Введение в компьютерную графику. Занятие 1

Кедров А.А.

Математическое моделирование (на английском языке)

18 февраля 2024 г.

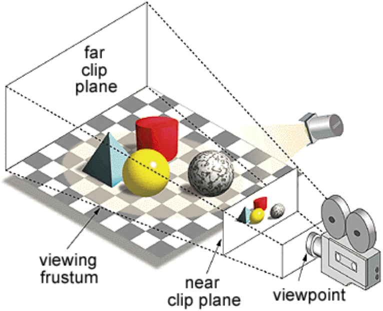
Содержание

3D-рендеринг

Определение

Рендеринг — это процесесс создания изображения на основе имеющейся модели.

Под 3D-рендерингом обычно подразумевают процесс проецирования 3-х мерной модели на 2-х мерное изображение.



Разновидности 3D-рендеринга

Основные алгоритмы 3D-рендеринга:

- Растреризация (rasterization)
- Трассировка лучей (ray-tracing)

Виды рендеринга по типу используемых устройств:

- Software (все расчёты идут на CPU)
- Hardware/Accelerated (используют GPU/ускорители вычислений)

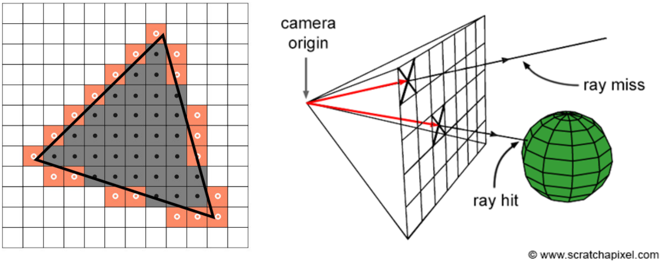


Рис.: Растреризация треугальника (слева). Трассировка лучей из камеры наблюдения (справа)

Базовые линейные преобразования объектами

- Вращение

$$M_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Масштабирование

$$M(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix}$$

- Перемещение

$$M(\vec{b}) = ?$$

Проблема

Нет линейного преобразования M, такого что $M(\vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$ для любого $\vec{a}$

Аффинное пространство

Определение

Аффинное пространство — это *множество точек* A, *векторное пространство* $\vec{A}$ и *действие аддитивной группы* $\vec{A}$ над множеством A

$$A \times \vec{A} \to A$$

Со следующими свойствами:

- Идентичность
$$a + \vec{0} = a$$
- Ассоциативность
$$(a + \vec{v}) + \vec{w} = a + (\vec{v} + \vec{w})$$
- Можно определить операцию вычитания
$$\forall a, b \ \exists! \, \vec{v} = b - a : a + \vec{v} = b$$

Аффинные преобразования

Аффинные преобразования над аффинным пространством можно представить следующим образом:

$$f(x) = Ax + \vec{b}$$

где A — линейное преобразование над точкой x
В компьютерной графике используется представление через дополненные матрицы.

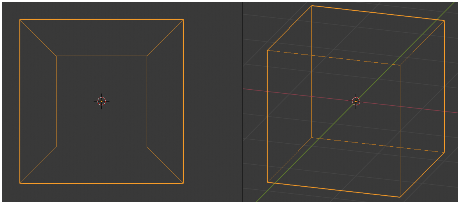
$$x \to \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad f(x) = \mathbf{M} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & b_1 \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & b_2 \\ A_{11} & A_{12} & A_{13} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad f(x) \to \mathbf{MX}$$

Замечание

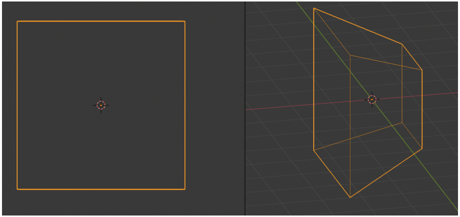
Данное представление удобно тем, что может быть использовано и для векторов. $\vec{x} \to \vec{\mathbf{X}} = [x_1, x_2, x_3, 0]^T$. Тогда $\mathbf{M}\vec{\mathbf{X}} \leftarrow A\vec{x}$

Проекции разных объектов в перспективе

- Куб. Грани одинаковых размеров выглядят по-разному в перспективе



- Пирамида. Грани разных размеров слиплись в наблюдаемой проекции



Гомогенные координаты

Пусть X — множество точек, $a = (a_1, a_2, a_3) \in X \setminus \{0\}$. Введем класс эквивалентности L_a:

$$L_a = \{x \in X \setminus \{0\} : x = \lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3),\ \lambda \in \mathcal{R}\}$$

Определение

В *гомогенных коордианатах* точки, принадлежащие одному и тому же классу эквивалентности L_a считаются идентичными.

Замечание

Иногда гомогнные координаты называют *rational coordinates*. Потому что каждая точка в гомогенных определяется не своими координатами, а пропорциями.

Гомогенные координаты в компьютерной графике

Гомогенные координаты в компьютерной графике реализуются через 4-ю компоненту вектора:

$$p_1 = (x, y, z, w) \sim p_0 = (x/w, y/w, z/w, 1)$$

Данное представление позволяет применять как аффинные преобразования, так и преобразования перспективы, используя матричные операции $M \in \mathcal{R}^{4\times 4}$.

Замечание

Если $w = 0$, то данный объект принято считать за вектор. Поэтому наблюдаем на экране мы только точки, а не вектора!