Содержание

Определения и формулировки:

1 Линейное пространство

Определение 1: Множество X называется линейным пространством (или векторным) над полем K, если заданы две операции

$$\begin{array}{lll} \text{Сложение:} & X \times X \to X & ((x,y) \mapsto x+y) \\ \text{Умножение на скаляр:} & K \times X \to X & ((\alpha,x) \mapsto \alpha \cdot x) \end{array}$$, удовлетворяющие аксиомам:

$(X,+)$ — абелева группа по сложению

1. $\forall x, y \in X \quad x + y = y + x$ (коммутативность сложения)
2. $\forall x, y, z \in X \quad (x+y)+z = x+(y+z)$ (ассоциативность сложения)
3. $\forall x \in X \quad \exists\, 0_X : x + 0_X = x$ (существование нейтрольного элемента по сложению)
4. $\forall x \in X \quad \exists\, (-x) : x + (-x) = 0_X$ (существование обратного элемента по сложению)
5. $\forall x \in X, \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha+\beta)\cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
6. $\forall x, y \in X, \forall \alpha \in K \quad \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
7. $\forall x \in X, \forall \alpha, \beta \in K \quad (\alpha\beta)\cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$
8. $\forall x \in X \quad 1_X \cdot x = x$, где $1_X \in K$ — нейтральный элемент по умножению

2 Скалярное произведение, норма

Определение 2: Пусть X — линейное пространство над $\mathbb{R}$. Отображение $X \times X \to \mathbb{R}$ $((x,y) \mapsto \langle x, y\rangle)$ называется скалярным произведением, если оно удовлетворяет аксиомам:

1. $\forall x, y \in X \ \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ (симметричность)
2. $\forall x, y, z \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \langle x + \alpha \cdot y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \alpha \langle y, z\rangle$ (линейность)
3. $\forall x \in X \ \langle x, x\rangle \geqslant 0, \quad \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$ (положительная определённость)

Определение 3: Отображение $X \to \mathbb{R}$ $(x \mapsto \|x\|)$ называется нормой (X — линейное пространство над $\mathbb{R}$), если оно удовлетворяет аксиомам:

1. $\forall x \in X \ \|x\| \geqslant 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$ (положительная определённость)
2. $\forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \, \|x\|$ (положительная однородность)
3. $\forall x, y \in X \ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника для нормы)

Утверждение 1: Отображение $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$ — норма (X — линейное пространство над $\mathbb{R}$)

Доказательство: проверка аксиом нормы:

1. Аксиома 3 скалярного произведения
2. По аксиоме 2 скалярного произведения $\sqrt{\langle \alpha \cdot x, \alpha \cdot x\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x\rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, x\rangle}$
3. Нужно доказать, что $\forall x, y \in X$ $\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$. Обе части положительные, поэтому это неравенство равносильно неравенству

$$\langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leqslant \langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle$$
$$\langle x, y\rangle \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle}$$

Рассмотрим функцию $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (\alpha \mapsto \langle x + \alpha \cdot y, x + \alpha \cdot y\rangle)$.

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f(\alpha) &= \langle x, x + \alpha \cdot y\rangle + \langle \alpha \cdot y, x + \alpha \cdot y\rangle = \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, \alpha \cdot y\rangle + \langle \alpha \cdot y, x\rangle + \langle \alpha \cdot y, \alpha \cdot y\rangle = \\ &= \langle x, x\rangle + 2\alpha \langle x, y\rangle + \alpha^2 \langle y, y\rangle \end{aligned}$$

Также $f(\alpha) \geqslant 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (по аксиоме 3 скалярного произведения) $\Rightarrow$ дискриминант $\leqslant 0$: $(2\langle x, y\rangle)^2 - 4\langle y, y\rangle \langle x, x\rangle \leqslant 0$, то есть $\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$ или $|\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle \langle y, y\rangle}$

$\square$

Следствие 1: Из доказательства утв. 1 следует неравенство Коши-Буняковского. Разные виды его записи:

1. $|\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle}\,\sqrt{\langle y, y\rangle}$
2. $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$
3. $\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle\,\langle y, y\rangle$
4. $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2\,\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2$ (при $x, y \in \mathbb{R}^m$)
5. $\left|\sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2}\,\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i^2}$ (при $x, y \in \mathbb{R}^m$)

3 Метрика

Определение 4: Пусть X — множество. Отображение $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ называется метрикой, если оно удовлетворяет аксиомам:

1. $\forall x, y \in X$ $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность)
2. $\forall x, y \in X$ $\rho(x, y) \geqslant 0$, $\quad \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (невырожденность)
3. $\forall x, y, z \in X$ $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника для метрики)

Утверждение 2: Пусть X — линейное пространство над $\mathbb{R}$. Отображение $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$, $\forall x, y \in X$ $\rho(x, y) = \|x - y\|$ — метрика

Доказательство: проверка аксиом метрики:

1. $\forall x, y \in X$ $\|x - y\| = \|(-1)\cdot(y - x)\| = |-1|\,\|y - x\| = \|y - x\|$
2. Аксиома 1 нормы
3. По 3 аксиоме нормы $\forall x, y, z \in X$ $\|x-y\| = \|x-y+z-z\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leqslant \|x-z\|+\|z-y\|$

$\square$

4 Скалярное произведение, норма, метрика в $\mathbb{R}^m$

Определение 5: $\mathbb{R}^m = \{\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\text{m раз}}\} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

Утверждение 3: $\mathbb{R}^m$ — линейное пространство над $\mathbb{R}$ с покоординатным сложением и покоординатным умножением на скаляр

Доказательство: Очевидно. $\square$

Утверждение 4: Отображение $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\quad (x, y) \mapsto \sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$

Доказательство: проверка аксиом скалярного произведения:

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$ $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i x_i$
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^m, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i + \alpha y_i)z_i = \sum\limits_{i=1}^{m}(x_i z_i + \alpha y_i z_i) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i z_i + \alpha \sum\limits_{i=1}^{m} y_i z_i$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^m$ $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 \geqslant 0$, и $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ $x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\square$

Следствие 2: По утв. 1 $\forall x \in \mathbb{R}^m$ $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_m^2}$ — норма в $\mathbb{R}^m$

Следствие 3: По утв. 2 $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$ $\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i - y_i)^2}$ — метрика в $\mathbb{R}^m$

5 Определения в $\mathbb{R}^m$, покоординатная сходимость, двойной и повторый предел

Напоминание определений: т.к. $\mathbb{R}^m$ — метрическое пространство, можно определить $(a \in \mathbb{R}^m, r \in \mathbb{R})$

6: Шар (открытый) с центром в точке a и радиусом r — $\mathrm{B}(a,r) = \{\, x \mid \|x-a\| < r \,\}$

7: Сфера с центром в точке a и радиусом r — $\mathrm{S}(a,r) = \{\, x \mid \|x-a\| = r \,\}$

8: Замкнутый шар с центром в точке a и радиусом r — $\overline{\mathrm{B}(a,r)} = \{\, x \mid \|x-a\| \leqslant r \,\}$

9: ε-окрестность точки a — это $\mathrm{B}(a,\varepsilon)$ $(\varepsilon \in \mathbb{R})$

10: Проколотая ε-окрестность точки a — это $\dot{\mathrm{B}}(a,\varepsilon) = \mathrm{B}(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$

11: Множество $G \subset \mathbb{R}^m$ называется открытым, если $\forall\, x \in G \;\; \exists \varepsilon_a \in \mathbb{R} : \mathrm{B}(a,\varepsilon_a) \subset G$. Если множество G — открытое, то $G = \bigcup\limits_{a \in G} \mathrm{B}(a,\varepsilon_a)$:

$G \subset \bigcup\limits_{a \in G} \mathrm{B}(a,\varepsilon_a)$: Пусть $x \in G$, тогда, т.к. G — открытое $\;\exists \mathrm{B}(x,r) \subset G$, т.е. $x \in \bigcup\limits_{a \in G} \mathrm{B}(a,\varepsilon_a)$

$G \supset \bigcup\limits_{a \in G} \mathrm{B}(a,\varepsilon_a)$: Пусть $x \in \bigcup\limits_{a \in G} \mathrm{B}(a,\varepsilon_a)$, тогда $\;\exists\, a : x \in \mathrm{B}(a,\varepsilon_a) \subset G$ $\square$

12: Точка x называется предельной точкой множества $D \subset \mathbb{R}^m$, если $\forall\, \varepsilon > 0 \;\dot{\mathrm{B}}(a,\varepsilon) \cap D \neq \varnothing$

13: Множество $F \subset \mathbb{R}^m$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки $\Leftrightarrow\;\; \exists\, G$ — открытое множество : $F = \mathbb{R}^m \setminus G$

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $x \in \mathbb{R}^m \setminus F$, тогда $\;\exists \varepsilon > 0 : \mathrm{B}(a,\varepsilon) \cap F = \varnothing$, то есть дополнение F открыто

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть x — предельная точка F и $x \notin F$, тогда $x \in G$ и любая ε-окрестность x пересекается с F, то есть G не открыто — противоречие $\square$

14: Точка $a \in \mathbb{R}^m$ называется пределом последовательности $x^{(n)}$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N : \forall n > N \;\; \left\|x^{(n)} - a\right\| < \varepsilon$$

15: Точка $L \in \mathbb{R}^n$ называется пределом отображения $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ при $x \to a \in \mathbb{R}^m$, a — предельная точка D, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall x \in D \text{ если } 0 < \|x-a\| < \delta, \text{ то } \;\|f(x) - L\| < \varepsilon$$

Равносильное определение (по Гейне):

$$\forall \;\text{ последовательтости } x^{(k)} : \begin{array}{l} x^{(k)} \to a \\ x^{(k)} \neq a \\ x^{(k)} \in D \end{array} \quad \text{выполнено } f(x^{(k)}) \to L$$

Утверждение 5: Сходимость последовательности в $\mathbb{R}^m$ равносильна покоординатной сходимости

$$x^{(n)} \to a \;\Leftrightarrow\; \forall\, i \in \{1,2,\ldots,m\} \;\; x_i^{(n)} \to a_i$$

Доказательство:

$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall\, i \in \{1,2,\ldots,m\} \;\left|x_i^{(n)} - a_i\right| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m} \left(x_j^{(n)} - a_j\right)^2} = \left\|x^{(n)} - a\right\|$ и $\left\|x^{(n)} - a\right\| \to 0 \Rightarrow x_i^{(n)} \to a_i$

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $\alpha^{(n)} = \max\limits_{j=1,2,\ldots,m} \left|x_j^{(n)} - a_j\right|$, тогда $\alpha^{(n)} \to 0$ и $\left\|x^{(n)} - a\right\| = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m} \left(x_j^{(n)} - a_j\right)^2} \leqslant$
$\leqslant \max\limits_{j=1,2,\ldots,m} \left|x_j^{(n)} - a_j\right| \sqrt{m} = \sqrt{m}\,\alpha^{(n)} \to 0 \Rightarrow \left\|x^{(n)} - a\right\| \to 0$

$\square$

Следствие 4: Из определения предела отображения по Гейне $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; \forall\, i \in \{1,2,\ldots,n\} \;\; \lim_{x \to a} f_i(x) = L_i$$

Ещё напоминание определений:

16: $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$; $\forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $f_i(x)$ называются координатными функциями функции $f(x)$

17: Метрическое пространство X называется компактным, если из любого покрытия открытыми множествами множно выбрать конечное подпокрытие:

$$\forall\ \{G_\alpha\}\ \text{— окрытое покрытие}\ \ \exists\, G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_n}\ \text{— открытое подпокрытие}\ X$$

Подмножество $D \subset \mathbb{R}^m$ — компактно $\Leftrightarrow$ D — замкнуто и ограничено $\Leftrightarrow$ D — секвенциально компактно $\Leftrightarrow$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists$ конечная ε-сеть (D — сверхограничено) и замкнуто

- D называется ограниченным, если $\exists\, \mathrm{B}(a, r) \subset \mathbb{R}^m : D \subset \mathrm{B}(a, r)$
- D назвается секвинциально комактным, если из любой последовательности элементов этого множества можно выбрать сходящуся подпоследовательность (к элементу этого множества)
- $N \subset D$ называется ε-сетью, если $\forall\, x \in D\ \ \exists\, y \in N : \rho\,(x, y) < \varepsilon$ (конечной ε-сетью, если N — конечно)
- Последовательность $x^{(n)}$ — фундоментальная, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, N : \forall\, m, k > N \quad \rho\left(x^{(m)}, x^{(k)}\right) < \varepsilon$
- Метрическое пространство X называется полным, если в нём любая фундоментальная последовательность сходится. В $\mathbb{R}^m$ полное $\Leftrightarrow$ замкнутое

Определение 18: $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a_1 — предельная точка D_1, a_2 — предельная точка D_2, $D \subset \mathbb{R}^2$ — множество : $\big(D_1 \setminus \{a_1\}\big) \times \big(D_2 \setminus \{a_2\}\big) \subset D$, $f\colon D \to \mathbb{R}$

1. Пусть $\varphi(x_1) = \lim\limits_{x_2 \to a_2} f(x_1, x_2)$ (если этот предел существует), тогда $\lim\limits_{x_1 \to a_1} \varphi(x_1)$ называется повторным пределом
2. Пусть $\psi(x_2) = \lim\limits_{x_1 \to a_1} f(x_1, x_2)$ (если этот предел существует), тогда $\lim\limits_{x_2 \to a_2} \psi(x_2)$ тоже называется повторным пределом
3. $L = \lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2}} f(x_1, x_2)$ называется двойным пределом, если

$$\forall\, U(L) \text{ — окрестность точки } L\ \ \exists\, \begin{matrix} V_1(a_1) \\ V_2(a_2) \end{matrix} \ \begin{matrix}\text{— окрестности :} \\ \text{точек } a_1, a_2\end{matrix} \ \text{если}\ \begin{matrix} x_1 \in \dot{V}_1(a_1) \cap D_1 \\ x_2 \in \dot{V}_2(a_2) \cap D_2 \end{matrix},\ \text{то } f(x_1, x_2) \in U(L)$$

Определение 19: Отображение $f\colon D \subset X \to Y$ X, Y — метрические пространства, $G \subset D$, a — предельная точка G. Предел сужения отображения $\lim\limits_{x \to a} f\big|_G(x)$ называется пределом по множеству
Если $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $C \subset \mathbb{R}^2$ — кривая, то $\lim\limits_{x \to a} f\big|_C(x)$ называется пределом по кривой.

Утверждение 6: Пусть $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a_1 — предельная точка D_1, a_2 — предельная точка D_2, $D \subset \mathbb{R}^2$ — множество : $\big(D_1 \setminus \{a_1\}\big) \times \big(D_2 \setminus \{a_2\}\big) \subset D$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, тогда

1. Из того, что $\forall$ кривой $C \in C^1(D) : C' \neq 0\ \ \exists \lim\limits_{x \to a} f\big|_C(x) = L$ следует $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = L$
2. Из того, что $\forall$ кривой $C \in C^2(D) : C' \neq 0\ \ \exists \lim\limits_{x \to a} f\big|_C(x) = L$ **не** следует $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Доказательство: Его нету. $\square$

Теорема 1 (О двойном и повторном пределе):

Пусть $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, a_1 — предельная точка D_1, a_2 — предельная точка D_2, $D \subset \mathbb{R}^2$ — множество : $\big(D_1 \setminus \{a_1\}\big) \times \big(D_2 \setminus \{a_2\}\big) \subset D$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $\exists$ двойной предел $\lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2}} f(x_1, x_2) = A \in \overline{\mathbb{R}}$, и $\forall\, x_1 \in D_1 \setminus \{a_1\}$ $\exists$ конечный $\varphi(x_1) = \lim\limits_{x_2 \to a_2} f(x_1, x_2)$, тогда $\exists$ повторный предел $\lim\limits_{x_1 \to a_1} \varphi(x_1) = A$

Доказательство: Пусть $A \in \mathbb{R}$. Так как существует двойной предел, выполнено:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists \begin{matrix} V_1(a_1) \\ V_2(a_2) \end{matrix} \;\; \begin{matrix} \text{— окрестности} \\ \text{точек } a_1, a_2 \end{matrix} : \text{если } \begin{matrix} x_1 \in \dot{V}_1(a_1) \cap D_1 \\ x_2 \in \dot{V}_2(a_2) \cap D_2 \end{matrix}, \text{ то } \|f(x_1, x_2) - A\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Делая предельный переход в последнем неравенстве при $x_2 \to a_2$ получаем

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\, V_1(a_1) \;\; \begin{matrix} \text{— окрестность} \\ \text{точки } a_1 \end{matrix} : \text{если } x_1 \in \dot{V}_1(a_1) \cap D_1, \text{ то } \|\varphi(x_1) - A\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Аналогично при $A = \pm\infty$ $\square$

6 Бесконечно малое отображение, $o(h)$, отображение дифференцируемое в точке

Определение 20: Отображение $\varphi \colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ называется бесконечно малым в точке $x_0 \in \operatorname{Int} E$, если $\varphi(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0_{\mathbb{R}^n}$

Определение 21: Пусть $E \subset \mathbb{R}^m : 0_{\mathbb{R}^m} \in \operatorname{Int} E$, $\quad \varphi \colon E \to \mathbb{R}^n$, $\quad h \in E$. Говорят, что $\varphi(h) = o(h)$ при $h \to 0_{\mathbb{R}^m}$, если $\dfrac{\varphi(h)}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0_{\mathbb{R}^m}]{} 0_{\mathbb{R}^n}$ (бесконечно малое в точке $0_{\mathbb{R}^m}$).

> Определение в $\mathbb{R}$ было: $f, g \colon E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка E, говорят, что $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$, если $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ ($g(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0)

Определение 22: Отображение $f \colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ называется диффиренцируемым в точке $a \in \operatorname{Int} E$, если $\exists$ линейный оператор из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ с матрицей L и $\exists$ бесконечно малое отображение в точке $0_{\mathbb{R}^m}$ $\quad \alpha \colon U(0_{\mathbb{R}^m}) \to \mathbb{R}^n$ такие, что

$$f(a + h) = f(a) + Lh + \alpha(h) \cdot \|h\| \quad \text{при } h \to 0_{\mathbb{R}^m}$$

или

$$f(x) = f(a) + L(x - a) + \alpha(x - a) \cdot \|x - a\| \quad \text{при } x \to a$$

Этот линейный оператор (с матрицей L) называется производным оператором отображения f в точке a, обозначается $f'(a)$. Получается, что отображение f' действует из $\mathbb{R}^m$ в пространство линейных операторов.

> Определение в $\mathbb{R}$ было: Функция $f \colon \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $a \in \langle a, b \rangle$, если $\exists$ число $A \in \mathbb{R}$ такое, что
>
> $$f(a + h) = f(a) + Ah + o(h) \quad \text{при } h \to 0$$
>
> В определении в $\mathbb{R}^m$ можно писать $o(h)$ вместо $\alpha(h) \cdot \|h\|$ и $o(x - a)$ вместо $\alpha(x - a) \cdot \|x - a\|$

7 Комплексная дифференцируемость, единственность производной

Определение 23: Отображение $f \colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad$ (Ω — открытое множество) $\quad$ называется комплексно дефференцируемым в точке $a \in \Omega$, если $\exists$ число $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что

$$f(a + h) = f(a) + \lambda h + o(h) \quad \text{при } h \to 0$$

или

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lambda$$

Замечание 1: Отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вещественно деффеpенциpоемое (т.е. как в опр. 22) будет комплексно деффеpенциpуемым как отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ только если матрица его производного оператора будет имеет вид $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, т.к. в опр. 23 $\lambda h = (\lambda_1 + \lambda_2 i)(h_1 + h_2 i) =$

$$= (\lambda_1 h_1 - \lambda_2 h_2) + (\lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1)i, \quad \text{т.е. } \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda_1 h_1 - \lambda_2 h_2 \\ \lambda_1 h_2 + \lambda_2 h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Утверждение 7: В определении дифференцируемости отображения $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (опр. 22) оператор $f'(a)$ определён однозначно

Доказательство: Пусть $\quad h = t \cdot u, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}, \quad$ тогда определение можно записать

$$f(a + t \cdot u) = f(a) + t\,Lu + o(t \cdot u) \quad \text{ при } t \to 0$$

Так как u — фиксированный вектор, $o(t \cdot u) = o(t)$. Можно выразить Lu, перенеся остальное в другую часть и сделав предельный переход при $t \to 0$:

$$Lu = \frac{f(a + t \cdot u) - f(a)}{t} + \frac{o(t)}{t}, \quad t \to 0$$

$$Lu = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t \cdot u) - f(a)}{t}$$

□

Замечание 2: Определение дифференцируемости (опр. 22) при $n = 1$ $\big($тогда $L = (l_1, l_2, \ldots, l_m)\big)$:

$$f\big((x_1, x_2, \ldots, x_m)\big) = f\big((a_1, a_2, \ldots a_m)\big) + \big(l_1(x_1 - a_1) + l_2(x_2 - a_2) + \cdots + l_m(x_m - a_m)\big) + o(x - a)$$

8 Дифферецируемость координатных функций, частная производная

Лемма 1 (о дифференцируемости отображения и дифференцируемости его координатных функций):

$f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad a \in \operatorname{Int} E, \quad f = (f_1, f_2, \ldots, f_n), \quad$ тогда

1. Отображение f дифференцируемо $\Leftrightarrow$ все f_i дифференцируемы
2. Строки матрицы оператора $f'(a)$ это матрицы операторов $f_1'(a), f_2'(a), \ldots, f_m'(a)$

Доказательство:

1. $\boxed{\Rightarrow}$ Из опр. 22

$$\begin{pmatrix} f_1(a+h) \\ f_2(a+h) \\ \ldots \\ f_n(a+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a) \\ f_2(a) \\ \ldots \\ f_n(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_{11}h_1 + l_{12}h_2 + \cdots + l_{1m}h_m \\ l_{21}h_1 + l_{22}h_2 + \cdots + l_{2m}h_m \\ \ldots \\ l_{n1}h_1 + l_{n2}h_2 + \cdots + l_{nm}h_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(h) \cdot \|h\| \\ \alpha_2(h) \cdot \|h\| \\ \ldots \\ \alpha_m(h) \cdot \|h\| \end{pmatrix}$$

   В первой строке записано определение дифференцируемости f_1, во второй — f_2 и т.д.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Если сначала написать определения дифференцируемости координатных функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$, и потом записать их в одну формулу как в предыдущем пункте, то получится определение дифференцируемости f

2. Матрицы операторов $f_1'(a), f_2'(a), \ldots, f_n'(a)$ имеют размер $1 \times m$, т.е. строки. Они записаны во втором слагаемом выше и вместе образуют оператор матрицы $f'(a)$.

□

Замечание 3:

1. Если $f = const$, то $f' \equiv 0_{m\times n}$ и $o(h) \equiv 0_{\mathbb{R}^n}$
2. Если $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение с матрицей A, тогда $\forall\, x \in \mathbb{R}^m \quad \mathcal{A}'(x) = A$ (т.к. из-за линейности $\mathcal{A}(x+h) = \mathcal{A}(x) + \underbrace{Ah}_{\mathcal{A}(h)} + 0$ — то есть A это и есть производная по опр. 22)
3. Если $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, A — его матрица, и отображение задано так: $x \mapsto u + Ax$ — называется аффинное отображение (линейное со сдвигом), то тоже $\mathcal{A}'(x) = A$ (т.к. $\mathcal{A}(x+h) = u + A\,(x+h) = u + Ax + Ah = \mathcal{A}(x) + Ah + 0$)

Определение 24: Пусть $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int} E$, $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\varphi_k\colon U(a_k) \to \mathbb{R}$, $\varphi_k(u) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, u, a_{k+1}, \ldots, a_m)$, тогда $\varphi_k'(a_k) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\varphi(a_k+t) - \varphi(a_k)}{t}$ (если этот предел существует) называется **k-ой частной производной** функции f в точке a. Обозначение: $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$

Замечание 4: Пусть $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — дифференцируемо в точке a, тогда f — непрерывно в точке a (т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$). Т.к. переходя к пределу в определении деффеpенцируемости при $h \to 0$ получаем $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$. Но если существуют все частные производные, то функция может быть не непрерывной, например

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Здесь $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = 0$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} = 0$, но предел в точке 0 вдоль прямой $y = x$: $\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = 1$, а вдоль прямой $y = 2x$: $\lim\limits_{t\to 0} f(t, 2t) = \dfrac{4}{5}$. То есть у f не существует предела в нуле.

Определение 25: Матрица оператора $f'(a)$, $a \in \operatorname{Int} E$ отображения $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (если f — дифференцируемо) называется **матрицей якоби** отображения f в точке a.

Теорема 2 (необходимое условие дифференцируемости):

Пусть отображение $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — дифференцируемо в точке $a \in \operatorname{Int} E$, тогда существуют все частные производные всех его координатных функций и

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} \text{ — матрица якоби отображения } f \text{ в точке } a$$

Доказательство: $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ рассмотрим координатную функцию f_i.

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \overset{\text{опр. 24}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f_i(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \ldots, a_m) - f_i(a)}{t} =$$
$$\overset{\text{зам. 2}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f_i(a) + l_k(a_k + t - a_k) - f_i(a) + o(t)}{t} = l_k$$

$k \in \{1, 2, \dots, m\}, l_k$ — k-ая компонетна матрицы якоби функции f_i (размер матрицы — $1 \times m$). То есть компонентами l_k матриц якоби координатных функций f_i в точке a являются соответствующие частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ координатных функций f_i в точке a. И по лемме 1 строки матрицы якоби отображения f состоят из матриц якоби координатных функций. $\square$

Теорема 3 (достаточное условие дифференцируемости):

$f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad a \in \operatorname{Int} E, \quad \exists\, r$: в шаре $\mathrm{B}(a, r) \subset E$ $\exists$ все частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ $(k \in \{1, 2, \dots, m\})$ и они непрерывны в точке a. Тогда функция f — дифференцируема в точке a

Доказательство: При $m = 2$.

$$f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = \big(f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2)\big) + \big(f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2)\big) =$$

> Пусть $g(x_2) = f(x_1, x_2)$, x_1 — фиксировано. Тогда $f(x_1, x_2) - f(x_1, a_2) = g(x_2) - g(a_2)$. Функция g — дифференцируема на $[a_2, x_2]$ $(g' = \frac{\partial f}{\partial x_2})$ $\Rightarrow$ по теореме Лагранжа $\exists\, x_0$ между x_2 и a_2 : $g(x_2) - g(a_2) = g'(x_0)(x_2 - a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)(x_2 - a_2)$. Поэтому:

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_0)\,(x_2 - a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0, a_2)\,(x_1 - a_1) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\,(x_2 - a_2) + \\ &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0, a_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right)(x_1 - a_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_0) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right)(x_2 - a_2) \end{aligned}$$

Домножим и поделим на $\|x - a\|$ последнюю строку. $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0, a_2) - \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right) \xrightarrow[x \to a]{} 0$, т.к. x_0 между x_1 и a_1; и $\left|\dfrac{x_1 - a_1}{\|x - a\|}\right| \leqslant 1$. Аналогично во втором слагаемом этой строки. Значит теперь в ней написано *б.м.* $\cdot \|x - a\|$, то есть $o(x - a)$. Получилось определение дифференцируемости f. $\square$

Правила дифференцирования:

1. **Линейность:** $f, g\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — дифференцируемы в точке $a \in \operatorname{Int} E$, тогда отображения $f + g$, λg — тоже дифференцируемы в точке a и их производные операторы равны: $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, $(\lambda g)'(a) = \lambda g'(a)$.

Лемма 2 (об оценке нормы линейного оператора):

$f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение с матрицей A. Тогда $\forall\, x \in \mathbb{R}^m$ $\|Ax\| \leqslant C_A \|x\|$, где $C_A = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n,m} a_{ij}^2}$, a_{ij} — элементы матрицы A

Доказательство:

$$\|Ax\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j\right)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{m} x_j^2\right)} = \|x\| \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n,m} a_{ij}^2}$$

$\square$

2. **Дифференцируемость композиции:** $f\colon E\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^l$, $g\colon I\subset\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^n$, $f(E)\subset I$, f — дифференцируемо в точке $a\in\operatorname{Int}E$, g — дифференцируемо в точке $b=f(a)\in\operatorname{Int}I$. Тогда отображение $g\circ f$ — дифференцируемо в точке a и его производный оператор $g(f(a))'=g'(f(a))\,f'(a)$
Доказательство: определения дифференцируемости отображений f и g:

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|,\quad \alpha(h)\xrightarrow[h\to 0_{\mathbb{R}^m}]{}0_{\mathbb{R}^l}$$

$$g(b+k)=g(b)+g'(b)\,k+\beta(k)\,\|k\|,\quad \beta(k)\xrightarrow[k\to 0_{\mathbb{R}^l}]{}0_{\mathbb{R}^n}$$

Получаем, что отображение $g\circ f$ дифференцируемо по определению:

$$g\big(f(a+h)\big)-g\big(f(a)\big)=g\big(\underbrace{f(a)}_{b}+\underbrace{f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|}_{k}\big)-g\big(f(a)\big)=$$

$$=g\big(f(a)\big)+g'\big(f(a)\big)\,\big(f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|\big)+\beta\big(f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|\big)\,\big\|f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|\big\|-g\big(f(a)\big)=$$
$$=g'\big(f(a)\big)\,f'(a)\,h+\underbrace{g'\big(f(a)\big)\,\alpha(h)\,\|h\|}_{I}+\underbrace{\beta\big(f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|\big)\,\big\|f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|\big\|}_{II}$$

$$\|I\|=\|g'\big(f(a)\big)\,\alpha(h)\|\cdot\|h\|\overset{\text{лемма 2}}{\leqslant}\underbrace{\|\alpha(h)\|}_{\textit{б.м.}\text{ при }h\to 0_{\mathbb{R}^m}}C_{g'(f(a))}\,\|h\|$$

$$\|II\|=\big\|\beta\big(f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|\big)\big\|\cdot\big\|f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|\big\|\overset{\text{нер-во тр-ка}}{\leqslant}\big\|\beta\big(f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|\big)\big\|\cdot\|f'(a)\,h\|+$$
$$+\big\|\beta\big(f'(a)\,h+\alpha(h)\,\|h\|\big)\big\|\cdot\big\|\alpha(h)\,\|h\|\big\|\overset{\text{лемма 2}}{\leqslant}\textit{б.м.}\cdot\|h\|\,C_{f'(a)}+\textit{б.м.}\cdot\textit{б.м.}\cdot\|h\|\quad\text{при } h\to 0_{\mathbb{R}^m}$$

Тогда $I+II$ это *б.м.* $\cdot\|h\|$ $\Rightarrow$ получилось определение дифференцируемости отображения $g\circ f$.

3. **Дифференцирование произведений:** Отображения $f,g\colon E\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $\lambda\colon E\to\mathbb{R}$ — дифференцируемы в точке $a\in\operatorname{Int}E$. Тогда отображения $\lambda f(x)=\lambda(x)f(x)$ и $\langle f,g\rangle(x)==\langle f(x),g(x)\rangle$ дифференцируемы в точке a . Они действуют на вектор $h\in\mathbb{R}^m$ так:

   ① $(\lambda f)'(a)\cdot h=\big(\lambda'(a)\cdot h\big)\cdot f(a)+\lambda(a)\cdot f'(a)\cdot h$

   ② $\langle f,g\rangle'(a)\cdot h=\langle f'(a)\cdot h,g(a)\rangle+\langle f(a),g'(a)\cdot h\rangle$

   Доказательство:

   ① $\lambda(a+h)f(a+h)\overset{\text{опр. 22}}{=}\big(\lambda(a)+\lambda'(a)\,h+o(h)\big)\big(f(a)+f'(a)\,h+o(h)\big)=\lambda(a)f(a)+\lambda(a)f'(a)\,h++\lambda'(a)\,h\,f(a)+o(h)$ — определение дифференцируемости λf в точке a.

   ② $\langle f,g\rangle'(a)\cdot h=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}f_ig_i\right)'(a)\cdot h\overset{\text{лин.}}{=}\sum\limits_{i=1}^{n}(f_ig_i)'(a)\cdot h\overset{①}{=}\sum\limits_{i=1}^{n}\big(\underbrace{f_i'(a)\cdot h}_{i\text{-ая координата }F'(a)\cdot h}\big)\cdot g_i(a)+f_i(a)\cdot g_i'(a)\cdot h=$
   $=\langle f'(a)\cdot h,g(a)\rangle+\langle f(a),g'(a)\cdot h\rangle$

Теорема 4 (Лагранжа для векторонозначных функций):

$f\colon[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ — непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b). Тогда $\exists\, c\in(a,b)$:

$$\|f(b)-f(a)\|\leqslant\|f'(c)\|\cdot|b-a|$$

Доказательство: Пусть $\varphi\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, $\varphi(t)=\big\langle f(b)-f(a),f(t)-f(a)\big\rangle$. Тогда φ — непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и $\varphi(a)=0$, $\varphi(b)=\|f(b)-f(a)\|^2$. Поэтому

$$\|f(b)-f(a)\|^2=\varphi(b)-\varphi(a)\overset{\substack{\text{по обычной теореме}\\ \text{Лагранжа }\exists c\in(a,b)}}{=}\varphi'(c)(b-a)\overset{②}{=}\big\langle f(b)-f(a),f'(c)\big\rangle(b-a)\overset{\substack{\text{нер-во Коши-}\\ \text{Буняковского}}}{\leqslant}$$
$$\leqslant\|f(b)-f(a)\|\cdot\|f'(c)\|\cdot(b-a)$$

Теперь, деля на $\|f(b)-f(a)\|$ (при $f(b)=f(a)$ доказываемое неравенство очевидно) получаем то, что нужно. $\square$

Замечание 5: *Общее правило дифференцирования функции одной переменной:*

$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — дифференцируема, задаётся формулой $f(x)$. $f(x) \rightsquigarrow F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, n — количество x-ов в формуле (т.е. нужно пронумеровать все x-ы). Тогда

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, x, \dots, x)$$

Доказательство: Определение дифференцируемости F:

$$\underbrace{F(x+h, \dots, x+h)}_{f(x+h)} = \underbrace{F(x, \dots, x)}_{f(x)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, x, \dots, x)}_{\text{число} \Rightarrow \text{это } f'(x)} \cdot h + o(h) \qquad \text{при } h \to 0$$

Определение 26: Производной по вектору $h \in \mathbb{R}^m$ функции $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ в точке a называется

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

обозначение: $\dfrac{\partial f}{\partial h}(a)$. Напрвлением в $\mathbb{R}^m$ называется вектор $l \in \mathbb{R}^m : \|l\| = 1$. Можно рассматривать производную по направлению.

Определение 27: Пусть функция $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — дифференцируема в точке $a \in \operatorname{Int} E$. Тогда матрица якоби функции f имеет размер $1 \times m$ (строка). Если её транспонировать и считать, что это вектор из $\mathbb{R}^m$, то определение дифференцируемости можно записать так:

$$f(a+h) = f(a) + \langle f'(a), h\rangle + o(h), \qquad \text{при } h \to 0_{\mathbb{R}^m}$$

и тогда вектор $f'(a) \in \mathbb{R}^m$ называется градиентом функции f в точке a, обозначается $\operatorname{grad} f(a)$.

Замечание 6: $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — дифференцируема в точке $a \in \operatorname{Int} E$, тогда

$$\frac{\partial f}{\partial h}(a) \overset{\text{опр. 26}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \overset{\text{опр. 22 и т. 2}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\, th_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\, th_m + o(t)}{t} = \langle \operatorname{grad} f(a), h\rangle$$

Теорема 5 *(экстремальное свойство градиента):*

Пусть $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — дифференцируема в точке $a \in \operatorname{Int} E$ и $\operatorname{grad} f(a) \neq 0$. Тогда $l = \dfrac{\operatorname{grad} f(a)}{\|\operatorname{grad} f(a)\|}$ (направление в $\mathbb{R}^m$) — направление наискорейшего возрастания функции f, т.е. $\forall\, h \in \mathbb{R}^m$ такого, что $\|h\| = 1$ выполнено:

$$-\|\operatorname{grad} f(a)\| = -\frac{\partial f}{\partial l}(a) \leqslant \frac{\partial f}{\partial h}(a) \leqslant \frac{\partial f}{\partial l}(a) = \|\operatorname{grad} f(a)\|$$

и равенство достигается при $h = l$ (справа) и $h = -l$ (слева)

Доказательство: Так как $\dfrac{\partial f}{\partial h}(a) = \langle \operatorname{grad} f(a), h\rangle$ (зам. 6), то из неравенства Коши-Буняковского (сл. 1) следует доказываемое неравенство: $-\|\operatorname{grad} f(a)\| \cdot 1 \leqslant \langle \operatorname{grad} f(a), h\rangle \leqslant \|\operatorname{grad} f(a)\| \cdot 1$.

Если в неравенстве Коши-Буняковского $|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$ $y=\alpha x$, то достигается равенство. В нашем случае, если $h=l$, то α это ${}^1/_{\|\operatorname{grad} f(a)\|}$. $\square$

Определение 28: $f\colon E\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$. Пусть $\exists\, k\in\{1,2,\dots,m\}$ и $\exists\, U(a)$ — окрестность точки $a\in\operatorname{Int}E$ такие, что можно определить функцию $g\colon U(a)\to\mathbb{R}$ так, что $g(x)=\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x)$. Тогда, если $\exists\, i\in\{1,2,\dots,m\}$ такое, что $\exists\,\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(a)$, то эта частная производная называется частной производной II порядка функции f в точке a. Обозначение: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_k}(a)$ или $f''_{x_k x_i}(a)$

По индукции определяется $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_n}}(a)=\dfrac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\dfrac{\partial^{k-1}f}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_3}\dots\partial x_{i_n}}\right)(a)$

Теорема 6 (о независимости частной производной от порядка дифференцирования):

Пусть $f\colon E\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, точка $(x_0,y_0)\in\operatorname{Int}E$, $\exists\, r>0:$ в шаре $\mathrm{B}\big((x_0,y_0),r\big)\subset E$ $\exists\, f''_{xy}$, f''_{yx} и они непрерывны в точке (x_0,y_0). Тогда $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$

Доказательство: Пусть $\Delta^2 f(h,k)=f(x_0,y_0)+f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)$. При фиксированном k определим функцию $\alpha(h)=\Delta^2 f(h,k)$. И пусть обе функции заданы так, чтобы аргументы f попадали в шар $\mathrm{B}\big((x_0,y_0),r\big)$, т.е. $\Delta^2 f\colon\mathrm{B}\big((0,0),{}^r/_{\sqrt2}\big)\to\mathbb{R}$ и $\alpha\colon[0,{}^r/_{\sqrt2})\to\mathbb{R}$. Тогда α непрерывна и дифференцируема на $[0,{}^r/_{\sqrt2})$ и $\alpha(0)=0$, поэтому, применяя теорему Лагранжа сначала к функции α, затем при фиксированной первой переменной к функции f получаем

$$\alpha(h)=\alpha(h)-\alpha(0)=\alpha'(\bar h)\cdot h=\big(f'_x(x_0+\bar h,y_0+k)-f'_x(x_0+\bar h,y_0)\big)\cdot h=\big(f''_{xy}(x_0+\bar h,y_0+\bar k)\big)\cdot hk$$

Аналогично, при фиксированном h можно определить функцию $\beta(k)=\Delta^2 f(h,k)$ и

$$\beta(k)=\beta(k)-\beta(0)=\beta'(\hat k)\cdot k=\big(f'_y(x_0+h,y_0+\hat k)-f'_y(x_0,y_0+\hat k)\big)\cdot k=\big(f''_{yx}(x_0+\hat h,y_0+\hat k)\big)\cdot hk$$

Так как при фиксированных k и h $\quad\alpha(h)=\beta(k)=\Delta^2 f(h,k)$, то имеем равенство

$$f''_{xy}(x_0+\bar h,y_0+\bar k)=f''_{yx}(x_0+\hat h,y_0+\hat k)\big)$$

и делая в нём предельный переход при $h\to0$ и $k\to0$ получаем, что $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$, так как $\bar h,\hat h\in(0,h)$, и $\bar k,\hat k\in(0,k)$, то есть $\bar h,\hat h,\bar k,\hat k$ стремятся к нулю при $h\to0$ и $k\to0$). $\square$

Определение 29: Пусть множество $E\subset\mathbb{R}^m$ — открытое, $r\in\mathbb{N}$, тогда класс $C^r(E)$ — это множество всех функций $f\colon E\to\mathbb{R}$ таких, что у них $\exists$ все возможные частные производные порядка r и все эти производные непрерывны. $\quad C(E)\supsetneq C^1(E)\supsetneq C^2(E)\supsetneq\dots$

$C^\infty(E)\overset{\text{def}}{=}\bigcap\limits_{r=1}^{\infty}C^r(E)$

Теорема 7 (общая теорема о независимости частной производной от порядка дифференцирования):

Пусть функция $f\in C^r(E)$, $E\subset\mathbb{R}^m$, $r,k\in\mathbb{N}$, $k\leqslant r$, и наборы индексов $i_1,i_2,\dots i_k$ и $j_1,j_2,\dots j_k$ отличаются друг от друга перестановкой. Тогда

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{i_k},\partial x_{i_{k-1}},\dots,\partial x_{i_1}}=\frac{\partial^r f}{\partial x_{j_k},\partial x_{j_{k-1}},\dots,\partial x_{j_1}}\qquad\text{на множестве } E$$

Доказательство: Сводится к предыдущей теореме, так как любую перестановку можно получить транспозицией соседних элементов. $\square$

Замечание 7: Классы $C^r(E), r\in\mathbb{N}$ замкнуты относительно сложения, умножения на скаляр (и образуют линейное пространство) и композиции.

Определение 30: Вектор $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m) \in \mathbb{R}^m$, где все $k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \geqslant 0$ называется мультииндексом

1. $|k| \overset{\text{def}}{=} k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ — называется высотой мультииндекса
2. $k! \overset{\text{def}}{=} k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!$
3. $x^k \overset{\text{def}}{=} x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{k_m}$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — вектор из $\mathbb{R}^m$
4. $\dfrac{\partial^{|k|} f}{\partial x^k} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial^{|k|} f}{(\partial x_1)^{k_1} (\partial x_2)^{k_2} \ldots (\partial x_m)^{k_m}}$ $(\partial x_i)^{k_i}$ означает, что по переменной x_i частная производная берётся k_i раз (это общее обозначение; не только для мультииндекса)

Лемма 3 (полиномиальная формула):

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, т.е $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, тогда

$$(a_1 + a_2 + \ldots a_m)^r = \sum_{n_1=1}^{m} \sum_{n_2=1}^{m} \cdots \sum_{n_r=1}^{m} a_{n_1} \cdot a_{n_2} \cdot \ldots \cdot a_{n_r} =$$

$$= \sum_{\substack{j \,:\, |j|=r \\ j \text{ — мультииндекс}}} \frac{r!}{j!} \cdot a^j \overset{\text{опр. 30}}{=} \sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_m) \\ j_1+\ldots+j_m=r}} \frac{r!}{j_1! \cdot j_2! \cdot \ldots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{j_m}$$

Доказательство: Индукция по r. Обозначим $S_r = \sum \frac{r!}{j!} \cdot a^j$, тогда

База: при $r = 1$

$$S_1 = \sum_{\substack{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) \\ 1 \text{ стоит на месте } i \\ i \in \{1,\ldots,m\}}} \frac{1!}{0! \cdot \ldots \cdot 0! \cdot 1! \cdot 0! \cdot \ldots \cdot 0!} \cdot a_1^0 \cdot \ldots \cdot a_{i-1}^0 \cdot a_i^1 \cdot a_{i+1}^0 \cdot \ldots \cdot a_m^0 = (a_1 + a_2 + \ldots a_m)^1$$

Переход: от r к $r+1$. Раскроем скобки в выражении $S_{r+1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \cdot S_r$:

$$\sum_{j \,:\, |j|=r} \frac{r!}{j_1! \cdot j_2! \cdot \ldots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1+1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{j_m} + \ldots + \sum_{j \,:\, |j|=r} \frac{r!}{j_1! \cdot j_2! \cdot \ldots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{j_m+1}$$

Домножим и поделим каждую сумму на соответствующее $j_i + 1$:

$$\sum_{j \,:\, |j|=r} \frac{r! \cdot (j_1 + 1)}{(j_1 + 1)! \cdot j_2! \cdot \ldots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1+1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{j_m} + \ldots + \sum_{j \,:\, |j|=r} \frac{r! \cdot (j_m + 1)}{j_1! \cdot j_2! \cdot \ldots \cdot (j_m + 1)!} \cdot a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{j_m+1}$$

Изменим в пределе суммирования высоту мультииндекса на $r+1$, учитывая, что тогда в каждой сумме соответствующее j_i должно быть $\geqslant 1$:

$$\sum_{\substack{j \,:\, |j|=r+1, \\ j_1 \geqslant 1}} \frac{r! \cdot j_1}{j_1! \cdot j_2! \cdot \ldots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{j_m} + \ldots + \sum_{\substack{j \,:\, |j|=r+1, \\ j_m \geqslant 1}} \frac{r! \cdot j_m}{j_1! \cdot j_2! \cdot \ldots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{j_m}$$

Каждая сумма умножается на соответствующее j_i, поэтому условие $j_i \geqslant 1$ не нужно, так как соответствующие слагаемые при $j_i = 0$ будут равны нулю. Вынесем за скобки общий множитель:

$$\sum_{j \,:\, |j|=r+1} \frac{r! \cdot (j_1 + j_2 + \cdots + j_m)}{j_1! \cdot j_2! \cdot \ldots \cdot j_m!} \cdot a_1^{j_1} \cdot a_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{j_m}$$

Множитель $(j_1 + j_2 + \cdots + j_m)$ это по определению высота мультииндекса, то есть он равен $r+1$. Значит последняя полученная сумма и есть S_{r+1}

$\square$

Лемма 4 (о дифференцировании «сдвига»):

$E \subset \mathbb{R}^m$, $f \in C^r(E)$ $(f\colon E \to \mathbb{R})$, $a \in \operatorname{Int} E$. Пусть $h \in \mathbb{R}^m$: при $t \in [-1,1]$ вектор $a + th \in E$, определим функцию $\varphi(t) = f(a+th)$, тогда $\varphi \in C^r([-1,1])$ и $\forall\, k \leqslant r$

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{\substack{j:|j|=k \\ j\text{ — мультииндекс}}} \frac{k!}{j!} \cdot h^j \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a+th) \qquad (\ast)$$

Доказательство: Найдём первую производную функции φ как производную композиции:

$$\varphi'(t) = f'(a+th) \cdot h = f'_{x_1}(a+th) \cdot h_1 + f'_{x_2}(a+th) \cdot h_2 + \ldots + f'_{x_m}(a+th) \cdot h_m$$

Это формула $(\ast)$ при $k=1$. Вторая производная функции φ:

$$\varphi''(t) = \left(\sum_{i=1}^m f'_{x_i}(a+th) \cdot h_i\right)' = \sum_{i=1}^m \big(f'_{x_i}(a+th)\big)' \cdot h_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_i x_j}(a+th) \cdot h_i h_j =$$

$$= \sum_{i=1}^m f''_{x_i x_i}(a+th) \cdot h_i^2 + 2 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ i<j}}^m f''_{x_i x_j}(a+th) \cdot h_i h_j$$

В первом слагаемом написано то, что получается в формуле $(\ast)$ при $k=2$ в случае, когда мультииндекс выглядит как $(0,\ldots,0,2,0\ldots,0)$, во втором слогаемом — как $(0,\ldots,0,1,0\ldots,0,1,0,\ldots 0)$. Тогда k-ая производная функции φ:

$$\sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \cdots \sum_{i_k=1}^m f^{(k)}_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}(a+th) \cdot h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_k} \overset{\text{лемма 3}}{=} \sum_{\substack{j:|j|=k \\ j\text{ — мультииндекс}}} \frac{k!}{j!} \cdot h^j \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x^j}(a+th)$$

Лемма 3 объединяет слагаемые, которые отличаются перестановкой множителей. В левой части последнего равенства каждое такое слагаемое домножено на соответствующую частную производную k-го порядка и эти производные так же отличаются друг от друга только порядком дифференцирования, значит они равны (так как непрерывны на E по условию). Поэтому слагаемые, которые объединяет лемма домножены на одно и тоже число, и его можно дописать множетелем при соответствующем слагаемом. $\square$

Теорема 8 (формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа):

Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, $(f\colon E \to \mathbb{R})$ $f \in C^{r+1}(E)$, точка $a \in \operatorname{Int} E$, $R \in \mathbb{R} : \mathrm{B}(a,R) \subset E$, $x \in \mathrm{B}(a,R)$, $h = x - a$, тогда $\exists\, \theta \in (0,1)$ такое, что:

$$f(x) = \sum_{\substack{k:|k|\leqslant r \\ k\text{ — мультииндекс}}} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k + \sum_{\substack{k:|k|=r+1 \\ k\text{ — мультииндекс}}} \frac{f^{(k)}(a+\theta h)}{k!} \cdot h^k$$

$f^{(k)}$ — это другое обозначение для $\dfrac{\partial^{|k|} f}{\partial x^k}$

Доказательство: Определим функцию $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi(t) = f(a+th)$. Тогда $\varphi \in C^{r+1}([0,1])$. Формула Тейлора с центром в точке 0 с остатком в форме Лагранжа для функции φ в единице:

$$\varphi(1) = \sum_{n=1}^r \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \cdot 1^n + \frac{\varphi^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} \cdot 1^{(r+1)}, \qquad \theta \in (0,1)$$

$\varphi(1) = f(a+h) = f(x)$. Используя лемму 4, заменяем производные функции φ. Тогда

$$f(x) = \sum_{n=1}^{r} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\substack{k:|k|=n \\ k \text{ — мультииндекс}}} \frac{n!}{k!} \cdot h^k \cdot f^{(k)}(a) + \sum_{\substack{k:|k|=r+1 \\ k \text{ — мультииндекс}}} \frac{1}{(r+1)!} \cdot \frac{(r+1)!}{k!} \cdot h^k \cdot f^{(r+1)}(a+\theta h)$$

Упрощая, получаем доказываемую формулу. □

Замечание 8: Явный вид многочлена Тейлора порядка r функции f в точке a:

$$T_r(f,a)(x) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_m) \\ i_1+\ldots+i_m=k \\ i_1,\ldots,i_m \geqslant 0}} \frac{1}{i_1! \cdot \ldots \cdot i_m!} \cdot \frac{\partial^k f}{(\partial x_1)^{i_1}(\partial x_2)^{i_2}\ldots(\partial x_m)^{i_m}}(a) \cdot (x_1-a_1)^{i_1} \cdot (x_2-a_2)^{i_2} \cdot \ldots \cdot (x_m-a_m)^{i_m}$$

Следствие 5: В остатке формулы Тейлора есть множитель

$$h^k = \left(\frac{h_1}{\|h\|}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{h_2}{\|h\|}\right)^{k_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{h_m}{\|h\|}\right)^{k_m} \cdot \|h\|^{r+1}$$

А производная $f^k(a+\theta h)$ ограничена в некоторой окрестности точки a, замыкание которой содержится в E, потому что $f^{(k)}$ непрерывна на E. Значит остаток в формуле Тейлора это *огр.* $\cdot \|h\|^r \cdot \|h\| = o\big(\|h\|^r\big)$, при $h \to 0$. Он называется остатком в форме Пеано.

Определение 31: Однородный многочлен от h степени n

$$d^n f(a,h) = \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_m) \\ i_1+\ldots+i_m=n \\ i_1,\ldots,i_m \geqslant 0}} \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_m!} \cdot \frac{\partial^n f}{(\partial x_1)^{i_1}(\partial x_2)^{i_2}\ldots(\partial x_m)^{i_m}}(a) \cdot h_1^{i_1} \cdot h_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot h_m^{i_m}$$

называется n-ым дифференциалом функции f в точке a.

Тогда формулу Тейлора можно записать в виде $f(x) = f(a) + \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{d^k f(a,h)}{k!} + o\big(\|h\|^r\big)$

§ Линейные отображения

Обозначения:

1. $Lin(X,Y)$ — множество линейных отображений из X в Y. X, Y — линейные пространства над $\mathbb{R}$. ($Lin(X,Y)$ является линейным пространством над $\mathbb{R}$ с сложением: $(A+B)(x) = A(x) + B(x)$, умножение на скаляр: $(\alpha A(x)) = \alpha A(x)$)

   > Отображение $A\colon X \to Y$ называется линейным, если $\forall x_1, x_2 \in X,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ выполнено $A(\alpha x_1 + x_2) = \alpha A(x_1) + A(x_2)$

2. Пусть $A \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, тогда $\|A\| \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{\substack{x \in \mathbb{R}^m: \\ \|x\|=1}} \|Ax\|$ называется нормой линейного оператора

Замечание 9:

1. $\|A\| \in \mathbb{R}$ (конечное), т.к. из леммы 2 $\|Ax\| \leqslant C_A\|x\| = C_A$, где $C_A = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n,m} a_{ij}^2}$, a_{ij} — элементы матрицы A.

2. По теореме Вейерштрасса непрерывная функция на компакте достигает своего максимального значения, и так как линейные отображения непрерывны и множество $\{ x \mid x \in \mathbb{R}^m, \|x\| = 1 \}$ является компактом, то $\|A\| = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^m:\\ \|x\|=1}} \|Ax\|$ (в конечномерном случае)

3. $\forall\, x \in \mathbb{R}^m$ выполнено $\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$. Доказательство: для $x \neq 0_{\mathbb{R}^m}$ возьмём $\bar{x} = {}^{x}/_{\|x\|}$, тогда $\|A\bar{x}\| \leqslant \|A\|$ (т.к. $\|A\bar{x}\|$ это одно из значений, по которым берётся sup в $\|A\|$) и, домножая на $\|x\|$, получаем доказываемое неравенство ($\|x\| \cdot \|A\bar{x}\| = \|x\| \cdot \|A \cdot {}^{x}/_{\|x\|}\|$; ${}^{1}/_{\|x\|}$ — скаляр $\Rightarrow = \|Ax\|$)

4. Если $\exists\, C \in \mathbb{R} : \forall\, x \in \mathbb{R}^m\ \|Ax\| \leqslant C \cdot \|x\|$, то $\|A\| \leqslant C$, потому что, поделив на $\|x\|$ первое неравенство, получаем второе (т.к. $\|A \cdot {}^{x}/_{\|x\|}\|$ это одно из значений, по которым берётся sup в $\|A\|$)

Лемма 5 (об условиях, эквивалентных непрерывности линейного оператора):

Пусть X, Y — линейные пространства, $A \in Lin(X, Y)$, тогда эквивалентно:

1. A — ограничено (т.е. $\|A\|$ — конечна)
2. A — непрерывно в точке 0_X
3. A — непрерывно на X
4. A — равномерно непрерывно на X

Доказательство: $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ — очевидно.

$2 \Rightarrow 1$: Из определения непрерывности в 0_X: возьмём $\varepsilon = 1$, тогда $\exists\, \delta > 0$: если $\|x\| \leqslant \delta$, то $\|Ax\| < 1$, поэтому для $\forall\, x : \|x\| = 1$ выполнено $\|Ax\| = {}^{1}/_{\delta} \cdot \|A(\delta x)\| \leqslant {}^{1}/_{\delta}$, значит $\sup \|Ax\| \leqslant {}^{1}/_{\delta}$

$1 \Rightarrow 4$: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = {}^{\varepsilon}/_{\|A\|} : \forall\, x_1, x_2$ если $\|x_2 - x_1\| < \delta$, то $\|Ax_2 - Ax_1\| \leqslant \varepsilon$, потому что $\|Ax_2 - Ax_1\| = \|A(x_2 - x_1)\| \leqslant \|A\| \cdot \|x_1 - x_2\| < \|A\| \cdot \delta = \varepsilon$

□

Теорема 9 (о пространстве линейных отображений):

1. $\|\cdot\|$ это норма в $Lin(X, Y)$
2. Если $A \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), B \in Lin(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$, то $\|AB\|_{m,l} \leqslant \|A\|_{m,n} \cdot \|B\|_{n,l}$

Доказательство:

1. Проверка аксиом нормы:
   a) $\|A\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^m:\\ \|x\|=1}} \|Ax\| \geqslant 0$ и $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0_{Lin(X,Y)}$
   b) $\|\alpha A\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^m:\\ \|x\|=1}} \|\alpha Ax\| = |\alpha| \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^m:\\ \|x\|=1}} \|Ax\| = |\alpha| \cdot \|A\|$
   c) $\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leqslant \|Ax\| + \|Bx\| \leqslant \big(\|A\| + \|B\|\big) \cdot \|x\| = \|A\| + \|B\|$
2. $\|BAx\| \leqslant \|B\| \cdot \|Ax\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\| \cdot 1$ — это выполнено для любого $x \in \mathbb{R}^m : \|x\| = 1$, значит выполнено и для $\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^m:\\ \|x\|=1}} \|BAx\| = \|AB\|$

□

Замечание 10: $\|A\| \overset{1}{=} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^m:\\ \|x\|=1}} \|Ax\| \overset{2}{=} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^m:\\ \|x\|\leqslant 1}} \|Ax\| \overset{3}{=} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^m:\\ \|x\|<1}} \|Ax\| \overset{4}{=} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^m:\\ \|x\|\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \overset{5}{=} \inf\{ C \in \mathbb{R} \mid \forall\, x \in \mathbb{R}^m \|Ax\| \leqslant C \cdot \|x\| \}$

1.

Теорема 10 (Лагранжа для отображений):

Пусть отображение $F\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ дифференцируемо на E (E — открытое), $[a,b] = \{\, a+\theta(b-a) \mid \theta \in [0,1]\,\} \subset E$, тогда $\exists\, c \in (a,b)$, то есть $\exists\, \theta \in (0,1) : c = a+\theta(b-a)$ такое что

$$\|F(b)-F(a)\| \leqslant \|F'(c)\| \cdot \|b-a\|$$

Доказательство: Пусть $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^m$, $f(t) = F\big(a+t(b-a)\big)$, тогда f — дифференцируема на $[0,1]$ и $f'(t) = F'\big(a+t(b-a)\big)(b-a)$. По теореме 4 $\exists\, \theta \in (0,1) : \|f(1)-f(0)\| \leqslant \|f'(\theta)\| \cdot (1-0)$, то есть

$$\|F(b)-F(a)\| \leqslant \|F'\big(a+\theta(b-a)\big)\cdot(b-a)\| \leqslant \|F'(c)\|\cdot\|b-a\|$$

$\square$

Лемма 6 (о норме обратного отображения):

Пусть $B \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $\exists\, c > 0 : \forall\, x \in \mathbb{R}^m \quad \|Bx\| \geqslant c\|x\|$, тогда B — обратим и $\|B^{-1}\| < {}^1\!/_c$

Доказательство: $\operatorname{Ker} B = \{0\}$, значит B — обратим.

Возьмём $y \in \mathbb{R}^m : \|y\| = 1$, тогда $\exists\, x \in \mathbb{R}^m : y = Bx$, тогда $x = B^{-1}y$, и так как $\|Bx\| \geqslant c\|x\|$, то $c\|B^{-1}y\| \leqslant \|BB^{-1}y\| = \|y\|$. Это выполнено $\forall\, y : \|y\| = 1$, поэтому $\sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n:\\ \|y\|=1}} \|B^{-1}y\| \leqslant {}^1\!/_c$. $\square$

Замечание 11: Если $A \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — обратим, то $\forall\, x \in \mathbb{R}^m \quad \|x\| = \|A^{-1}Ax\| \leqslant \|A^{-1}\|\cdot\|Ax\|$, значит $\|Ax\| \geqslant \frac{1}{\|A^{-1}\|}\cdot\|x\|$

Обозначение: Ω_m $= \{\, A \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \mid A$ — обратим $\}$

Теорема 11 (об обратимости линейного отображения, близкого к обратимому):

Пусть $L \in \Omega_m$, $M \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ — «близкий к обратимому», то есть $\|M-L\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|}$, тогда:

1. $M \in \Omega_m$
2. $\|M^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|M-L\|}$
3. $\|M^{-1}-L^{-1}\| \leqslant \dfrac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|M-L\|}\|M-L\|$

Доказательство: Первые два пункта получаются с помощью леммы 6:

$$\|Mx\| = \|Lx-(L-M)x\| \overset{\substack{\text{нер-во}\\ \text{тр-ка}}}{\geqslant} \|Lx\| - \|(L-M)x\| \overset{\text{зам. 11}}{\geqslant}$$
$$\geqslant \frac{1}{\|L^{-1}\|}\|x\| - \|L-M\|\cdot\|x\| = \left(\frac{1}{\|L^{-1}\|} - \|L-M\|\right)\cdot\|x\|$$

Третий пункт:

$\|M^{-1}-L^{-1}\| = \|M^{-1}(L-M)L^{-1}\| \overset{\text{т. 9.2}}{\leqslant} \|M^{-1}\|\cdot\|L-M\|\cdot\|L^{-1}\| \leqslant \frac{\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1}-\|M-L\|}\|M-L\|$ $\square$

Следствие 6: *Непрерывность вычисления обратного оператора.*

Отображение $f\colon \Omega_m \to \Omega_m$, $f(L) = L^{-1}$ — непрерывно, так как выполнено определение непрерывности: из последнего пункта теоремы 11 получаем

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \varepsilon\cdot\big(\|L^{-1}\|\cdot(\|L^{-1}\|+\varepsilon)\big)^{-1} : \forall\, M \in \Omega_m \text{ если } \|M-L\| < \delta, \text{ то } \|M^{-1}-L^{-1}\| < \varepsilon$$

Теорема 12 (о непрерывно дифференцируемых отображениях):

Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, отображение $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ дифференцируемо на D, то есть $\exists$ отображение $f'\colon D \to Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Тогда эквивалентно:

1. $f \in C^1(D)$, то есть $\exists$ все $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ и они непрерывны на D $(i \in \{1,2,\dots,n\},\ j \in \{1,2,\dots,m\})$
2. Отображение f' непрерывно на D

Доказательство:

$1 \Rightarrow 2$: Из определения непрерывности всех $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ на D получаем, что $\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 :$ $\forall \bar{x} \in D$ если $\|x - \bar{x}\| < \delta$, то $\forall i\ \in \{1,2,\dots,n\}$, $\forall j\ \in \{1,2,\dots,m\}$ $\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x})\right\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{mn}}$, и с помощью зам. 9.1 получаем

$$\|f'(x) - f'(\bar{x})\| \leqslant \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n,m} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x})\right)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n,m} \frac{\varepsilon^2}{mn}} = \varepsilon$$

получилось определение непрерывности f' на D.

$2 \Rightarrow 1$: Определение непрерывности f' на D:

$$\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0 : \forall \bar{x} \in D \text{ если } \|x - \bar{x}\| < \delta, \text{ то } \|f'(x) - f'(\bar{x})\| < \varepsilon$$

И пусть $h = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$, где 1 стоит на k-ом месте, тогда

$$\big\|\big(f'(x) - f'(\bar{x})\big)h\big\| \leqslant \|f'(x) - f'(\bar{x})\| \cdot \|h\| < \varepsilon, \text{ то есть } \sqrt{\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_l}{\partial x_k}(\bar{x})\right)^2} < \varepsilon$$

тогда и отдельное (i-ое) слагаемое $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\bar{x})\right| < \varepsilon$ получилось определение непрерывности $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ на D.

□

Определение 32: Пусть $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{Int} E$, тогда a называется точкой локального максимума, если $\exists U(a)$ — окрестность точки $a : \forall x \in U(a) \cap E\ f(x) \leqslant f(a)$, строгого локального максимума, если $\exists U(a)$ — окрестность точки $a : \forall x \in \dot{U}(a) \cap E\ f(x) < f(a)$. Аналогично определяется точка (строгого) локального минимума (знак меняется на противоположный). Точка a называется точкой (строгого) локального экстремума, если она является точкой (строгого) локального максимума или точкой (строгого) локального минимума.

Теорема 13 (Ферма):

Пусть функция $f\colon E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ дифференцируема на E, $a \in \operatorname{Int} E$ — точка локального экстремума, тогда $\forall$ направления l (опр. 26) $\dfrac{\partial f}{\partial l}(a) = 0$.

Доказательство: Определим функцию $g\colon U(0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(a + tl)$, тогда g — дифференцируема в окрестности нуля и $g'(0) = 0$, потому что 0 — точка локального экстремума функции g (т.к. g — сужение f на прямую, проходящую через точку a), при этом

$$g'(t) = f'(a + tl) \cdot l = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a + tl), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a + tl), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a + tl)\right) \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_m \end{pmatrix} \overset{\text{зам. 6}}{=} \frac{\partial f}{\partial l}(a + tl)$$

значит $\dfrac{\partial f}{\partial l}(a) = 0$.

□

Следствие 7: *Необходимое условие экстремума:* Если $a \in \operatorname{Int} E \subset \mathbb{R}^m$ — точка локального экстремума функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, то $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ (в теореме Ферма (т. 13) можно взять $l = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\}$, где 1 на i-ом месте).

Следствие 8: *Теорема Ролля:* Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$ — компакт, функция $f\colon K \to \mathbb{R}$ непрерывна на K, дифференцируема на $\operatorname{Int} K$, сужение f на границу K: $f\big|_{\partial K} = const$, тогда $\exists\, a \in \operatorname{Int} K : \operatorname{grad} f(a) = 0$.
Доказательство: по теореме Вейерштрасса f достигает max и min на K. Если точки max и min находятся на границе K, то $f = const$, значит $\operatorname{grad} f(a) = 0$. Если точка max или min находится в $\operatorname{Int} K$, то по теореме Ферма (т. 13) в этой точке $\operatorname{grad} f = 0$ (потому что все частные производные равны нулю в этой точке).

Определение 33: Отображение $Q\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ называется **квадратичной формой**, если $Q(h)$ это однонродный многочлен второй степени, то есть, если $Q(h) = \sum\limits_{i,j=1}^{m} a_{ij} h_i h_j$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

1. Квадратичная форма называется **положительно определённой**, если $\forall\, h \neq 0_{\mathbb{R}^m}$ $Q(h) > 0$
2. Квадратичная форма называется **отрицательно определённой**, если $\forall\, h \neq 0_{\mathbb{R}^m}$ $Q(h) < 0$
3. Квадратичная форма называется **неопределённой** (незнакоопределённой), если $\exists\, h, \bar{h}$: $Q(h) > 0, Q(\bar{h}) < 0$
4. Квадратичная форма называется **положительной полуопределённой** (положительно определённая, вырожденная), если $\forall\, h$ $Q(h) \geqslant 0$ и $\exists\, h_0 \neq 0_{\mathbb{R}^m} : Q(h_0) = 0$

Лемма 7 (об оценке квадратичной формы и об эквивалентных нормах):

1. Пусть $Q\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — положительно определнённая квадратичная форма, тогда $\exists\, \gamma_Q > 0 :$ $\forall\, x \in \mathbb{R}^m$ $Q(x) \geqslant \gamma_Q \cdot \|x\|^2$
2. Пусть $p\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ — норма, тогда $\exists\, c_1, c_2 > 0 : \forall\, x \in \mathbb{R}^m$ $c_1 \cdot \|x\| \leqslant p(x) \leqslant c_2 \cdot \|x\|$

Доказательство:

1. Пусть $\gamma_Q = \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^m:\\ \|x\|=1}} Q(x)$ (по теореме Вейерштрасса минимум достигается), тогда $\gamma_Q > 0$ и
$$Q(x) = \|x\|^2 \cdot Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geqslant \|x\|^2 \cdot \gamma_Q$$
2. Пусть $c_1 = \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^m:\\ \|x\|=1}} p(x)$, $c_2 = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^m:\\ \|x\|=1}} p(x)$. Чтобы min и max достигались по теореме Вейерштрасса, надо проверить непрерывноть функции p:
$$|p(x) - p(y)| \overset{\substack{\text{нер-во тр-}\\ \text{ка для } p}}{\leqslant} p(x-y) \overset{\substack{\text{разлож. по}\\ \text{базису } e_k}}{=} p\left(\sum_{k=1}^{m} (x_k - y_k) e_k\right) \overset{\substack{\text{нер-во тр-}\\ \text{ка для } p}}{\leqslant} \sum_{k=1}^{m} p\big((x_k - y_k) e_k\big) \overset{\substack{x_k - y_k \text{ —}\\ \text{это скаляр}}}{=}$$
$$= \sum_{k=1}^{m} |x_k - y_k| \cdot p(e_k) \overset{\substack{\text{нер-во Коши-}\\ \text{Буняковского}}}{\leqslant} \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |x_k - y_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \big(p(e_k)\big)^2} = M \cdot \|x - y\|$$
значит $\forall\, x \in \mathbb{R}^m$ $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta = \varepsilon/M : \forall\, y \in \mathbb{R}^m$ если $\|x - y\| < \delta$, то $|p(x) - p(y)| \leqslant \varepsilon$. Тогда
$$p(x) = \|x\| \cdot p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geqslant c_1 \cdot \|x\| \quad \text{и аналогично} \quad p(x) \leqslant c_2 \cdot \|x\|$$

$\square$

Теорема 14 *(Достаточное условие экстремума):*

Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, $f \in C^2(E)$ $(f\colon E \to \mathbb{R})$, $a \in \operatorname{Int} E$, $\operatorname{grad} f(a) = 0_{\mathbb{R}^m}$, Q — квадратичная форма, $Q(h) = d^2 f(a, h)$ (опр. 31), тогда

1. Если Q положительно определённая, то a — точка локального минимума
2. Если Q отрицательно определённая, то a — точка локального максимума
3. Если Q неопределённая, то a не является точкой локального экстремума
4. Если Q полуопределённая, то a может быть, а может не быть точкой локального экстремума

Доказательство:

1. Из формулы Тейлора с остатком в форме Лагранжа (теорема 8) $\exists\, \theta \in (0, 1):$

$$f(a+h) - f(a) = df(a,h) + \frac{1}{2} d^2 f(a+\theta h, h) =$$
$$= \frac{1}{2}(d^2 f(a+\theta h, h) = \frac{1}{2}\big(Q(h) + d^2 f(a+\theta h, h) - Q(h)\big) =$$
$$= \frac{1}{2}\big(Q(h) + f''_{x_1x_1}(a+\theta h)\cdot h_1h_1 + f''_{x_1x_2}(a+\theta h)\cdot h_1h_2 + \ldots + f''_{x_1x_m}(a+\theta h)\cdot h_1h_m + \ldots +$$
$$+ f''_{x_mx_1}(a+\theta h)\cdot h_mh_1 + f''_{x_mx_2}(a+\theta h)\cdot h_mh_2 + \ldots + f''_{x_mx_m}(a+\theta h)\cdot h_mh_m -$$
$$- f''_{x_1x_1}(a)\cdot h_1h_1 - f''_{x_1x_2}(a)\cdot h_1h_2 - \ldots - f''_{x_1x_m}(a)\cdot h_1h_m - \ldots -$$
$$- f''_{x_mx_1}(a)\cdot h_mh_1 - f''_{x_mx_2}(a)\cdot h_mh_2 - \ldots - f''_{x_mx_m}(a)\cdot h_mh_m\big)$$

Модуль выделенных слагаемых $\leqslant$ *б.м.* $\cdot \|h\|^2$ при $h \to 0_{\mathbb{R}^m}$ (так как $f''_{x_ix_j}$ — непрерывна на E, то есть $f''_{x_ix_j}(a+\theta h) \xrightarrow[h\to 0_{\mathbb{R}^m}]{} f''_{x_ix_j}(a)$, а $|h_ih_j| \leqslant \|h\|^2$ (и применяем неравенство треугольника, чтобы оценить модуль суммы)). Тогда, т.к. $\forall\, B \in \mathbb{R} \quad B \geqslant -|B|$

$$f(a+h) - f(a) \geqslant \frac{1}{2}\big(Q(h) - |\ldots|\big) \geqslant \frac{1}{2}\big(Q(h) - \text{б.м.}\cdot\|h\|^2\big) \geqslant \frac{1}{2}\big(\gamma_Q \cdot \|h\|^2 - \text{б.м.}\cdot\|h\|^2\big) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\|h\|^2\cdot(\gamma_Q - \text{б.м.}) > 0 \qquad \text{— в некоторой окрестности точки } a, \text{ т.к. } \gamma_Q > 0$$

Значит a — точка строгого локального минимума по определению.

2. У функции $g = -f$ в точке a локальный минимум (из пункта 1), значит у f локальный максимум в точке a.

3. По определению неопределённости квадратичной формы $\exists\, h^* \in \mathbb{R}^m : Q(h^*) > 0$, тогда $\forall\, t \in \mathbb{R}^m$ аналогично первому пункту получаем, что

$$f(a+th^*) - f(a) \geqslant \frac{1}{2}\big(Q(th^*) - \text{б.м.}\cdot\|th^*\|^2\big) = \frac{1}{2}(Q(h^*) - \text{б.м.})\cdot t^2 \qquad \text{при } t \to 0_{\mathbb{R}^m}$$

значит при достаточно маленьком t $\quad f(a+th^*) - f(a) > 0$. Аналогично для вектора $h^\circ \in \mathbb{R}^m : Q(h^\circ) < 0$ при маленьком t $\quad f(a+th^\circ) - f(a) < 0$. Значит в любой окрестности точки a есть точка $(a+th^*)$, в которой значение $> f(a)$ и точка $(a+th^\circ)$, в которой значение $< f(a)$, то есть локального экстремума в точке a нет.

4. *Пример:* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^4$, $a = (0,0)$, тогда $\operatorname{grad} f(a) = 0$ и $Q(h) = 2h_1^2$ — полуопределённая квадратичная форма, и в точке a нет локального экстремума (потому что в любой окрестности точки a есть точки $(0,\varepsilon)$ и $(\varepsilon, 0)$, в первой значение отрицательное, во второй положительное), а для функции $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^4$ всё тоже самое, но есть локальный экстремум в точке a (потому что функция положительная и только в нуле равна нулю).

$\square$

§ Диффеоморфизм

Определение 34: Область в $\mathbb{R}^m$ это открытое, связное множество

Определение 35: Отображение $f\colon O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (O — область) называется диффеоморфизмом, если оно дифференцируемо, $\exists\, f^{-1}$ и f^{-1} — дифференцируемо.

Замечание 12: Если f — диффеоморфизм, то, дифференцируя равенство $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, получаем $(f^{-1} \circ f)'(x) = 1_{m\times m}$ или $(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1_{m\times m}$, то есть $(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}$, где $y = f(x)$, значит производный оператор диффеоморфизма обратим.

Лемма 8 (о приближённых значениях дифференцируемого отображения):

Пусть $f\colon O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, f — дифференцируемо в точке $x_0 \in O$ (O — открытое), тогда

1. Если $\det f'(x_0) \neq 0$, то $\exists\, \delta > 0, c > 0 : \forall\, h : \|h\| < \delta \quad \|f(x_0+h) - f(x_0)\| \geqslant c \cdot \|h\|$
2. Если $f \in C^1(O)$, $\mathrm{B}(x_0, r) \subset O$, то при $\|h\| < r$ выполнено $\|f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| \leqslant A \cdot \|h\|$, где $A = \sup\limits_{x \in [x_0, x_0+h]} \|f'(x) - f'(x_0)\|$, где $[x_0, x_0+h] = \{\, x_0 + th \mid t \in [0,1]\,\}$

Доказательство:

1. Так как производная — это линейный оператор, то

$$\|h\| = \left\|\left(f'(x_0)\right)^{-1} \cdot f'(x_0) \cdot h\right\| \leqslant \left\|\left(f'(x_0)\right)^{-1}\right\| \cdot \|f'(x_0) \cdot h\| \quad \Rightarrow \quad \|f'(x_0) \cdot h\| \geqslant \frac{\|h\|}{\left\|\left(f'(x_0)\right)^{-1}\right\|}$$

значит

$$\|f(x_0+h) - f(x_0)\| \overset{\text{опр. дифф-сти}}{=} \|f'(x_0)h + o(h)\| \overset{\substack{\text{нер-во}\\\text{тр-ка}}}{\geqslant} \|f'(x_0)h\| - \|o(h)\| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\|h\|}{\left\|\left(f'(x_0)\right)^{-1}\right\|} - \|\textit{б.м}\| \cdot \|h\| \geqslant \frac{1}{2\left\|\left(f'(x_0)\right)^{-1}\right\|} \cdot \|h\| \qquad \text{при } h \to 0_{\mathbb{R}^m}$$

потому что из определения бесконечно малой $\exists\, \delta$: если $\|h\| < \delta$, то $\|\textit{б.м}\| < \frac{1}{2}\left\|\left(f'(x_0)\right)^{-1}\right\|^{-1}$

2. Пусть $H(x) = f(x) - f'(x_0) \cdot x$, тогда $H'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. Поэтому

$$H(x_0+h) - H(x_0) = f(x_0+h) - f'(x_0)\cdot(x_0+h) - f(x_0) + f'(x_0)\cdot x_0 = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot h$$

То есть $\|f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| = \|H(x_0+h) - H(x_0)\| \overset{\text{теор.10}}{\leqslant} \|H'(x_0+\theta h)\| \cdot \|h\| =$ $= \|f'(x_0+\theta h) - f'(x_0)\| \cdot \|h\| \leqslant A \cdot \|h\|$ (т.к. sup $\leqslant$ значений по которым он берётся)

$\square$

Теорема 15 (о сохранении области):

Пусть отображение $f\colon O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ дифференцируемо на O (O — открытое), $\forall x \in O$ $\det f'(x) \neq 0$, тогда $f(O)$ (образ O) — открытое множество

Доказательство: Возьмём $x_0 \in O$. Нужно доказать, что $f(x_0) \in \operatorname{Int} f(O)$. По лемме 8.1 $\exists c, \delta > 0 :$ $\forall h \in \overline{\mathrm{B}(0,\delta)}$ $\quad \|f(x_0+h) - f(x_0)\| \geqslant c \cdot \|h\|$. Пусть r это половина расстояния от $f(x_0)$ до $f\big(\mathrm{S}(x_0,\delta)\big)$ (расстояние от точки w до сферы S это $\inf_{s\in \mathrm{S}} \rho\,(w,s)$), тогда $r > 0$, потому что функция $\varphi\colon f\big(\mathrm{S}(x_0,\delta)\big) \to \mathbb{R}_+$, $\varphi(y) = \rho\big(y, f(x_0)\big)$ непрерывна (т.к. $|\varphi(a) - \varphi(b)| = |\rho\big(a, f(x_0)\big) - \rho\big(b, f(x_0)\big)| \leqslant \rho\,(a,b)$), задана на компакте (т.к. сфера — компактное множество в $\mathbb{R}^m$, и f — непрерывная функция) и непрерывная функция достигает минимального значение по теореме Вейерштрасса, и оно больше нуля (пусть минимальное значение достигается в точке $y^* = f(x^*)$, тогда $\varphi(y^*) = \|f(x^*) - f(x_0)\| \geqslant c \cdot \|x^* - x_0\| = c\delta > 0$).
Проверим, что $\mathrm{B}(f(x_0), r) \subset f(O)$, то есть что $\forall y \in \mathbb{R}^m : \|y - f(x_0)\| < r \ \ \exists x \in O : f(x) = y$. Зафиксируем $y : \|y - f(x_0)\| < r$ и определим функцию

$$g\colon \overline{\mathrm{B}(x_0,\delta)} \to \mathbb{R}_+ \qquad g(x) = \|f(x) - y\|^2$$

Тогда $g(x_0) = \|f(x_0) - y\|^2 < r^2$, а на $\mathrm{S}(x_0,\delta)$ $g(x) \geqslant r^2$ (т.к. $\|f(x) - y\| \geqslant \|f(x) - f(x_0)\| - \|f(x_0) - y\| \geqslant 2r - r = r$). То есть g достигает минимального значения (т.к. это непрерывная функция, заданная на компакте) внутри шара. По теореме Ферма (т. 13) в этой точке все частные производные равны нулю. Так как $g(x) = (f_1(x)-y_1)^2 + (f_2(x)-y_2)^2 + \ldots + (f_m(x)-y_m)^2$, то, вычисляя производные, получаем

$$\begin{cases} g'_{x_1}(x) = 2(f_1(x) - y_1)\cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + 2(f_2(x)-y_2)\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) + \ldots + 2(f_m(x) - y_m)\cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) = 0 \\ g'_{x_2}(x) = 2(f_1(x) - y_1)\cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) + 2(f_2(x)-y_2)\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) + \ldots + 2(f_m(x) - y_m)\cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) = 0 \\ \quad\vdots \\ g'_{x_m}(x) = 2(f_1(x) - y_1)\cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) + 2(f_2(x)-y_2)\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_m}(x) + \ldots + 2(f_m(x) - y_m)\cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x) = 0 \end{cases}$$

То есть столбец $2(f(x) - y)^{\mathrm{T}} \cdot f'(x)$ — нулевой. Тогда, домножая $2(f(x)-y)^{\mathrm{T}} \cdot f'(x) = 0$ на $\frac{1}{2}(f'(x))^{-1}$ (обратная матрица существует, т.к. по условию $\det f'(x) \neq 0$), получаем, что $f(x) = y$. Таким образом, $x : f(x) = y$ это точка, в которой $g(x)$ принимает минимальное значение. □

Следствие 9: Пусть $f\colon O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, O — открытое, $m > l$, $f \in C^1(O)$, $\forall x \in O$ $rank\big(f'(x)\big) = l$, тогда $f(O)$ — открытое множество.

Доказательство: Фиксируем $x_0 \in O$. Будем считать, что первые l столбцов производной в точке x_0 линейно не зависимы (иначе можно перенумеровать координаты, чтобы это было так), то есть

$$\det \underbrace{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)}_{A_l}{}_{\substack{i\in\{1,2,\ldots,l\} \\ j\in\{1,2,\ldots,l\}}} \neq 0$$

Тогда $\exists$окрестность $U(x_0)$, в которой этот определитель не равен нулю (так как определитель — это непрерывная функция, потому что он является суммой и произведение непрерывных функций — частных производных). Пусть $\widetilde{f}\colon O \to \mathbb{R}^m$, $\widetilde{f}(x) = (f(x), x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_m)$, тогда

$$\det \widetilde{f}'(x_0) = \det \begin{pmatrix} A_l & A_{m-l} \\ 0 & E \end{pmatrix} = \det A_l \neq 0$$

Значит по теореме 15 $\widetilde{f}(O)$ — открытое множество. А $f(O)$ это проекция $\widetilde{f}(O)$ на $\mathbb{R}^l$ (т.е. отображение, сопоставляющее точке $(x_1, x_2, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m) \in \widetilde{f}(O)$ точку $(x_1, x_2, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l$), и при проекции открытость множества сохраняется (потому что проекция шара это шар и если $B \subset A$, то проекция B содержится в проекции A) □

Теорема 16 (о гладкости обратимого отображения):

Пусть $f\colon O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $f \in C^r(O)$ $(r \in \mathbb{N})$, f — обратимо и $\forall x \in O$ $\det f'(x) \neq 0$. Тогда $f^{-1} \in C^r\big(f(O)\big)$

Доказательство: Нету (нужна только формулировка) $\square$

Теорема 17 (о локальной обратимости):

$f\colon O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(O)$, $x_0 \in O$, $\det f'(x_0) \neq 0$, тогда $\exists U(x_0) : f\big|_{U(x_0)}$ — диффеоморфизм.

Доказательство: Если проверить обратимость f, то по теор. 16 обратное отображение будет дифференцируемым. Так как $f'(x_0)$ — обратимый линейный оператор, то (по зам. 11) $\exists\, c > 0 : \forall\, h \in \mathbb{R}^m$ $\|f'(x_0) \cdot h\| \geqslant c \cdot \|h\|$. Возьмём окрестность $U(x_0) = \mathrm{B}(x_0, r) \subset O : \forall\, x \in U(x_0)$ $\det f'(x) \neq 0$ (такая окрестность существует, т.к. $\det f'(x)$ — это непрерывная функция, потому что является суммой и произведение непрерывных функций — частных производных) и $\|f'(x) - f'(x_0)\| < {c}/{4}$ (это можно сделать по определению непрерывности отображения f', оно непрерывно по т. 12). Пусть $x, y \in U(x_0)$, $y = x + h$, тогда

$$f(y) - f(x) = f(x+h) - f(x) - f'(x)h + f'(x)h - f'(x_0)h + f'(x_0)h$$

Значит по неравенству треугольника:

$$\|f(y) - f(x)\| \geqslant \|f'(x_0)h\| - \|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\| - \|f'(x)h - f'(x_0)h\|$$

По т. 8.2 $\|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\| \leqslant A \cdot \|h\|$, где $A = \sup\limits_{t \in [x, x+h]} \|f'(t) - f'(x)\|$ и так как по неравенству треугольника $A \leqslant \sup\limits_{t \in [x, x+h]} \big(\|f'(t) - f'(x_0)\| + \|f'(x_0) - f'(x)\|\big) \leqslant {c}/{4} + {c}/{4} = {c}/{2}$, значит

$$\|f(y) - f(x)\| \geqslant c \cdot \|h\| - {c}/{2} \cdot \|h\| - {c}/{4} \ \cdot \|h\| = {c}/{4} \cdot \|x - y\|$$

То есть $f\big|_{U(x_0)}$ инъективно, поэтому $\exists$ обратное, заданное на $f\big(U(x_0)\big)$ $\square$

Теорема 18 (о локальной обратимости в терминах систем уравнений):

Пусть $f\colon O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(O)$, $x^0 \in O$, $\det f'(x^0) \neq 0$, $f_1, f_2, \ldots f_m$ — координатные функции отображения f, $y^0 = f(x^0)$. Тогда $\exists\, U(y^0)$ такая, что система

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = y_m \end{cases}$$

имеет решение при любом $y \in U(y^0)$ и $x_1 = g_1(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $x_2 = g_2(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, $\ldots$, $x_m = g_m(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, где $g = f^{-1} \in C^1\big(U(y^0)\big)$

Теорема 19 (о неявном отображении):

Пусть $f\colon O \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$, O — открытое, $f \in C^r(O)$, точка $(a, b) \in O$ такая, что $f(a, b) = 0$, $\det f'_y(a, b) \neq 0$, тогда $\exists\, P(a) \subset \mathbb{R}^m, Q(b) \subset \mathbb{R}^n$ — окрестности точек a и b такие, что $\exists$ единственное отображение $\varphi\colon P \to Q$ такое, что $\forall\, x \in P$ $f(x, \varphi(x)) = 0$, при этом $\varphi \in C^r(P)$

Доказательство: Пусть $\Phi\colon O \to \mathbb{R}^{m+n}$, $\Phi(x, y) = \big(x, f(x, y)\big)$, тогда $\det \Phi'(x) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ f'_x & f'_y \end{pmatrix} = \det f'_y \neq 0$, значит по теореме 17 существует окрестность точки (a, b), в которой f — диффеоморфизм класса C^r. Возьмём подмножество $\widetilde{U} = P_1(a) \times Q(b)$ ($P_1(a), Q(b)$ — окрестности точек a, b), содержащееся в этой окрестности. Пусть $P = \Phi(\widetilde{U}) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0_{\mathbb{R}^m}\})$. Обратное отображение $\Phi^{-1}\colon \Phi(\widetilde{U}) \to \widetilde{U}$, причём $\Phi^{-1}(x,y) = (x, H(x,y))$, где $H\colon \Phi(\widetilde{U}) \to \mathbb{R}^n$. Тогда можно взять $\forall\, x \in P$ $\varphi(x) = H(x,0)$ (и будет, что $f(x,\varphi(x) = 0$, т.к. $\forall\, x \in P, y \in \mathbb{R}^n$ выполнено $f(x, H(x,y)) = y$, то при $y = 0$ $f(x, H(x,0)) = 0$)

Единственность: Возьмём $x \in P, y \in Q$ такие, что $f(x,y) = 0$, тогда $\Phi(x,y) = (x,0)$ (по определению Φ). Значит $(x,y) = \Phi^{-1}\Phi(x,y) = \Phi^{-1}(x,0) = (x, H(x,0)) = (x, \varphi(x))$

Производная φ: Дифференцируя по x равенство $f(x,\varphi(x))$, получаем $f'_x(x,\varphi(x)) + f'_y(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$. Выражаем производную: $\varphi'(x) = -(f'_y(x,\varphi(x)))^{-1} \cdot f'_x(x,\varphi(x))$ $\square$

Теорема 20 *(о неявном отображении в терминах систем уравнений):*

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, точка $(a,b) \in \mathbb{R}^{m+n}$ решение системы

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0 \end{cases}$$

и если

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b)\right)_{\substack{i\in\{1,2,\ldots,n\}\\ j\in\{1,2,\ldots,n\}}} \neq 0$$

Тогда $\exists\, U(a), V(b) : \forall\, x \in U(a)$ $\exists!\, y \in V(b)$, который удовлетворяет системе

Определение 36: $M \subset \mathbb{R}^m$ называется простым k-мерным (непрерывным) многообразием в $\mathbb{R}^m$, если $\exists\, O \subset \mathbb{R}^k$ — открытое, $\exists\, \Phi\colon O \to M$ — гомеоморфизм (и сюръекция). Отображение Φ тогда называется параметризацией

Определение 37: $M \subset \mathbb{R}^m$ называется простым k-мерным C^r-гладким многообразием в $\mathbb{R}^m$, если $\exists\, O \subset \mathbb{R}^k$ — открытое, $\exists\, \Phi\colon O \to \mathbb{R}^m$ — гомеоморфизм O и M, при этом $\Phi \in C^r(O)$, и $\forall\, x \in O$ $rank\, \Phi'(x) = k$. Отображение Φ тогда называется гладкой параметризацией

Теорема 21 *(о задании гладкого многообразия системой уравнений):*

Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$, $1 \leqslant k < m$, $1 \leqslant r \leqslant +\infty$, тогда $\forall\, p \in M$ эквивалентно:

1. $\exists\, U(p) \subset \mathbb{R}^m$ — окрестность точки p такая, что $M \cap U(p)$ — простое C^r-гладкое многообразие
2. $\exists\, \widetilde{U}(p) \subset \mathbb{R}^m$ — окрестность точки p, $\exists$ функции $f_1, f_2, \ldots, f_{m-k}\colon \widetilde{U}(p) \to R$ класса $C^r\big(\widetilde{U}(p)\big)$ такие, что $x \in M \cap \widetilde{U}(p) \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_{m-k} = 0$ и система векторов $\operatorname{grad} f_1(p)$, $\operatorname{grad} f_2(p), \ldots \operatorname{grad} f_{m-k}(p)$ линейно независима

Доказательство: $1 \Rightarrow 2$: Из определения простого C^r гладкого многообразия $\exists\, \Phi\colon O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, $\Phi \in C^r$ — параметризация. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ — её координатные функции, $p = \Phi(t^0)$. Можно считать, что первые k строк матрицы Якоби функции f линейно не зависимы (в определении многообразия ранг равен k), т.е.

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial t_j}(x_0)\right)_{\substack{i\in\{1,2,\ldots,k\}\\ j\in\{1,2,\ldots,k\}}} \neq 0$$

Пусть $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ — проекция, тогда $L \circ \Phi$ — класса C^r и $\det(L \circ \Phi)'(t_0) \neq 0$, значит по теореме 17 оно является диффеоморфизмом в некоторой окрестности точки t_0, то есть $\exists\, W(t_0), V(L\Phi(t^0))$

— окрестности точек $t_0, L\Phi(t^0)$ такие, что $L \circ \Phi \colon W \to V$ — диффеоморфизм. Пусть $\Psi \colon V \to W$ — обратное отображение. Тогда $\Phi(W)$ это график некоторого отображения $H \colon V \to \mathbb{R}^{m-k}$. Возьмём точку $x' \in V$, тогда $(x', H(x')) = \Phi(\Psi(x'))$. Композиция Φ и Ψ, значит H — класса C^r. Рассмотрим открытое множество $V \times \mathbb{R}^{m-k}$. Φ — гомеоморфизм множеств W и $\Phi(W) \subset M$, $\Phi(W)$ — открыто в M, значит $\exists G \subset \mathbb{R}^m$ — открытое, такое, что $\Phi(W) = G \cap M$. Пусть $\widetilde{U}(p) = G \cap (V \times \mathbb{R}^{m-k})$. Определим для $j \in 1, 2, \ldots, m-k$ функции $f_j \colon \widetilde{U}(p) \to \mathbb{R}$ так: $f_j(x) = H_j(L(x)) - x_{k+j}$. Получается, что $x \in M \cap \widetilde{U}(p) \Leftrightarrow \forall j \; f_j(x) = 0$. И так как

$$\begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(p) \\ \operatorname{grad} f_2(p) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_{m-k}(p) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial H_1}{\partial k} & \\ \vdots & \ddots & \vdots & -E_{m-k} \\ \frac{\partial H_{m-k}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial H_{m-k}}{\partial k} & \end{array}\right)$$

Ранг этой матрицы равен $m-k$, значит градиенты линейно независимы

$2 \Rightarrow 1$: Нам дана система из $m-k$ уравнений: $f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_{m-k} = 0$. Так как градиенты (строки матрицы Якоби отображения F) линейно независимы, можно считать, что

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{k+j}}(p)\right)_{\substack{i \in \{1,2,\ldots,m-k\} \\ j \in \{1,2,\ldots,m-k\}}} \neq 0$$

Тогда по теореме 20 $\exists \varphi \colon U(p_1, p_2, \ldots, p_k) \to V(p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots, p_m)$ такое, что все решения уравнения $f = 0$ имеют вид $(x', \varphi(x'))$, тогда $\Phi \colon U(p_1, p_2, \ldots, p_k) \to \mathbb{R}^m$, $x' \mapsto (x', \varphi(x'))$ — параметризация. То есть $M \cap \widetilde{U} \cap (U \times V)$ —график отображения φ и φ — гомеоморфизм. Значит по определению $M \cap U(p)$ — простое C^r-гладкое многобразие □

Следствие 10: *Следствие о двух параметризациях:* Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$ — k-мерное C^r-гладкое многообразие, $p \in M$, $\exists U(p)$ — окрестность точки p, в которой есть две параметризации класса C^r $\Phi_1 \colon O_1 \subset \mathbb{R}^k \to U(p)$, $\Phi_2 \colon O_2 \subset \mathbb{R}^k \to U(p)$, тогда $\exists$диффеомомрфизм $\Theta \colon O_1 \to O_2$ такой, что $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Theta$

Доказательство: Для обоих параметризаций сделаем тоже самое, что в начале доказательства теоремы (до проекции). Обозначим проекции L_1, L_2, и обратные отображения Ψ_1, Ψ_2. Так как $\Phi_1(t) = \Phi_2(\Psi_2(L_2(\Phi_1(t))))$, то $\Theta = \Psi_2 \circ L_2 \circ \Phi_1$ — отображение класса C^r, т.к. составлено из отображений класса C^r, и оно обратимо, и обратное аналогично является отображением класса C^r: $\Theta^{-1} = \Psi_1 \circ L_1 \circ \Phi_2$, значит оно является диффеоморфизмом. □

Лемма 9 (о корректности определения касательного пространства):

Пусть отображение $\Phi \colon O \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — параметризация C^r-гладкого многообразия M в окрестности точки $p \in M$. $\Phi(t_0) = p$, тогда $\Phi'(t_0) \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — линейные оператор, его образ — это k-мерное подпространство в $\mathbb{R}^m$, не зависящее от Φ

Доказательство: Образ k-мерный так как Φ — параметризация и по определению $rank\, \Phi'(t_0) = k$. По следствию о двух параметризациях (сл. 10), если существует какая-нибудь параметризация Φ_2, то существует диффеоморфизм Θ такой, что $\Phi_2 = \Phi \circ \Theta$. Тогда $\Phi_2' = \Phi'\Theta'$, где Θ' непрерывен и невырожден, значит образ Φ' равен образу Φ_2' □

Определение 38: k-мерное подпространство — образ $\Phi'(t_0)$ (из леммы), называется касательным пространством к многобразию M в точке p. Обозначение: $\mathrm{T}pM$

Свойства:

1. Пусть вектор $v \in \mathrm{T}pM$, тогда $\exists$гладкий путь $\gamma \colon [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ такой, что $\gamma(0) = p$ и $\gamma'(0) = v$

   Доказательство: пусть Φ — параметризация $U(p) \cap M$, $\Phi(t_0) = p$. Возьмём $u = \left(\Phi'(t_0)\right)^{-1} v$ — прообраз вектора v, $\widetilde{\gamma}(s) = t_0 + su$, где $s \in [-\varepsilon; \varepsilon]$, тогда для $\gamma(s) = \Phi(\widetilde{\gamma}(s))$ будет выполнено то, что нужно: $\gamma(0) = \Phi(t_0) = p$ и $\gamma'(0) = \Phi'(\widetilde{\gamma}(0)) \cdot \widetilde{\gamma}'(0) = \Phi'(t_0) \cdot u = v$

2. Пусть $\gamma\colon [-\varepsilon;\varepsilon] \to M$ — гладкий путь такой, что $\gamma(0) = p$, тогда $\gamma'(0) \in \mathrm{T}pM$

   Доказательство: Так как $\gamma(s) = \varPhi(\Psi(L(\gamma(s))))$, то $\gamma' = \varPhi' \circ \Psi' \circ L' \circ \gamma'$ и тогда $\gamma'(0)$ принадлежит образу $\varPhi'$, т.е. принадлежит $\mathrm{T}pM$

3. Пусть $f\colon O \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(O)$, O — открытое, $f(x) = 0$ и $f(x^0) = 0$, тогда касательное пространство в точке x^0 задаётся уравнением

$$f'_{x_1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + f'_{x_2}(x^0)(x_2 - x_2^0) + \ldots + f'_{x_m}(x^0)(x_m - x_m^0) = 0$$

   Доказательство: пусть $f'_{x_m}(x^0) \neq 0$ по теореме 19 $x_m = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$; $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{m-1}))$ — параметризация в окрестности точки x^0 многообразия $f(x) = 0$. Касательная плоскость: $\sum\limits_{i=1}^{m-1} \varphi'_{x_i}(x_i - x_i^0) - (x_m - x_m^0) = 0 \Rightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{m-1}))$, то есть $f'_{x_1} + f'_{x_m} \cdot \varphi'_{x_1} = 0 \Rightarrow \varphi'_{x_1} = -\frac{f'_{x_1}}{f'_{x_m}}$

§ Функциональные последовательности

Определение 39: Последовательность функций — это отображение из $\mathbb{N}$ в множество функций.

Определение 40: Пусть X — множество, Y — метрическое пространство, $f, f_1, f_2, \ldots : X \to Y$, последовательность отображений f_n сходится поточечно к отображению f на множестве $E \subset X$ означает, что $\forall\, x_0 \in E\ f_n(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$, т.е.

$$\forall\, x_0 \in E \ \ \forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, N : \forall\, n > N \text{ выполнено } \rho\big(f_n(x_0), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

Определение 41: Последовательность отображений f_n сходится равномерно к отображению f на множестве E если $\sup\limits_{x\in E} \rho\,(f_n(x_0), f(x_0)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.е.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, N : \forall\, n > N \ \ \forall\, x \in E \text{ выполнено } \rho\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$$

Обозначение: $f_n \overset{E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f$

Замечание 13:

1. Из равномерной сходимости следует поточечная сходимость (наоборот нет)
2. Если $f_n \overset{E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f$ и $E_0 \subset E$, то $f_n \overset{E_0}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f$

Лемма 10 (или следующий пункт замечания):

Пусть X — множество, Y — метрическое пространство, $\mathcal{F} = \{\, f : X \to Y \mid f \text{ — ограничено}\,\}$ (f — ограничено означает, что $\exists\, y_0 \in Y, r \in \mathbb{R} : \forall\, x \in X$ выполнено $f(x) \in \mathrm{B}(y_0, r)$). Тогда функция $\rho_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ такая, что $\rho_{\mathcal{F}}\,(f_1, f_2) = \sup\limits_{x\in X} \rho\big(f_1(x), f_2(x)\big)$ является метрикой на $\mathcal{F}$.

Доказательство: Выполнение первых двух аксиом метрики (опр. 4) следует из их выполнения в метрике на Y. Неравенство треугольника: при любом $x \in X$ выполнено

$$\rho\big(f_1(x), f_2(x)\big) \leqslant \rho\big(f_1(x), g(x)\big) + \rho\big(g(x), f_2(x)\big) \leqslant \rho_{\mathcal{F}}\,(f_1, g) + \rho_{\mathcal{F}}\,(g, f_2) \qquad \forall\, f_1, f_2, g \in \mathcal{F}$$

Правая часть неравенства не зависит от x, поэтому она является верхней границей (для множества чисел $\{\, \rho\big(f_1(x), f_2(x)\big) \mid x \in X\,\}$), тогда она больше либо равна точной верхней границы $\Rightarrow \rho_{\mathcal{F}}\,(f_1, f_2) \leqslant \rho_{\mathcal{F}}\,(f_1, g) + \rho_{\mathcal{F}}\,(g, f_2)$ $\square$

Теорема 22 (Стокса-Зайдля о непрерывности предельной функции):

Отображение f и последовательность отображений f_n действуют $X \to Y$, где X, Y — метрические пространства. Пусть все отображения из последовательности непрерывны в точке $c \in X$ и $f_n \overset{X}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f$. Тогда f непрерывна в точке c.

Доказательство: Применяя два раза неравенство треугольника к $\rho\big(f(x), f(c)\big)$, получаем

$$\rho\big(f(x), f(c)\big) \leqslant \rho\big(f(x), f_n(x)\big) + \rho\big(f_n(x), f(c)\big) \leqslant \rho\big(f(x), f_n(x)\big) + \rho\big(f_n(x), f_n(c)\big) + \rho\big(f_n(c), f(c)\big)$$

Из определения равномерной сходимости f_n к f ($\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, N : \forall\, n > N \ \sup_{x\in X} \rho\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$) получаем, что $\forall\, \varepsilon > 0$ первое и последние слагаемое в правой части неравенства $< \varepsilon$. Из определения непрерывности f_n в точке c ($\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, U(c) :$ если $x \in U(c)$, то $\rho\big(f_n(x), f_n(c)\big) < \varepsilon$) получаем, что $\exists\, U(c)$ — окрестность точки x такая, что если $x \in U(c)$, то второе слагаемое из правой части неравенства $< \varepsilon$. Складывая, получаем, что $\rho\big(f(x), f(c)\big) < 3 \cdot \varepsilon$. Получилось определение непрерывности f в точке c. $\square$

Следствие 11: Если $f_n \in C(X)$ и $f_n \overset{X}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f$, то $f \in C(X)$.

Замечание 14:

1. В теореме 22 достаточно того, чтобы X было топологическим пространством.
2. В теореме 22 достаточно требовать равномерную сходимость f_n к f только в некоторой окрестности точки c.
3. В следствии (сл. 11) достаточно требовать локальную равномерную сходимость, то есть $\forall\, x \in X \;\; \exists\, U(x) : \; f_n \overset{U(x)}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f$. Из локальной равномерной сходимости не следует обычная.

   Например, $X = (0, 1)$, $f_n(x) = x^n$:

   Поточечная сходимость: $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ на $(0, 1)$.

   Локальная равномерная сходимость: $\sup\limits_{(\alpha,\beta)} |x^n - 0| = \beta^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \forall\,(\alpha, \beta) \subset (0, 1),\;\; \beta \neq 1$

   Обычной равномерной сходимости нет: $\sup\limits_{(0,1)} |x^n - 0| = 1$

Теорема 23 (о полноте пространства непрерывных функций на компакте):

Пусть K — компактное метрическое пространство, тогда $C(K) = \{\, f : K \to \mathbb{R} \mid f$ — непрерывно $\}$ есть полное метрическое пространство относительно метрики $\rho\,(f_1, f_2) = \sup_K |f_1(x) - f_2(x)|$

1. $\rho\,(f_1, f_2) = \sup_K |f_1(x) - f_2(x)|$ является метрикой по лемме 10, т.к. непрерывные функции на компакте — ограничены (теорема Вейерштрасса)
2. Метрическое пространство называется компактным, если из любого покрытия пространства открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.
3. Метрическое пространство называется полным, если в нём любая фундаментальная последовательность сходится.
4. Последовательность x_n называется фундаментальной, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\, N : \forall\, n, m > N \text{ выполнено } \rho\,(x_n, x_m) < \varepsilon$$

5. Если последовательность сходится, то она фундаментальная. Доказательство: $\forall\,\varepsilon > 0$ из определения сходимости x_n к a $(\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\, N : \forall\, n > N$ выполнено $\rho\,(x_n, a) < \varepsilon)$ возьмём $n, m > N$, тогда, используя неравенство треугольника, получаем $\rho\,(x_n, x_m) \leqslant \rho\,(x_n, a) + \rho\,(a, x_m) < 2\varepsilon$. Получилось определение фундаментальности.

Доказательство: Нужно доказать, что любая фундаментальная последовательность сходится. Возьмём фундаментальную последовательность f_n. Тогда $\forall\, x_0 \in K$ последовательность $f_n(x_0)$ — фундоментальная, и она вещественная $\Rightarrow$ она сходится. Обозначим её предел $f(x_0)$. Определение фундоментальности $f_n(x)$:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\, N : \forall\, n, m > N \;\; \forall\, x_0 \in K \text{ выполнено } |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$$

При каждом фиксированном x_0 делаем предельный переход при $m \to \infty$, получаем

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists\, N : \forall\, n > N \;\; \forall\, x_0 \in K \text{ выполнено } |f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

То есть f_n сходится к f равномерно. Тогда f непрерывна на K по теореме 22, то есть $f \in C(K)$, а сходимость последовательности в $C(X)$ — это равномерная сходимость функциональных последовательностей. $\square$

Замечание 15:

1. Пространство $\mathcal{F} = \{\, f\colon X \to Y \mid f - \text{ограничено}, \}$, где X — множество, Y — полное метрическое пространство, тоже является полным.

   > Доказательство останется тем же, только в конце нельзя будет применить теорему 22. Но если $f_n \in \mathcal{F}$ и $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} f$, то $f \in \mathcal{F}$. Доказательство: определение ограниченности f_n:
   >
   > $$\forall n \;\; \exists y_n \in Y, r_n \in \mathbb{R} : \forall x \in X \text{ выполнено } f_n(x) \in \mathrm{B}(y_n, r_n)$$
   >
   > Определение равномерной сходимости:
   >
   > $$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : \forall n > N \;\; \forall x \in E \text{ выполнено } \rho\big(f_n(x), f(x)\big) < \varepsilon$$
   >
   > Тогда возьмём $\varepsilon_0 > 0$, найдём соответствующее N, возьмём $n = N+1$ и для них при любом $x \in X$ будет выполнено $\rho\big(f(x), f_{N+1}(x)\big) < \varepsilon_0$ и $\rho\big(y_{N+1}, f_{N+1}(x)\big) < r_{N+1} \Rightarrow$ по неравенству треугольника $\rho\big(f(x), y_{N+1}\big) < r_{N+1} + \varepsilon_0$, то есть f — ограничено.

2. Пространство $C_M(K) = \{\, f\colon K \to Y \mid f - \text{непрерывно} \,\}$, где K — компактное метрическое пространство, Y — полное метрическое пространство, тоже является полным.

3. **Критерий Больцано-Коши равномерной сходимости функциональной последовательности:** так как сходимость последовательности в $C(K)$ — это равномерная сходимость функциональных последовательностей, и $C(K)$ — полное пространство (по теореме 23), то в $C(K)$ равномерная сходимость последовательности $f_n(x) \Leftrightarrow$

   $$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : \forall n, m > N \text{ выполнено } \sup_{x\in K} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Теорема 24 (о предельном переходе под знаком интеграла для последовательностей):

Пусть $f_n \in C[a,b]$ $(f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R})$ и $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{[a,b]} f$, тогда $\int\limits_a^b f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_a^b f$

Доказательство: Используя определение равномерной непрерывности, получаем

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| \leqslant \sup_{[a,b]} |f_n - f| \cdot (b-a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

По теореме 22 f непрерывна, значит $\int\limits_a^b f$ имеет смысл $\square$

Теорема 25 (правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру):

Пусть $f\colon [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$, f и f'_y — непрерывны на $[a,b]\times[c,d]$, $\varPhi\colon [c,d] \to \mathbb{R}$, $\varPhi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, тогда $\varPhi$ — дифференцируема на $[c,d]$ и $\varPhi'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx$

Доказательство: $\forall\, y \in [c,d]$, $\forall\, h \in \mathbb{R} : y + h \in [c,d]$ верно:

$$\frac{\varPhi(y+h) - \varPhi(y)}{h} = \frac{\int_a^b f(x, y+h)\,dx - \int_a^b f(x,y)\,dx}{h} \overset{\text{т. Лагранжа}}{=} \int_a^b f'_y(x, y + \theta_h h)\,dx, \quad \theta_h \in (0,1)$$

По теореме Кантора (непрерывная функция на компакте равномерно непрерывна) f'_y равномерно непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$, то есть

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0:\forall\,x_1,x_2\in[a,b]\times[c,d],\text{ если }\|x_1-x_2\|<\delta,\text{ то }|f'_y(x_1)-f'_y(x_2)|<\varepsilon$$

Пользуясь этим определением, фиксируем $\varepsilon>0$, находим $\delta>0$. Тогда, при $|h|<\delta$, так как $\|(x,y+\theta_h h)-(x,y)\|<\delta$, то $\left|f'_y(x,y+\theta_h h)-f'_y(x,y)\right|<\varepsilon$ или

$$\left|\int_a^b f'_y(x,y+\theta_h h)\,dx-\int_a^b f'_y(x,y)\,dx\right|\leqslant\int_a^b\left|f'_y(x,y+\theta_h h)\,dx-f'_y(x,y)\,dx\right|\leqslant\varepsilon\cdot(b-a),$$

потому что подынтегральная функция не превосходит ε. Значит

$$\left|\frac{\Phi(y+h)-\Phi(y)}{h}-\int_a^b f'_y(x,y)\,dx\right|\leqslant\varepsilon\cdot(b-a),\quad\text{то есть}\quad\lim_{h\to0}\frac{\Phi(y+h)-\Phi(y)}{h}=\int_a^b f'_y(x,y)\,dx$$

И по определению производной $\Phi'(y)=\int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx$. $\square$

Теорема 26 (о предельном переходе под знаком производной):

$$f_n\in C^1\langle a,b\rangle,\ f_n\xrightarrow[n\to\infty]{}f\text{ поточечно на }\langle a,b\rangle,\ f'_n\overset{\langle a,b\rangle}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}}\varphi\text{ , тогда }f\in C^1\langle a,b\rangle\text{ и }f'=\varphi\text{ на }\langle a,b\rangle$$

Доказательство: Пусть $x_0\in\langle a,b\rangle$, тогда $\forall\,x\in\langle a,b\rangle$ по теореме 24 $\int_{x_0}^x f'_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_{x_0}^x\varphi$, то есть $f_n(x)-f_n(x_0)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_{x_0}^x\varphi$, а по условию $f_n(x)-f_n(x_0)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x)-f(x_0)$, значит $f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^x\varphi$, тогда (так как интеграл с переменным верхнем пределом дифференцируем) f — дифференцируема и $f'(x)=\varphi(x)$, то есть $f'\in C^1\langle a,b\rangle$ (по теореме 22 φ непрерывна). $\square$

Определение 42: Пусть $u_n\colon X\to\mathbb{R}$, где X — множество, тогда функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится равномерно (поточечно), если сходится равномерно (поточечно) функциональная последовательность из частичных сумм $S_k(x)=\sum\limits_{n=1}^{k}u_n(x)$. Функция $S(x)=\lim\limits_{k\to\infty}S_k(x)$ называется суммой функционального ряда. То есть ряд сходится равномерно, если

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,N:\forall\,k>N\ \ \forall\,x\in X\text{ выполнено }|S(x)-S_k(x)|<\varepsilon$$

$R_n(x)=S(x)-S_k(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_n(x)$ называется остатком функционального ряда.

Замечание 16:

1. Ряд равномерно сходится на $E\Leftrightarrow R_n(x)\overset{E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}}0$ (следует прямо из определения)
2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ равномерно сходится на E, то $u_n(x)\overset{E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}}0$ (т. к. $u_k(x)=R_{k-1}(x)-R_k(x)$)

Теорема 27 (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда):

Пусть $u_n\colon X\to\mathbb{R}$ (X — множество), $C_n\in\mathbb{R}:|u_n|\leqslant C_n\ \forall\,n\in\mathbb{N}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_n$ — сходится. Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ — сходится равномерно на X.

Доказательство: Чтобы доказать равномерную сходимость функционального ряда, можно проверить сходится ли равномерно остататок ряда к нулю (зам. 16.1)

$$\sup_{x\in X}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|\leqslant\sup_{x\in X}\sum_{k=n+1}^{\infty}|u_k(x)|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}C_n\xrightarrow[k\to\infty]{}0$$

□

Замечание 17: *Критерий Больцано-Коши:* ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на $E \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : \forall n > N, \;\; \forall k \in \mathbb{N}, \;\; \forall x \in E \text{ выполнено } |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+k}(x)| < \varepsilon$$

> Это верно, потому что это критерий Больцано-Коши сходимости функциональной последовательности (зам. 15), записанный для частичных сумм, а равномерная сходимость ряда это равномерная сходимость последовательности из его частичных сумм.

Тогда ряд не сходится равномерно $\Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \;\; \exists n > N, \;\; \exists k \in \mathbb{N}, \;\; \exists x \in E: \text{ выполнено } |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+k}(x)| > \varepsilon$$

Теорема 28 (Стокса-Зайдля для рядов):

Пусть $u_n \colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывны в точке $x_0 \in X$ (X — метрическое пространство) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно к функции $S(x)$. Тогда $S(x)$ — непрерывна в точке x_0

Доказательство: Частичная сумма $S_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} u_n(x)$ — непрерывна в точке x_0 и $S_k(x) \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} S(x)$ по определению равномерной сходимости ряда (опр. 42). Тогда по теореме Стокса-Зайдля для последовательностей (т. 22) $S(x)$ непрерывна в точке x_0. □

Теорема 29 (об интегрировании функционального ряда):

Пусть $u_n \in C[a, b]$ ($u_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$), ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно к функции $S(x)$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) = \int_a^b S(x)$$

Доказательство: Частичная сумма $S_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} u_n(x) \in C[a, b]$ и $S_k(x) \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} S(x)$ по определению равномерной сходимости ряда (опр. 42). Тогда по теореме 24 $\int_a^b S_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_a^b S(x)$. Значит, делая предельный переход при $k \to \infty$ в равенстве $\sum\limits_{n=1}^{k} \int_a^b u_n(x) = \int_a^b S_k(x)$, получаем доказываемую формулу. По теореме 22 $\int_a^b S(x)$ имеет смысл, т.к. S_K непрерывны и сходятся равномерно к $S(x)$.
□

Теорема 30 (о дифференцировании ряда):

Пусть $u_n \in C^1 \langle a, b \rangle$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится поточечно к $S(x)$ на $\langle a, b \rangle$, и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ равномерно сходится к $\varphi(x)$ на $\langle a, b \rangle$. Тогда $S(x) \in C^1 \langle a, b \rangle$ и $S'(x) = \varphi$.

Доказательство: Частичная сумма $S_k(x) = \sum\limits_{n=1}^{k} u_n(x) \in C^1 \langle a, b \rangle$ и сходится поточечно к $S(x)$ по определению поточечной сходимости ряда (опр. 42), а последовательность функций $\sum\limits_{n=1}^{k} u_n'(x)$ сходится равномерно к $\varphi(x)$, значит из теоремы 26 получаем $S(x) \in C^1 \langle a, b \rangle$ и $S'(x) = \varphi(x)$. □

Следствие 12: *Дифференцируемость гамма функции.* Запишем формулу Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)\cdot e^{-\frac{x}{k}} \qquad (x>0)$$

Прологарифмируем её

$$-\ln\Gamma(x) = \ln x + \gamma x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right)$$

Равномерная сходимость ряда из производных есть по признаку Вейерштрасса (т. 27):

$$\left(\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right)' = \frac{1/k}{1+x/k}-\frac{1}{k} = -\frac{x}{(k+x)\cdot k}$$

Модуль этого выражения это возрастающая функция, поэтому $\forall\, M\in\mathbb{R}$

$$\left|-\frac{x}{(k+x)\cdot k}\right| = \frac{x}{(k+x)\cdot k} \overset{\text{на } [0,M]}{\leqslant} \frac{M}{(k+M)\cdot k} \qquad \text{и ряд } \sum_{k=1}^{\infty}\frac{M}{(k+M)\cdot k} \text{ сходится.}$$

Значит по теореме 30 сумма ряда дифференцируема, тогда и гамма функция дифференцируема как композиция и произведение дифференцируемых функций:

$$\Gamma(x) = \left(xe^{\gamma x}+e^{\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)+\frac{x}{k}\right)}\right)^{-1}$$

Теорема 31 *(о предельном переходе в суммах):*

$u_n\colon E\subset X\to\mathbb{R}$, X — метрическое пространство, $x_0\in X$ — предельная точка E. Пусть $\forall\, n\ \ \exists \lim\limits_{x\to x_0}u_n(x)=a_n$ (конечный), и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ равномерно сходится на E, тогда

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ — сходится и } \sum_{n=1}^{\infty}a_n = \lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)$$

Доказательство: Чтобы доказать сходимость вещественного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ достаточно проверить фундаментальность $S_N^a=\sum\limits_{n=1}^{N}a_n$ последовательности частичных сумм. Пусть $S_N(x)=\sum\limits_{n=1}^{N}u_n(x)$ — функциональная последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, тогда из зам. 17 (т.к. этот ряд равномерно сходится) $\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\, N:\forall\, n>N, \forall\, p\in\mathbb{N}, \forall\, x\in E$ выполнено $|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon$, а для x из некоторой окрестности точки x_0 выполнено $|S_{n+p}^a-S_{n+p}(x)|<\varepsilon$ и $|S_n(x)-S_n^a|<\varepsilon$. Тогда, используя неравенство треугольника, получаем

$$|S_{n+p}^a-S_n^a|\leqslant|S_{n+p}^a-S_{n+p}(x)|+|S_{n+p}(x)-S_n(x)|+|S_n(x)-S_n^a|<3\cdot\varepsilon$$

Это определение фундаментальности S_N^a. Теперь определим функции

$$\tilde{u}_n(x) = \left[\begin{array}{ll} u_n(x), & x\in E \\ a_n, & x=x_0 \end{array}\right.$$

$\tilde{u}_n(x)$ — непрерывны в точке x_0 (потому что по условию $\lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) = a_n$) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(x)$ равномерно сходится на $E \cup \{ x_0 \}$, так как

$$\sup_{x\in E\cup\{ x_0 \}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \tilde{u}_k(x) \right| \leqslant \sup_{x\in E} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Значит по теореме Стокса-Зайдля для рядов (т. 28) сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(x) = \tilde{S}(x)$ непрерывна в точке x_0, поэтому $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \lim\limits_{x\to x_0} \tilde{S}(x) = \tilde{S}(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ □

Теорема 32 (о перестановке предельных переходов):

$f_n \colon E \subset X \to \mathbb{R}$, ($X$ — метрическое пространство), x_0 — предельная точка E, пусть

1. $\forall n \;\; f_n(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A_n$, $\quad$ (A_n — конечный предел)
2. $f_n(x) \overset{E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} S(x)$

Тогда

1. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ (конечный)
2. $S(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) \big) = \lim\limits_{x\to x_0} \big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \big)$

Доказательство: Пусть $u_n = f_n - f_{n-1}$ $(u_1 = f_1)$, тогда $u_n(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} a_n = A_n - A_{n-1}$ $(a_1 = A_1)$ и частичная сумма $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_n(x) = f_n(x) \overset{E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} S(x) \;\Rightarrow\;$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E, значит по теореме 31

1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а $\sum\limits_{k=1}^{n} a_n = A_n$, то есть последовательность A_n сходится, обозначим её предел A.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{x\to x_0} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \lim\limits_{x\to x_0} S(x)$, а по первому пункту $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, значит $S(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A$.

□

Определение 43: Пусть $f \colon E \times D \to \mathbb{R}$, E — множество, $D \subset Y$ — метрическое пространство, тогда функция $h \colon E \to \mathbb{R}$ называется равномерным пределом функции f при $t \to t_0$ (t_0 — предельная точка D), если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists U(t_0) : \text{ если } t \in U(t_0), \text{ то } \sup_{x\in E} |f(x,t) - h(x)| < \varepsilon$$

Обозначается $f(x,t) \underset{t\to t_0}{\rightrightarrows} h(x)$

Теорема 33 (о перестановке двух предельных переходов):

$f \colon E \times D \to \mathbb{R}$, $\quad E \subset X$, $D \subset Y$ — метрические пространства, x_0 — предельная точка E, y_0 — предельная точка D. Пусть

1. $\exists$ функция $A \colon D \to \mathbb{R} : \forall y \in D \;\; \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = A(y)$
2. $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} S(x)$, где $S \colon E \to \mathbb{R}$

Тогда

1. $\exists \lim\limits_{y\to y_0} A(y) = A$ (конечный)
2. $\lim\limits_{x\to x_0} S(x) = A$

Доказательство: Отсутствует (нужна только формулировка) $\square$

Теорема 34 (признак Дирихле):

Пусть $a_n, b_n \colon X \to \mathbb{R}$ — функциональные последовательности (X — множество) и

1. Частичные суммы $A_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x)$ равномерно ограничены, то есть
$$\exists C_A \in \mathbb{R} : \forall x \in X,\ \forall N \in \mathbb{N}\ \ |A_N(x)| \leqslant C_A$$
2. $\forall x_0 \in X\ \ b_n(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ монотонно, и $\ b_n(x) \overset{X}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} 0$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\cdot b_n(x)$ сходится равномерно на X.

Доказательство: Есть равенство:
$$\sum_{k=N}^{M} a_k(x)\cdot b_k(x) = A_M(x)\cdot b_M(x) - A_{N-1}(x)\cdot b_{N-1}(x) + \sum_{k=N}^{M-1}(b_k - b_{k+1})\cdot A_k(x)$$
Оно верно, потому что... Значит
$$\left|\sum_{k=N}^{M} a_k(x)\cdot b_k(x)\right| \leqslant |A_M(x)|\cdot|b_M(x)| + |A_{N-1}|\cdot|b_{N-1}(x)| \pm \sum_{k=N}^{M-1}(b_k - b_{k+1})\cdot|A_k(x)| \leqslant$$
$$\leqslant C_A\cdot\big(|b_M(x)| + |b_{N-1}(x)| + |b_N(x)| + |b_M(x)|\big)$$
По признаку Коши равномерной сходимости ряда (зам. 17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\cdot b_n(x)$ сходится равномерно, потому что $b_n(x)$ равномерно сходится. $\square$

§ Степенные ряды

Определение 44: Пусть $z_0 \in \mathbb{C},\ r \in (0,+\infty)$, тогда $\mathrm{B}(z,r) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \,\} \subset \mathbb{C}$ называется кругом с центром в точке z_0 и радиуса r.

Определение 45: Пусть a_n — комплексная последовательность, $z_0 \in \mathbb{C}$, тогда $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ называется степенным рядом ($A\colon E \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$). Ряд сходится, если сходится последовательность частичных сумм. Сходится абсолютно, если сходится вещественный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n|$

Замечание 18: Комплексный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow$ сходятся вещественные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ (это покоординатная сходимость, утв. 5). Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ сходится, то и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, так как $|\operatorname{Re} a_n| \leqslant |a_n|$ и $|\operatorname{Im} a_n| \leqslant |a_n|$, значит ряды из вещественных и мнимых частей сходятся абсолютно $\Rightarrow$ сходятся.

Теорема 35 (о круге сходимости степенного ряда):

Пусть $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ — степенной ряд, тогда возможно

1. Ряд сходится абсолютно при любом $z \in \mathbb{C}$
2. Ряд сходится абсолютно только при $z = z_0$, иначе расходится
3. $\exists R \in (0, +\infty):$ ряд сходится абсолютно при $|z - z_0| < R$ и расходится при $|z - z_0| > R$

Доказательство:

1. Верхний предел вещественной последовательности x_n это
$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n, \qquad \text{где } y_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$$
2. *Признак Коши сходимости вещественного ряда.* Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ — неотрицательный вещественный ряд, тогда он сходится, если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, и расходится, если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$, причём $x_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

По признаку Коши ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n(z - z_0)^n|$ сходится, если
$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = \varlimsup_{n\to\infty} |z - z_0| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = |z - z_0| \cdot \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$
То есть может быть 3 случая:

1. Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, то ряд A сходится при любом $z \in \mathbb{C}$
2. Если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, то ряд A сходится только при $z = z_0$, и расходится в остальных случаях, т.к. слагаемые не стремятся к 0
3. Если $|z - z_0| < \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, то ряд A сходится абсолютно

Таким образом в последнем пункте $R = \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ — это формула Коши-Адамара. $\square$

Замечание 19: Был ещё *признак Даламбера: Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ — положительный вещественный ряд и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = D$, тогда ряд сходится, если $D < 1$, и расходится, если $D > 1$.* Поэтому в теореме 35 радиус круга сходимости можно считать по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ (если этот предел существует).

Теорема 36 (о равномерной сходимости и непрерывности степенного ряда):

Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ — степенной ряд и R — радиус его круга сходимости. Тогда:

1. $\forall r \in (0, R) \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ равномерно сходится на $\overline{\mathrm{B}(z_0, r)}$
2. $f(z)$ непрерывна на $\mathrm{B}(z_0, R)$

Доказательство:

1. Так как на $\overline{\mathrm{B}(z_0, r)}$ $a_n(z - z_0)^n \leqslant a_n r^n$ и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ сходится на $\overline{\mathrm{B}(z_0, r)}$, потому что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\big((z_0 + r) - z_0\big)$ и $(z_0 + r) \in \mathrm{B}(z_0, R)$, то по признаку Вейерштрасса (теорема 27) на $\overline{\mathrm{B}(z_0, r)}$ равномерно сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.

2. $\forall z \in \mathrm{B}(z_0, R)$ возьмём $r \in \big(|z-z_0|, R\big)$, тогда в шаре $\overline{\mathrm{B}(z_0, r)}$ есть равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ (из пункта 1), и $a_n(z-z_0)^n$ непрерывна, значит по теореме Стокса-Зайдля (теорема 28) f непрерывна в точке z.

$\square$

Лемма 11 (просто):

Если $w, w_0 \in \mathbb{C}$, $\exists r \in \mathbb{R} : |w|, |w_0| \leqslant r$, тогда $\forall n \in \mathbb{N}$ $|w^n - w_0^n| \leqslant n \cdot r^{n-1} \cdot |w - w_0|$

Доказательство: Раскладываем на множители (и пользуемся неравенством треугольника):

$|w^n - w_0^n| = \big|(w-w_0)\cdot(w^{n-1} + w^{n-2}\cdot w_0 + w^{n-3}\cdot w_0^2 + \ldots + w \cdot w_0^{n-2} + w_0^{n-1})\big| \leqslant$

$\leqslant |w - w_0| \cdot \big(|w^{n-1}| + |w^{n-2}\cdot w_0| + |w^{n-3}\cdot w_0^2| + \ldots + |w \cdot w_0^{n-2}| + |w_0^{n-1}|\big) \leqslant |w-w_0|\cdot n \cdot r^{n-1}$ $\square$

Теорема 37 (о дифференцировании степенного ряда):

Пусть радиус круга сходимости степенного ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ равен R, тогда радиус круга сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(z-z_0)^{n-1}$ тоже равен R и $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(z-z_0)^{n-1}$

Доказательство:

1. Радиусы кругов сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(z-z_0)^{n-1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(z-z_0)^{n}$ одинаковые (при $z = t$ частичные суммы первого ряда сходятся к g $\Leftrightarrow$ частичные суммы второго ряда сходятся к $(t-z_0)g$), тогда по формуле Коши-Адамара (т. 35) радиус круга сходимости этого ряда равен $\big(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|\cdot n}\big)^{-1} = \big(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\big)^{-1} = R$, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$
2. Будем искать производную (комплексную) f в точке $a \in \mathrm{B}(z_0, R)$ по определению:

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{z-a} \quad \text{— подставили } f$$

Пусть $w = z - z_0$, $w_0 = a - z_0$, тогда $w - w_0 = z - a$, значит в шаре $\mathrm{B}(z_0, r)$ ($r < R$ такое, что $|w|, |w_0| \leqslant r$) по лемме 11

$$\left| a_n \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0}\right| \leqslant a_n \cdot n \cdot r^{n-1}$$

Тогда по признаку Вейерштрасса (т. 27) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \frac{w^n - w_0^n}{w-w_0}$ сходится, т.к. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot r^{n-1}$ сходится, потому что это ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(z-z_0)^{n-1}$, в который подставлено $z = z_0 + r \in \mathrm{B}(z_0, R)$, а он сходится по пункту 1 (и сходится абсолютно по т. 35). Значит по теореме 31

$$\lim_{w\to w_0}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{w^n - w_0^n}{w-w_0} = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{w\to w_0} a_n \frac{w^n - w_0^n}{w-w_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot w_0^{n-1}$$

Последнее равенство получается, раскладывая $w^n - w_0^n$ на множители как в лемме 11 и сокращая $w - w_0$. В подставляя то, чему равно w_0, получаем, что

$$f'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (a-z_0)^{n-1}$$

$\square$

Следствие 13:

1. Если радиус круга сходимости степенного ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ равен R, тогда $f \in C^\infty\big(\mathrm{B}(z_0, R)\big)$ (после дифференцирования степенного ряда получается степенной ряд, который можно опять дифференцировать)

2. Для вещественных степенных рядов $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ (т.е. $a_n, z, z_0 \in \mathbb{R}$) выполнено:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

Потому что беря производную от этого ряда, получаем $f(x)$. Слева и справа написаны первообразные функции f, они могут отличаться на константу, но в точке x_0 они обе равны нулю, значит они совпадают.

Пример: $-\frac{1}{1+x^2}=-1+x^2-x^4+x^6-\ldots$ (сумма геометрической прогрессии), тогда

$$\int_0^x -\frac{1}{1+t^2}\,dt=-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\ldots \quad \text{(под интегралом стоит производная } \operatorname{arcctg} t\text{), значит}$$

$$\operatorname{arcctg} t\Big|_0^x=\operatorname{arcctg} x-\frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\ldots$$

§ Экспонента

Определение 46: Сумму ряда $\exp(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ будем называть экспонентой

Свойства экспоненты:

1. По формуле Коши-Адамара радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ равен $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{1/n!}\right)^{-1}=+\infty$
2. $\exp(0)=1+0+0+\ldots=1$
3. $(\exp(z))'=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=\exp(z)$
4. $\overline{\exp(z)}=\overline{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\overline{z}^n}{n!}=\exp(\overline{z})$ (сопряжённая к экспоненте равна экспоненте от сопряжённого аргумента).
5. $\exp(z+w)=\exp(z)\cdot\exp(w)$. *Доказательство:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z^k}{k!}\cdot\frac{w^0}{0!}+\frac{z^{k-1}}{(k-1!)}\cdot\frac{w^1}{1!}+\ldots+\frac{z^0}{0!}\cdot\frac{w^k}{k!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\frac{z^m\cdot w^{k-m}}{m!\cdot(k-m)!}$$

   Домножая и деля на $k!$, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}C_k^m\cdot z^m\cdot w^{k-m}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+w)^k}{k!}=\exp(z+w)$$

6. $\forall z\in\mathbb{C}\quad \exp(z)\neq 0$, т.к. если $\exists z\in\mathbb{C}:\exp(z)=0$, то $\forall w\in\mathbb{C}\ \exp(w)=\exp(w-z+z)=\exp(w-z)\cdot\exp(z)=0$, но $\exp(0)=1$
7. Так как производная в нуле равна 1, то $\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1$ (из определения производной в точке 0)

Теорема 38 (метод Абеля суммирования рядов):

Пусть вещественный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$ сходится. Определим функцию $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ при $x\in(-1,1)$, тогда $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$

Доказательство: По признаку Абеля ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ равномерно сходится на промежутке $[0, 1]$, потому что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ сходится (по условию), и последовательность x^n монотонна и равномерно ограничена единицей (при $x \in [0, 1]$). И ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ состоит из непрерывных функций, равномерно сходится, значит предельная функция тоже непрерывна. Поэтому, получаем то, что нужно, делая предельный переход $\square$

Следствие 14: Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$, $c_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = C$, тогда $C = AB$

Доказательство: Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $h(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$. Эти ряды сходятся абсолютно при $|x| < 1$, значит $h(x) = f(x)g(x)$ при $|x| < 1$. По теореме можно сделать предельный переход при $x \to 0 - 1$, и получим, что $C = AB$ $\square$

§ Ряды Тейлора

Определение 47: Функция раскладывается в степенной ряд в точке x_0, если $\exists \varepsilon > 0$, $\exists c_n \in \mathbb{R}$ — последовательность : $\forall x \in \mathrm{B}(x_0, \varepsilon)$ $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$

Замечание 20: Если функция f разложима в ряд на $\mathrm{B}(x_0, \varepsilon)$, то $f \in C^{\infty}\big(\mathrm{B}(x_0, \varepsilon)\big)$ (т.к. степенной ряд можно дифференцировать бесконечно)

Теорема 39 *(Единственность разложения функции в ряд)*:

Если функция f раскладывается в ряд, то этот ряд определён однозначно

Доказательство: k-ая производная функции f:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \frac{n!}{(n-k)!} (x - x_0)^{(n-k)}$$

В точке x_0 все слагаемые будут равны нулю, кроме первого, то есть $f^{(k)}(x_0) = n! \cdot c_k$. Коэффициент c_k однозначно выражается: $c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{n!}$, значит ряд определён однозначно $\square$