Содержание

1 Линейное пространство

Определение 1: Множество X называется **линейным пространством** (или векторным) над полем K, если заданы две операции

Сложение: $X \times X \to X \quad ((x, y) \mapsto x + y)$

Умножение на скаляр: $K \times X \to X \quad ((\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x)$

, удовлетворяющие аксиомам:

$(X, +)$ — абелева группа по сложению

1. $\forall x, y \in X \quad x + y = y + x$ (коммутативность сложения)
2. $\forall x, y, z \in X \quad (x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения)
3. $\forall x \in X \quad \exists\, 0_X : x + 0_X = x$ (существование нейтрольного элемента по сложению)
4. $\forall x \in X \quad \exists\, (-x) : x + (-x) = 0_X$ (существование обратного элемента по сложению)
5. $\forall x \in X, \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
6. $\forall x, y \in X, \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
7. $\forall x \in X, \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$
8. $\forall x \in X \quad 1_X \cdot x = x$, где $1_X \in K$ — нейтральный элемент по умножению

2 Скалярное произведение, норма

Определение 2: Пусть X — линейное пространство над $\mathbb{R}$. Отображение $X \times X \to \mathbb{R} \quad ((x, y) \mapsto \langle x, y \rangle)$ называется **скалярным произведением**, если оно удовлетворяет аксиомам:

1. $\forall x, y \in X \; \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (симметричность)
2. $\forall x, y, z \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R} \; \langle x + \alpha \cdot y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \alpha \langle y, z \rangle$ (линейность)
3. $\forall x \in X \; \langle x, x \rangle \geqslant 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$ (положительная определённость)

Определение 3: Отображение $X \to \mathbb{R} \quad (x \mapsto \|x\|)$ называется **нормой** (X — линейное пространство над $\mathbb{R}$), если оно удовлетворяет аксиомам:

1. $\forall x \in X \; \|x\| \geqslant 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$ (положительная определённость)
2. $\forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R} \; \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \, \|x\|$ (положительная однородность)
3. $\forall x, y \in X \; \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника для нормы)

Утверждение 1: Отображение $X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ — норма (X — линейное пространство над $\mathbb{R}$)

Доказательство: проверка аксиом нормы:

1. Аксиома 3 скалярного произведения
2. По аксиоме 2 скалярного произведения $\sqrt{\langle \alpha \cdot x, \alpha \cdot x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x \rangle}$
3. Нужно доказать, что $\forall x, y \in X \; \sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$. Обе части положительные, поэтому это неравенство равносильно неравенству
$$\langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leqslant \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle$$
$$\langle x, y \rangle \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$$
Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (\alpha \mapsto \langle x + \alpha \cdot y, x + \alpha \cdot y \rangle)$.
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f(\alpha) = \langle x, x + \alpha \cdot y \rangle + \langle \alpha \cdot y, x + \alpha \cdot y \rangle = \\ = \langle x, x \rangle + \langle x, \alpha \cdot y \rangle + \langle \alpha \cdot y, x \rangle + \langle \alpha \cdot y, \alpha \cdot y \rangle = \\ = \langle x, x \rangle + 2\alpha \langle x, y \rangle + \alpha^2 \langle y, y \rangle$$
Также $f(\alpha) \geqslant 0 \; \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (по аксиоме 3 скалярного произведения) $\Rightarrow$ дискриминант $\leqslant 0$: $(2 \langle x, y \rangle)^2 - 4 \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle \leqslant 0$, то есть $\langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ или $|\langle x, y \rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$

$\square$

Следствие 1: Из доказательства утв. 1 следует неравенство Коши-Буняковского. Разные виды его записи:

1. $|\langle x,y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$
2. $|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$
3. $\langle x,y\rangle^2 \leqslant \langle x,x\rangle\,\langle y,y\rangle$
4. $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 \sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2$ (при $x,y\in\mathbb{R}^m$)
5. $\left|\sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2}$ (при $x,y\in\mathbb{R}^m$)

3 Метрика

Определение 4: Пусть X — множество. Отображение $\rho\colon X\times X\to\mathbb{R}$ называется **метрикой**, если оно удовлетворяет аксиомам:

1. $\forall\, x,y\in X\;\; \rho(x,y)=\rho(y,x)$ (симметричность)
2. $\forall\, x,y\in X\;\; \rho(x,y)\geqslant 0,\quad \rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$ (невырожденность)
3. $\forall\, x,y,z\in X\;\; \rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$ (неравенство треугольника для метрики)

Утверждение 2: Пусть X — линейное пространство над $\mathbb{R}$. Отображение $\rho\colon X\times X\to\mathbb{R}$, $\forall\, x,y\in X$ $\rho(x,y)=\|x-y\|$ — метрика

Доказательство: проверка аксиом метрики:

1. $\forall\, x,y\in X\;\; \|x-y\|=\|(-1)\cdot(y-x)\|=|-1|\,\|y-x\|=\|y-x\|$
2. Аксиома 1 нормы
3. По 3 аксиоме нормы $\forall\, x,y,z\in X\;\; \|x-y\|=\|x-y+z-z\|=\|(x-z)+(z-y)\|\leqslant\|x-z\|+\|z-y\|$

$\square$

4 Скалярное произведение, норма, метрика в $\mathbb{R}^m$

Определение 5: **$\mathbb{R}^m$** $=\{\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{\text{m раз}}\}=\{(x_1,x_2,\ldots,x_m)\mid x_i\in\mathbb{R}\}$

Утверждение 3: $\mathbb{R}^m$ — линейное пространство над $\mathbb{R}$ с покоординатным сложением и покоординатным умножением на скаляр

Доказательство: Очевидно. $\square$

Утверждение 4: Отображение $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, $\quad (x,y)\mapsto\sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$

Доказательство: проверка аксиом скалярного произведения:

1. $\forall\, x,y\in\mathbb{R}^m\;\; \sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i=\sum\limits_{i=1}^{m} y_i x_i$
2. $\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}^m, \forall\,\alpha\in\mathbb{R}\;\; \sum\limits_{i=1}^{m}(x_i+\alpha y_i)z_i=\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i z_i+\alpha y_i z_i)=\sum\limits_{i=1}^{m} x_i z_i+\alpha\sum\limits_{i=1}^{m} y_i z_i$
3. $\forall\, x\in\mathbb{R}^m\;\; \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2\geqslant 0,$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2=0\Leftrightarrow\forall\, i\in\{1,2,\ldots,m\}\;\; x_i^2=0\Leftrightarrow x_i=0\Leftrightarrow x=0$

$\square$

Следствие 2: По утв. 1 $\forall\, x\in\mathbb{R}^m$ $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots x_m^2}$ — норма в $\mathbb{R}^m$

Следствие 3: По утв. 2 $\forall\, x,y\in\mathbb{R}^m$ $\rho(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i-y_i)^2}$ — метрика в $\mathbb{R}^m$

5 Определения в $\mathbb{R}^m$, покоординатная сходимость, двойной и повторый предел

Напоминание определений: т.к. $\mathbb{R}^m$ — метрическое пространство, можно определить $(a \in \mathbb{R}^m, r \in \mathbb{R})$

6: Шар (открытый) с центром в точке a и радиусом r — $\mathrm{B}(a, r) = \{\, x \mid \|x - a\| < r \,\}$

7: Сфера с центром в точке a и радиусом r — $\mathrm{S}(a, r) = \{\, x \mid \|x - a\| = r \,\}$

8: Замкнутый шар с центром в точке a и радиусом r — $\overline{\mathrm{B}(a, r)} = \{\, x \mid \|x - a\| \leqslant r \,\}$

9: ε-окрестность точки a — это $\mathrm{B}(a, \varepsilon)$ $(\varepsilon \in \mathbb{R})$

10: Проколотая ε-окрестность точки a — это $\dot{\mathrm{B}}(a, \varepsilon) = \mathrm{B}(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$

11: Множество $G \subset \mathbb{R}^m$ называется открытым, если $\forall\, x \in G \;\; \exists \varepsilon_a \in \mathbb{R} : \mathrm{B}(a, \varepsilon_a) \subset G$. Если множество G — открытое, то $G = \bigcup\limits_{a \in G} \mathrm{B}(a, \varepsilon_a)$:

$G \subset \bigcup\limits_{a \in G} \mathrm{B}(a, \varepsilon_a)$: Пусть $x \in G$, тогда, т.к. G — открытое $\;\exists \mathrm{B}(x, r) \subset G$, т.е. $x \in \bigcup\limits_{a \in G} \mathrm{B}(a, \varepsilon_a)$

$G \supset \bigcup\limits_{a \in G} \mathrm{B}(a, \varepsilon_a)$: Пусть $x \in \bigcup\limits_{a \in G} \mathrm{B}(a, \varepsilon_a)$, тогда $\;\exists\, a : x \in \mathrm{B}(a, \varepsilon_a) \subset G$ $\square$

12: Точка x называется предельной точкой множества $D \subset \mathbb{R}^m$, если $\forall\, \varepsilon > 0 \; \dot{\mathrm{B}}(a, \varepsilon) \cap D \neq \varnothing$

13: Множество $F \subset \mathbb{R}^m$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки $\Leftrightarrow \;\exists\, G$ — открытое множество : $F = \mathbb{R}^m \setminus G$

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $x \in \mathbb{R}^m \setminus F$, тогда $\;\exists\, \varepsilon > 0 : \mathrm{B}(a, \varepsilon) \cap F = \varnothing$, то есть дополнение F открыто

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть x — предельная точка F и $x \notin F$, тогда $x \in G$ и любая ε-окрестность x пересекается с F, то есть G не открыто — противоречие $\square$

14: Точка $a \in \mathbb{R}^m$ называется пределом последовательности $x^{(n)}$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N : \forall\, n > N \;\; \left\|x^{(n)} - a\right\| < \varepsilon$$

15: Точка $L \in \mathbb{R}^n$ называется пределом отображения $f \colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ при $x \to a \in \mathbb{R}^m$, a — предельная точка D, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in D \text{ если } 0 < \|x - a\| < \delta, \text{ то } \; \|f(x) - L\| < \varepsilon$$

Равносильное определение (по Гейне):

$$\forall \text{ последовательтости } x^{(k)} : \begin{matrix} x^{(k)} \to a \\ x^{(k)} \neq a \\ x^{(k)} \in D \end{matrix} \quad \text{выполнено } f(x^{(k)}) \to L$$

Утверждение 5: Сходимость последовательности в $\mathbb{R}^m$ равносильна покоординатной сходимости

$$x^{(n)} \to a \;\Leftrightarrow\; \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\} \;\; x_i^{(n)} \to a_i$$

Доказательство:

$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\} \; \left|x_i^{(n)} - a_i\right| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m} \left(x_j^{(n)} - a_j\right)^2} = \left\|x^{(n)} - a\right\|$ и $\left\|x^{(n)} - a\right\| \to 0 \Rightarrow x_i^{(n)} \to a_i$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\alpha^{(n)} = \max\limits_{j=1,2,\ldots,m} \left|x_j^{(n)} - a_j\right|$, тогда $\alpha^{(n)} \to 0$ и $\left\|x^{(n)} - a\right\| = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m} \left(x_j^{(n)} - a_j\right)^2} \leqslant$

$\leqslant \max\limits_{j=1,2,\ldots,m} \left|x_j^{(n)} - a_j\right| \sqrt{m} = \sqrt{m}\, \alpha^{(n)} \to 0 \Rightarrow \left\|x^{(n)} - a\right\| \to 0$

$\square$

Следствие 4: Из определения предела отображения по Гейне $f \colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \;\; \lim_{x \to a} f_i(x) = L_i$$

Ещё напоминание определений:

16: $f\colon D\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x))$; $\forall\, i\in\{1,2,\dots,n\}$ $f_i(x)$ называются координатными функциями функции $f(x)$

17: Метрическое пространство X называется компактным, если из любого покрытия открытыми множествами множно выбрать конечное подпокрытие:

$$\forall\,\{G_\alpha\}\text{ — окрытое покрытие }\;\exists\, G_{\alpha_1},G_{\alpha_2},\dots,G_{\alpha_n}\text{ — открытое подпокрытие } X$$

Подмножество $D\subset\mathbb{R}^m$ — компактно $\Leftrightarrow$ D — замкнуто и ограничено $\Leftrightarrow$ D — секвенциально компактно $\Leftrightarrow$ $\forall\,\varepsilon>0\;\;\exists$ конечная ε-сеть (D — сверхограничено) и замкнуто

- D называется ограниченным, если $\exists\,\mathrm{B}(a,r)\subset\mathbb{R}^m: D\subset\mathrm{B}(a,r)$
- D назвается секвинциально комактным, если из любой последовательности элементов этого множества можно выбрать сходящуся подпоследовательность (к элементу этого множества)
- $N\subset D$ называется ε-сетью, если $\forall\,x\in D\;\;\exists\, y\in N:\rho(x,y)<\varepsilon$ (конечной ε-сетью, если N — конечно)
- Последовательность $x^{(n)}$ — фундоментальная, если $\forall\,\varepsilon>0\;\;\exists\, N:\forall\, m,k>N\quad\rho\left(x^{(m)},x^{(k)}\right)<\varepsilon$
- Метрическое пространство X называется полным, если в нём любая фундоментальная последовательность сходится. В $\mathbb{R}^m$ полное $\Leftrightarrow$ замкнутое

Определение 18: $D_1,D_2\subset\mathbb{R}$, a_1 — предельная точка D_1, a_2 — предельная точка D_2, $D\subset\mathbb{R}^2$ — множество : $\left(D_1\setminus\{a_1\}\right)\times\left(D_2\setminus\{a_2\}\right)\subset D$, $f\colon D\to\mathbb{R}$

1. Пусть $\varphi(x_1)=\lim\limits_{x_2\to a_2}f(x_1,x_2)$ (если этот предел существует), тогда $\lim\limits_{x_1\to a_1}\varphi(x_1)$ называется повторным пределом
2. Пусть $\psi(x_2)=\lim\limits_{x_1\to a_1}f(x_1,x_2)$ (если этот предел существует), тогда $\lim\limits_{x_2\to a_2}\psi(x_2)$ тоже называется повторным пределом
3. $L=\lim\limits_{\substack{x_1\to a_1\\x_2\to a_2}}f(x_1,x_2)$ называется двойным пределом, если

$$\forall\, U(L)\text{ — окрестность точки } L\;\;\exists\begin{matrix}V_1(a_1)\\V_2(a_2)\end{matrix}\text{ — }\begin{matrix}\text{окрестности}\\\text{точек } a_1,a_2\end{matrix}:\text{ если }\begin{matrix}x_1\in\dot V_1(a_1)\cap D_1\\x_2\in\dot V_2(a_2)\cap D_2\end{matrix},\text{ то } f(x_1,x_2)\in U(L)$$

Определение 19: Отображение $f\colon D\subset X\to Y$ X,Y — метрические пространства, $G\subset D$, a — предельная точка G. Предел сужения отображения $\lim\limits_{x\to a}f\big|_G(x)$ называется пределом по множеству
Если $f\colon D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ и $C\subset\mathbb{R}^2$ — кривая, то $\lim\limits_{x\to a}f\big|_C(x)$ называется пределом по кривой.

Утверждение 6: Пусть $D_1,D_2\subset\mathbb{R}$, a_1 — предельная точка D_1, a_2 — предельная точка D_2, $D\subset\mathbb{R}^2$ — множество : $\left(D_1\setminus\{a_1\}\right)\times\left(D_2\setminus\{a_2\}\right)\subset D$, $f\colon D\to\mathbb{R}$, тогда

1. Из того, что $\forall$ кривой $C\in C^1(D):C'\neq0\;\;\exists\lim\limits_{x\to a}f\big|_C(x)=L$ следует $\exists\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$
2. Из того, что $\forall$ кривой $C\in C^2(D):C'\neq0\;\;\exists\lim\limits_{x\to a}f\big|_C(x)=L$ **не** следует $\exists\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$

Доказательство: Его нету. □

Теорема 1 (О двойном и повторном пределе):

Пусть $D_1,D_2\subset\mathbb{R}$, a_1 — предельная точка D_1, a_2 — предельная точка D_2, $D\subset\mathbb{R}^2$ — множество : $\left(D_1\setminus\{a_1\}\right)\times\left(D_2\setminus\{a_2\}\right)\subset D$, $f\colon D\to\mathbb{R}$, $\exists$ двойной предел $\lim\limits_{\substack{x_1\to a_1\\x_2\to a_2}}f(x_1,x_2)=A\in\overline{\mathbb{R}}$, и $\forall\, x_1\in D_1\setminus\{a_1\}$ $\exists$ конечный $\varphi(x_1)=\lim\limits_{x_2\to a_2}f(x_1,x_2)$, тогда $\exists$ повторный предел $\lim\limits_{x_1\to a_1}\varphi(x_1)=A$

Доказательство: Пусть $A \in \mathbb{R}$. Так как существует двойной предел, выполнено:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \begin{matrix} V_1(a_1) \\ V_2(a_2) \end{matrix} \text{ — } \begin{matrix} \text{окрестности} \\ \text{точек } a_1, a_2 \end{matrix} : \text{если } \begin{matrix} x_1 \in \dot{V}_1(a_1) \cap D_1 \\ x_2 \in \dot{V}_2(a_2) \cap D_2 \end{matrix}, \text{ то } \|f(x_1, x_2) - A\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Делая предельный переход в последнем неравенстве при $x_2 \to a_2$ получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists V_1(a_1) \text{ — } \begin{matrix} \text{окрестность} \\ \text{точки } a_1 \end{matrix} : \text{если } x_1 \in \dot{V}_1(a_1) \cap D_1, \text{ то } \|\varphi(x_1) - A\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Аналогично при $A = \pm\infty$ □

6 Бесконечно малое отображение, $o(h)$, отображение дифференцируемое в точке

Определение 20: Отображение $\varphi \colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ называется бесконечно малым в точке $x_0 \in \operatorname{Int} E$, если $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0_{\mathbb{R}^n}$

Определение 21: Пусть $E \subset \mathbb{R}^m : 0_{\mathbb{R}^m} \in \operatorname{Int} E$, $\varphi \colon E \to \mathbb{R}^n$, $h \in E$. Говорят, что $\varphi(h) = o(h)$ при $h \to 0_{\mathbb{R}^m}$, если $\dfrac{\varphi(h)}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0_{\mathbb{R}^m}]{} 0_{\mathbb{R}^n}$ (бесконечно малое в точке $0_{\mathbb{R}^m}$).

> Определение в $\mathbb{R}$ было: $f, g \colon E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка E, говорят, что $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$, если $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ ($g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0)

Определение 22: Отображение $f \colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ называется диффиренцируемым в точке $a \in \int E$, если $\exists$линейный оператор из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ с матрицей L и $\exists$бесконечно малое отображение в точке $0_{\mathbb{R}^m}$ $\alpha \colon U(0_{\mathbb{R}^m}) \to \mathbb{R}^n$ такие, что

$$f(a + h) = f(a) + Lh + \alpha(h) \cdot \|h\| \quad \text{при } h \to 0_{\mathbb{R}^m}$$

или

$$f(x) = f(a) + L(x - a) + \alpha(x - a) \cdot \|x - a\| \quad \text{при } x \to a$$

Этот линейный оператор (с матрицей L) называется производным оператором отображения f в точке a, обозначается $f'(a)$. Получается, что отображение f' действует из $\mathbb{R}^m$ в пространство линейных операторов.

> Определение в $\mathbb{R}$ было: Функция $f \colon \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $a \in \langle a, b \rangle$, если $\exists$число $A \in \mathbb{R}$ такое, что
>
> $$f(a + h) = f(a) + Ah + o(h) \quad \text{при } h \to 0$$
>
> В определении в $\mathbb{R}^m$ можно писать $o(h)$ вместо $\alpha(h) \cdot \|h\|$ и $o(x - a)$ вместо $\alpha(x - a) \cdot \|x - a\|$

7 Комплексная дифференцируемость, единственность производной

Определение 23: Отображение $f \colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (Ω — открытое множество) называется комплексно дефференцируемым в точке $a \in \Omega$, если $\exists$число $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что

$$f(a + h) = f(a) + \lambda h + o(h) \quad \text{при } h \to 0$$

или

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lambda$$

Замечание 1: Отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вещественно дефференцироемое (т.е. как в опр. 22) будет комплексно дефференцируемым как отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ только если матрица его производного оператора будет имеет вид $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, т.к. в опр. 23 $\lambda h = (\lambda_1 + \lambda_2 i)(h_1 + h_2 i) =$

$$= (\lambda_1 h_1 - \lambda_2 h_2) + (\lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1)i, \quad \text{т.е.} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda_1 h_1 - \lambda_2 h_2 \\ \lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Утверждение 7: В определении дифференцируемости отображения $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (опр. 22) оператор $f'(a)$ определён однозначно

Доказательство: Пусть $h = t \cdot u$, $u \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$, тогда определение можно записать

$$f(a + t \cdot u) = f(a) + t\, Lu + o(t \cdot u) \quad \text{при } t \to 0$$

Так как u — фиксированный вектор, $o(t \cdot u) = o(t)$. Можно выразить Lu, перенеся остальное в другую часть и сделав предельный переход при $t \to 0$:

$$Lu = \frac{f(a + t \cdot u) - f(a)}{t} + \frac{o(t)}{t}, \quad t \to 0$$

$$Lu = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot u) - f(a)}{t}$$

□

Замечание 2: Определение дифференцируемости (опр. 22) при $n = 1$ $\big($тогда $L = (l_1, l_2, \dots, l_m)\big)$:

$$f\big((x_1, x_2, \dots, x_m)\big) = f\big((a_1, a_2, \dots a_m)\big) + \big(l_1(x_1 - a_1) + l_2(x_2 - a_2) + \dots + l_m(x_m - a_m)\big) + o(x - a)$$

8 Дифферецируемость координатных функций, частная производная

Лемма 1 (о дифференцируемости отображения и дифференцируемости его координатных функций):

$f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $a \in \operatorname{Int} E$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, тогда

1. Отображение f дифференцируемо $\Leftrightarrow$ все f_i дифференцируемы
2. Строки матрицы оператора $f'(a)$ это матрицы операторов $f_1'(a), f_2'(a), \dots, f_m'(a)$

Доказательство:

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Из опр. 22

$$\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ f_2(a+h) \\ \dots \\ f_n(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \dots \\ f_n(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_{11}h_1 + l_{12}h_2 + \dots + l_{1m}h_m \\ l_{21}h_1 + l_{22}h_2 + \dots + l_{2m}h_m \\ \dots \\ l_{n1}h_1 + l_{n2}h_2 + \dots + l_{nm}h_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(h) \cdot \|h\| \\ \alpha_2(h) \cdot \|h\| \\ \dots \\ \alpha_m(h) \cdot \|h\| \end{pmatrix}$$

   В первой строке записано определение дифференцируемости f_1, во второй — f_2 и т.д.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Если сначала написать определения дифференцируемости координатных функций $f_1, f_2, \dots, f_m$, и потом записать их в одну формулу как в предыдущем пункте, то получится определение дифференцируемости f

2. Матрицы операторов $f_1'(a), f_2'(a), \dots, f_n'(a)$ имеют размер $1 \times m$, т.е. строки. Они записаны во втором слагаемом выше и вместе образуют оператор матрицы $f'(a)$.

□

Замечание 3:

1. Если $f = const$, то $f' \equiv 0_{m\times n}$ и $o(h) \equiv 0_{\mathbb{R}^n}$
2. Если $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение с матрицей A, тогда $\forall\, x \in \mathbb{R}^m \quad \mathcal{A}'(x) = A$ (т.к. из-за линейности $\mathcal{A}(x+h) = \mathcal{A}(x) + \underbrace{Ah}_{\mathcal{A}(h)} + 0$ — то есть A это и есть производная по опр. 22)
3. Если $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, A — его матрица, и отображение задано так: $x \mapsto u + Ax$ — называется аффинное отображение (линейное со сдвигом), то тоже $\mathcal{A}'(x) = A$ (т.к. $\mathcal{A}(x+h) = u + A\,(x+h) = u + Ax + Ah = \mathcal{A}(x) + Ah + 0$)

Определение 24: Пусть $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int} E$, $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\varphi_k\colon U(a_k) \to \mathbb{R}$, $\varphi_k(u) = f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, u, a_{k+1}, \dots, a_m)$, тогда $\varphi_k'(a_k) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\varphi(a_k + t) - \varphi(a_k)}{t}$ (если этот предел существует) называется k-ой частной производной функции f в точке a. Обозначение: $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$

Замечание 4: Пусть $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — дифференцируемо в точке a, тогда f — непрерывно в точке a (т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$). Т.к. переходя к пределу в определении дефференцируемости при $h \to 0$ получаем $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$. Но если существуют все частные производные, то функция может быть не непрерывной, например

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Здесь $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = 0$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} = 0$, но предел в точке 0 вдоль прямой $y = x$: $\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = 1$, а вдоль прямой $y = 2x$: $\lim\limits_{t\to 0} f(t,2t) = \dfrac{4}{5}$. То есть у f не существует предела в нуле.

9 Матрица якоби, необходимое, достаточное условия дифференцируемости, правила дифференцирования

Определение 25: Матрица оператора $f'(a)$, $a \in \operatorname{Int} E$ отображения $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (если f — дифференцируемо) называется матрицей якоби отображения f в точке a.

Теорема 2 *(необходимое условие дифференцируемости)*:
Пусть отображение $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — дифференцируемо в точке $a \in \operatorname{Int} E$, тогда существуют все частные производные всех его координатных функций и

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} \text{— матрица якоби отображения } f \text{ в точке } a$$

Доказательство: $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ рассмотрим координатную функцию f_i.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \overset{\text{опр. 24}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f_i(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \ldots, a_m) - f_i(a)}{t} =$$

$$\overset{\text{зам. 2}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f_i(a) + l_k(a_k + t - a_k) - f_i(a) + o(t)}{t} = l_k$$

$k \in \{1, 2, \ldots, m\}, l_k$ — k-ая компонетна матрицы якоби функции f_i (размер матрицы — $1 \times m$). То есть компонентами l_k матриц якоби координатных функций f_i в точке a являются соответствующие частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ координатных функций f_i в точке a. И по лемме 1 строки матрицы якоби отображения f состоят из матриц якоби координатных функций. ☐

Теорема 3 (достаточное условие дифференцируемости):

$f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int} E$, $\exists\, r$: в шаре $\mathrm{B}(a, r) \subset E$ $\exists$ все частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ ($k \in \{1, 2, \ldots, m\}$) и они непрерывны в точке a. Тогда функция f — дифференцируема в точке a

Доказательство: При $m = 2$.

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = \big(f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2)\big) + \big(f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2)\big) =$$

> Пусть $g(x_2) = f(x_1, x_2)$, x_1 — фиксировано. Тогда $f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2) = g(x_2) - g(a_2)$. Функция g — дифференцируема на $[a_2, x_2]$ $(g' = \frac{\partial f}{\partial x_2}) \Rightarrow$ по теореме Лагранжа $\exists\, x_0$ между x_2 и a_2 : $g(x_2) - g(a_2) = g'(x_0)(x_2 - a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)(x_2 - a_2)$. Поэтому:

$$= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_0)\,(x_2 - a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0, a_2)\,(x_1 - a_1) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,(x_2 - a_2) +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0, a_2)\right)(x_1 - a_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_0) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right)(x_2 - a_2)$$

Домножим и поделим на $\|x - a\|$ последнюю строку. $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0, a_2)\right) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, т.к. x_0 между x_1 и a_1; и $\left|\dfrac{x_1 - a_1}{\|x - a\|}\right| \leqslant 1$. Аналогично во втором слагаемом этой строки. Значит теперь в ней написано *б.м.* $\cdot \|x - a\|$, то есть $o(x - a)$. Получилось определение дифференцируемости f. ☐

10 Правила дифференцирования

1. **Линейность:** $f, g\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — дифференцируемы в точке $a \in \operatorname{Int} E$, тогда отображения $f + g$, λg — тоже дифференцируемы в точке a и их производные операторы равны: $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, $(\lambda g)'(a) = \lambda g'(a)$.

Лемма 2 (об оценке нормы линейного оператора):

$f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение с матрицей A. Тогда $\forall\, x \in \mathbb{R}^m$ $\|Ax\| \leqslant C_A \|x\|$, где $C_A = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n,m} a_{ij}^2}$, a_{ij} — элементы матрицы A

Доказательство:

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j\right)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{m} x_j^2\right)} = \|x\|\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n,m} a_{ij}^2}$$

□

2. **Дифференцируемость композиции:** $f\colon E\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^l$, $g\colon I\subset\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^n$, f — диффиренцируемо в точке $a\in\operatorname{Int}E$, g — диффиренцируемо в точке $b=f(a)\in\operatorname{Int}I$. Тогда отображение $g\circ f$ — дифференцируемо в точке a и его производный оператор $g(f(a))'=g'(f(a))\,f'(a)$
Доказательство: определения дифференцируемости отображений f и g:

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|,\quad \alpha(h)\xrightarrow[h\to 0_{\mathbb{R}^m}]{} 0_{\mathbb{R}^l}$$

$$g(b+k)=g(b)+g'(b)\,k+\beta(k)\,\|k\|,\quad \beta(k)\xrightarrow[k\to 0_{\mathbb{R}^l}]{} 0_{\mathbb{R}^n}$$

Получаем, что отображение $g\circ f$ дифференцируемо по определению:

$$g\big(f(a+h)\big)-g\big(f(a)\big)=g\big(\underbrace{f(a)}_{b}+\underbrace{f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|}_{k}\big)-g\big(f(a)\big)=$$

$$=g\big(f(a)\big)+g'\big(f(a)\big)\,\big(f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|\big)+\beta\big(f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|\big)\,\big\|f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|\big\|-g\big(f(a)\big)=$$

$$=g'\big(f(a)\big)\,f'(a)\,h+\underbrace{g'\big(f(a)\big)\,\alpha(h)\,\|h\|}_{I}+\underbrace{\beta\big(f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|\big)\,\big\|f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|\big\|}_{II}$$

$$\|I\|=\|g'\big(f(a)\big)\,\alpha(h)\|\cdot\|h\|\overset{\text{лемма 2}}{\leqslant}\underbrace{\|\alpha(h)\|}_{\text{б.м. при } h\to 0_{\mathbb{R}^m}}C_{g'(f(a))}\,\|h\|$$

$$\|II\|=\big\|\beta\big(f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|\big)\big\|\cdot\big\|f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|\big\|\overset{\text{нер-во тр-ка}}{\leqslant}\big\|\beta\big(f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|\big)\big\|\cdot\|f'(a)\,h\|+$$

$$+\big\|\beta\big(f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|\big)\big\|\cdot\big\|\alpha(h)\,\|h\|\big\|\overset{\text{лемма 2}}{\leqslant}\text{б.м.}\cdot\|h\|\,C_{f'(a)}+\text{б.м.}\cdot\text{б.м.}\cdot\|h\|\quad\text{при } h\to 0_{\mathbb{R}^m}$$

Тогда $I+II$ это *б.м.*$\cdot\|h\|$ $\Rightarrow$ получилось определение дифференцируемости отображения $g\circ f$.

3. **Дифференцирование произведений:** Отображения $f,g\colon E\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $\lambda\colon E\to\mathbb{R}$ — дифференцируемы в точке $a\in\operatorname{Int}E$. Тогда отображения $\lambda f(x)=\lambda(x)f(x)$ и $\langle f,g\rangle(x)=\langle f(x),g(x)\rangle$ дифференцируемы в точке a. Они действуют на вектор $h\in\mathbb{R}^m$ так:

① $(\lambda f)'(a)\cdot h=\big(\lambda'(a)\cdot h\big)\cdot f(a)+\lambda(a)\cdot f'(a)\cdot h$

② $\langle f,g\rangle'(a)\cdot h=\langle f'(a)\cdot h,g(a)\rangle+\langle f(a),g'(a)\cdot h\rangle$

Доказательство:

① $\lambda(a+h)f(a+h)\overset{\text{опр. 22}}{=}\big(\lambda(a)+\lambda'(a)\,h+o(h)\big)\big(f(a)+f'(a)\,h+o(h)\big)=\lambda(a)f(a)+\lambda(a)f'(a)\,h+$ $+\lambda'(a)\,h\,f(a)+o(h)$ — определение дифференцируемости λf в точке a.

② $$\langle f,g\rangle'(a)\cdot h=\left(\sum_{i=1}^{n}f_ig_i\right)'(a)\cdot h\overset{\text{лин.}}{=}\sum_{i=1}^{n}(f_ig_i)'(a)\cdot h\overset{①}{=}\sum_{i=1}^{n}\big(\underbrace{f_i'(a)\cdot h}_{i\text{-ая координата } F'(a)\cdot h}\big)\cdot g_i(a)+f_i(a)\cdot g_i'(a)\cdot h=$$

$$=\langle f'(a)\cdot h,g(a)\rangle+\langle f(a),g'(a)\cdot h\rangle$$

Замечание 5: *Общее правило дифференцирования функции одной переменной:*

$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — дифференцируема, задаётся формулой $f(x)$. $f(x)\rightsquigarrow F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, n — количество x-ов в формуле (т.е. нужно пронумеровать все x-ы). Тогда

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,x,\ldots,x)$$

Доказательство: Определение дифференцируемости F:

$$\underbrace{F(x+h,\dots,x+h)}_{f(x+h)} = \underbrace{F(x,\dots,x)}_{f(x)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,x,\dots,x)\cdot h}_{\text{число} \Rightarrow \text{это } f'(x)} + o(h) \qquad \text{при } h\to 0$$

11 Теорема Лагранжа, градиент, производная по вектору, по направлению, экстремальное свойство градиента

Теорема 4 *(Лагранжа для векторонозначных функций):*

$f\colon [a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ — непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b). Тогда $\exists\, c\in(a,b)$:

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant \|f'(c)\|\cdot\|(b-a)\|$$

Доказательство: Пусть $\varphi\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, $\varphi(t) = \big\langle f(b)-f(a), f(t)-f(a)\big\rangle$. Тогда φ — непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и $\varphi(a)=0$, $\varphi(b)=\|f(b)-f(a)\|^2$. Поэтому

$$\|f(b)-f(a)\|^2 = \varphi(b)-\varphi(a) \overset{\substack{\text{по обычной теореме}\\ \text{Лагранжа } \exists c\in(a,b)}}{=} \varphi'(c)(b-a) \overset{②}{=} \big\langle f(b)-f(a), f'(c)\big\rangle (b-a) \overset{\substack{\text{нер-во Коши-}\\ \text{Буняковского}}}{\leqslant}$$
$$\leqslant \|f(b)-f(a)\|\cdot\|f'(c)\|\cdot(b-a)$$

Теперь, деля на $\|f(b)-f(a)\|$ (при $f(b)=f(a)$ доказываемое неравенство очевидно) получаем то, что нужно. □

Определение 26: Пусть функция $f\colon E\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ — дифференцируема в точке $a\in\operatorname{Int}E$. Тогда матрица якоби функции f имеет размер $1\times m$ (строка). Если её транспонировать и считать, что это вектор из $\mathbb{R}^m$, то определение дифференцирцемости можно записать так:

$$f(a+h) = f(a) + \langle f'(a), h\rangle + o(h), \qquad \text{при } h\to 0_{\mathbb{R}^m}$$

и тогда вектор $f'(a)\in\mathbb{R}^m$ называется градиентом функции f в точке a, обозначается $\operatorname{grad} f(a)$.

Определение 27: Производной по вектору $h\in\mathbb{R}^m$ функции $f\colon E\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ в точке a называется

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t}$$

обозначение: $\dfrac{\partial f}{\partial h}(a)$. Напрвлением в $\mathbb{R}^m$ называется вектор $l\in\mathbb{R}^m$: $\|l\|=1$. Можно рассматривать производную по направлению.

Замечание 6: $f\colon E\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ — дифференцируема в точке $a\in\operatorname{Int}E$, тогда

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t} \overset{\text{опр. дифф-сти}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,th_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\,th_m + o(t)}{t} = \langle \operatorname{grad} f(a), h\rangle$$

Теорема 5 *(Экстремальное свойство градиента):*

$f\colon E\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ — дифференцируема в точке $a\in\operatorname{Int}E$, $\operatorname{grad} f(a)\neq 0$, пусть $l = \dfrac{\operatorname{grad} f(a)}{\|\operatorname{grad} f(a)\|}$ — направление в $\mathbb{R}^m$. Тогда l — направление наискорейшего возрастания функции f, т.е.

$$\forall\, h\in\mathbb{R}^m, \text{ у которого } \|h\|=1 \text{ выполнено} \qquad -\|\operatorname{grad} f(a)\| \leqslant \frac{\partial f}{\partial h}(a) \leqslant \|\operatorname{grad} f(a)\|$$

а равенство достигается при $h=l$ (справа) и $h=-l$ (слева)

Доказательство: содержимое... □