§ Системы множеств

Определение 1: Если множества $A_1, A_2, \dots, A_n$ попарно не пересекаются (не имеют общих точек), то говорят, что они образуют дизъюнктный набор множеств. Объединение таких множеств обозначается: $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ (дизъюнктное объединение)

Определение 2: Пусть X — множество, $\mathcal{P} \subset 2^X$ называется полукольцом (2^X означает множество всех подмножеств X), если оно удовлетворяет аксиомам:

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$
2. Если $A, B \in \mathcal{P}$, то $A \cap B \in \mathcal{P}$
3. Если $A, B \in \mathcal{P}$, то $\exists\, D_1, D_2, \dots, D_n \in \mathcal{P}$ (дизъюнктные) такие, что $A \setminus B = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} D_i$

Определение 3: Ячейка в $\mathbb{R}^m$ это множество $[a, b) = \{\, x \in \mathbb{R}^m \mid \forall\, i \in \{\, 1, 2, \dots, m \,\}\ a_i \leqslant x_i < b_i \,\}$. Множество ячеек (обозначим его $\mathcal{P}^m$) является полукольцом:

1. Если $a, b \in \mathbb{R}^m$ такие, что $\forall\, i \in \{\, 1, 2, \dots, m \,\}\ a_i > b_i$, то $[a, b) = \varnothing$
2. $[a, b) \cap [c, d) = [u, v)$, где $\forall\, i \in \{\, 1, 2, \dots, m \,\}, u_i = \max\{\, a_i, c_i \,\}, v_i = \min\{\, a_i, d_i \,\}$
3. Можно увидеть на каритинке...

Замечание 1: Полукольцо ячеек показывает, что если $\mathcal{P}$ — любое полукольцо, то

1. Из того что $A \in \mathcal{P}$ не следует, что $A^{\complement} \in \mathcal{P}$ ($A^{\complement}$ означает дополнение к A)
2. Из того, что $A, B \in \mathcal{P}$ не следует, что $A \cup B \in \mathcal{P}$, $A \setminus B \in \mathcal{P}$
3. И из аксиомы 3 следует, что если $A, B_1, B_2, \dots, B_k \in \mathcal{P}$, то $\exists\, \underbrace{D_1, D_2, \dots, D_n}_{\text{дизъюнктные}} \in \mathcal{P}$ такие, что
$$A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i \right) = \bigsqcup_{i=1}^{n} D_i$$

Доказательство: Индукция по k. База: аксиома 3 полукольца. Переход (от k к $k+1$):

$$A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i \right) = \left(A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i \right) \right) \setminus B_{k+1} \overset{\substack{\text{по индукционному предположению} \\ \exists\, D_1, D_2, \dots D_l \in \mathcal{P} \text{ (дизъюнктные):}}}{=} \left(\bigsqcup_{i=1}^{l} D_i \right) \setminus B_{k+1} = \bigsqcup_{i=1}^{l} (D_i \setminus B_{k+1}) \overset{\substack{\text{по акселме 3 } \exists\, D_1, \dots D_{l_i} \in \mathcal{P} \\ \text{(дизъюнктные) такие, что}}}{=} \bigsqcup_{i=1}^{l} \bigsqcup_{j=1}^{l_i} D_j$$

Определение 4: Пусть X — множество, $\mathcal{A} \subset 2^X$ называется алгеброй (2^X означает множество всех подмножеств X), если оно удовлетворяет аксиомам:

1. $X \in \mathcal{A}$
2. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \setminus B \in \mathcal{A}$

Свойства алгебры:

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$, так как $\varnothing = X \setminus X$
2. Если $A \in \mathcal{A}$, то $A^{\complement} \in \mathcal{A}$, так как $A^{\complement} = X \setminus A$
3. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cap B \in \mathcal{A}$, так как $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$
4. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}$, так как $A \cup B = \left(A^{\complement} \cap B^{\complement} \right)^{\complement}$
5. Если $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ (по индукции)
6. Алгебра является полукольцом (3 аксиома полукольца следует из 2 аксиомы алгебры, а остальные аксиомы полукольца это свойства 1 и 3 алгебры)

Определение 5: Алгебра $\mathcal{A}$ называется σ-алгеброй, если $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ — счётного набора множеств, выполнено, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Замечание 2: Пересечение счётного набора множеств из σ-алгебры $\mathcal{A}$ тоже принадлежит $\mathcal{A}$, т.к.

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i) \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \quad \text{(по 2 свойству алгебры)}$$

§ Объём

Определение 6: Пусть $\mathcal{P}$— полукольцо, тогда функция $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется конечно-аддитивной, если

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. В образе μ нет одновременно $+\infty$ и $-\infty$
3. $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{P}$ (дизъюнктные), если $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{P}$, то $\mu\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

Определение 7: Аддитивная функция $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ ($\mathcal{P}$— полукольцо на мн-ве X) называется объёмом, если $\forall A \in \mathcal{P} \;\; \mu(A) \geqslant 0$. Если $X \in \mathcal{P}$ и $\mu(X)$ конечный, то μ называется конечным объём.

> Если объём μ конечный, то и $\forall A \in \mathcal{P} \; \mu(A)$ — конечен, потому что по аксиоме 3 полукольца $X = A \sqcup (X \setminus A) = A \sqcup \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} D_i$, то есть всё это объединение принадлежит полукольцу, значит $\mu(X) = \mu(A) + \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(D_i) \geqslant \mu(A)$. Такое свойство (что если $B \subset C$, то $\mu(B) \leqslant \mu(C)$) называется монотонностью объёма.

Замечание 3:

1. Если объём μ задан на алгебре $\mathcal{A}$, то аксиома 3 (объёма) $\Leftrightarrow \forall A, B \in \mathcal{A}$ (не пересекающихся)
$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$$
2. Классический объём в $\mathbb{R}^m$: в полукольце ячеек $\forall [a, b) \in \mathcal{P}^m$ определим $\mu[a, b) = \prod\limits_{i=1}^{m} (b_i - a_i)$ и $\mu(\varnothing) = 0$. (Вообще нужно проверять аддитивность. . .)

Теорема 1 (Свойства объема):

Объём $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ ($\mathcal{P}$— полукольцо) имеет свойства:

1. $\forall A, \underbrace{A_1, A_2, \ldots, A_n}_{\text{дизъюнктные}} \in \mathcal{P} : \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset A$ выполняется $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_n) \leqslant \mu(A)$ (усиленная монотонность)
2. $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{P}, A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ выполняется $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ (конечная полуаддитивность)
3. Пусть $A, B, A \setminus B \in \mathcal{P}$, $\mu(B)$ — конечный, тогда $\mu(A \setminus B) \geqslant \mu(A) - \mu(B)$

Доказательство:

1. Из замечания 1.3 $A \setminus \left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} D_k$, где все $D_k \in \mathcal{P}$, тогда по аддитивности объёма (опр. 6)
$$\mu(A) = \mu\Bigg(\underbrace{\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{m} D_k}_{=A,\text{ то есть } \in\mathcal{P}}\Bigg) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) + \sum_{k=1}^{m} \mu(D_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

2. Пусть $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ $B_k = A \cap A_k$, тогда $A = \bigcup\limits_{k=1}^{m} B_k$ (убрали из объединения точки не входящие в A), и все $B_k \in \mathcal{P}$ по 2 аксиоме полукольца. Но множества B_k могут пересекаться, поэтому пусть $C_1 = B_1$ и $\forall\, k \in \{2, 3, \ldots, m\}$ $C_k = B_k \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} B_i \overset{\text{зам.1.3}}{=} \bigsqcup\limits_{i_k=1}^{l_k} D_{i_k}$, тогда $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{m} C_k = \bigsqcup\limits_{\substack{k=1,\\ i_k=1}}^{m, l_k} D_{i_k}$, где все $D_{i_k} \in \mathcal{P}$. Значит по аддитивности объёма (опр. 6) $\mu(A) = \sum\limits_{\substack{k=1,\\ i_k=1}}^{m, l_k} \mu(D_{i_k})$ и по пункту 1 $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ $\sum\limits_{i_k=1}^{l_k} \mu(D_{i_k}) \leqslant \mu(A_k)$ (т.к. $\bigsqcup\limits_{i_k=1}^{l_k} D_{i_k} = C_k \subset B_k \subset A_k$), то есть получаем, что $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{m} \mu(A_k)$

3. a) Пусть $B \subset A$, тогда $A = B \sqcup (A \setminus B)$, значит (по аддитивности объёма — опр. 6) $\mu(A) = \mu(B) + \mu(B \setminus A)$ и так как $\mu(B)$ конечен, то можно перенести его через знак равенства.

   b) Пусть $B \not\subset A$, тогда $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ и тут $(A \cap B) \subset A, (A \cap B) \subset B, (A \cap B) \in \mathcal{P}$, значит по пунктам 3a и 1 получаем $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) \geqslant \mu(A) - \mu(B)$

$\square$

§ Мера

Определение 8: Функция $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется **мерой** ($\mathcal{P}$— полукольцо), если она является объёмом, и если она **счётно-аддитивна**, то есть $\forall\, A_1, A_2, A_3 \ldots \in \mathcal{P}$ (дизъюнктные), если $\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{P}$, то
$$\mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Теорема 2 (об эквивалентности счетной аддитивности и счетной полуаддитивности):

Пусть $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объём ($\mathcal{P}$— полукольцо), тогда эквивалентно:

1. μ — мера (т.е. μ — счётно-аддитивна)
2. μ — счётно-полуаддитивна, т.е. $\forall\, A, A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{P}$, если $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

Доказательство: $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ аналогично доказательству пункта 2 теоремы 1 (заменить конечные суммы и конечные объединения на бесконечные)

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$ Возьмём $A, \underbrace{A_1, A_2, \ldots}_{\text{дизъюнктные}} \in \mathcal{P} : A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, тогда $\forall\, N$ $\bigsqcup\limits_{i=1}^{N} A_i \subset A$, и по усиленной монотонности $\sum\limits_{i=1}^{N} \mu(A_i) \leqslant \mu(A)$ (свойство 1 объёма), но по условию $\mu(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, значит $\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ $\square$

Следствие 1: Если $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{P}$, $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots\}$ $\mu(A_i) = 0$, тогда $\mu(A) = 0$ ($\mathcal{P}$— полукольцо, μ — мера). Это пункт 2 при $\mu(A_i) = 0$

Теорема 3 (о непрерывности меры снизу):

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ — объём (конечный), тогда эквивалентно:

1. μ — мера (т.е. μ — счётно-аддитивна)
2. $\forall A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} : A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$

Доказательство: Нужна только формулировка. Доказывается следующая теорема — о непрерывности меры сверху. □

Теорема 4 (о непрерывности меры сверху):

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ — объём (конечный), тогда эквивалентно:

1. μ — мера (т.е. μ — счётно-аддитивна)
2. $\forall A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} : A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$

Доказательство: $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Пусть $\forall i \in \{1, 2, \ldots\}$ $B_i = A_i \setminus A_{i+1}$, тогда $\forall k$ $A_k = A \sqcup \bigsqcup\limits_{i=k}^{\infty} B_i$ и из счётной аддитивности $\mu(A_k) = \mu(A) + \sum\limits_{i=k}^{\infty} \mu(B_i)$. Делая предельный переход при $k \to \infty$, получаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$, так как остаток сходящегося ряда стремится к 0 (ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$ сходится, т.к. $\mu(A_1) = \mu(A) + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$ и $\mu(A_1)$ конечен).

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$ Возьмём $C = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ $(C_i \in \mathcal{A})$, тогда для $A_k = \bigsqcup\limits_{i=k+1}^{\infty} C_i = C \setminus \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} C_i \in \mathcal{A}$ выполнено $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ и $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$ (т.к. если $x \in A$, то x должен принадлежать всем A_k и некоторому C_N, но $A_k = C \setminus \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} C_i)$, значит $\mu(C) = \sum\limits_{i=1}^{k} \mu(C_i) + \mu(A_k)$. Делая предельный переход при $k \to \infty$ получаем, что $\mu(C) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ (т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\varnothing) = 0)$, то есть μ счётно-аддитивна. □

Теорема о продолжении меры

Определение 9: Мера $\mu\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ (где $\mathcal{P}$— полукольцо на множестве X), называется σ-конечной, если $\exists P_1, P_2, \ldots \in \mathcal{P}$ такие, что $\forall i \in \{1, 2, \ldots\}$ $\mu(P_i)$ — конечный, и $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i$

Определение 10: Мера $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ (где $\mathcal{A}$ — σ-алгебра) называется полной, если $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0$ выполнено, что $\forall B \subset A$ $B \in \mathcal{A}$ (и тогда $\mu(B) = 0$ из-за монотонности объёма)

Теорема 5 (о стандартном (Лебеговоском) продолжении меры):

Пусть $\mu_0 \colon \mathcal{P}_0 \to \overline{\mathbb{R}}$ — σ-конечная мера ($\mathcal{P}_0$ — полукольцо на множестве X), тогда существуют σ-алгебра $\mathcal{A} : \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{A}$, и мера $\mu \colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ такая, что $\mu\big|_{\mathcal{P}_0} = \mu_0$ (т.е. μ является продолжением μ_0) и у них есть свойства:

1. μ — полная
2. $\forall \mathcal{P}_1 \subset A$ — полукольцо : $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1$, $\forall \mu_1 \colon \mathcal{P}_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера такая, что $\mu_1\big|_{\mathcal{P}_0} = \mu_0$ выполнено, что $\mu\big|_{\mathcal{P}_1} = \mu_1$
3. Если $\exists \mathcal{A}_1$ — σ-алгебра, содержащая $A \supset \mathcal{P}_0$, и если $\exists \mu_1 \colon A_1 \to \overline{\mathbb{R}}$ — полная мера такая, что $\mu_1\big|_{\mathcal{P}_0} = \mu_0$ тогда $\mu_1\big|_{\mathcal{A}} = \mu$
4. Для $A \in \mathcal{A}$ $\mu(A) = \inf \left\{ \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_0(P_i) \mid P_i \in \mathcal{P}_0 : A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i \right\}$

Замечание 4: $\forall A \in \mathcal{A}$ $\exists B \in \mathcal{A}$ такое, что $A \subset B$, $\mu(A) = \mu(B)$, $\mu(B \setminus A) = 0$ и B имеет вид $B = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_{ij} \right)$, где $P_{ij} \in \mathcal{P}$

§ Мера Лебега

Лемма 1 (счётная аддитивность классического объема):

Стандартный объём μ на полукольце ячеек $\mathcal{P}^m$ $\left(\forall\, [a,b) \in \mathcal{P}^m \ \mu[a,b) = \prod\limits_{i=1}^{m} (b_i - a_i)\right)$ является σ-конечной мерой.

Доказательство: Проверим счётную полуаддитивность. Пусть $P = [a,b), P_k = [a_k, b_k)$ — ячейки такие, что $P \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$. Возьмём $\varepsilon, b' : [a,b'] \subset [a,b)$; $\mu(P) - \mu[a,b') < \varepsilon$ (чуть «уменьшили» b), и возьмём $a'_k : [a_k, b_k) \subset (a'_k, b_k)$; $\mu[a'_k, b_k) - \mu(P_k) < \varepsilon/2^k$ (чуть «увеличили» a), тогда

$$[a,b'] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a'_k, b_k)$$

Так как $[a,b']$ — компакт, то из его покрытия $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (a'_k, b_k)$ открытыми множествами, можно выбрать конечное подпокрытие:

$$\exists N : [a,b') \subset [a,b'] \subset \bigcup_{k=1}^{N} (a'_k, b_k) \subset \bigcup_{k=1}^{N} [a'_k, b_k)$$

Объём конечно-полуаддитивен (свойство 2), значит $\mu[a,b') \leqslant \sum\limits_{k=1}^{N} \mu[a'_k, b_k)$, т.е. $\mu(P) - \varepsilon \leqslant \varepsilon + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(P_k)$, тогда и $\mu(P) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(P_k)$ (можно взять $\varepsilon = 1/n$ и сделать предельный переход при $n \to \infty$). Получили, что μ — счётно полуаддитивен, значит (по теореме 2) μ является мерой. Эта мера σ-конечна, т.к. счётное объединение, например, всех ячеек со стороной 1 равно $\mathbb{R}^m$ ☐

Определение 11: Стандартное продолжение меры (теорема 5) на полукольце ячеек (т.е. продолжение классического объёма в $\mathbb{R}^m$— замечание 3.2 и лемма 1) называется мерой Лебега. Соответствующая σ-алгебра обозначается $\mathcal{M}^m$, мера Лебега — λ. Множества, принадлежащие $\mathcal{M}^m$, называются измеримыми.

Замечание 5: Так как $\forall a \in \mathbb{R}^m$ $a = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Q(a, \frac{1}{n})$, где $Q(a, r) = [a_1 - r, a_1 + r) \times \ldots \times [a_m - r, a_m + r)$ и алгебра замкнута относительно пересечений, то $a \in \mathcal{M}^m$ и $\lambda(a) = 0$, потому что $\lambda\big(Q(a, \frac{1}{n})\big) = \left(\frac{2}{n}\right)^m \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то есть $\inf\left\{\lambda\big(Q(a, \frac{1}{n})\big) \mid n \in \mathbb{N}\right\} = 0$ (воспользовались формулой 4 из теоремы 5, рассматривая покрытие одноточечного множества одной ячейкой; получили, что inf по таким покрытиям равен 0, значит inf и по всевозможным покрытиям будет 0). Тогда любое счётное подмножество $\mathbb{R}^m$ измеримо, и имеет меру 0, так как если $A_n \in \mathcal{M}^m, \lambda(A_n) = 0$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}^m$ (замкнутость σ-алгебры относительно счётного объединения) и $\lambda\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$ (следствие 1).

Лемма 2 (о структуре открытых множеств и множеств меры 0):

1. Пусть $O \in \mathbb{R}^m$ — открытое, тогда $O = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$, где Q_i — рациональная кубическая ячейка (и можно считать, что её координаты — двоично-рациональные числа, т.е. вида $\frac{n}{2^k}, n \in \mathbb{Z}$, и что $\overline{Q_i} \subset O$)
2. Пусть $E \in \mathcal{M}^m : \lambda(E) = 0$, тогда $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, Q_i$ — кубические ячейки такие, что $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(Q_i) < \varepsilon$ (или $\exists\, B_i$ — открытые шары $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(B_i) < \varepsilon$)

Доказательство:

1. Для каждого $x \in O$ фиксируем двоично-рациональную ячейку $Q(x) : \overline{Q(x)} \subset O, x \in Q(x)$, тогда $O = \bigcup\limits_{x \in O} Q(x)$, но ячейки рациональные, значит различных ячеек в этом объединении счётное число, поэтому $O = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i(x)$. Но эти ячейки пересекаются, сделаем их дизъюнктными: пусть $Q_1 = Q_1(x), Q_2 = Q_2(x) \setminus Q_1 = \bigsqcup\limits_{i=1}^{l_2} D_i, Q_3 = Q_3(x) \setminus (Q_2 \cup Q_1) = \bigsqcup\limits_{i=1}^{l_3} E_i, \ \ldots$ Тогда $O = Q_1 \sqcup \bigsqcup\limits_{i=1}^{l_2} D_i \sqcup \bigsqcup\limits_{i=1}^{l_3} E_i \sqcup \ldots$ (и ячейки $D_i, E_i, \ldots$ являются двоично-рациональными, так как они являются разностью двоично-рациональной ячейки и объединения двоично-рациональных ячеек; такую разность можно представить в виде дизъюнктного объединения двоично-рациональных ячеек, которые тут обозначены $D_i, E_i, \ldots$)
2. По теореме 5 $\lambda(E) = \inf\left\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i) \mid E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i, P_i \text{ — ячейки}\right\}$. Если $\lambda(E) = 0$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, P_k \text{ — ячейки} : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(P_k) < \varepsilon$$

Ячейки P_k можно покрыть кубическими ячейками Q_{k_i} так, чтобы $\lambda(P_k) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{N_k} \lambda(Q_{k_i}) \leqslant \lambda(P_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$, т.е. тогда $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(Q_i) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{i=1}^{N_k} \lambda(Q_{k_i}) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(P_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(P_k) < 2\varepsilon$

Для шаров: возьмём покрытие E кубическими ячейками Q_i такими, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(Q_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{m^{m/2}}$, тогда шары B_i, описанные вокруг этих ячеек (с радиусом $r = \frac{s\sqrt{m}}{2}$, s — сторона ячейки) будут тоже покрывать E и $\lambda(B_i) \leqslant \lambda(Q_i^*)$, где Q_i^* — кубическая ячейка, описанная вокруг шара (т.е. со стороной $2r$), но $\frac{\lambda(Q_i^*)}{\lambda(Q_i)} = \frac{(2r)^m}{\left(\frac{2r}{\sqrt{m}}\right)^m} = m^{m/2}$, значит $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(B_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(Q_i^*) = m^{m/2} \cdot \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(Q_i) = m^{m/2} \cdot \frac{\varepsilon}{m^{m/2}} = \varepsilon$

$\square$

Следствие 2: Все открытые и замкнутые множества измеримы

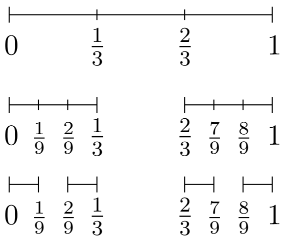
Замечание 6: **Канторовское множество:** (пример множества меры 0 мощности континуум) пусть

$K_0 = [0,1]$

$K_1 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$

$K_2 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$

$\dots$



Тогда канторовским множеством называется $K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. Мощность K — континуум, т.к. каждому числу из канторовского множества $a \in K$ соответствует последовательность из 0 и 1 $(x_1, x_2, \dots)$. Если $a \in K_n$ принадлежит отрезку $[\alpha, \alpha + \frac{1}{3^n}] \subset K_n$ (левому), то $x_n = 0$, а если a принадлежит отрезку $[\beta - \frac{1}{3^n}, \beta] \subset K_n$ (правому), то $x_n = 0$, где $[\alpha, \beta] \subset K_{n-1}$ — отрезок, которому принадлежит $a \in K_{n-1}$. Это соответствие взаимно однозначно, и множество всех таких последовательностей имеет мощность континуум. Канторовское множество имеет меру 0, потому что $\forall\, n\ \lambda(K) \leqslant \lambda(K_n)$ и $\lambda(K_n) = 2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to 0]{} 0$

Замечание 7: **Пример неизмеримого по Лебегу множества:** пусть $\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ a \sim b$, если $a - b \in \mathbb{Q}$ (это отношение эквивалентности). Из каждого класса эквивалентности возьмём по одной точки и получим множество A. Можно считать, что $A \subset [0,1]$. Рассмотрим множество

$$B = \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (A + q)$$

Объединение дизъюнктное, потому что если $\exists\, x \in (A+q_1) \cap (A+q_2)$, то $\exists\, a, b \in A : x = a + q_1 = b + q_2$, но тогда $a - b = q_2 - q_1$, т.е. $a \sim b$ (но такого не может быть, т.к. в A все точки из разных классов эквивалентности). Заметим, что $[0,1] \subset B$ (потому что $\forall\, x \in [0,1]\ \ \exists\, a \in A : x - a \in \mathbb{Q}$ (такое a берётся из класса эквивалентности x), то есть $x = a + q \in B$). Также $B \subset [-1,2]$. Тогда, если A измеримо, то $\lambda(B) = \sum\limits_{\text{счётн.}} \lambda(A)$ (мера множества не меняется при его сдвиге — следствие 7). Так как $\lambda(B) \leqslant \lambda[-1,2] = 3$, то $\lambda(A) = 0$ (иначе бесконечная сумма одинаковых чисел $\lambda(A)$ будет равна бесконечности), т.е. $\lambda(B) = 0$. Но также $\lambda(B) \geqslant \lambda[0,1] = 1$. Значит A — неизмеримое множество.

§ Регулярность меры Лебега

Теорема 6 (регулярность меры Лебега):

Пусть $A \in \mathcal{M}^m$, тогда $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ открытое $G_\varepsilon \supset A : \lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$ и $\exists$замкнутое $F_\varepsilon \subset A : \lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

Доказательство:

1. Если $\lambda(A)$ конечная. Тогда по теореме 5 $\lambda(A) = \inf\left\{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(P_i) \mid A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i, P_i \text{ — ячейки}\right\}$, то есть $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, P_k$ — ячейки : $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(P_k) < \lambda(A) + \varepsilon/2$. Пусть $\widetilde{P_k}$ — открытые параллелепипеды такие, что $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{P_k}$ и $\lambda(P_k) < \lambda(\widetilde{P_k}) < \lambda(P_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Возьмём $G_\varepsilon = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{P_k}$, тогда $\lambda(G_\varepsilon) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(\widetilde{P_k}) < \varepsilon/2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(P_k) < \lambda(A) + \varepsilon$, т.е. $\lambda(G_\varepsilon \setminus A) = \lambda(G_\varepsilon) - \lambda(A) < \varepsilon$

2. Если $\lambda(A) = \infty$, то используем σ-конечность λ (т.е. $\exists\, Q_i : \mathbb{R}^m = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$, где Q_i — ячейки с конечной мерой): $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty}(A \cap Q_i)$. Тогда $\exists\, G_{\varepsilon_k} \supset (A \cap Q_k) : \lambda\big(G_{\varepsilon_k} \setminus (A \cap Q_k)\big) < \frac{\varepsilon}{2^k}$, и можно взять $G_\varepsilon = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_{\varepsilon_k}$. Тогда $\lambda(G_\varepsilon \setminus A) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda\big(G_{\varepsilon_k} \setminus (A \cap Q_k)\big) < \varepsilon$, так как $G_\varepsilon \setminus A = \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_{\varepsilon_k}\right) \setminus \left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty}(A \cap Q_i)\right) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\big(G_{\varepsilon_k} \setminus (A \cap Q_k)\big)$

Про замкнутые: для $A^{\complement}$ $\exists$ открытое $G_\varepsilon \supset A^{\complement} : \lambda(G_\varepsilon \setminus A^{\complement}) < \varepsilon$, тогда можно взять $F_\varepsilon = (G_\varepsilon)^{\complement}$, так как $G_\varepsilon \setminus A^{\complement} = A \setminus (G_\varepsilon)^{\complement}$ □

Определение 12: Наименьшая σ-алгебра $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}^m$, содержащая все открытые множества, называется Борелевской σ-алгеброй.

Следствие 3: $\forall\, A \in \mathcal{M}^m \;\; \exists\, B, C \in \mathcal{B}$ такие, что $B \subset A \subset C$ и $\lambda(A \setminus B) = \lambda(C \setminus A) = 0$. *Доказательство:* в качестве B и C можно из теоремы 6 взять соответственно $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_{\frac{1}{n}}$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_{\frac{1}{n}}$, тогда $\lambda(A \setminus B) \leqslant \lambda(A \setminus F_{\frac{1}{n}}) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\lambda(C \setminus A) \leqslant \lambda(G_{\frac{1}{n}} \setminus C) < \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Следствие 4: Сразу из предыдущего следствия получается, что любое измеримое множество A можно представить в виде $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n \setminus N_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n \cup N_2$, где E_n — открытые, D_n — замкнутые, N_1, N_2 — множества меры 0. Так как любое замкнутое множество D_n представимо в виде объединения компактных множеств $D_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_n \cap Q_{2k}$ (где Q_{2k} — куб с центром в точке 0 и длиной стороны $2k$), то ещё получаем, что $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n \cup N_2$, где K_n — компакты.

Следствие 5: Любое $A \in \mathcal{M}^m$ представимо в виде $A = B \cup N$, где $B \in \mathcal{B}$, N — множество меры 0 (подходит B из следствия 3, $N = A \setminus B$).

Следствие 6: *Регулярность меры Лебега:* пусть A — измеримо, тогда

$$\lambda(A) \overset{1}{=} \inf_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ — откр.}}} \{\, \lambda(G) \,\} \overset{2}{=} \sup_{\substack{F: F \subset A \\ F \text{ — замкн.}}} \{\, \lambda(F) \,\} \overset{3}{=} \sup_{\substack{F: F \subset A \\ F \text{ — компакт.}}} \{\, \lambda(F) \,\}$$

Доказательство:

1. $\lambda(A) = \inf\limits_{\substack{G: A \subset G \\ G \text{ — откр.}}} \{\, \lambda(G) \,\} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists$ открытое $G \supset A : \lambda(G) - \lambda(A) < \varepsilon$. Такое G существует по теореме 6.
2. $\lambda(A) = \sup\limits_{\substack{F: F \subset A \\ F \text{ — замкн.}}} \{\, \lambda(F) \,\} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists$ замкнутое $F \subset A : \lambda(A) - \lambda(F) < \varepsilon$. Такое F существует по теореме 6.
3. Если A — ограничено, то это пункт 2. Если A — не ограничено, то из пункта 2 для ε_0 возьмём замкнутое $F \subset A : \lambda(A) - \lambda(F) < \varepsilon_0$ и рассмотрим компактные множества $B_n = F \cap Q_{2n}$, где Q_{2n} — куб с центром в точке 0 и длиной стороны $2n$. Тогда из непрерывности меры снизу (теорема 3) $\lambda(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda(F)$, то есть $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n : \lambda(F) - \lambda(B_n) < \varepsilon$. Значит $\exists\, n_0 : \lambda(F) - \lambda(B_{n_0}) < \varepsilon_0$ и тогда $\lambda(A) - \lambda(B_{n_0}) < 2\varepsilon_0$. Это выполнено для любого ε_0, поэтому $\lambda(A) = \sup\limits_{\substack{F: F \subset A \\ F \text{ — компакт.}}} \{\, \lambda(F) \,\}$

§ Преобразование меры Лебега при сдвигах и линейных отображениях

Пусть $f\colon X \to Y$, X и Y — множества, тогда $\forall\, A, B \subset X$, $\forall\, C, D \subset Y$ верно:

1. Если $A \subset B$, то $f(A) \subset f(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$; если f — инъекция, то будет равенство
4. $f\left(A^{\complement}\right) = \left(f(A)\right)^{\complement}$, если f — биекция
5. Если $C \subset D$, то $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$
6. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
7. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
8. $f^{-1}\left(C^{\complement}\right) = \left(f^{-1}(C)\right)^{\complement}$

Доказательства: (буквы Λ и П обозначают левые и правые части доказываемых равенств)

1. $\Lambda = \{\, f(x) \mid x \in A \subset B \,\} \subset \{\, f(x) \mid x \in B \,\} = \Pi$
2. $\Lambda = \{\, f(x) \mid x \in A \text{ или } x \in B \,\} = \{\, f(x) \mid x \in A \,\} \cup \{\, f(x) \mid x \in B \,\} = \Pi$
3. $\Lambda = \{\, y \in Y \mid \exists t \in A : t \in B \text{ и } f(t) = y \,\} \underset{\text{если } f \text{ инъекция, то тут равенство}}{\subset} \{\, y \in Y \mid \exists t \in A : f(t) = y \,\} \cap \{\, y \in Y \mid \exists t \in B : f(t) = y \,\} = \Pi$
4. $\Lambda = \{\, y \in Y \mid \exists t \in A^{\complement} : f(t) = y \,\} = \{\, y \in Y \mid \exists t \notin A : f(t) = y \,\} \overset{\text{тут нужно, чтобы } f \text{ была биекцией}}{=} \{\, y \in Y \mid \forall t \in A\ f(t) \neq y \,\} = \Pi$
5. $\Lambda = \{\, x \in X \mid f(x) \in C \subset D \,\} \subset \{\, x \in X \mid f(x) \in D \,\} = \Pi$
6. $\Lambda = \{\, x \in X \mid f(x) \in C \text{ или } f(x) \in D \,\} = \{\, x \in X \mid f(x) \in C \,\} \cup \{\, x \in X \mid f(x) \in D \,\} = \Pi$
7. $\Lambda = \{\, x \in X \mid f(x) \in C \text{ и } f(x) \in D \,\} = \{\, x \in X \mid f(x) \in C \,\} \cap \{\, x \in X \mid f(x) \in D \,\} = \Pi$
8. $\Lambda = \{\, x \in X \mid f(x) \in A^{\complement} \,\} = \{\, x \in X \mid f(x) \notin A \,\} = \{\, x \in X \mid x \in A \,\}^{\complement} = \Pi$

Лемма 3 (первая):

Пусть X', X — множества, $\mathcal{A}', \mathcal{A}$ — соответствующие σ-алгебры, μ' — мера на $\mathcal{A}'$, отображение $T\colon X \to X'$ — биекция такая, что $\forall\, A \in \mathcal{A}\ T(A) \in \mathcal{A}'$ (и $T(\varnothing) = \varnothing$), тогда функция $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ $\mu(A) = \mu'\big(T(A)\big)$ является мерой на $\mathcal{A}$

Доказательство: Проверим счётную аддитивность μ (опр. 8). Пусть $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} : A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, тогда используя формулу 2 и счётную аддитивность μ', получаем

$$\mu(A) = \mu'\big(T(A)\big) = \mu'\left(T\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) \overset{(*)}{=} \mu'\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} T(A_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu'\big(T(A_i)\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

$(*)$ — формула 2 используется с дизъюнктным объединением, поэтому T должно быть биекцией

$\square$

Лемма 4 (о сохранении измеримости при непрерывном отображении):

Пусть $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, $\forall\, E \in \mathcal{M}^m : \lambda(E) = 0\ \ T(E)$ — измеримо. Тогда $\forall\, A \in \mathcal{M}^m\ \ T(A)$ — измеримо

Доказательство: Любое $A \in \mathcal{M}^m$ представимо в виде $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i \cup N$, где K_i — компакты, N — множество меры 0 (следствие 4). Тогда $T(A) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} T(K_i) \cup T(N)$ (формула 2). Множества $T(K_i)$ — измеримы, т.к. являются компактами, потому что при непрерывном отображении образ компакта — компакт. $\square$

Лемма 5 (о сохранении измеримости при гладком отображении):

Пусть $\varPhi\colon O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \in C^1(O)$, O — область. Тогда $\forall\, A \in \mathcal{M}^m\ \varPhi(A) \in \mathcal{M}^m$

Доказательство: Пусть E — множество меры 0.

1. Если $\exists\, P$ — ячейка такая, что $E \subset P \subset \overline{P} \subset O$, то возьмём $L = \max\limits_{x \in \overline{P}} \|\varPhi'(x)\|$ ($\overline{P}$ — компакт и по условию $\varPhi'$ непрерывна на $\overline{P}$, поэтому max достигается), тогда по теореме Лагранжа $\forall\, x, y \in P$ $\|\varPhi(x) - \varPhi(y)\| \leqslant L \cdot \|x - y\|$, значит $\forall\, \mathrm{B}(a, r) \subset P$ $\varPhi\big(\mathrm{B}(a, r)\big) \subset \mathrm{B}\big(\varPhi(a), L \cdot r\big)$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По лемме 2.2 $\exists\, Q(a_i, r_i)$ — кубические ячейки такие, что $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q(a_i, r_i)$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda\big(Q(a_i, r_i)\big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (2r_i)^m < \varepsilon$. Тогда $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{B}(a_i, \sqrt{m} r_i)$ (шары, описанные вокруг ячеек). Значит $\varPhi(E) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \varPhi\big(\mathrm{B}(a_i, \sqrt{m} r_i)\big) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{B}\big(\varPhi(a_i), L \cdot \sqrt{m} r_i\big) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q\big(\varPhi(a_i), L \cdot \sqrt{m} r_i\big)$. И $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda\Big(Q\big(\varPhi(a_i), L \cdot \sqrt{m} r_i\big)\Big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (2 r_i L \sqrt{m})^m < (L\sqrt{m})^m \cdot \varepsilon$, т.е. $\lambda\big(\varPhi(E)\big) = 0$
2. Если E — любое, то O можно представить в виде дизъюнктного объединения ячеек D_j (лемма 2.1). Пусть $E_j = E \cap D_j$, тогда $\lambda\big(\varPhi(E_j)\big) = 0$ по пункту 1, и $\varPhi(E) = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} \varPhi(E_j)$, значит $\lambda\big(\varPhi(E)\big) = 0$

Поэтому из леммы 4 получаем, что $\forall\, A \in \mathcal{M}^m$ A — измеримо. □

Следствие 7: Инвариантность меры Лебега относительно сдвигов: $\forall\, A \in \mathcal{M}^m$, $\forall\, a \in \mathbb{R}^m$ выполнено $(a + A) \in \mathcal{M}^m$ (т.к. отображение $x \mapsto x + a$ гладкое) и $\lambda(a + A) = \lambda(A)$ (т.к. из формулы 4 меру множества A можно посчитать как inf сумм мер ячеек P_i по всем покрытиям A ячейками, тогда для множества $a + A$ покрытия будут состоять из ячеек $a + P_i$, и очевидно, что мера ячейки не меняется при сдвиге).

Теорема 7 (о мерах, инвариантных относительно сдвигов):

Пусть μ — мера (не Лебега) на $\mathcal{M}^m$ и

1. μ инвариантна относительно сдвигов (т.е. $\forall\, A \in \mathcal{M}^m, a \in \mathbb{R}^m$ $(a+A) \in \mathcal{M}^m$ и $\mu(a+A) = \mu(A)$)
2. Мера ограниченного множества конечна

Тогда $\exists\, k \in [0, \infty) : \forall\, E \in \mathcal{M}^m$ $\mu(E) = k \cdot \lambda(E)$ (λ — мера Лебега)

Доказательство: Без доказательства. □

Теорема 8 (инвариантность меры Лебега при ортогональном преобразовании):

Пусть $T \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное ортогональное преобразование (т.е. линейное отображение, сохраняющее скалярное произведение). Тогда $\forall\, E \in \mathcal{M}^m$ $T(E) \in \mathcal{M}^m$ и $\lambda(T(E)) = \lambda(E)$

Доказательство: По лемме 5 измеримость множеств сохраняется (т.к. линейное отображение — гладкое). Для $A \in \mathcal{M}^m$ определим $\mu(A) = \lambda\big(T(A)\big)$.Тогда по лемме 3 μ — мера, и она инвариантна относительно сдвигов: $\mu(A+a) = \lambda\big(T(A+a)\big) = \lambda\big(T(A)+T(a)\big) = \lambda\big(T(A)\big) = \mu(A)$, значит по теореме 7 μ пропорциональна мере Лебега. Коэффициент пропорциональности равен 1, т.к. для шара $A = B(0, r)$ $T(A) = A$ (T — сохраняет расстояние между векторами), т.е. $\lambda\big(T(A)\big) = \lambda(A)$ □

Следствие 8: Пусть $L \subset \mathbb{R}^m$ — линейное подпространство, $\dim L = m - 1$, тогда $\lambda(L) = 0$ (и $\forall\, A \subset L$ $\lambda(A) = 0$ из-за монотонности меры). *Доказательство:* Применим к L такое ортагональное преобразование T, что $T(L) = \{\, x \in \mathbb{R}^m \mid x_m = 0 \,\}$. Разобьём $T(L)$ на единичные ячейки Q_k: $T(L) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$. Длина их m-ой стороны равна 0; немного увеличим её: возьмём $\varepsilon > 0$ $T(L) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k \times \big[-\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\big)$. Тогда $\lambda\big(T(L)\big) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$. Это верно для любого $\varepsilon > 0$, значит $\lambda\big(T(L)\big) = 0$, поэтому $\lambda(L) = 0$ по теореме 8.

Лемма 6 («о структуре компактного оператора»):

Пусть $V\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор, $\det V \neq 0$, тогда $\exists$ ортонормированные базисы $g_1, g_2, \ldots, g_m$; $h_1, h_2, \ldots, h_m$ и числа $s_1, s_2, \ldots, s_m > 0$ такие, что $\forall\, x \in \mathbb{R}^m$ $V(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} s_k \cdot \langle x, g_k\rangle \cdot h_k$ и $|\det V| = s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_m$ (в стандартном базисе)

Доказательство: Пусть $c_1, c_2, \ldots c_m$ — собственные числа оператора $W = V^{\mathrm{T}}V$. В качестве $g_1, g_2, \ldots g_m$ возьмём собственные вектора оператора W, составляющие ортонормированный базис $\mathbb{R}^m$. Тогда $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ $c_i > 0$, т.к.

$$c_i = c_i \cdot \|g_i\|^2 = \langle W(g_i), g_i\rangle = \big\langle (V^{\mathrm{T}}V)(g_i), g_i\big\rangle \overset{(*)}{=} \langle V(g_i), V(g_i)\rangle = \|\big(V(g_i)\big)\|^2$$

$(*)$ — V^{T} является матрицей сопряжённого к V оператора, а по определению оператор A называется сопряжённым к V, если $\forall\, x \in \mathbb{R}^m$ $\langle x, V(x)\rangle = \langle A(x), x\rangle$

Поэтому возьмём $s_i = \sqrt{c_i}$, $h_i = \frac{1}{s_i}V(g_i)$. Проверим ортогональность векторов $h_1, h_2, \ldots, h_m$: $\forall\, i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}, i \neq j$

$$\langle h_i, h_j\rangle = \frac{1}{s_i s_j}\langle V(g_i), V(g_j)\rangle = \frac{1}{s_i s_j}\langle W(g_i), g_j\rangle = \frac{1}{s_i s_j}\langle c_i g_i, g_j\rangle = 0$$

Проверим формулу для вычисления значения V в точке x

$$V(x) = V\left(\sum_{i=1}^{m}\langle x, g_i\rangle\, g_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\langle x, g_i\rangle\, V(g_i) = \sum_{i=1}^{m} s_i\,\langle x, g_i\rangle\, h_i$$

Посчитаем определитель V

$$(\det V)^2 = \det V^{\mathrm{T}}V = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_m \quad \Rightarrow \quad \det V = s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_m$$

Это определитель матрицы оператора V в базисе $g_1, g_2, \ldots, g_m$, но так как этот базис и стандартный базис ортонормированные, то определители матриц оператора V в этих базисах совпадают. $\square$

Теорема 9 (преобразование меры Лебега при линейных отображениях):

Пусть $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение. Тогда $\forall\, A \in \mathcal{M}^m$ $T(A) \in \mathcal{M}^m$ и $\lambda\big(T(A)\big) = |\det T| \cdot \lambda(A)$

Доказательство: По лемме 5 измеримость множеств сохраняется (т.к. линейное отображение — гладкое)

1. Если $\det T = 0$, то образ L отображения T лежит в $\mathbb{R}^m$ и не совпадает с ним. Образ является линейным подпространством, значит по следствию 8 $\lambda(L) = 0$. Из-за монотонности меры $\forall\, A \in \mathcal{M}^m$ $\lambda\big(T(A)\big) = 0$, что соответствует формуле $\lambda\big(T(A)\big) = |\det T| \cdot \lambda(A)$
2. Если $\det T \neq 0$, то для $A \in \mathcal{M}^m$ определим $\mu(A) = \lambda\big(T(A)\big)$.Тогда по лемме 3 μ — мера и она инвариантна относительно сдвигов: $\mu(A + a) = \lambda\big(T(A + a)\big) = \lambda\big(T(A) + T(a)\big) = \lambda\big(T(A)\big) = \mu(A)$, значит по теореме 7 μ пропорциональна мере Лебега. Чтобы найти коэффициент пропорциональности, используя лемму 6 (и обозначения из неё), посчитаем меру образа единичного куба Q построенного на векторах $g_1, g_2, \ldots, g_m$. Из этой леммы получаем, что $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ $T(g_i) = s_i h_i$, значит $\lambda\big(T(Q)\big) = s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_m = |\det T|$ (длина векторов h_i равна 1), а $\lambda(Q) = 1$. То есть коэффициент пропорциональности равен $|\det T|$.

$\square$

§ Метод Лапласа

Лемма 7 (о локализации):

Пусть функция $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ положительна, непрерывна на $[a,b)$, $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$ и $\exists$ окрестность $U(a)$ точки a такая, что $\forall\, x_0 \in U(a)$ $\int\limits_a^{x_0} f(x)\,dx \neq 0$. Пусть функция $g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ положительна, убывает на $[a,b)$, непрерывна в точке a и $\forall\, t \in (a,b)$ $\exists\, t_1 \in (a,t) : g(t) < g(t_1)$, тогда $\forall\, c \in (a,b)$

$$\int_a^c f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt \sim \int_a^b f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt \qquad \text{при } A \to \infty$$

> Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны при $x \to x_0$ означает, что $\exists \varphi(x) : \alpha(x) = \beta(x)\cdot\varphi(x)$ и $\varphi(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 1$ или ещё, если $\beta(x) \neq 0$, что $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 1$

Доказательство: обозначим $M = \int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$, тогда

$$\int_c^b f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt \leqslant e^{A\cdot g(c)} \int_c^b f(t)\,dt \leqslant e^{A\cdot g(c)}\cdot M$$

Возьмём $c_1 \in (a,c) : g(c) < g(c_1)$, обозначим $N = \int\limits_a^{c_1} f(t)\,dt > 0$, тогда

$$\int_a^c f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt \geqslant \int_a^{c_1} f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt \geqslant e^{A\cdot g(c_1)} \int_a^{c_1} f(t)\,dt = e^{A\cdot g(c_1)}\cdot N$$

Получили то, что нужно доказать, потому что

$$\frac{\int_c^b f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt}{\int_a^c f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt} \leqslant \frac{e^{A\cdot g(c)}\cdot M}{e^{A\cdot g(c_1)}\cdot N} \xrightarrow[A\to\infty]{} 0, \text{ так как } g(c_1) > g(c). \text{ Тогда}$$

$$\frac{\int_a^c f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt}{\int_a^b f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt} = \frac{\int_a^c f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt}{\int_a^c f(t)e^{A\cdot g(t)} + \int_c^b f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt} = 1 + \frac{\int_c^b f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt}{\int_a^c f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt} \xrightarrow[A\to\infty]{} 1$$

□

Следствие 9: В обозначениях леммы из определения сходимости частного этих интегралов к 1 получаем, что $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, A_0 : \forall\, A > A_0$ выполнено

$$(1-\varepsilon)\int_a^c f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt < \int_a^b f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt < (1+\varepsilon)\int_a^c f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt$$

> Гамма функцией называется функция $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$

Замечание 8: Пусть $q > -1, p > 0, A > 0, s > 0$, тогда

1. $\displaystyle\int_0^\infty t^q e^{-At^p}\,dt = \begin{bmatrix}\text{Замена:}\\ x = At^p \\ t = \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1}{p}}\end{bmatrix} = \int_0^\infty \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{q}{p}} e^{-x}\frac{1}{pA^{\frac{1}{p}}}\,x^{\frac{1}{p}-1}\,dx = \frac{1}{pA^{\frac{q+1}{p}}}\cdot\Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right)$

2. $\displaystyle\int_0^s t^q e^{-At^p}\,dt = \frac{1}{pA^{\frac{q+1}{p}}}\int_0^{As^p} x^{\frac{q+1}{p}} e^{-x}\,dx$ и так как $\displaystyle\int_0^{As^p} x^{\frac{q+1}{p}} e^{-x}\,dx \xrightarrow[A\to\infty]{} \Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right)$, то из определения сходимости получается, что $\forall\, s>0, \forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\, A_0 : \forall\, A > A_0$ выполнено

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{pA^{\frac{q+1}{p}}}\cdot\Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right) < \int_0^s t^q e^{-At^p}\,dt < (1+\varepsilon)\frac{1}{pA^{\frac{q+1}{p}}}\cdot\Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right)$$

Тогда, заменяя везде A на $(1-\varepsilon)A$, получаем, что $\forall\, s>0, \forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\, A_1 = \frac{A_0}{1-\varepsilon} : \forall\, A > A_1$

$$\frac{1-\varepsilon}{(1-\varepsilon)^{\frac{q+1}{p}}}\cdot\frac{1}{pA^{\frac{q+1}{p}}}\cdot\Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right) < \int_0^s t^q e^{-(1-\varepsilon)At^p}\,dt < \frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^{\frac{q+1}{p}}}\cdot\frac{1}{pA^{\frac{q+1}{p}}}\cdot\Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right)$$

Теорема 10 (метод Лапласа):

Пусть функция $f\colon [a,b)\to\mathbb{R}$ положительна на $[a,b)$, $\int\limits_a^b f(t)\,dt > 0$ и $f(t)\sim L\cdot(t-a)^q$ при $t\to a$, где $q>-1, L\in\mathbb{R}$. Пусть функция $g\colon [a,b)\to\mathbb{R}$ строго убывает на $[a,b)$ и $g(a)-g(t)\sim C\cdot(t-a)^p$ при $t\to a$, где $C,p>0$. Тогда

$$\int_a^b f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt \sim \frac{L}{p}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right)}{(CA)^{\frac{q+1}{p}}}\cdot e^{A\cdot g(a)} \qquad \text{при } A\to\infty$$

Доказательство: Фиксируем $\varepsilon>0$, выберем $s\in(a,b)$ такое, что $\forall\, t\in[a,a+s]$ выполнено

$$(1-\varepsilon) < \frac{f(t)}{L\cdot(t-a)^q} < (1+\varepsilon) \quad \text{и} \quad (1-\varepsilon) < \frac{g(a)-g(t)}{C\cdot(t-a)^p} < (1+\varepsilon)$$

Выберем A_0 так, чтобы при $A>A_0$ выполнялись формулы из леммы 7 и замечания 8.2, тогда

$$\int_a^b f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt \overset{7}{<} (1+\varepsilon)\int_a^{a+s} f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt \leqslant (1+\varepsilon)\cdot e^{A\cdot g(a)}\int_a^{a+s}(1+\varepsilon)\cdot L\cdot(t-a)^q\cdot e^{-A\cdot(g(a)-g(t))}\,dt <$$
$$< (1+\varepsilon)^2\cdot e^{A\cdot g(a)}\int_0^s Lt^q\cdot e^{-A\cdot(1-\varepsilon)\cdot Ct^p}\,dt \overset{8.2}{<} \frac{(1+\varepsilon)^3}{(1-\varepsilon)^{\frac{q+1}{p}}}\cdot e^{A\cdot g(a)}\cdot\frac{L}{p(CA)^{\frac{q+1}{p}}}\cdot\Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right)$$

Аналогично $\displaystyle\int_a^b f(t)e^{A\cdot g(t)}\,dt > \frac{(1-\varepsilon)^3}{(1-\varepsilon)^{\frac{q+1}{p}}}\cdot e^{A\cdot g(a)}\cdot\frac{L}{p(CA)^{\frac{q+1}{p}}}\cdot\Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right)$, то есть получили эквивалентность. $\square$