Вариант 1.

Задача №1

Разложить функцию $f(x,y,z) = x^{yz}$ по формуле Тейлора в окрестности точки $(1,1,1)$ до $o\big((x-1)^2) + (y-1)^2 + (z-1)^2\big)$.

Решение:

Частные производные первого и второго порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yzx^{yz-1}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (yz)(yz-1)x^{yz-2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z(x^{yz-1} + yx^{yz-1}z\ln x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^{yz}z\ln x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^{yz}(z\ln x)^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = y(x^{yz-1} + yx^{yz-1}z\ln x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^{yz}y\ln x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = x^{yz}(y\ln x)^2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = (z\ln x + 1)x^{yz}\ln x.$$

Значения в точке $(1,1,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = 1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1,1) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1,1) = 1,$$

$$f(1,1,1) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1,1) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,1,1) = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1,1,1) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,1,1) = 0.$$

Формула тейлора в точке $(1,1,1)$ до $o\big((x-1)^2) + (y-1)^2 + (z-1)^2\big)$:

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= f(1,1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)\cdot(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)\cdot(y-1) + \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)\cdot(z-1) + \\
&+ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1,1)\cdot(x-1)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1,1)\cdot(y-1)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(1,1,1)\cdot(z-1)^2 + \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1,1)\cdot(x-1)(y-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(1,1,1)\cdot(x-1)(z-1) + \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(1,1,1)\cdot(y-1)(z-1) + o\big((x-1)^2) + (y-1)^2 + (z-1)^2\big).
\end{aligned}$$

Подставляя значения, получаем **ответ:**

$$f(x,y,z) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + (x-1)(z-1) + o\big((x-1)^2) + (y-1)^2 + (z-1)^2\big).$$

Задача №2

Найти все значения выражения $(3-4i)^{1+i}$.

Решение:

Воспользуемся формулой $z^a = e^{a(\ln|z| + i\arg z + 2\pi k i)}$, где $z, a \in \mathbb{C}$ и $k \in \mathbb{Z}$. У нас $z = 3-4i$, $a = 1+i$. Значит

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5, \qquad \arg z = -\operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

Получаем **ответ:** $(3-4i)^{1+i} = e^{(1+i)(\ln 5 + i\,\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3} + 2\pi k i)},\ k \in \mathbb{Z}$.

Задача №3

Найти

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{29}$$

.

Решение:

Обозначим

$$a = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{тогда } A = (a+b)^{29}.$$

Используем, что $(a+b)^{29} = a^{29} + 29a^{28}b + \frac{29\cdot 28}{2}a^{27}b^2 + \ldots + b^{29}$. Так как $b^2 = \mathbf{0}$, то останутся только первые два слагаемые. Значит **ответ:**

$$A = 2^{29}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 29\cdot 2^{28}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{29} & 29\cdot 2^{28} \\ 0 & 2^{29} \end{pmatrix}$$

Задача №3

Построить график функции $F(t) = \int\limits_{-1}^{0} x^2|x-t|\,dx$.

Решение:

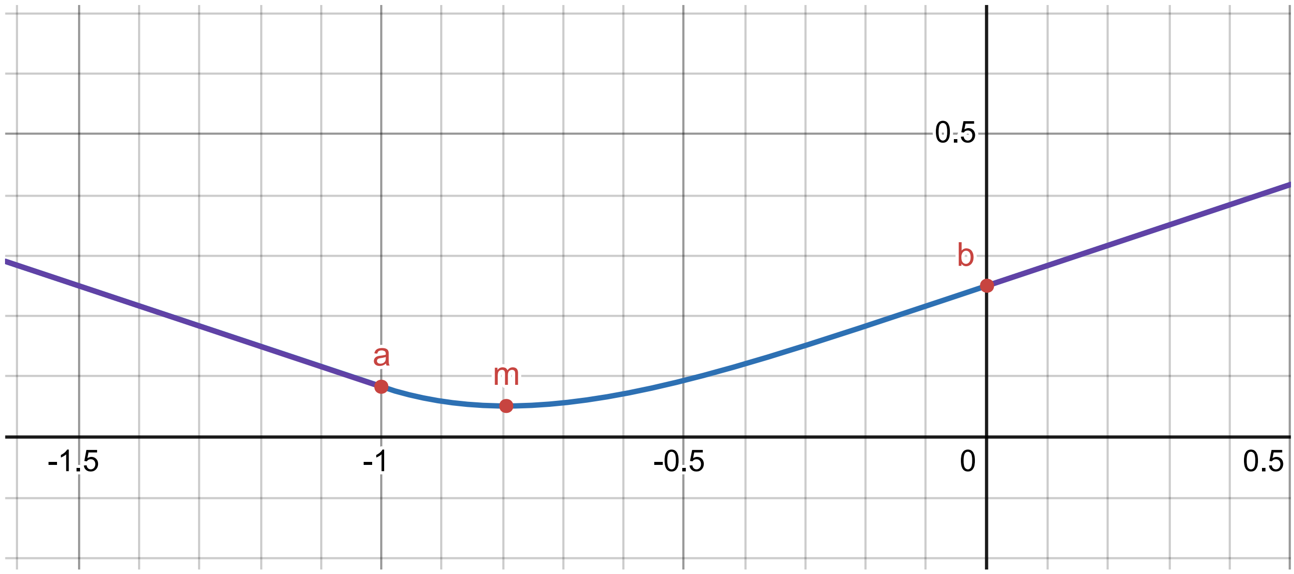
Рассмотрим 3 случая

1. $t \leqslant -1$, тогда
$$F(t) = \int_{-1}^{0} x^2(x-t)\,dx = \int_{-1}^{0}(x^3 - x^2 t)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3 t}{3}\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=0} = -\frac{1}{4} - \frac{t}{3}$$
2. $-1 < t < 0$, тогда
$$F(t) = \int_{-1}^{t} x^2(t-x)\,dx + \int_{t}^{0} x^2(x-t)\,dx = \int_{-1}^{t}(x^2 t - x^3)\,dx + \int_{t}^{0}(x^3 - x^2 t)\,dx =$$
$$= \left(\frac{x^3 t}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=t} + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3 t}{3}\right)\Bigg|_{x=t}^{x=0} = \frac{t^4}{3} - \frac{t^4}{4} - \left(-\frac{t}{3} - \frac{1}{4}\right) + 0 - \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^4}{3}\right) = \frac{t^4}{6} + \frac{t}{3} + \frac{1}{4}$$
3. $t \geqslant 0$, тогда
$$F(t) = \int_{-1}^{0} x^2(t-x)\,dx = \int_{-1}^{0}(x^2 t - x^3)\,dx = \left(\frac{x^3 t}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=0} = \frac{t}{3} + \frac{1}{4}$$

Таким образом

$$F(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3}t - \dfrac{1}{4}, & \text{при } t \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{6}t^4 + \dfrac{1}{3}t + \dfrac{1}{4}, & \text{при } -1 < t < 0 \\ \dfrac{1}{3}t + \dfrac{1}{4}, & \text{при } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Можно вычислить, что $a = F(-1) = \frac{1}{12}$, $b = F(0) = \frac{1}{4}$. Найдём точку минимума функции $g(t) = \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{3}t + \frac{1}{4}$: $g'(t) = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(2t^3+1)$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. И $m = F\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{12}\cdot\left(2^{-\frac{1}{3}} - 2^{\frac{5}{3}} + 3\right)$. Поэтому график функции F выглядит так:


0.5
b
a
m
-1.5
-1
-0.5
0
0.5