begin{matrix} x_1 \in \dot{V}_1(a_1) \cap D_1 \\ x_2 \in \dot{V}_2(a_2) \cap D_2 \end{matrix}, \text{ то } \|f(x_1, x_2) - A\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Делая предельный переход в последнем неравенстве при $x_2 \to a_2$ получаем

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, V_1(a_1) \ \underset{\text{точки } a_1}{- \text{ окрестность}} : \text{если } x_1 \in \dot{V}_1(a_1) \cap D_1, \text{ то } \|\varphi(x_1) - A\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Аналогично при $A = \pm\infty$ □

6 Бесконечно малое отображение, $o(h)$, отображение дифференцируемое в точке

Определение 20: Отображение $\varphi\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ называется бесконечно малым в точке $x_0 \in \operatorname{Int} E$, если $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0_{\mathbb{R}^n}$

Определение 21: Пусть $E \subset \mathbb{R}^m : 0_{\mathbb{R}^m} \in \operatorname{Int} E$, $\quad \varphi\colon E \to \mathbb{R}^n$, $\quad h \in E$. Говорят, что $\varphi(h) = o(h)$ при $h \to 0_{\mathbb{R}^m}$, если $\dfrac{\varphi(h)}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0_{\mathbb{R}^m}]{} 0_{\mathbb{R}^n}$ (бесконечно малое в точке $0_{\mathbb{R}^m}$).

> Определение в $\mathbb{R}$ было: $f, g\colon E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка E, говорят, что $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$, если $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ ($g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0)

Определение 22: Отображение $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ называется диффиренцируемым в точке $a \in \operatorname{Int} E$, если $\exists$ линейный оператор из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ с матрицей L и $\exists$ бесконечно малое отображение в точке $0_{\mathbb{R}^m}$ $\quad \alpha\colon U(0_{\mathbb{R}^m}) \to \mathbb{R}^n$ такие, что

$$f(a + h) = f(a) + Lh + \alpha(h) \cdot \|h\| \qquad \text{при } h \to 0_{\mathbb{R}^m}$$

или

$$f(x) = f(a) + L(x - a) + \alpha(x - a) \cdot \|x - a\| \qquad \text{при } x \to a$$

Этот линейный оператор (с матрицей L) называется производным оператором отображения f в точке a, обозначается $f'(a)$. Получается, что отображение f' действует из $\mathbb{R}^m$ в пространство линейных операторов.

> Определение в $\mathbb{R}$ было: Функция $f\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $a \in \langle a, b\rangle$, если $\exists$ число $A \in \mathbb{R}$ такое, что
>
> $$f(a + h) = f(a) + Ah + o(h) \qquad \text{при } h \to 0$$
>
> В определении в $\mathbb{R}^m$ можно писать $o(h)$ вместо $\alpha(h) \cdot \|h\|$ и $o(x - a)$ вместо $\alpha(x - a) \cdot \|x - a\|$

7 Комплексная дифференцируемость, единственность производной

Определение 23: Отображение $f\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad$ (Ω — открытое множество) $\quad$ называется комплексно дефференцируемым в точке $a \in \Omega$, если $\exists$ число $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что

$$f(a + h) = f(a) + \lambda h + o(h) \qquad \text{при } h \to 0$$

или

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lambda$$

Замечание 1: Отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вещественно дефференцироемое (т.е. как в опр. 22) будет комплексно дефференцируемым как отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ только если матрица его производного оператора будет имеет вид $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, т.к. в опр. 23 $\lambda h = (\lambda_1 + \lambda_2 i)(h_1 + h_2 i) =$

$$= (\lambda_1 h_1 - \lambda_2 h_2) + (\lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1)i, \quad \text{т.е.} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda_1 h_1 - \lambda_2 h_2 \\ \lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Утверждение 7: В определении дифференцируемости отображения $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (опр. 22) оператор $f'(a)$ определён однозначно

Доказательство: Пусть $h = t \cdot u, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R},$ тогда определение можно записать

$$f(a + t \cdot u) = f(a) + t\,Lu + o(t \cdot u) \quad \text{при } t \to 0$$

Так как u — фиксированный вектор, $o(t \cdot u) = o(t)$. Можно выразить Lu, перенеся остальное в другую часть и сделав предельный переход при $t \to 0$:

$$Lu = \frac{f(a + t \cdot u) - f(a)}{t} + \frac{o(t)}{t}, \quad t \to 0$$

$$Lu = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot u) - f(a)}{t}$$

□

Замечание 2: Определение дифференцируемости (опр. 22) при $n = 1$ $\big($тогда $L = (l_1, l_2, \dots, l_m)\big)$:

$$f\big((x_1, x_2, \dots, x_m)\big) = f\big((a_1, a_2, \dots a_m)\big) + \big(l_1(x_1 - a_1) + l_2(x_2 - a_2) + \dots + l_m(x_m - a_m)\big) + o(x - a)$$

8 Дифферецируемость координатных функций, частная производная

Лемма 1 (о дифференцируемости отображения и дифференцируемости его координатных функций):

$f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad a \in \operatorname{Int} E, \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n),$ тогда

1. Отображение f дифференцируемо $\Leftrightarrow$ все f_i дифференцируемы
2. Строки матрицы оператора $f'(a)$ это матрицы операторов $f_1'(a), f_2'(a), \dots, f_m'(a)$

Доказательство:

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Из опр. 22

$$\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ f_2(a+h) \\ \dots \\ f_n(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \dots \\ f_n(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_{11}h_1 + l_{12}h_2 + \dots + l_{1m}h_m \\ l_{21}h_1 + l_{22}h_2 + \dots + l_{2m}h_m \\ \dots \\ l_{n1}h_1 + l_{n2}h_2 + \dots + l_{nm}h_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(h) \cdot \|h\| \\ \alpha_2(h) \cdot \|h\| \\ \dots \\ \alpha_m(h) \cdot \|h\| \end{pmatrix}$$

   В первой строке записано определение дифференцируемости f_1, во второй — f_2 и т.д.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Если сначала написать определения дифференцируемости координатных функций $f_1, f_2, \dots, f_m$, и потом записать их в одну формулу как в предыдущем пункте, то получится определение дифференцируемости f

2. Матрицы операторов $f_1'(a), f_2'(a), \dots, f_n'(a)$ имеют размер $1 \times m$, т.е. строки. Они записаны во втором слагаемом выше и вместе образуют оператор матрицы $f'(a)$.

□

Замечание 3:

1. Если $f = const$, то $f' \equiv 0_{m\times n}$ и $o(h) \equiv 0_{\mathbb{R}^n}$
2. Если $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение с матрицей A, тогда $\forall\, x \in \mathbb{R}^m \quad \mathcal{A}'(x) = A$ (т.к. из-за линейности $\mathcal{A}(x+h) = \mathcal{A}(x) + \underbrace{Ah}_{\mathcal{A}(h)} + 0$ — то есть A это и есть производная по опр. 22)
3. Если $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, A — его матрица, и отображение задано так: $x \mapsto u + Ax$ — называется аффинное отображение (линейное со сдвигом), то тоже $\mathcal{A}'(x) = A$ (т.к. $\mathcal{A}(x+h) = u + A\,(x+h) = u + Ax + Ah = \mathcal{A}(x) + Ah + 0$)

Определение 24: Пусть $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int} E$, $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\varphi_k\colon U(a_k) \to \mathbb{R}$, $\varphi_k(u) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, u, a_{k+1}, \ldots, a_m)$, тогда $\varphi_k'(a_k) = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{\varphi(a_k+t) - \varphi(a_k)}{t}$ (если этот предел существует) называется k-ой частной производной функции f в точке a. Обозначение: $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$

Замечание 4: Пусть $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — дифференцируемо в точке a, тогда f — непрерывно в точке a (т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$). Т.к. переходя к пределу в определении дефференцируемости при $h \to 0$ получаем $\lim\limits_{h\to0} f(a+h) = f(a)$. Но если существуют все частные производные, то функция может быть не непрерывной, например

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Здесь $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = 0$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} = 0$, но предел в точке 0 вдоль прямой $y = x$: $\lim\limits_{t\to0} f(t,t) = 1$, а вдоль прямой $y = 2x$: $\lim\limits_{t\to0} f(t,2t) = \dfrac{4}{5}$. То есть у f не существует предела в нуле.

9 Матрица якоби, необходимое, достаточное условия дифференцируемости, правила дифференцирования

Определение 25: Матрица оператора $f'(a)$, $a \in \operatorname{Int} E$ отображения $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (если f — дифференцируемо) называется матрицей якоби отображения f в точке a.

Теорема 2 (необходимое условие дифференцируемости):

Пусть отображение $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — дифференцируемо в точке $a \in \operatorname{Int} E$, тогда существуют все частные производные всех его координатных функций и

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} \text{— матрица якоби отображения } f \text{ в точке } a$$

Доказательство: $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ рассмотрим координатную функцию f_i.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \overset{\text{опр. } 24}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f_i(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \ldots, a_m) - f_i(a)}{t} =$$
$$\overset{\text{зам. } 2}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f_i(a) + l_k(a_k + t - a_k) - f_i(a) + o(t)}{t} = l_k$$

$k \in \{1, 2, \ldots, m\}, l_k$ — k-ая компонетна матрицы якоби функции f_i (размер матрицы — $1 \times m$). То есть компонентами l_k матриц якоби координатных функций f_i в точке a являются соответствующие частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ координатных функций f_i в точке a. И по лемме 1 строки матрицы якоби отображения f состоят из матриц якоби координатных функций. ☐

Теорема 3 (достаточное условие дифференцируемости):

$f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\quad a \in \operatorname{Int} E$, $\quad \exists\, r$: в шаре $\mathrm{B}(a, r) \subset E$ $\exists$ все частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ $(k \in \{1, 2, \ldots, m\})$ и они непрерывны в точке a. Тогда функция f — дифференцируема в точке a

Доказательство: При $m = 2$.

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = \big(f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2)\big) + \big(f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2)\big) =$$

> Пусть $g(x_2) = f(x_1, x_2)$, x_1 — фиксировано. Тогда $f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2) = g(x_2) - g(a_2)$. Функция g — дифференцируема на $[a_2, x_2]$ $(g' = \frac{\partial f}{\partial x_2}) \Rightarrow$ по теореме Лагранжа $\exists\, x_0$ между x_2 и a_2 : $g(x_2) - g(a_2) = g'(x_0)(x_2 - a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)(x_2 - a_2)$. Поэтому:

$$= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_0)\,(x_2 - a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0, a_2)\,(x_1 - a_1) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,(x_2 - a_2) +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0, a_2)\right)(x_1 - a_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_0) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right)(x_2 - a_2)$$

Домножим и поделим на $\|x - a\|$ последнюю строку. $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) - \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0, a_2)\right) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, т.к. x_0 между x_1 и a_1; и $\left|\dfrac{x_1 - a_1}{\|x - a\|}\right| \leqslant 1$. Аналогично во втором слагаемом этой строки. Значит теперь в ней написано *б.м.* $\cdot\, \|x - a\|$, то есть $o(x - a)$. Получилось определение дифференцируемости f. ☐

10 Правила дифференцирования

1. **Линейность:** $f, g\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — дифференцируемы в точке $a \in \operatorname{Int} E$, тогда отображения $f + g$, λg — тоже дифференцируемы в точке a и их производные операторы равны: $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, $(\lambda g)'(a) = \lambda g'(a)$.

Лемма 2 (об оценке нормы линейного оператора):

$f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение с матрицей A. Тогда $\forall\, x \in \mathbb{R}^m$ $\|Ax\| \leqslant C_A \|x\|$, где $C_A = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n,m} a_{ij}^2}$, a_{ij} — элементы матрицы A

Доказательство:

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{m} x_j^2\right)} = \|x\|\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n,m} a_{ij}^2}$$

☐

2. **Дифференцируемость композиции:** $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $g\colon I \subset \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$, f — диффиренцируемо в точке $a \in \operatorname{Int} E$, g — диффиренцируемо в точке $b = f(a) \in \operatorname{Int} I$. Тогда отображение $g \circ f$ — дифференцируемо в точке a и его производный оператор $g(f(a))' = g'(f(a))\, f'(a)$
Доказательство: определения дифференцируемости отображений f и g:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + \alpha(h)\,\|h\|, \quad \alpha(h) \xrightarrow[h\to 0_{\mathbb{R}^m}]{} 0_{\mathbb{R}^l}$$

$$g(b+k) = g(b) + g'(b)\,k + \beta(k)\,\|k\|, \quad \beta(k) \xrightarrow[k\to 0_{\mathbb{R}^l}]{} 0_{\mathbb{R}^n}$$

Получаем, что отображение $g \circ f$ дифференцируемо по определению:

$$g\big(f(a+h)\big) - g\big(f(a)\big) = g\big(\underbrace{f(a)}_{b} + \underbrace{f'(a)\,h + \alpha(h)\,\|h\|}_{k}\big) - g\big(f(a)\big) =$$

$$= g\big(f(a)\big) + g'\big(f(a)\big)\,\big(f'(a)\,h + \alpha(h)\,\|h\|\big) + \beta\big(f'(a)\,h + \alpha(h)\,\|h\|\big)\,\big\|f'(a)\,h + \alpha(h)\,\|h\|\big\| - g\big(f(a)\big) =$$

$$= g'\big(f(a)\big)\,f'(a)\,h + \underbrace{g'\big(f(a)\big)\,\alpha(h)\,\|h\|}_{I} + \underbrace{\beta\big(f'(a)\,h + \alpha(h)\,\|h\|\big)\,\big\|f'(a)\,h + \alpha(h)\,\|h\|\big\|}_{II}$$

$$\|I\| = \|g'\big(f(a)\big)\,\alpha(h)\| \cdot \|h\| \overset{\text{лемма 2}}{\leqslant} \underbrace{\|\alpha(h)\|}_{\text{б.м. при } h\to 0_{\mathbb{R}^m}} C_{g'(f(a))}\,\|h\|$$

$$\|II\| = \big\|\beta\big(f'(a)\,h + \alpha(h)\,\|h\|\big)\big\| \cdot \big\|f'(a)\,h + \alpha(h)\,\|h\|\big\| \overset{\text{нер-во тр-ка}}{\leqslant} \big\|\beta\big(f'(a)\,h + \alpha(h)\,\|h\|\big)\big\| \cdot \|f'(a)\,h\| +$$

$$+ \big\|\beta\big(f'(a)\,h + \alpha(h)\,\|h\|\big)\big\| \cdot \big\|\alpha(h)\,\|h\|\big\| \overset{\text{лемма 2}}{\leqslant} \text{б.м.} \cdot \|h\|\,C_{f'(a)} + \text{б.м.} \cdot \text{б.м.} \cdot \|h\| \quad \text{при } h \to 0_{\mathbb{R}^m}$$

Тогда $I + II$ это *б.м.* $\cdot \|h\| \Rightarrow$ получилось определение дифференцируемости отображения $g \circ f$.

3. **Дифференцирование произведений:** Отображения $f, g\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\lambda\colon E \to \mathbb{R}$ — дифференцируемы в точке $a \in \operatorname{Int} E$. Тогда отображения $\lambda f(x) = \lambda(x) f(x)$ и $\langle f, g\rangle(x) = \langle f(x), g(x)\rangle$ дифференцируемы в точке a . Они действуют на вектор $h \in \mathbb{R}^m$ так:

① $(\lambda f)'(a) \cdot h = \big(\lambda'(a) \cdot h\big) \cdot f(a) + \lambda(a) \cdot f'(a) \cdot h$

② $\langle f, g\rangle'(a) \cdot h = \langle f'(a) \cdot h, g(a)\rangle + \langle f(a), g'(a) \cdot h\rangle$

Доказательство:

① $\lambda(a+h) f(a+h) \overset{\text{опр. 22}}{=} \big(\lambda(a) + \lambda'(a)\,h + o(h)\big)\big(f(a) + f'(a)\,h + o(h)\big) = \lambda(a) f(a) + \lambda(a) f'(a)\,h + {}$ $+ \lambda'(a)\,h\,f(a) + o(h)$ — определение дифференцируемости λf в точке a.

② $\langle f, g\rangle'(a) \cdot h = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} f_i g_i\right)'(a) \cdot h \overset{\text{лин.}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} (f_i g_i)'(a) \cdot h \overset{①}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} (\underbrace{f_i'(a) \cdot h)}_{i\text{-ая координата } F'(a)\cdot h} \cdot g_i(a) + f_i(a) \cdot g_i'(a) \cdot h =$

$= \langle f'(a) \cdot h, g(a)\rangle + \langle f(a), g'(a) \cdot h\rangle$

Замечание 5: *Общее правило дифференцирования функции одной переменной:*

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — дифференцируема, задаётся формулой $f(x)$. $f(x) \rightsquigarrow F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, n — количество x-ов в формуле (т.е. нужно пронумеровать все x-ы). Тогда

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, x, \ldots, x)$$

Доказательство: Определение дифференцируемости F:

$$\underbrace{F(x+h,\dots,x+h)}_{f(x+h)} = \underbrace{F(x,\dots,x)}_{f(x)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,x,\dots,x)}_{\text{число} \Rightarrow \text{это } f'(x)} \cdot h + o(h) \qquad \text{при } h\to 0$$

11 Градиент, производная по вектору, по направлению, экстремальное свойство градиента

Определение 26: Пусть функция $f\colon E\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ — дифференцируема в точке $a\in\operatorname{Int}E$. Тогда матрица якоби функции f имеет размер $1\times m$ (строка). Если её транспонировать и считать, что это вектор из $\mathbb{R}^m$, то определение дифференцируемости можно записать так:

$$f(a+h) = f(a) + \langle f'(a), h\rangle + o(h), \qquad \text{при } h\to 0_{\mathbb{R}^m}$$

и тогда вектор $f'(a)\in\mathbb{R}^m$ называется **градиентом** функции f в точке a, обозначается $\operatorname{grad} f(a)$.

Определение 27: **Производной по вектору** $h\in\mathbb{R}^m$ функции $f\colon E\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ в точке a называется

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t}$$

обозначение: $\dfrac{\partial f}{\partial h}(a)$. **Напрвлением** в $\mathbb{R}^m$ называется вектор $l\in\mathbb{R}^m : \|l\| = 1$. Можно рассматривать производную по направлению.

Замечание 6: $f\colon E\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ — дифференцируема в точке $a\in\operatorname{Int}E$, тогда

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) \overset{\text{опр. 27}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t} \overset{\text{опр. 22 и т. 2}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,th_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\,th_m+o(t)}{t} = \langle\operatorname{grad} f(a), h\rangle$$

Теорема 4 (*Экстремальное свойство градиента*):

Пусть $f\colon E\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ — дифференцируема в точке $a\in\operatorname{Int}E$ и $\operatorname{grad} f(a)\neq 0$. Тогда $l = \dfrac{\operatorname{grad} f(a)}{\|\operatorname{grad} f(a)\|}$ (направление в $\mathbb{R}^m$) — направление наискорейшего возрастания функции f, т.е. $\forall\, h\in\mathbb{R}^m$ такого, что $\|h\| = 1$ выполнено:

$$-\|\operatorname{grad} f(a)\| = -\frac{\partial f}{\partial l} \leqslant \frac{\partial f}{\partial h}(a) \leqslant \frac{\partial f}{\partial l} = \|\operatorname{grad} f(a)\|$$

и равенство достигается при $h = l$ (справа) и $h = -l$ (слева)

Доказательство: Так как $\dfrac{\partial f}{\partial h} = \langle\operatorname{grad} f(a), h\rangle$ (зам. 6), то из неравенства Коши-Буняковского (сл. 1) следует доказываемое неравенство: $-\|\operatorname{grad} f(a)\|\cdot 1 \leqslant \langle\operatorname{grad} f(a), h\rangle \leqslant \|\operatorname{grad} f(a)\|\cdot 1$. Если в неравенстве Коши-Буняковского $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\cdot\|y\|$ $y = \alpha x$, то достигается равенство. В нашем случае, если $h = l$, то α это $^1/_{\|\operatorname{grad} f(a)\|}$. □

12 Производные высших порядков, их независимость от порядка дифференцирования, класс $C^r(E)$, мультииндекс, полиномиальная формула

Определение 28: $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Пусть $\exists k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ и $\exists U(a)$ — окрестность точки $a \in \operatorname{Int} E$ такие, что можно определить функцию $g\colon U(a) \to \mathbb{R}$ так, что $g(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)$. Тогда, если $\exists i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ такое, что $\exists\ \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$, то эта частная производная называется частной производной II порядка функции f в точке a. Обозначение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(a)$ или $f''_{x_k x_i}(a)$

По индукции определяется $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_n}}(a) = \dfrac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\dfrac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \ldots \partial x_{i_n}} \right)(a)$

Теорема 5 (о независимости частной производной от порядка дифференцирования):

Пусть $f\colon E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, точка $(x_0, y_0) \in E$, $\exists r > 0 :$ в шаре $\mathrm{B}\big((x_0, y_0), r\big)$ $\exists f''_{xy},\ f''_{yx}$ и они непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

Доказательство: Пусть $\Delta^2 f(h, k) = f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)$. При фиксированном k определим функцию $\alpha(h) = \Delta^2 f(h, k)$. И пусть обе функции заданы так, чтобы аргументы f попадали в шар $\mathrm{B}\big((x_0, y_0), r\big)$, т.е. $\Delta^2 f\colon \mathrm{B}\big((0, 0), {}^{r}/\sqrt{2}\big) \to \mathbb{R}$ и $\alpha\colon [0, {}^{r}/\sqrt{2}) \to \mathbb{R}$. Тогда α непрерывна и дифференцируема на $[0, {}^{r}/\sqrt{2})$ и $\alpha(0) = 0$, поэтому, применяя теорему Лагранжа сначала к функции α, затем при фиксированной первой переменной к функции f получаем

$$\alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) = \alpha'(\bar{h}) \cdot h = \big(f'_x(x_0 + \bar{h}, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \bar{h}, y_0)\big) \cdot h = \big(f''_{xy}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})\big) \cdot hk$$

Аналогично, при фиксированном h можно определить функцию $\beta(k) = \Delta^2 f(h, k)$ и

$$\beta(k) = \beta(k) - \beta(0) = \beta'(\hat{k}) \cdot k = \big(f'_y(x_0 + h, y_0 + \hat{k}) - f'_y(x_0, y_0 + \hat{k})\big) \cdot k = \big(f''_{yx}(x_0 + \hat{h}, y_0 + \hat{k})\big) \cdot hk$$

Так как при фиксированных k и h $\quad \alpha(h) = \beta(k) = \Delta^2 f(h, k)$, то имеем равенство

$$f''_{xy}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k}) = f''_{yx}(x_0 + \hat{h}, y_0 + \hat{k}))$$

и делая в нём предельный переход при $h \to 0$ и $k \to 0$ получаем, что $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$, так как $\bar{h}, \hat{h} \in (0, h)$, и $\bar{k}, \hat{k} \in (0, k)$, то есть $\bar{h}, \hat{h}, \bar{k}, \hat{k}$ стремятся к нулю при $h \to 0$ и $k \to 0$). ☐

Определение 29: Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, $r \in \mathbb{N}$, тогда класс $C^r(E)$ — это множество всех функций $f\colon E \to \mathbb{R}$ таких, что у них $\exists$все возможные частные производные порядка r и все эти производные непрерывны. $\quad C(E) \supsetneq C^1(E) \supsetneq C^2(E) \supsetneq \ldots$

$C^\infty(E) \overset{\text{def}}{=} \bigcap\limits_{r=1}^{\infty} C^r(E)$

Теорема 6 (общая теорема о независимости частной производной от порядка дефференцирования):

Пусть функция $f \in C^r(E)$, $E \subset \mathbb{R}^m$, $r, k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant r$, и наборы индексов $i_1, i_2, \ldots i_k$ и $j_1, j_2, \ldots j_k$ опличаются друг от друга перестановкаой. Тогда

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_k}, \partial x_{i_{k-1}}, \ldots, \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_k}, \partial x_{j_{k-1}}, \ldots, \partial x_{j_1}} \qquad \text{на множестве } E$$

Доказательство: Сводится к предыдущей теореме, так как любую перестановку можно получить транспозицией соседних элементов. ☐

Замечание 7: Классы $C^r(E), r \in \mathbb{N}$ замкнуты относительно сложения, умножения на скаляр (и образуют линейное пространство) и композиции.

Определение 30: Вектор $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m) \in \mathbb{R}^m$, где все $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \geqslant 0$ называется мультииндексом

1. $|k| \overset{\text{def}}{=} k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ — называется высотой мультииндекса
2. $k! \overset{\text{def}}{=} k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!$
3. $x^k \overset{\text{def}}{=} x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{k_m}$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — вектор из $\mathbb{R}^m$
4. $\dfrac{\partial^{|k|} f}{\partial x^k} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial^{|k|} f}{(\partial x_1)^{k_1} (\partial x_2)^{k_2} \ldots (\partial x_m)^{k_m}}$ $(\partial x_i)^{k_i}$ ознчает, что по переменной x_i частная производная берётся k_i раз (это общее обозначение; не только для мультииндекса)

Лемма 3 (полиномиальная формула):

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, т.е $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, тогда

$$(a_1 + a_2 + \ldots a_m)^r = \sum_{n_1=1}^{m} \sum_{n_2=1}^{m} \cdots \sum_{n_r=1}^{m} a_{n_1} \cdot a_{n_2} \cdot \ldots \cdot a_{n_r} =$$

$$= \sum_{\substack{j\,:\,|j|=r \\ j\text{ — мультииндекс}}} \frac{r!}{j!} \cdot a^j \overset{\text{опр. 30}}{=} \sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_m) \\ j_1+\ldots+j_m=r}} \frac{r!}{j_1! \cdot j_2! \cdot \ldots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{j_m}$$

Доказательство: Индукция по r. Обозначим $S_r = \sum \frac{r!}{j!} \cdot a^j$, тогда

База: при $r = 1$

$$S_1 = \sum_{\substack{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) \\ 1\text{ стоит на месте } i \\ i\in\{1,\ldots,m\}}} \frac{1!}{0! \cdot \ldots \cdot 0! \cdot 1! \cdot 0! \cdot \ldots \cdot 0!} \cdot a_1^0 \cdot \ldots \cdot a_{i-1}^0 \cdot a_i^1 \cdot a_{i+1}^0 \cdot \ldots \cdot a_m^0 = (a_1 + a_2 + \ldots a_m)^1$$

Переход: от r к $r+1$. Раскроем скобки в выражении $S_{r+1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \cdot S_r$:

$$\sum_{j\,:\,|j|=r} \frac{r!}{j_1! \cdot j_2! \cdot \ldots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1+1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{j_m} + \ldots + \sum_{j\,:\,|j|=r} \frac{r!}{j_1! \cdot j_2! \cdot \ldots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{j_m+1}$$

Домножим и поделим каждую сумму на соответствующее $j_i + 1$:

$$\sum_{j\,:\,|j|=r} \frac{r! \cdot (j_1+1)}{(j_1+1)! \cdot j_2! \cdot \ldots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1+1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{j_m} + \ldots + \sum_{j\,:\,|j|=r} \frac{r! \cdot (j_m+1)}{j_1! \cdot j_2! \cdot \ldots \cdot (j_m+1)!} \cdot a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{j_m+1}$$

Изменим в пределе суммирования высоту мультииндекса на $r+1$, учитывая, что тогда в каждой сумме соответствующее j_i должно быть $\geqslant 1$:

$$\sum_{\substack{j\,:\,|j|=r+1, \\ j_1\geqslant 1}} \frac{r! \cdot j_1}{j_1! \cdot j_2! \cdot \ldots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{j_m} + \ldots + \sum_{\substack{j\,:\,|j|=r+1, \\ j_m\geqslant 1}} \frac{r! \cdot j_m}{j_1! \cdot j_2! \cdot \ldots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{j_m}$$

Каждая сумма умножается на соответствующее j_i, поэтому условие $j_i \geqslant 1$ не нужно, так как соответствующие слагаемые при $j_i = 0$ будут равны нулю. Вынесем за скобки общий множитель:

$$\sum_{j\,:\,|j|=r+1} \frac{r! \cdot (j_1 + j_2 + \cdots + j_m)}{j_1! \cdot j_2! \cdot \ldots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{j_m}$$

Множитель $(j_1 + j_2 + \cdots + j_m)$ это по определению высота мультииндекса, то есть он равен $r+1$. Значит последняя полученная сумма и есть S_{r+1}

$\square$

13 Лемма о дифференцировании «сдвига», формула Тейлора, n-ый дифференциал

Лемма 4 (о дифференцировании «сдвига»):

$E \subset \mathbb{R}^m$, $f \in C^r(E)$ $(f\colon E \to \mathbb{R})$, $a \in E$. Пусть $h \in \mathbb{R}^m$: при $t \in [-1, 1]$ вектор $a + th \in E$, определим функцию $\varphi(t) = f(a + th)$, тогда $\varphi \in C^r([-1, 1])$ и $\forall\, k \leqslant r$

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{\substack{j:|j|=k \\ j\text{ — мультииндекс}}} \frac{k!}{j!} \cdot h^j \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a + th) \qquad (\ast)$$

Доказательство: Найдём первую производную функции φ как производную композиции:

$$\varphi'(t) = f'(a + th) \cdot h = f'_{x_1}(a + th) \cdot h_1 + f'_{x_2}(a + th) \cdot h_2 + \ldots + f'_{x_m}(a + th) \cdot h_m$$

Это формула $(\ast)$ при $k = 1$. Вторая производная функции φ:

$$\varphi''(t) = \left(\sum_{i=1}^m f'_{x_i}(a + th) \cdot h_i\right)' = \sum_{i=1}^m \big(f'_{x_i}(a + th)\big)' \cdot h_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}(a + th) \cdot h_i h_j =$$

$$= \sum_{i=1}^m f''_{x_i x_i}(a + th) \cdot h_i^2 + 2 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ i<j}}^m f''_{x_i x_j}(a + th) \cdot h_i h_j$$

В первом слагаемом написано то, что получается в формуле $(\ast)$ при k $= 2$ в случае, когда мультииндекс выглядит как $(0, \ldots, 0, 2, 0 \ldots, 0)$, во втором слогаемом — как $(0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$. Тогда k-ая производная функции φ:

$$\sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \cdots \sum_{i_k=1}^m f^{(k)}_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}(a + th) \cdot h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_k} \overset{\text{лемма 3}}{=} \sum_{\substack{j:|j|=k \\ j\text{ — мультииндекс}}} \frac{k!}{j!} \cdot h^j \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a + th)$$

Лемма 3 объединяет слагаемые, которые отличаются перестановкой множителей. В левой части последнего равенства каждое такое слагаемое домножено на соответствующую частную производную k-го порядка и эти производные так же отличаются друг от друга только порядком дифференцирования, значит они равны (так как непрерывны на E по условию). Поэтому слагаемые, которые объединяет лемма домножены на одно и тоже число, и его можно дописать множетелем при соответствующем слагаемом. ☐

Теорема 7 (формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа):

Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, $(f\colon E \to \mathbb{R})$ $f \in C^{r+1}(E)$, точка $a \in E$, $R \in \mathbb{R}$: $\mathrm{B}(a, R) \subset E$, $x \in \mathrm{B}(a, R)$, $h = x - a$, тогда $\exists\, \theta \in (0, 1)$ такое, что:

$$f(x) = \sum_{\substack{k:|k|\leqslant r \\ k\text{ — мультииндекс}}} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k + \sum_{\substack{k:|k|=r+1 \\ k\text{ — мультииндекс}}} \frac{f^{(k)}(a + \theta h)}{k!} \cdot h^k$$

$f^{(k)}$ — это другое обозначение для $\dfrac{\partial^{|k|} f}{\partial x^k}$

Доказательство: Определим функцию $\varphi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi(t) = f(a + th)$. Тогда $\varphi \in C^{r+1}([0, 1])$. Формула Тейлора с центром в точке 0 с остатком в форме Лагранжа для функции φ в единице:

$$\varphi(1) = \sum_{n=1}^r \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \cdot 1^n + \frac{\varphi^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} \cdot 1^{(r+1)}, \qquad \theta \in (0, 1)$$

$\varphi(1) = f(a+h) = f(x)$. Используя лемму 4, заменяем производные функции φ. Тогда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{r} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\substack{k:|k|=n \\ k\text{ — мультииндекс}}} \frac{n!}{k!} \cdot h^k \cdot f^{(k)}(a) + \sum_{\substack{k:|k|=r+1 \\ k\text{ — мультииндекс}}} \frac{1}{(r+1)!} \cdot \frac{(r+1)!}{k!} \cdot h^k \cdot f^{(r+1)}(a+\theta h)$$

Упрощая, получаем доказываемую формулу. □

Замечание 8: Явный вид многочлена Тейлора порядка r функции f в точке a:

$$T_r(f,a)(x) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_m) \\ i_1+\ldots+i_m=k \\ i_1,\ldots,i_m \geqslant 0}} \frac{1}{i_1! \cdot \ldots \cdot i_m!} \cdot \frac{\partial^k f}{(\partial x_1)^{i_1}(\partial x_2)^{i_2}\ldots(\partial x_m)^{i_m}}(a) \cdot (x_1-a_1)^{i_1} \cdot (x_2-a_2)^{i_2} \cdot \ldots \cdot (x_m-a_m)^{i_m}$$

Следствие 5: В остатке формулы Тейлора есть множитель

$$h^k = \left(\frac{h_1}{\|h\|}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{h_2}{\|h\|}\right)^{k_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{h_m}{\|h\|}\right)^{k_m} \cdot \|h\|^{r+1}$$

А производная $f^k(a+\theta h)$ ограничена в некоторой окрестности точки a, замыкание которой сожержится в E, потому что $f^{(k)}$ непрерывна на E. Значит остаток в формуле Тейлора это *огр.* $\cdot \|h\|^r \cdot \|h\| = o\big(\|h\|^r\big)$, при $x \to a$. Он называется остатком в форме Пеано.

Определение 31: Однородный многочлен от h степени n

$$d^n f(a,h) = \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_m) \\ i_1+\ldots+i_m=k \\ i_1,\ldots,i_m \geqslant 0}} \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_m!} \cdot \frac{\partial^n f}{(\partial x_1)^{i_1}(\partial x_2)^{i_2}\ldots(\partial x_m)^{i_m}}(a) \cdot h_1^{i_1} \cdot h_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot h_m^{i_m}$$

называется n-ым дифференциалом функции f в точке a.

Тогда формулу Тейлора можно записать в виде $f(x) = f(a) + \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{d^k f(a, x-a)}{k!} + o\big(\|h\|^r\big)$

14 Последовательность функций, поточечная и равномерная сходимсть, теорема Стокса-Зайдля

Определение 32: Последовательность функций — это отображение из $\mathbb{N}$ в множество функций.

Определение 33: Пусть X — множество, Y — метрическое пространство, $f, f_1, f_2, \ldots : X \to Y$, последовательность отображений f_n сходится поточечно к отображению f на множестве $E \subset X$ означает, что $\forall\, x_0 \in E$ $f_n(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$, т.е.

$$\forall\, x_0 \in E \quad \forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, N : \forall\, n > N \text{ выполнено } \rho\big(f_n(x_0), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

Определение 34: Последовательность отображений f_n сходится равномерно к отображению f на множестве E если $\sup\limits_{x \in E} \rho\left(f_n(x_0), f(x_0)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.е.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, N : \forall\, n > N \quad \forall\, x \in E \text{ выполнено } \rho\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$$

Обозначение: $f_n \overset{E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f$

Замечание 9:

1. Из равномерной сходимости следует поточечная сходимость (наоборот нет)
2. Если $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f$ и $E_0 \subset E$, то $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{E_0}{\rightrightarrows}} f$

Лемма 5 *(или следующий пункт замечания)*:

Пусть X — множество, Y — метрическое пространство, $\mathcal{F} = \{\, f\colon X \to Y \mid f \text{ — ограничено} \,\}$ (f — ограничено означает, что $\exists\, y_0 \in Y, r \in \mathbb{R} : \forall\, x \in X$ выполнено $f(x) \in \mathrm{B}(y_0, r)$). Тогда функция $\rho_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ такая, что $\rho_{\mathcal{F}}(f_1, f_2) = \sup\limits_{x\in X} \rho\big(f_1(x), f_2(x)\big)$ является метрикой на $\mathcal{F}$.

Доказательство: Выполнение первых двух аксиом метрики (опр. 4) следует из их выполнения в метрике на Y. Неравенство треугольника: при любом $x \in X$ выполнено

$$\rho\big(f_1(x), f_2(x)\big) \leqslant \rho\big(f_1(x), g(x)\big) + \rho\big(g(x), f_2(x)\big) \leqslant \rho_{\mathcal{F}}(f_1, g) + \rho_{\mathcal{F}}(g, f_2) \qquad \forall\, f_1, f_2, g \in \mathcal{F}$$

Правая часть неравенства не зависит от x, поэтому она является верхней границей (для множества чисел $\{\, \rho\big(f_1(x), f_2(x)\big) \mid x \in X \,\}$), тогда она больше либо равна точной верхней границы $\Rightarrow \rho_{\mathcal{F}}(f_1, f_2) \leqslant \rho_{\mathcal{F}}(f_1, g) + \rho_{\mathcal{F}}(g, f_2)$ ☐

Теорема 8 *(Стокса-Зайдля)*:

Отображение f и последовательность отображений f_n действуют $X \to Y$, где X, Y — метрические пространства. Пусть все отображения из последовательнсти непрерывны в точке $c \in X$ и $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f$. Тогда f непрервна в точке c.

Доказательство: Применяя два раза неравенство треугольника к $\rho\big(f(x) - f(c)\big)$, получаем

$$\rho\big(f(x) - f(c)\big) \leqslant \rho\big(f(x) - f_n(x)\big) + \rho\big(f_n(x) - f(c)\big) \leqslant \rho\big(f(x) - f_n(x)\big) + \rho\big(f_n(x) - f_n(c)\big) + \rho\big(f_n(c) - f(c)\big)$$

Из определения равномерной сходимости f_n к f $(\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N : \forall\, n > N \; \sup_{x\in X} \rho\big(f_n(x) - f(x)\big) < \varepsilon)$ получаем, что $\forall\, \varepsilon > 0$ первое и последние слагаемое в правой части неравенства $< \varepsilon$. Из определения непрерывности f_n в точке c $(\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, U(c) :$ если $x \in U(c)$, то $\rho\big(f_n(x) - f_n(c)\big) < \varepsilon)$ получаем, что $\exists\, U(c)$ — окрестность точки x такая, что если $x \in U(c)$, то второе слагаемое из правой части неравенства $< \varepsilon$. Складывая, получаем, что $\rho\big(f(x) - f(c)\big) < 3 \cdot \varepsilon$. Получилось определение непрервности f в точке c. ☐

Следствие 6: Если $f_n \in C(X)$ и $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f$, то $f \in C(X)$.

Замечание 10:

1. В теореме 8 достаточно того, чтобы X было топологическим пространством.
2. В теореме 8 достаточно требовать равномерную сходимость f_n к f только в некоторой окрестности точки c.
3. В следствии (сл. 6) достаточно требовать локальную равномерную сходимость, то есть $\forall\, x \in X \;\; \exists\, U(x) : \; f_n \underset{n\to\infty}{\overset{U(x)}{\rightrightarrows}} f$. Из локальной равномерной сходимости не следует обычная.

   Например, $X = (0, 1)$, $f_n(x) = x^n$:

   Поточечная сходимость: $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ на $(0, 1)$.

   Локальная равномерная сходимость: $\sup\limits_{(\alpha,\beta)} |x^n - 0| = \beta^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \forall\, (\alpha, \beta) \subset (0, 1),\;\; \beta \neq 1$

   Обычной равномерной сходимости нет: $\sup\limits_{(0,1)} |x^n - 0| = 1$

15 Полнота пространства непрерывных функций на компакте, предельный переход под знаком интеграла для последовательностей, правило Лейбница

Теорема 9 (о полноте пространства непрерывных функций на компакте):

Пусть K — компактное метрическое пространство, тогда $C(K) = \{ f\colon K \to \mathbb{R} \mid f — \text{непрерывно} \}$ есть полное метрическое пространство относительно метрики $\rho(f_1, f_2) = \sup_K |f_1(x) - f_2(x)|$

1. $\rho(f_1, f_2) = \sup_K |f_1(x) - f_2(x)|$ является метрикой по лемме 5, т.к. непрерывные функции на компакте — ограничены (теорема Вейерштрасса)
2. Метрическое пространство называется компактным, если из любого покрытия пространства открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.
3. Метрическое пространство называется полным, если в нём любая фундаментальная последовательность сходится.
4. Последовательность x_n называется фундаментальной, если
$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N : \forall\, n, m > N \text{ выполнено } \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$
5. Если последовательность сходится, то она фундаментальная. Доказательство: $\forall\, \varepsilon > 0$ из определения сходимости x_n к a $(\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N : \forall\, n > N \text{ выполнено } \rho(x_n, a) < \varepsilon)$ возьмём $n, m > N$, тогда, используя неравенство треугольника, получаем $\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, a) + \rho(a, x_m) < 2\varepsilon$. Получилось определение фундаментальности.

Доказательство: Нужно доказать, что любая фундаментальная последовательность сходится. Возьмём фундаментальную последовательность f_n, то есть для которой выполнено. Тогда $\forall\, x_0 \in K$ последовательность $f_n(x_0)$ — фундоментальная, и она вещественная $\Rightarrow$ она сходится. Обозначим её предел $f(x_0)$. Определение фундоментальности $f_n(x)$:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N : \forall\, n, m > N \;\forall\, x_0 \in K \text{ выполнено } |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$$

При каждом фиксированном x_0 делаем предельный переход при $m \to \infty$, получаем

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N : \forall\, n > N \;\forall\, x_0 \in K \text{ выполнено } |f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

То есть f_n сходится к f равномерно. Тогда f непрерывна на K по теореме 8, то есть $f \in C(K)$, а сходимость последовательности в $C(X)$ — это равномерная сходимость функциональных последовательностей. ☐

Замечание 11:

1. Пространство $\mathcal{F} = \{ f\colon X \to Y \mid f — \text{ограничено}, \}$, где X — множество, Y — полное метрическое пространство, тоже является полным.
2. Пространство $C_M(K) = \{ f\colon K \to Y \mid f — \text{непрерывно} \}$, где K — компактное метрическое пространство, Y — полное метрическое пространство, тоже является полным.
3. В $C(K)$ равномерная сходимость последовательности $f_n \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N : \forall\, n, m > N$ выполнено $\sup_K |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Теорема 10 (о предельном переходе под знаком интеграла для последовательностей):

Пусть $f_n \in C[a, b]$ и $f_n \underset{n\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f$, тогда $\int\limits_a^b f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_a^b f$

Доказательство: Используя определение равномерной непрерывности, получаем

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| \leqslant \sup_{[a,b]} |f_n - f| \cdot (b-a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

□

Теорема 11 (правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру):

Пусть $f\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$, f и f'_y — непрерывны на $[a,b]\times[c,d]$, $\varPhi\colon [c,d]\to\mathbb{R}$, $\varPhi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, тогда $\varPhi$ — дифференцируема на $[c,d]$ и $\varPhi'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx$

Доказательство: По Гейне, возьмём последовательность $h_n \to 0$, тогда

$$\frac{\varPhi(y+h_n) - \varPhi(y)}{h_n} = \frac{\int_a^b f(x,y+h_n)\,dx - \int_a^b f(x,y)\,dx}{h_n} \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} \int_a^b f'_y(x, y+\theta h_n)\,dx, \qquad \theta \in (0,1)$$

По теореме Кантора (непрерывная функция на компакте равномерно непрерывна) f'_y равномерно непрерывна, то есть

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\,\delta > 0 : \forall\,x_1, x_2 \in [a,b]\times[c,d], \text{ если } \|x_1 - x_2\| < \delta, \text{ то } |f'_y(x_1) - f'_y(x_2)| < \varepsilon$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$, тогда $\exists\,\delta > 0$ (из определения равномерной непрерывности) и для этого δ $\exists\,N : \forall\,n > N$ выполнено $|h_n| < \delta$ (из определения сходимости последовательности h_n к 0). Тогда, из определения равномерной непрерывности, так как $\|(x, y+\theta h_n) - (x,y)\| < \delta$, то $\left|f'_y(x,y+\theta h_n) - f'_y(x,y)\right| < \varepsilon$, или $\left|\int_a^b f'_y(x,y+\theta h_n)\,dx - \int_a^b f'_y(x,y)\,dx\right| \leqslant \varepsilon\cdot(b-a)$, значит

$$\int_a^b f'_y(x, y+\theta h_n)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f'_y(x,y)\,dx, \quad \text{то есть} \quad \varPhi'(y) = \lim_{h_n\to 0} \frac{\varPhi(y+h_n) - \varPhi(y)}{h_n} = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx$$

□