

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
“САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ”

ФАКУЛЬТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РОБОТОТЕХНИКИ

### **Курсовой проект**

по дисциплине "Теория автоматического управления"

Управление парным маятником на тележке

Выполнил:

Студент группы R33351

Ларионов Александр Юрьевич

Преподаватель:

Перегудин Алексей Алексеевич

Санкт-Петербург, 2023

# Содержание

<b>1</b>	<b>Глава 1: Построение математической модели объекта</b>	<b>4</b>
1.1	Вывод уравнений . . . . .	4
1.2	Точки равновесия . . . . .	9
1.3	Линеаризация . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Глава 2: Анализ математической модели</b>	<b>11</b>
2.1	Анализ матриц . . . . .	11
2.2	Передаточные функции . . . . .	12
2.3	Линейное моделирование . . . . .	13
2.4	Нелинейное моделирование . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Глава 3: Стабилизация объекта: Модальное управление</b>	<b>19</b>
3.1	Синтез регулятора по состоянию . . . . .	19
3.2	Исследование регулятора по состоянию . . . . .	22
3.3	Синтез наблюдателя . . . . .	24
3.4	Исследование наблюдателя . . . . .	26
3.5	Синтез регулятора по выходу . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Глава 4: Стабилизация объекта: LQR и фильтр Калмана</b>	<b>30</b>
4.1	Линейно-квадратичный регулятор . . . . .	30
4.2	Линейно-квадратичный наблюдатель . . . . .	31
4.3	LQG для линейной модели . . . . .	32
4.4	LQG для нелинейной модели . . . . .	34

<b>5</b>	<b>Глава 5: Слежение и компенсация</b>	<b>36</b>
5.1	Компенсация . . . . .	36
5.2	Слежение . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Вывод</b>	<b>39</b>

# 1 Глава 1: Построение математической модели объекта

## 1.1 Вывод уравнений

Построим математическую модель парного маятника на тележке, представленного на рисунке 1.

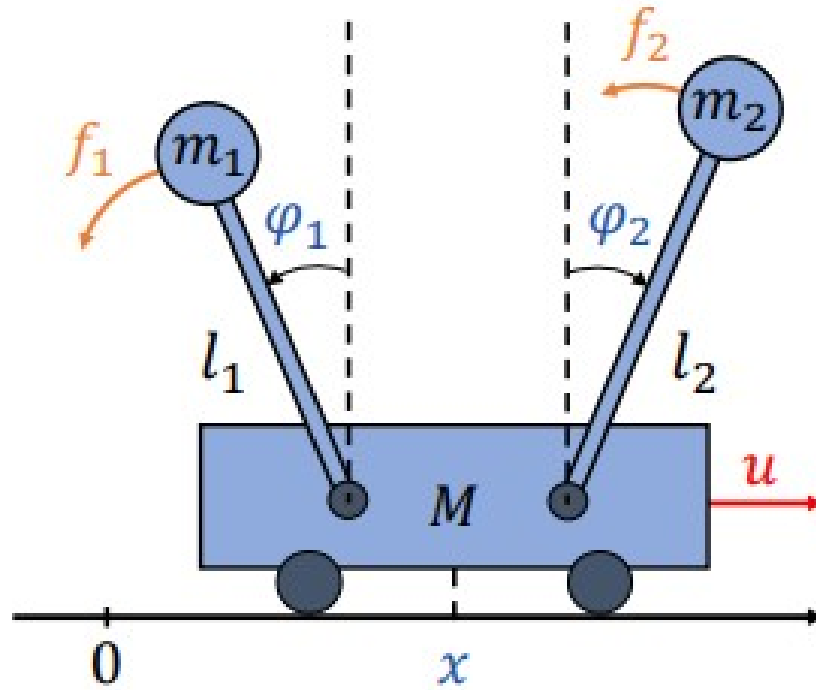


Рис. 1: Парный маятник на тележке

При построении математической модели будем считать, что трение отсутствует, а масса маятников полностью сосредоточена на их свободных концах. Математическая модель будет представлена как система уравнений, включающая в себя шесть (нелинейных) дифференциальных уравнений первого порядка и три алгебраических уравнения для выходных переменных, и иметь вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(x_1, \dots, x_6, f_1, f_2, u) \\ \dots \\ \dot{x}_6 = F_6(x_1, \dots, x_6, f_1, f_2, u) \\ y_1 = G_1(x_1, \dots, x_6) \\ y_2 = G_2(x_1, \dots, x_6) \\ y_3 = G_3(x_1, \dots, x_6) \end{cases}$$

Выберем постоянные параметры системы:

1. Масса тележки  $M = 5$  кг
2. Масса первого груза  $m_1 = 0.3$  кг
3. Длина первого маятника  $l_1 = 0.5$  м
4. Масса второго груза  $m_2 = 0.5$  кг
5. Длина второго маятника  $l_2 = 0.3$  м
6. Ускорение свободного падения  $g = 9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

Переменные состояния системы:

1. Управляющее воздействие (горизонтальная сила)  $u$
2. Линейная координата тележки  $x_1 = x$
3. Скорость тележки  $x_2 = \dot{x}$
4. Угол отклонения первого маятника  $x_3 = \phi_1$
5. Угловая скорость первого маятника  $x_4 = \dot{\phi}_1$
6. Угол отклонения второго маятника  $x_5 = \phi_2$
7. Угловая скорость второго маятника  $x_6 = \dot{\phi}_2$
8.  $f_1, f_2$  вращающие моменты, действующие на каждый маятник

Измеряемые величины:

1. Положение тележки  $y_1 = x$
2. Угол отклонения  $y_2 = \phi_1$
3. Угол отклонения  $y_3 = \phi_2$

**Тут считаем уравнения** Для описания системы используем уравнение Лагранжа-Эйлера. Запишем полную кинетическую и потенциальную энергию системы.

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_1(l_1^2\dot{\phi}_1^2 - 2l_1\dot{\phi}_1\dot{x}\cos\phi_1) + \frac{1}{2}m_2(l_2^2\dot{\phi}_2^2 - 2l_2\dot{\phi}_2\dot{x}\cos\phi_2)$$

Потенциальная энергия:

$$U = m_1gl_1\cos\phi_1 + m_2gl_2\cos\phi_2$$

Функция Лагранжа:

$$L = T - U$$

Используем уравнение Лагранжа-Эйлера. Запишем уравнение для тележки:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = u$$

В результате получаем уравнение:

$$(M + m_1 + m_2)\ddot{x} - (m_1\ddot{\phi}_1l_1\cos\phi_1 - m_1\dot{\phi}_1^2l_1\sin\phi_1) - (m_2\ddot{\phi}_2l_2\cos\phi_2 - m_2\dot{\phi}_2^2l_2\sin\phi_2) = u$$

Упростим выражение:

$$\ddot{x} = \frac{m_1\ddot{\phi}_1l_1\cos\phi_1}{(M + m_1 + m_2)} - \frac{m_1\dot{\phi}_1^2l_1\sin\phi_1}{(M + m_1 + m_2)} + \frac{m_2\ddot{\phi}_2l_2\cos\phi_2}{(M + m_1 + m_2)} - \frac{m_2\dot{\phi}_2^2l_2\sin\phi_2}{(M + m_1 + m_2)} + \frac{u}{(M + m_1 + m_2)}$$

Запишем уравнение для первого маятника:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \phi_1} = f_1$$

В результате получаем уравнение:

$$m_1l_1^2\ddot{\phi}_1 - m_1l_1\ddot{x}\cos\phi_1 - m_1gl_1\sin\phi_1 = f_1$$

Упростим выражение:

$$\ddot{\phi}_1 = \frac{\ddot{x} \cos \phi_1}{l_1} + \frac{g \sin \phi_1}{l_1} + \frac{f_1}{m_1 l_1^2}$$

Запишем уравнение для второго маятника:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \phi_2} = f_2$$

В результате получаем уравнение:

$$m_2 l_2^2 \ddot{\phi}_2 - m_2 l_2 \ddot{x} \cos \phi_2 - m_2 g l_2 \sin \phi_2 = f_2$$

Упростим выражение:

$$\ddot{\phi}_2 = \frac{\ddot{x} \cos \phi_2}{l_2} + \frac{g \sin \phi_2}{l_2} + \frac{f_2}{m_2 l_2^2}$$

Подставим  $\ddot{\phi}_1, \ddot{\phi}_2$  в  $\ddot{x}$ :

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & \frac{m_1 l_1 \cos \phi_1}{(M + m_1 + m_2)} \cdot \left( \frac{\ddot{x} \cos \phi_1}{l_1} + \frac{g \sin \phi_1}{l_1} + \frac{f_1}{m_1 l_1^2} \right) - \frac{m_1 \dot{\phi}_1^2 l_1 \sin \phi_1}{(M + m_1 + m_2)} \\ & + \frac{m_2 l_2 \cos \phi_2}{(M + m_1 + m_2)} \cdot \left( \frac{\ddot{x} \cos \phi_2}{l_2} + \frac{g \sin \phi_2}{l_2} + \frac{f_2}{m_2 l_2^2} \right) \\ & - \frac{m_2 \dot{\phi}_2^2 l_2 \sin \phi_2}{(M + m_1 + m_2)} + \frac{u}{(M + m_1 + m_2)} \end{aligned}$$

Упростим: перенесем  $x$  с точками влево

$$\begin{aligned} & \ddot{x} \left( 1 - \frac{m_1 \cos \phi_1^2}{(M + m_1 + m_2)} - \frac{m_2 \cos \phi_2^2}{(M + m_1 + m_2)} \right) \\ & \ddot{x} \frac{(M + m_1 + m_2) - m_1 \cos \phi_1^2 - m_2 \cos \phi_2^2}{(M + m_1 + m_2)} \end{aligned}$$

Умножим обе части на  $\frac{(M+m_1+m_2)}{(M+m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)}$  сократив и получим уравне-

ние для  $\ddot{x}$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 = \ddot{x} = & \frac{m_1 g \cos \phi_1 \sin \phi_1}{(M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} + \frac{\cos \phi_1 f_1}{l_1 \cdot (M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} - \\ & - \frac{m_1 \dot{\phi}_1^2 l_1 \sin \phi_1}{(M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} + \frac{m_2 g \cos \phi_2 \sin \phi_2}{(M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} + \\ & + \frac{\cos \phi_2 f_2}{l_2 \cdot (M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} - \frac{m_2 \dot{\phi}_2^2 l_2 \sin \phi_2}{(M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} + \\ & + \frac{u}{(M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)}\end{aligned}$$

Запишем уравнение для  $\ddot{\phi}_1$ ,

$$\begin{aligned}\dot{x}_4 = \ddot{\phi}_1 = & \frac{\cos \phi_1}{l_1} \cdot \left( \frac{m_1 g \cos \phi_1 \sin \phi_1}{(M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} + \right. \\ & + \frac{\cos \phi_1 f_1}{l_1 \cdot (M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} - \\ & - \frac{m_1 \dot{\phi}_1^2 l_1 \sin \phi_1}{(M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} + \frac{m_2 g \cos \phi_2 \sin \phi_2}{(M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} + \\ & + \frac{\cos \phi_2 f_2}{l_2 \cdot (M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} - \frac{m_2 \dot{\phi}_2^2 l_2 \sin \phi_2}{(M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} + \\ & \left. + \frac{u}{(M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} \right) + \frac{g \sin \phi_1}{l_1} + \frac{f_1}{m_1 l_1^2}\end{aligned}$$

Запишем теперь уравнение для  $\ddot{\phi}_2$

$$\begin{aligned}\dot{x}_6 = \ddot{\phi}_2 = & \frac{\cos \phi_2}{l_2} \cdot \left( \frac{m_1 g \cos \phi_1 \sin \phi_1}{(M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} + \right. \\ & + \frac{\cos \phi_1 f_1}{l_1 \cdot (M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} - \\ & - \frac{m_1 \dot{\phi}_1^2 l_1 \sin \phi_1}{(M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} + \frac{m_2 g \cos \phi_2 \sin \phi_2}{(M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} + \\ & + \frac{\cos \phi_2 f_2}{l_2 \cdot (M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} - \frac{m_2 \dot{\phi}_2^2 l_2 \sin \phi_2}{(M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} + \\ & \left. + \frac{u}{(M + m_1 \sin \phi_1 + m_2 \sin \phi_2)} \right) + \frac{g \sin \phi_2}{l_2} + \frac{f_2}{m_2 l_2^2}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_5 &= x_6 \\
y_1 &= x_1 \\
y_2 &= x_3 \\
y_3 &= x_5
\end{aligned}$$

## 1.2 Точки равновесия

Найдем точки равновесия системы. Для этого приравниваем к нулю уравнения системы и решим. Решив уравнения, запишем точки равновесия:

$$\begin{bmatrix} x_1 = x \\ x_2 = v \\ x_3 = \phi_1 \\ x_4 = \omega_1 \\ x_5 = \phi_2 \\ x_6 = \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a, a \in Z \\ 0 \\ \pi k, k \in R \\ 0 \\ \pi n, n \in R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Можно еще так подумать. Если наша тележка застыла в равновесия - скорость тележки и угловые скорости маятников равны 0. Тогда тележка покоится в любой точке на координатной прямой, а маятники застыли у верхнего положения с углом отклонения  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  относительно вертикали. Однако так как у маятника два положения равновесия - у верхнего и нижнего - тогда и его точки равновесия описываются как  $\phi = \pi k, k \in R$ . В данной работе рассмотрим маятник в равновесии у верхнего положения. У тележки точки описываются  $x = a, a \in R$  - она просто где-то молча стоит.

## 1.3 Линеаризация

Линеаризуем систему в окрестности нуля около верхнего положения. Так как углы отклонения очень малы, то для линеаризации мы можем произвести замену  $\sin \phi = \phi, \cos \phi = 1, \phi^2 = 0$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= \ddot{x} = \frac{m_1 g \phi_1}{M} + \frac{f_1}{l_1 M} + \frac{f_2}{l_2 M} + \frac{m_2 g \phi_2}{M} + \frac{u}{M} \\
\dot{x}_4 &= \ddot{\phi}_1 = \frac{f_1}{m_1 l_1^2} + \frac{m_1 g \phi_1}{M l_1} + \frac{f_1}{l_1^2 M} + \frac{f_2}{l_1 l_2 M} + \frac{m_2 g \phi_2}{M l_1} + \frac{u}{M l_1} + \frac{g \phi_1}{l_1} \\
\dot{x}_6 &= \ddot{\phi}_2 = \frac{f_2}{m_1 l_2^2} + \frac{m_1 g \phi_1}{M l_2} + \frac{f_1}{l_1 l_2 M} + \frac{f_2}{l_2^2 M} + \frac{m_2 g \phi_2}{M l_2} + \frac{u}{M l_2} + \frac{g \phi_2}{l_2}
\end{aligned}$$

Перепишем линеаризованную систему в матричном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 g}{M} & 0 & \frac{m_2 g}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(m_1 + M)g}{M l_1} & 0 & \frac{m_2 g}{M l_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 g}{M l_2} & 0 & \frac{(M + m_2)g}{M l_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi_1 \\ \dot{\phi}_1 \\ \phi_2 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{M l_1} \\ 0 \\ \frac{1}{M l_2} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M l_1} & \frac{1}{M l_2} \\ 0 & 0 \\ \frac{M + m_1}{M m_1 l_1^2} & \frac{1}{M l_1 l_2} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M l_1 l_2} & \frac{M + m_2}{M m_2 l_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_2 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

## 2 Глава 2: Анализ математической модели

### 2.1 Анализ матриц

В Матлабе найдём собственные числа и вектора матрицы A:

$$Eigs = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4.53 \\ -6.015 \\ 4.53 \\ 6.015 \end{bmatrix}$$

$$Vectors = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0.0048 & 0.0047 & -0.0048 & 0.0047 \\ 0 & 0 & -0.0219 & -0.0285 & -0.0219 & 0.0285 \\ 0 & 0 & 0.2138 & 0.0207 & -0.2138 & 0.0207 \\ 0 & 0 & -0.9684 & -0.1244 & -0.9684 & 0.1244 \\ 0 & 0 & -0.0272 & 0.1626 & 0.0272 & 0.1626 \\ 0 & 0 & 0.1232 & -0.9782 & 0.1232 & 0.9782 \end{bmatrix}$$

У данной системы лишь 2 отрицательных корня, а 2 положительных корня и 2 кратных нуля делают нашу систему совершенно неустойчивой. Им соответствуют моды:  $1, t, e^{\pm 4.53t}, e^{\pm 6.015t}$ . Собственные вектора показывают соотношения компонент при устойчивой и неустойчивых модах. и как они зависят. Например, первые вектора отражают, что тележка может стоять где угодно, и от этого характер движения не меняется. Другие, например для устойчивых мод, показывают, что при отклонении в одну из сторону, маятник двигается противодействуя ей, чтобы выровняться. Может не всё так плохо. Проверим на управляемость и наблюдаемость по критерию Калмана:

$$rank_1 = (B \ A \cdot B \ \dots \ A^5 \cdot B) = 6$$

$$rank_2 = \begin{pmatrix} C \\ C \cdot A \\ \vdots \\ C \cdot A^5 \end{pmatrix} = 6$$

Ура, система полностью управляема и наблюдаема, а значит мы сможем задать любой спектр собственных чисел для системы (он рано радовался)

## 2.2 Передаточные функции

Найдём матрицу передаточных функций:

$$W = \begin{pmatrix} W_{u \rightarrow y_1(s)} & W_{f_1 \rightarrow y_1(s)} & W_{f_2 \rightarrow y_1(s)} \\ W_{u \rightarrow y_2(s)} & W_{f_1 \rightarrow y_2(s)} & W_{f_2 \rightarrow y_2(s)} \\ W_{u \rightarrow y_3(s)} & W_{f_1 \rightarrow y_3(s)} & W_{f_2 \rightarrow y_3(s)} \end{pmatrix}$$

Воспользуемся формулой  $C(sI - A)B' = C(sI - A)[B \ D]$ :

$$W = \begin{pmatrix} \frac{5(15s^4 - 784s^2 + 9604)}{s^2(375s^4 - 21266s^2 + 278516)} & \frac{50(3s^2 - 98)}{375s^4 - 21266s^2 + 278516} & \frac{50(5s^2 - 98)}{375s^4 - 21266s^2 + 278516} \\ \frac{50(3s^2 - 98)}{375s^4 - 21266s^2 + 278516} & \frac{100(159s^2 - 5684)}{3 \cdot 375s^4 - 21266s^2 + 278516} & \frac{500s^2}{375s^4 - 21266s^2 + 278516} \\ \frac{50(5s^2 - 98)}{375s^4 - 21266s^2 + 278516} & \frac{500s^2}{375s^4 - 21266s^2 + 278516} & \frac{100(275s^2 - 5684)}{3 \cdot 375s^4 - 21266s^2 + 278516} \end{pmatrix}$$

Динамический порядок:

$$\begin{array}{lll} W_{u \rightarrow y_1(s)} = 6 & W_{f_1 \rightarrow y_1(s)} = 4 & W_{f_2 \rightarrow y_1(s)} = 4 \\ W_{u \rightarrow y_2(s)} = 4 & W_{f_1 \rightarrow y_2(s)} = 4 & W_{f_2 \rightarrow y_2(s)} = 4 \\ W_{u \rightarrow y_3(s)} = 4 & W_{f_1 \rightarrow y_3(s)} = 4 & W_{f_2 \rightarrow y_3(s)} = 4 \end{array}$$

Относительный динамический порядок:

$$\begin{array}{lll} W_{u \rightarrow y_1(s)} = 2 & W_{f_1 \rightarrow y_1(s)} = 2 & W_{f_2 \rightarrow y_1(s)} = 2 \\ W_{u \rightarrow y_2(s)} = 2 & W_{f_1 \rightarrow y_2(s)} = 2 & W_{f_2 \rightarrow y_2(s)} = 2 \\ W_{u \rightarrow y_3(s)} = 2 & W_{f_1 \rightarrow y_3(s)} = 2 & W_{f_2 \rightarrow y_3(s)} = 2 \end{array}$$

Нули системы:

$$\begin{array}{lll} W_{u \rightarrow y_1(s)} = \pm \frac{7}{\sqrt{15}}, \pm \frac{7}{\sqrt{10}} & W_{f_1 \rightarrow y_1(s)} = \pm \frac{7}{\sqrt{15}} & W_{f_2 \rightarrow y_1(s)} = \pm \frac{7}{\sqrt{10}} \\ W_{u \rightarrow y_2(s)} = \pm \frac{7}{\sqrt{15}} & W_{f_1 \rightarrow y_2(s)} = \pm \frac{14\sqrt{7}}{\sqrt{345}} & W_{f_2 \rightarrow y_2(s)} = 0 \\ W_{u \rightarrow y_3(s)} = \pm \frac{7}{\sqrt{10}} & W_{f_1 \rightarrow y_3(s)} = 0 & W_{f_2 \rightarrow y_3(s)} = \pm \frac{7\sqrt{14}}{5\sqrt{5}} \end{array}$$

Полюса системы:

$$W_{u \rightarrow y_1(s)} = 0, \pm \frac{7\sqrt{119 - \sqrt{721}}}{20\sqrt{3}}, \pm \frac{7\sqrt{119 + \sqrt{721}}}{20\sqrt{3}}$$

У остальных такие же полюса как и у первой передаточной, кроме нулей, так как у всех знаменатель  $3000 \cdot s^4 - 29155 \cdot s^2 + 67228$

Полюса так-же отражают неустойчивость системы и совпадают с значениями матрицы  $A$ .

## 2.3 Линейное моделирование

Выполним моделирование свободного движения линеаризованной системы при различных начальных условиях, не сильно отличающихся от нуля. Затем построим графики координат вектора состояния. Зададим так, что у тележки есть небольшая начальная скорость и малый угол отклонения

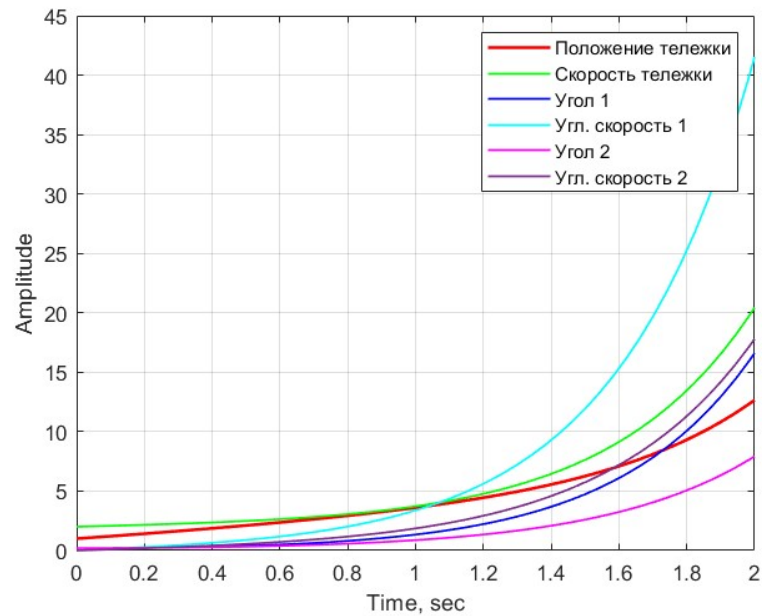


Рис. 2: Линейное моделирование при  $x_0 = [1, 2, 0.2, 0, 0.2, 0]^T$

Зададим так, что у тележки нулевая начальная скорость и малый, но чуть больше, угол отклонения

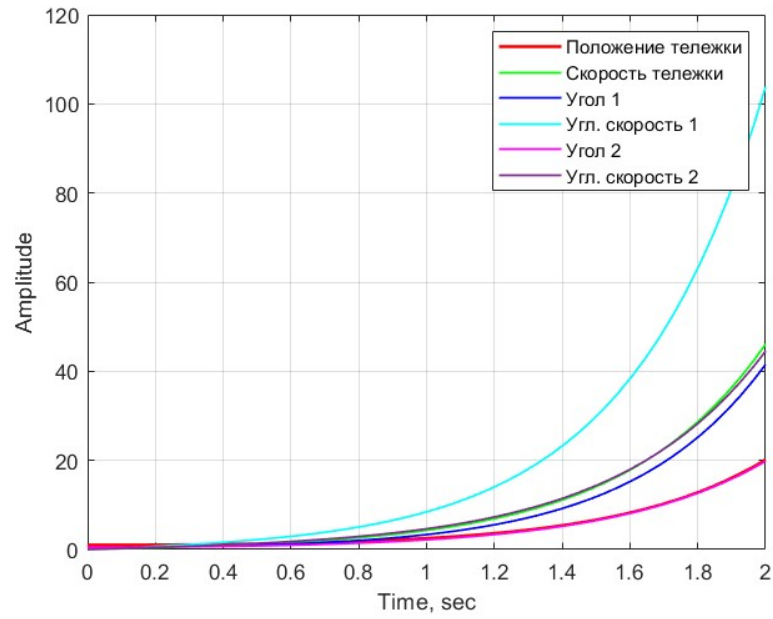


Рис. 3: Линейное моделирование при  $x_0 = [1, 0, 0.5, 0, 0.5, 0]^T$

Зададим так, что у тележки гораздо побольше скорость и малый угол отклонения

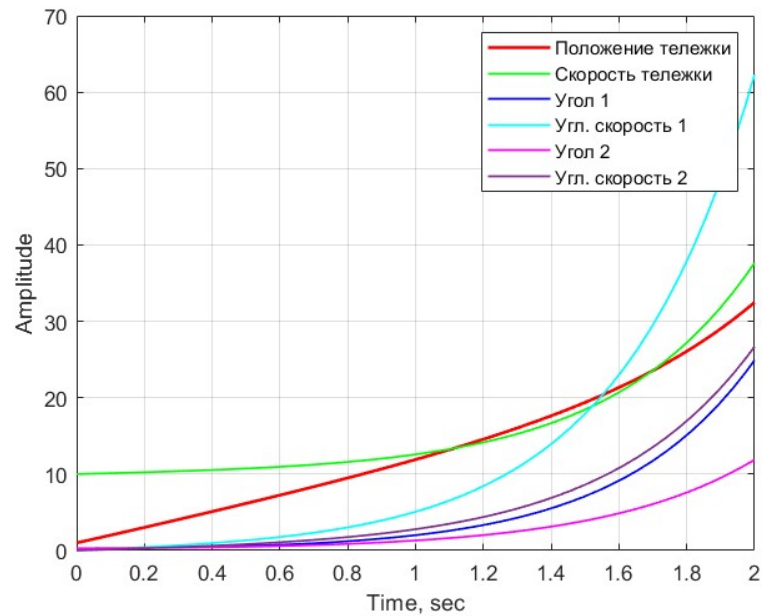


Рис. 4: Линейное моделирование при  $x_0 = [1, 10, 0.3, 0, 0.3, 0]^T$

Зададим так, что у тележки средненькая скорость и малый угол отклонения

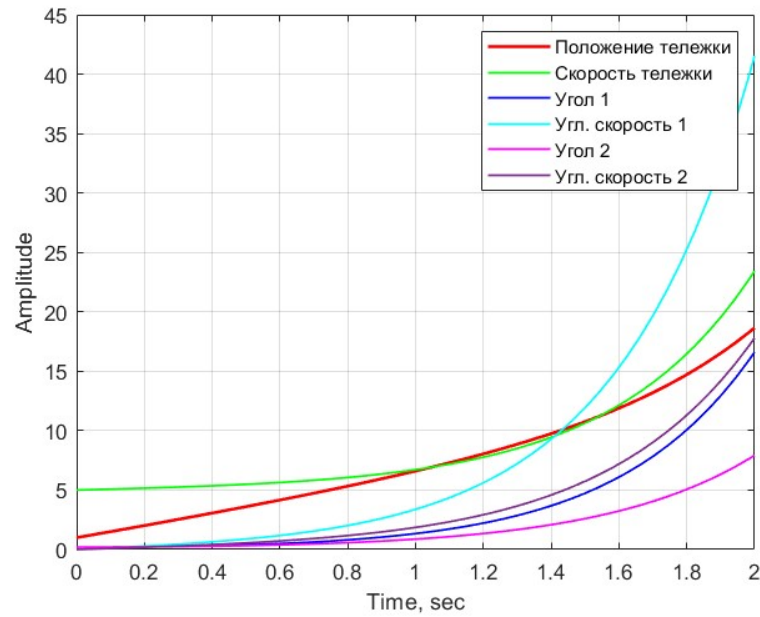


Рис. 5: Линейное моделирование при  $x_0 = [1, 5, 0.2, 0, 0.2, 0]^T$

Анализ: В общем система конечно неустойчива и все ее компоненты начинают конкретно улетать спустя примерно секунду. Но можно заметить, что улетают они по разному и сильнее всего в том случае, когда мы не указывали скорость тележке, но задавали угол отклонения. Впринципе, система чуть дольше удерживается, если маятник как будто едет в ту сторону, куда отклонены и они не так быстро падают

## 2.4 Нелинейное моделирование

Выполним моделирование свободного движения нелинейной модели системы при различных начальных условиях, не сильно отличающихся от нуля (таких же как и для линейной). Затем построим графики координат вектора состояния. Зададим так, что у тележки есть небольшая начальная скорость и малый угол отклонения

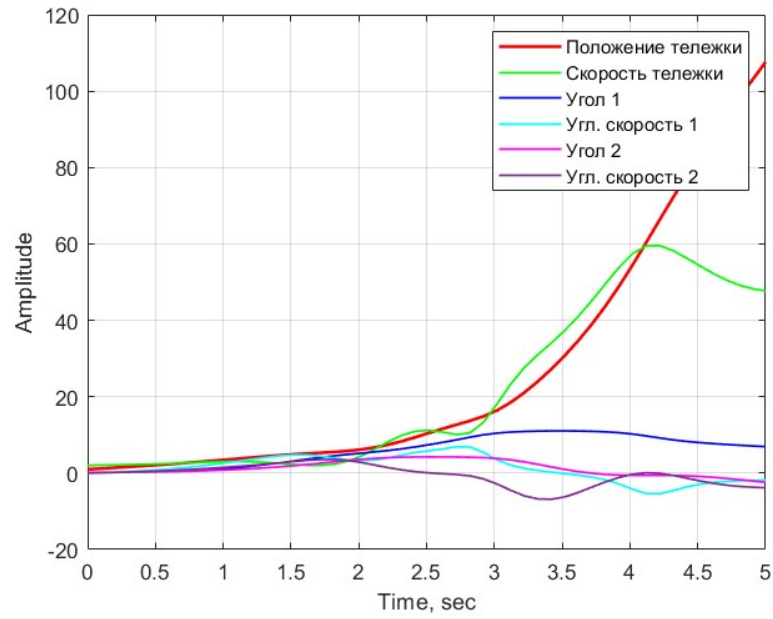


Рис. 6: Линейное моделирование при  $x_0 = [1, 2, 0.2, 0, 0.2, 0]^T$

Зададим так, что у тележки нулевая начальная скорость и малый, но чуть больше, угол отклонения

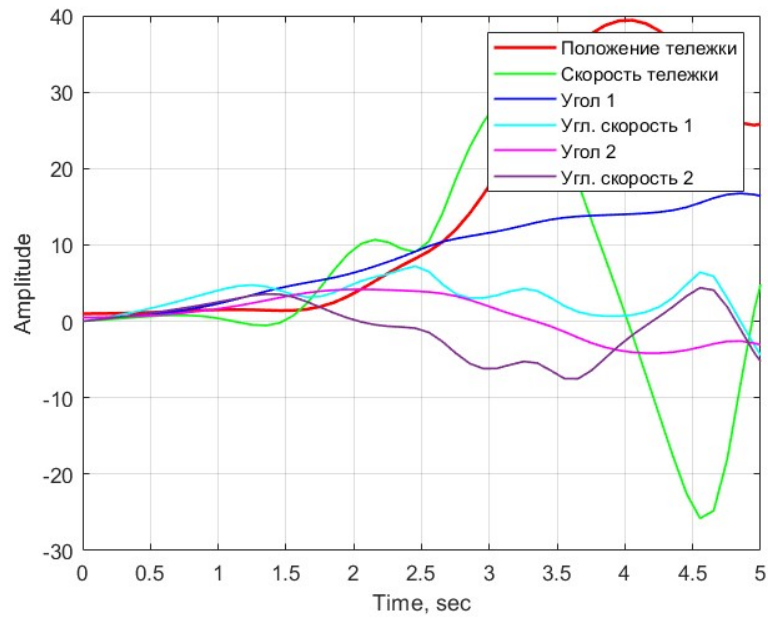


Рис. 7: Линейное моделирование при  $x_0 = [1, 0, 0.5, 0, 0.5, 0]^T$

Зададим так, что у тележки гораздо побольше скорость и малый угол отклонения



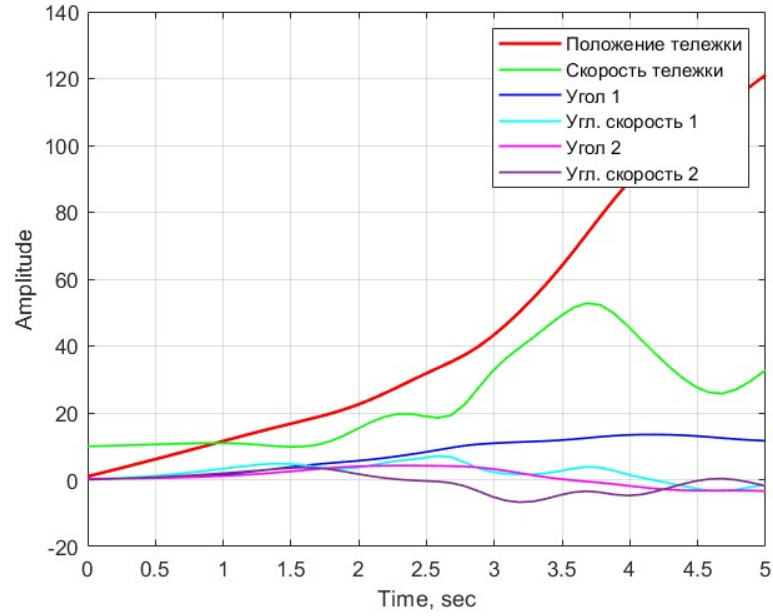


Рис. 8: Линейное моделирование при  $x_0 = [1, 10, 0.3, 0, 0.3, 0]^T$

Зададим так, что у тележки средненькая скорость и малый угол отклонения

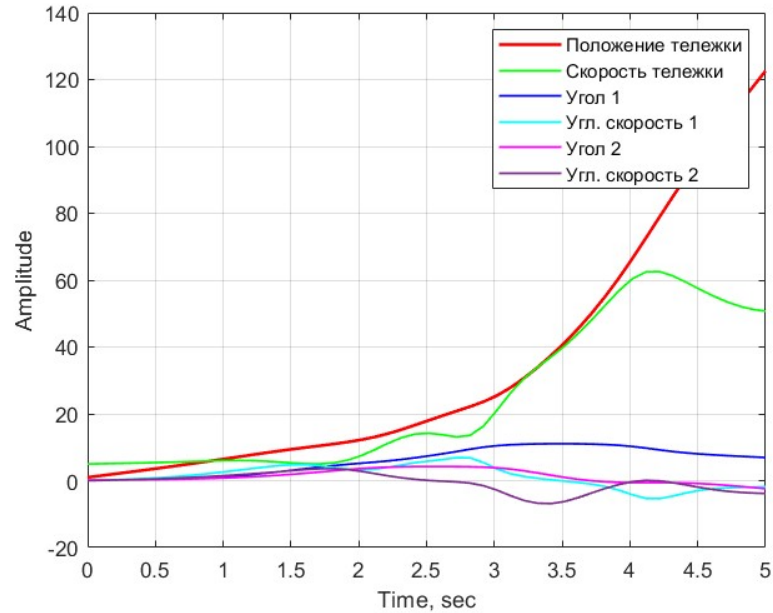


Рис. 9: Линейное моделирование при  $x_0 = [1, 5, 0.2, 0, 0.2, 0]^T$

Анализ: Здесь, как и в случае с линейной системой, но более наглядно, мы видим зависимость поведения состояний системы от заданных условий. хуже всего система себя чувствует, когда мы не задаем начальную скорость. Тележка как-бы никак не помогает маятникам стоять и в случае 2 маятник

практически сразу, через секунду, проявляет неустойчивость. Когда мы задавали скорость, система подольше смогла удержать угол.



Рассмотрим различные начальные условия.  
Начальные условия при которых система устойчива, а значит регулятор работает:

$$x_{0_1} = [1, 2, 0.1, 0, 0.1, 0]^T$$

$$x_{0_2} = [1, 2, 0.3, 0, 0.3, 0]^T$$

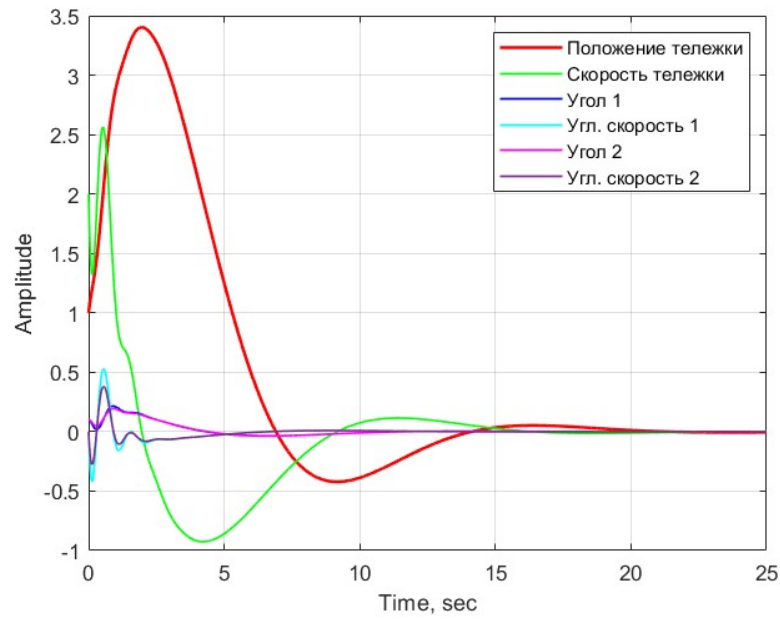


Рис. 11: Нелинейное моделирование при  $x_{0_1} = [1, 2, 0.1, 0, 0.1, 0]^T$

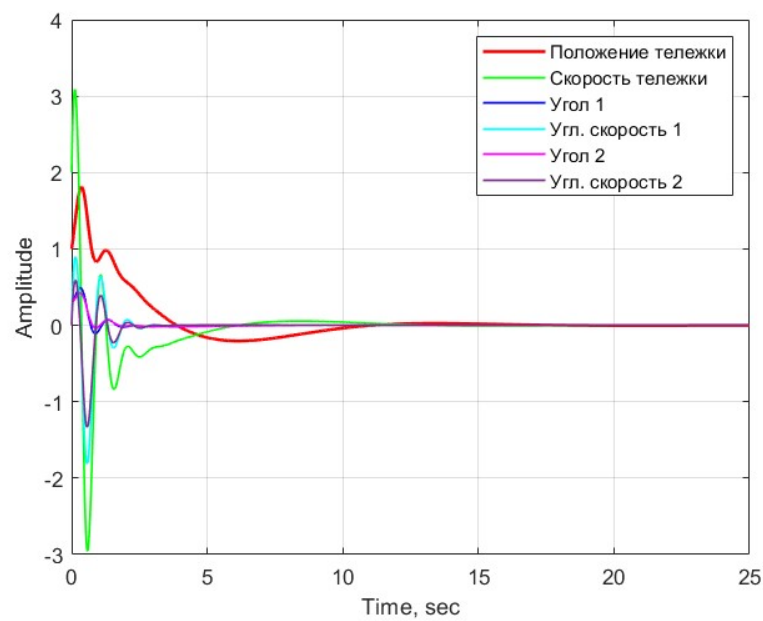


Рис. 12: Нелинейное моделирование при  $x_{0_2} = [1, 2, 0.3, 0, 0.3, 0]^T$

Начальные условия при которых система неустойчива, а значит регулятор уже не справляется:

$$x_{0_3} = [1, 2, 0.35, 0, 0.35, 0]^T$$

$$x_{0_4} = [1, 7, 0.1, 0, 0.1, 0]^T$$

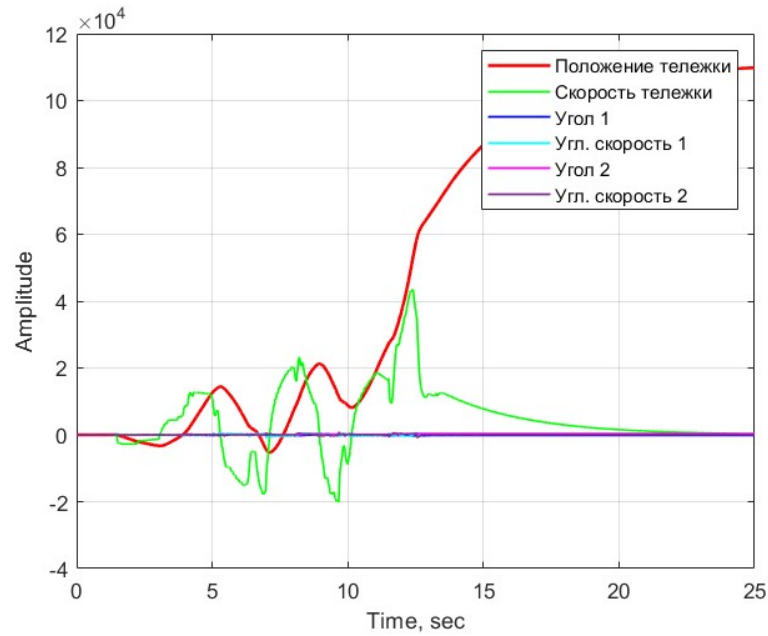


Рис. 13: Нелинейное моделирование при  $x_{0_3} = [1, 2, 0.35, 0, 0.35, 0]^T$

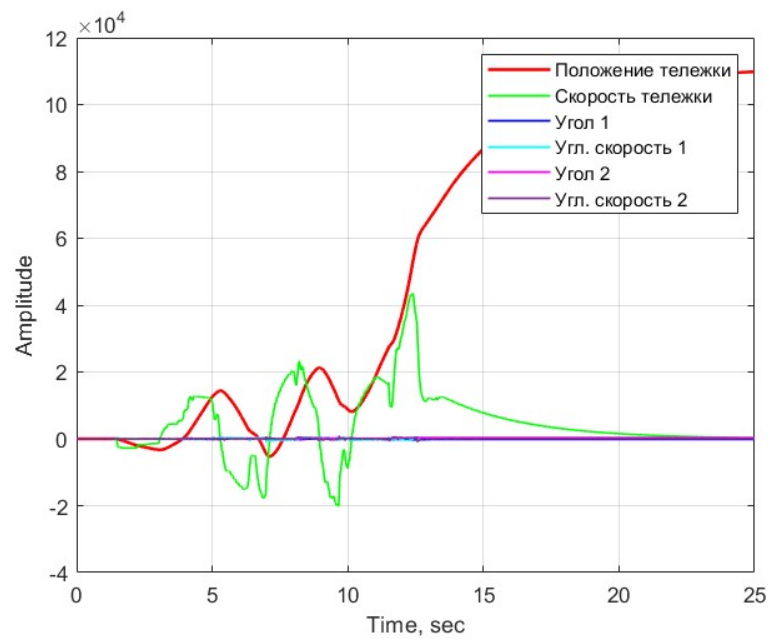


Рис. 14: Нелинейное моделирование при  $x_{0_4} = [1, 7, 0.1, 0, 0.1, 0]^T$

## 3.2 Исследование регулятора по состоянию

Исследуем влияние выбранных собственных чисел на максимальное отклонение маятников от вертикали, максимальное горизонтальное смещение тележки и максимальное значение управляющего сигнала при управлении нелинейной системой.

Выберем несколько желаемых спектров:

$$\begin{aligned}\sigma_1(A + BK_1) &= \{-1, -1.5, -2, -2.5, -3, -3.5\} \\ \sigma_2(A + BK_2) &= \{-1.2, -1.7, -0.5, -0.9, -0.6, -0.7\} \\ \sigma_3(A + BK_3) &= \{-1, -1.5, -1.8, -2.9, -3.2, -3.9\} \\ \sigma_4(A + BK_4) &= \{-2 \pm i, -1.6, -1.2, -0.9, -1.5\}\end{aligned}$$

Начальные условия:

$$x_0 = [1, 2, 0.1, 0, 0.1, 0]^T$$

Отыщем матрицы регуляторов тем же способом и сравним систему с различными заданными спектрами:

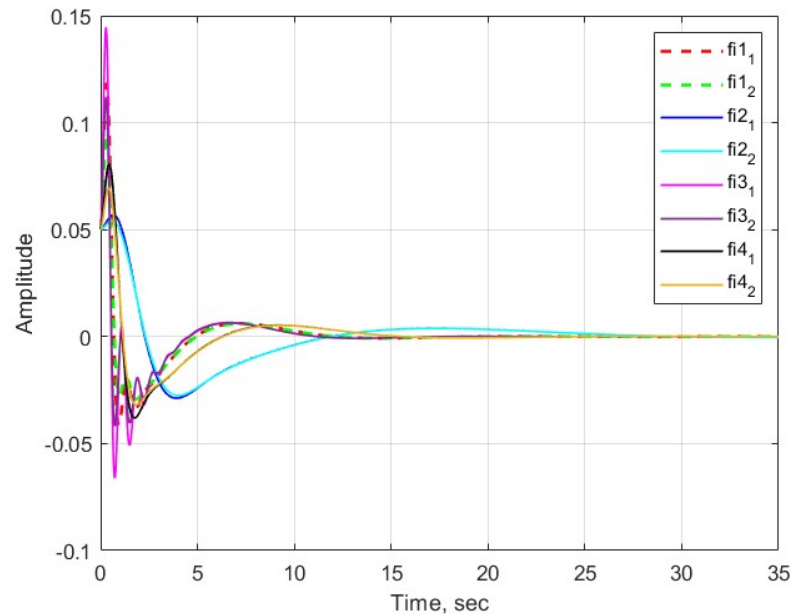


Рис. 15: Графики максимального отклонения углов при нелинейном моделировании

Наибольшее отклонение достигается при выборе 3 спектра, ну оно и видно по собственным числам. Система действует наиболее жестко. Система 2 ведет себя более спокойно, но у нее и наиболее долгий переходный процесс

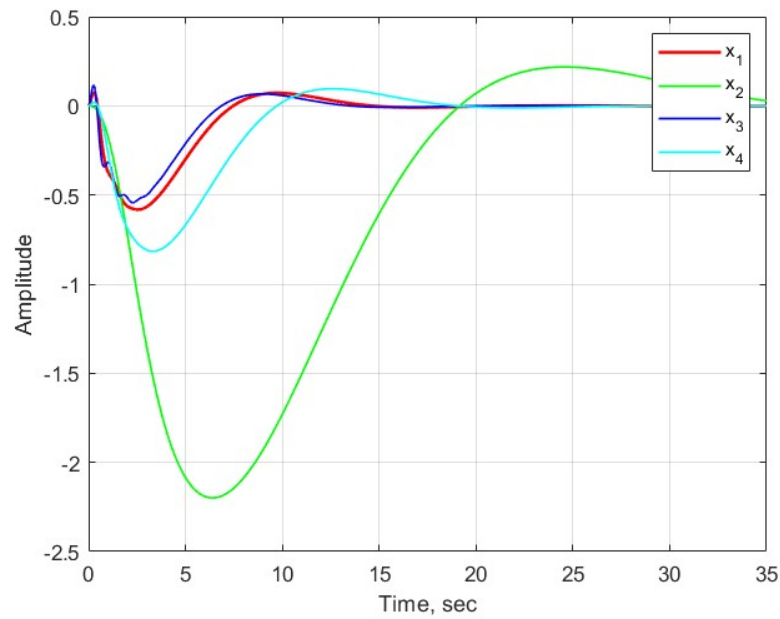


Рис. 16: Графики максимального смещения тележки при нелинейном моделировании

Как и видим, раз вторая система более долгая и мягкая, то ее переходный процесс длится дольше всего. Тележка катается и ловит маятники

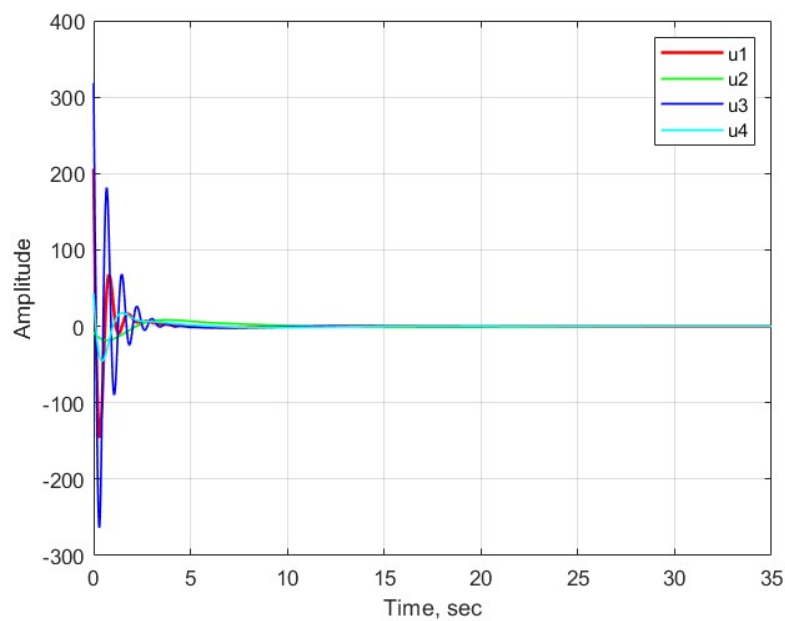


Рис. 17: Графики управляющего воздействия при нелинейном моделировании

Тут видим главное, как наши спектры повлияли на управляющее воздействие. А так как в реальной жизни оно ограничено, то можем сделать

вывод. что система 3, например, чересчур жесткая и пиковое значение управления достигает 310. В то время как система с наиболее долгим переходным процессом достигла пика значения  $u$  в 40.

### 3.3 Синтез наблюдателя

С помощью решения уравнения Сильвестра  $GQ - QA = YC$  рассчитаем наблюдатель:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Выберем желаемый спектр:

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Выберем матрицу  $Y$ , чтобы пара  $(G, Y)$  была управляема:  $Y = [1, 1, 1, 1, 1, 1]$

Найдём матрицу  $Q$  в матлабе, как решение уравнение Сильвестра, а затем найдём матрицу коэффициентов наблюдателя -  $L$ , как  $L = Q^{-1}Y$ :

$$L = 10^4 \cdot [-0.0098 \quad -0.0313 \quad -1.7673 \quad -0.7971 \quad 2.1797 \quad 1.2087]$$

Проверим наш наблюдатель:



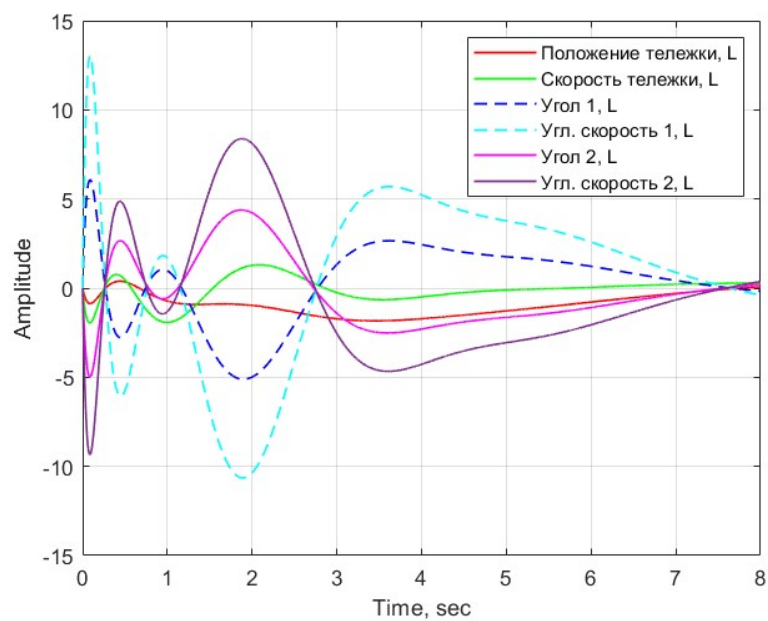


Рис. 18: Графики оценки вектора состояния наблюдателем

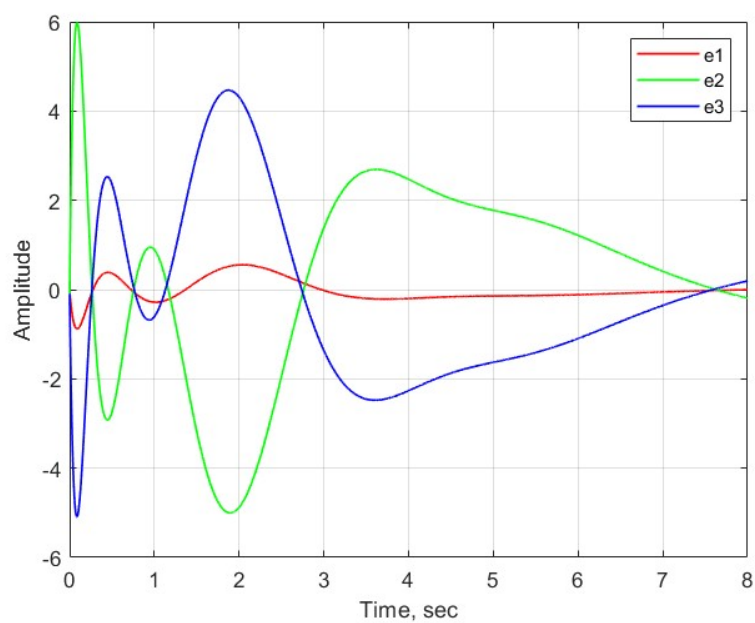


Рис. 19: Графики ошибки наблюдателя

Наблюдатель успешно воспроизводит состояние системы и его ошибка стремится к 0. Исследуем теперь данный наблюдатель

### 3.4 Исследование наблюдателя

Выберем несколько различных спектров:

$$\sigma_1(A + BK_1) = -5, -10, -15, -20, -25, -30$$

$$\sigma_2(A + BK_2) = -5, -6, -7, -8, -9, -10$$

$$\sigma_3(A + BK_3) = -5, -4, -6, -2, -8, -1$$

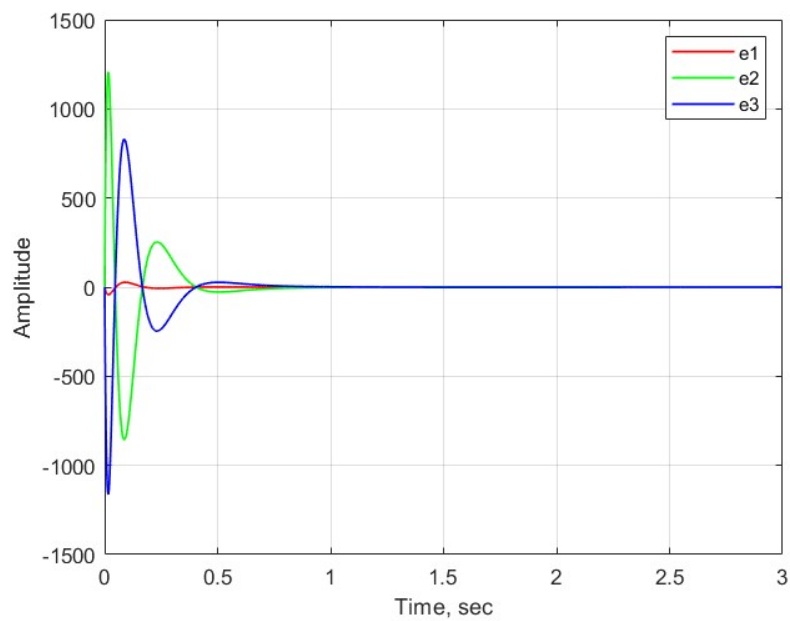


Рис. 20: Графики ошибки наблюдателя с спектром  $\{-5, -10, -15, -20, -25, -30\}$

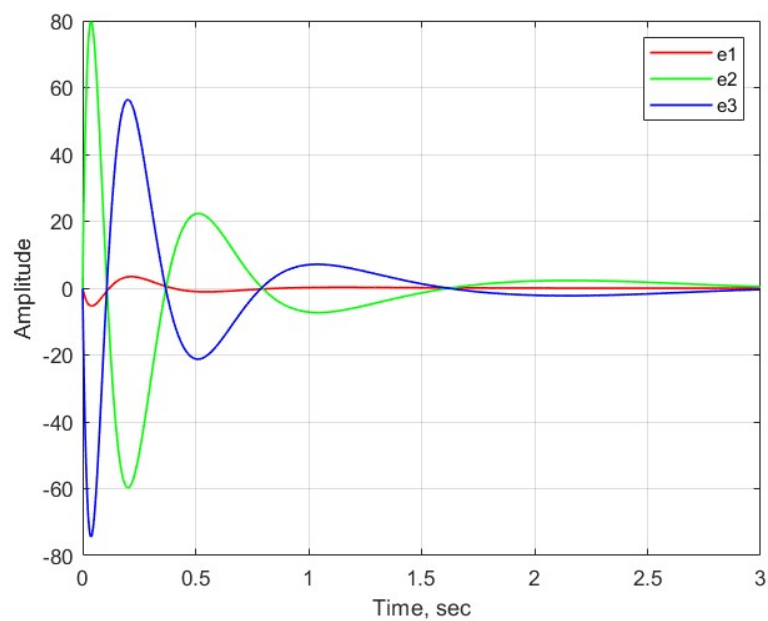


Рис. 21: Графики ошибки наблюдателя с спектром  $\{-5, -6, -7, -8, -9, -10\}$

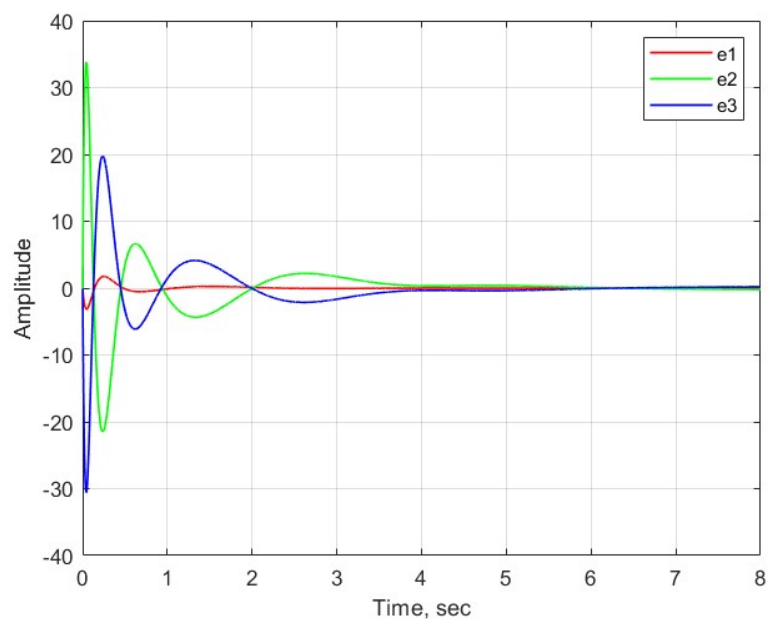


Рис. 22: Графики ошибки наблюдателя с спектром  $\{-5, -4, -6, -2, -8, -1\}$

Можем заметить, что чем больше мы берем спектр для наблюдателя, тем больше и грубее ошибка наблюдателя, однако гораздо быстрее переходный процесс. Чем меньше коэффициенты, тем дольше процесс, но ошибка не превышает 10

### 3.5 Синтез регулятора по выходу

Как и в предыдущем случае, выберем спектры и найдем матрицы  $K$ ,  $L$ . Теперь наблюдатель получает только  $y$ :

$$\sigma(A + BK) = \{-6, -6, -3 \pm i, -1.5 \pm i\}, \quad \sigma(A + LC) = 8 \cdot I$$

Попробовав разные спектры (с некоторыми вообще ломается) был выбран в принципе оптимальный, где у нас 2 кратных корня и 2 комплексно-сопряженных. Малая ошибка наблюдателя, достаточно быстрый переходный процесс, но не слишком жесткий

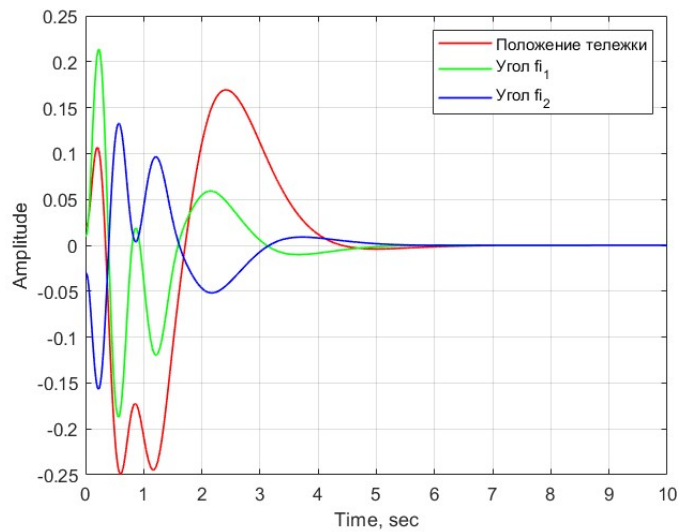


Рис. 23: Графики выхода системы

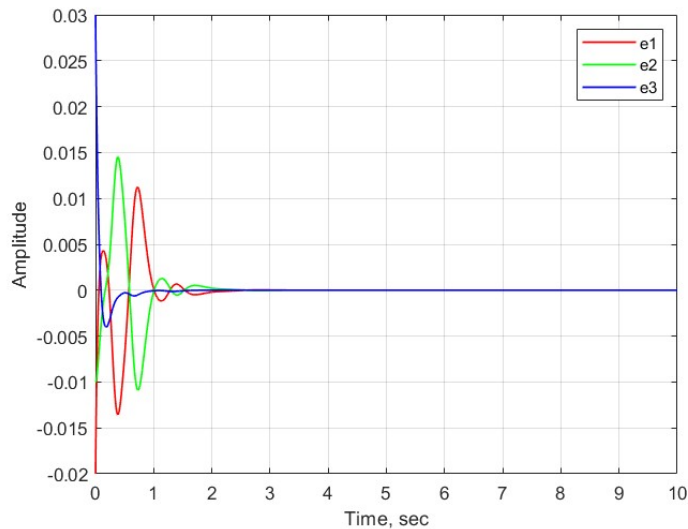


Рис. 24: Графики ошибки наблюдателя

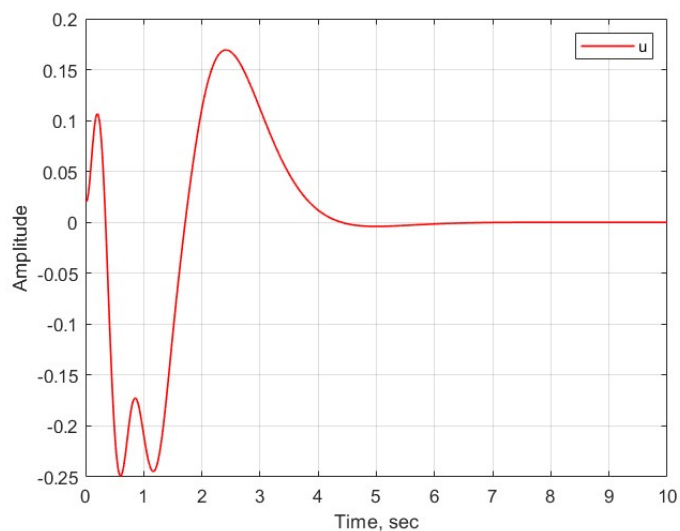


Рис. 25: Графики управляющего воздействия

Нам удалось успешно синтезировать модальный регулятор по выходу. Наблюдатель успешно оценивает вектор состояния и система остается устойчивой. Было выбрано достаточно оптимальное управление, при котором ошибка сводилась к 0, переходный процесс недолгий, а управляющее воздействие было адекватным.

## 4 Глава 4: Стабилизация объекта: LQR и фильтр Калмана

### 4.1 Линейно-квадратичный регулятор

Синтезируем LQR-регулятор на основе линейной модели (1.3.1). Зададимся парой матриц  $(Q, R)$  и зададим регулятор, минимизирующий функционал качества  $J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$ . Выберем матрицы данным образом:

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad R = [1]$$

Решим уравнение Рикатти  $A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0$ , получим матрицу  $P$  и найдём регулятор, как  $K = -R^{-1} B^T P$

$$K = 10^3 \cdot [0.0032 \ 0.0196 \ 5.7266 \ 2.5737 \ -6.0314 \ -3.3641]$$

Проверим его на нашей нелинейной системе:

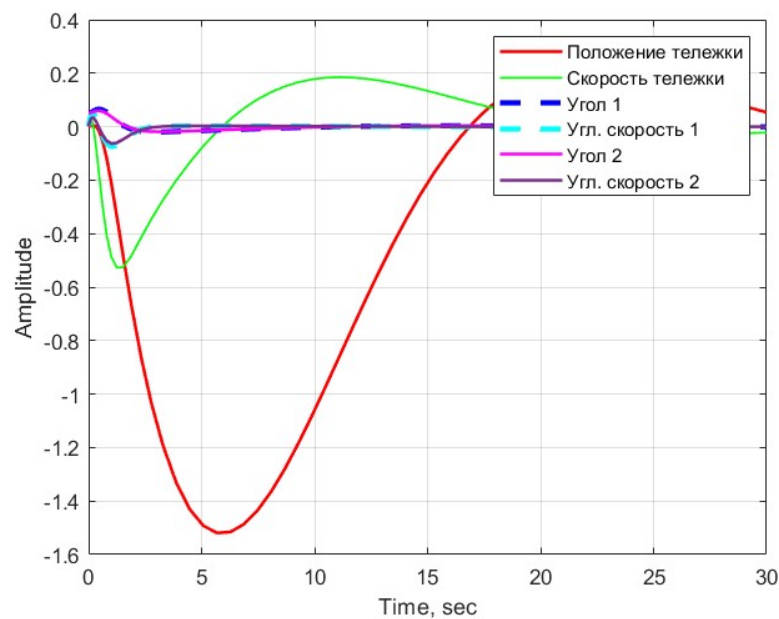


Рис. 26: Графики вектора состояния нелинейной системы

Регулятор работает хорошо, наша система получается устойчивой. теперь попробуем сделать для нее наблюдатель

## 4.2 Линейно-квадратичный наблюдатель

Синтезируем LQE-наблюдатель в непрерывном времени на основе линейной модели и применим его для оценки вектора состояния нелинейной системы. Выберем весовые матрицы  $Q$ ,  $R$ :

$$Q = 0.2 \cdot I_{6 \times 6} R = 4 \cdot I_{3 \times 3}$$

Решим уравнение Рикатти  $AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP = 0$ , получим матрицу  $P$  и найдём матрицу коэффициентов наблюдателя  $L$ , как  $L = -PC^T R^{-1}$

$$L = \begin{bmatrix} 1.3928 & 0.7947 & 1.3445 \\ 2.1646 & 2.6662 & 3.8981 \\ 0.7947 & 4.6146 & 0.1139 \\ 2.2612 & 10.9444 & 1.2519 \\ 1.3445 & 0.1139 & 3.5231 \\ 2.8019 & 0.7436 & 7.0914 \end{bmatrix}$$

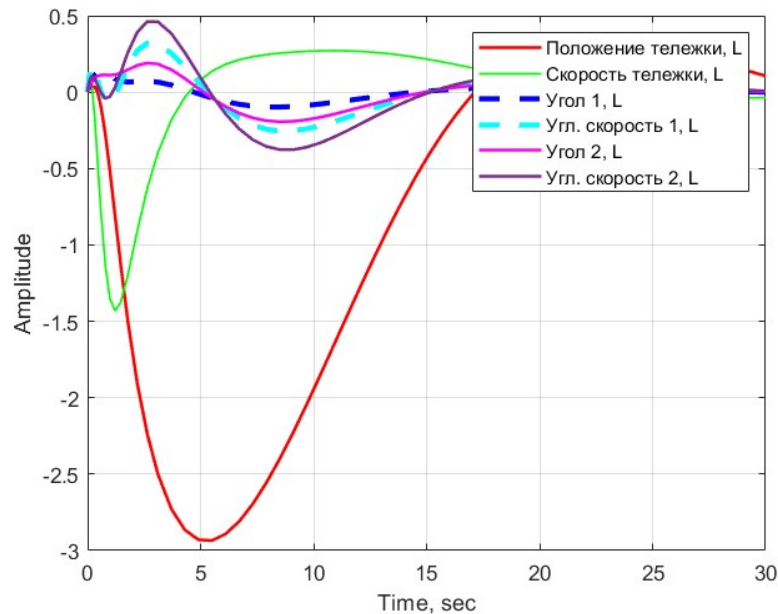


Рис. 27: Графики оценки вектора состояния нелинейной системы

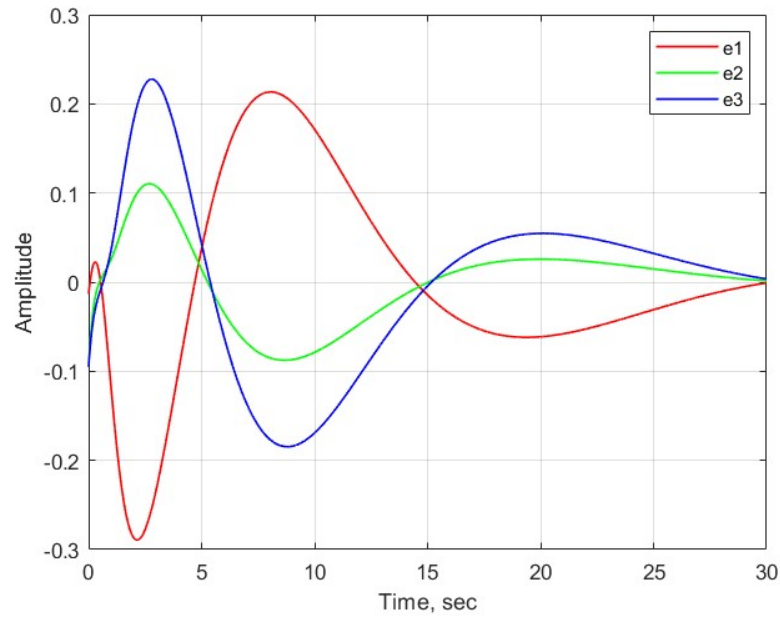


Рис. 28: Графики ошибки наблюдателя

Наш наблюдатель справляется с задачей и успешно следит за системой и воспроизводит ее вектор состояния

### 4.3 LQG для линейной модели

Применим LQR-регулятор совместно с фильтром Калмана для управления линейной моделью вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Df \\ y = Cx + \psi \end{cases}$$

Где  $f, \psi$  заданы как белый шум соответствующей интенсивности. Как и в прошлом случае используем рассчитанные регулятор и наблюдатель одновременно. Проверим наш LQG для линейной модели:



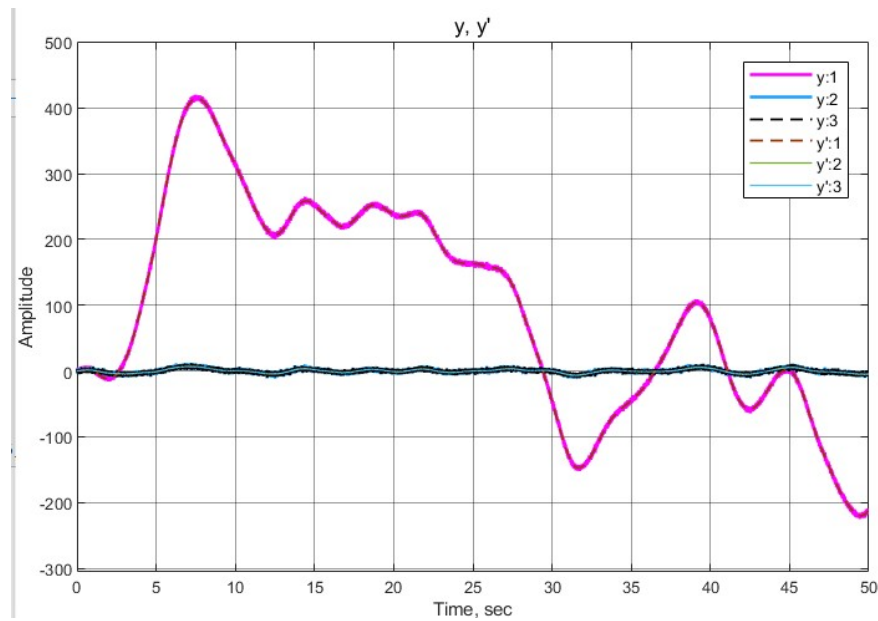


Рис. 29: Графики сравнения выхода системы и наблюдателя

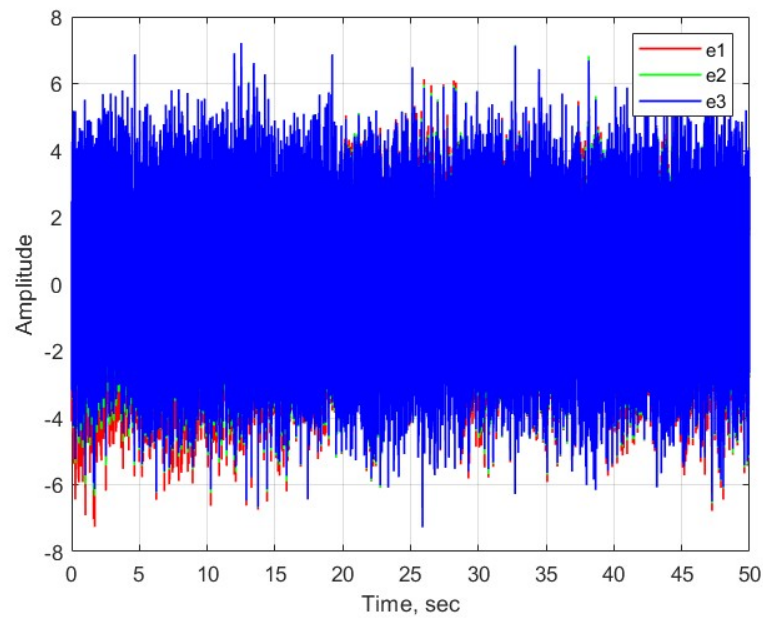


Рис. 30: Графики ошибки наблюдателя

Мы успешно синтезировали LQG для линеаризованной системы, и даже с шумами у нашей системы получается оставаться устойчивой. ошибка колеблется в малом значении, а компоненты состояния угловых отклонений удается свести в малые окрестности

## 4.4 LQG для нелинейной модели

Применим LQR-регулятор совместно с фильтром Калмана для управления нелинейной моделью, в которую также добавьте сигнал помехи  $\psi$ . Задайте сигналы  $f, \psi$  как белый шум с известными параметрами. Протестируем наш LQG на нелинейной системе.

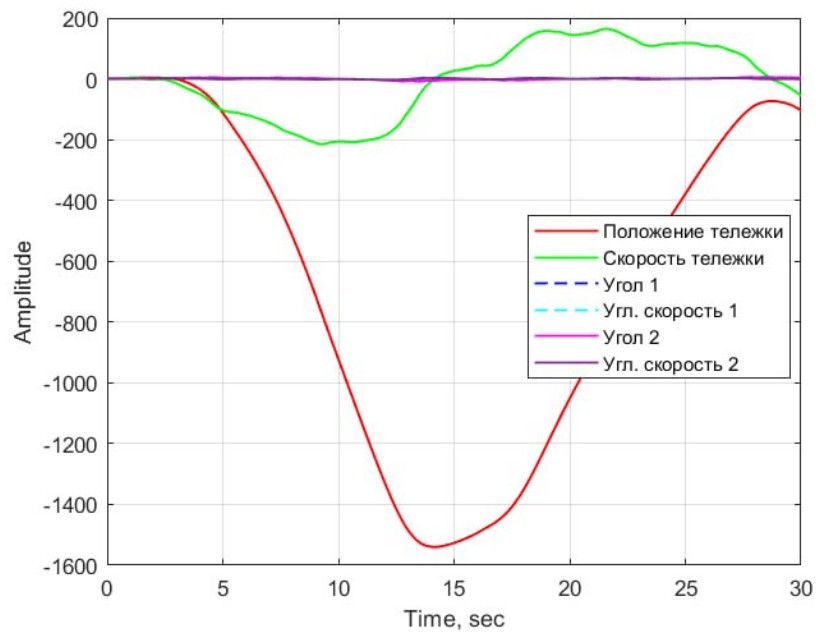


Рис. 31: Графики состояния системы

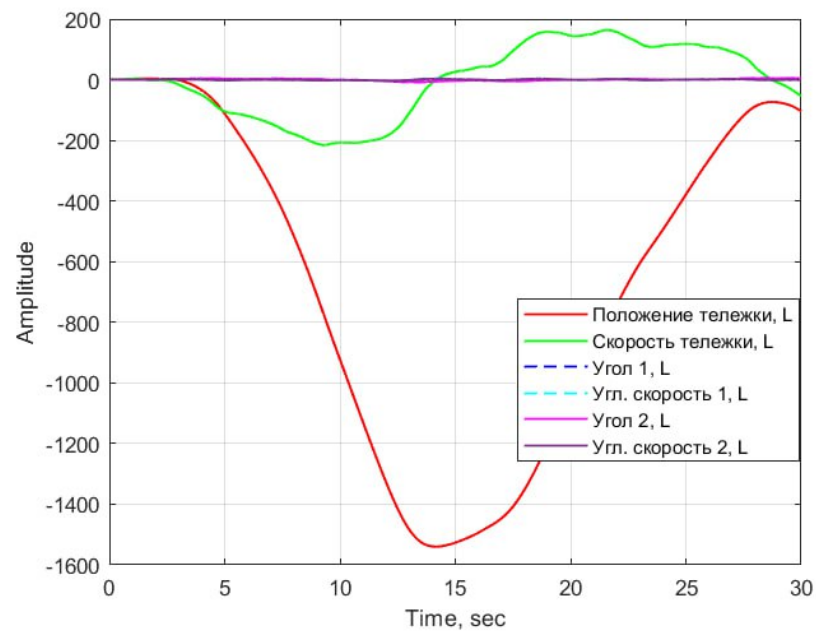


Рис. 32: Графики оценки состояния системы

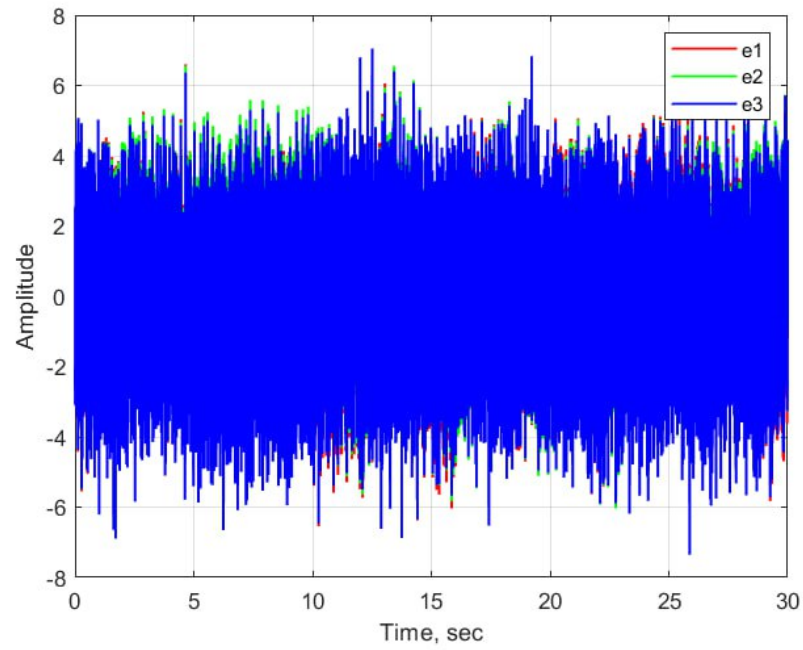


Рис. 33: График ошибки наблюдателя по выходу

LQG успешно справился с системой, она оказалась устойчивой, а ошибка наблюдателя составила не более 6, учитывая, что в данном случае высокие значения векторов состояния

## 5 Глава 5: Слежение и компенсация

### 5.1 Компенсация

Исследуем, при каких сигналах  $f_1(t), f_2(t)$  возможно построить компенсирующий регулятор, гарантирующий равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_2(t) = 0$$

```
C2 = [0 0 1 0 1 0];
A2 = [-3 1;
      -1 -3];
B2 = D ;
A1 = A;
B1 = B;
D2= D;
G5 = [-1 0 0 0 0 0;
      0 -2 0 0 0 0;
      0 0 -3.5 0 0 0;
      0 0 0 -4 0 0;
      0 0 0 0 -2.5 0;
      0 0 0 0 0 -1.5];
Y5 = [1 1 1 1 1 1];
if rank(V) == 6
    cvx_begin sdp
        variable P5(6,6)
        A1*P5 - P5*G5 == B1*Y5
    cvx_end
    K1 = -Y5*inv(P5)
end

cvx_begin sdp
    variable P2(6,2)
    variable Y2(1,2)
    P2*A2 - A1*P2 == B1*Y2 + B2;
    C2*P2 + D2 == 0;
cvx_end
K2 = Y2 - K1*P2
```

Рис. 34: Используем код для подсчёта

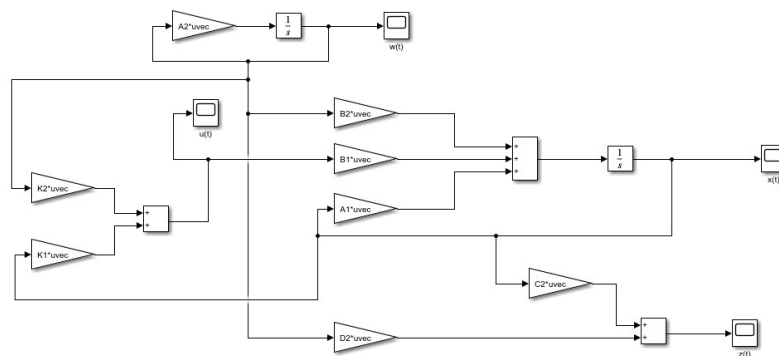


Рис. 35: Схема моделирования

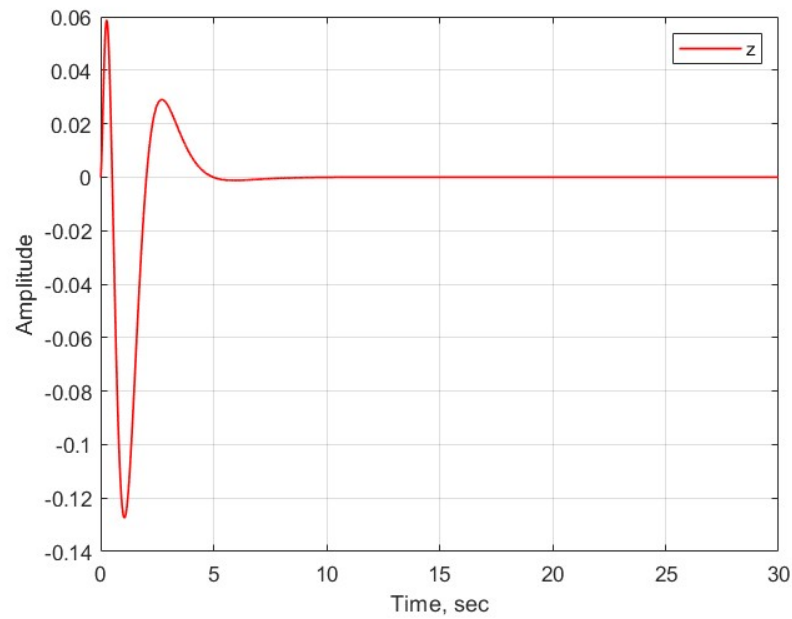


Рис. 36: Компонента z

Я менял в матрице A2 значения, и получал синусоидальный и дельта сигнал и на них система реагирует хорошо, компоненты сходятся к 0

## 5.2 Слежение

Исследуем, для каких векторных сигналов  $g(t)$  возможно построить следящий регулятор, гарантирующий выполнение равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - g(t)\| = 0$$

Считаем, что весь вектор состояния доступен для измерений

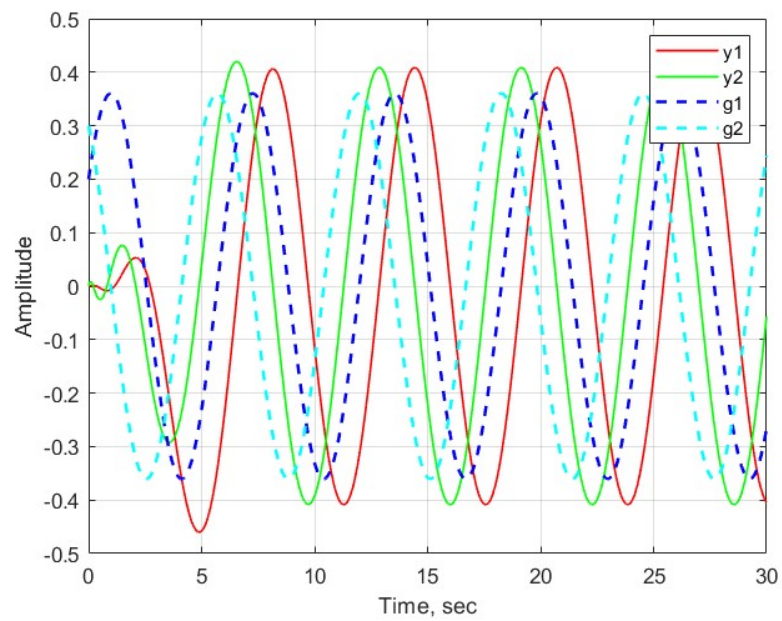


Рис. 37: Компонента состояния

В данном случае я пробовал задать синусоидальный сигнал, но без ошибки система не может за ним угнаться. Ошибка все-равно остается

## 6 Вывод

В данной работе мы классно рассмотрели реальный объект - тележку с двумя перевернутыми маятниками. Как крутые инженеры, вывели ее математическую модель и получили ряд дифференциальных уравнений. Затем мы даже линеаризовали их и получили те самые заветные матрицы, которые мы видели во снах каждый день после ТАУ. Мы замучили этот объект различными регуляторами: попроще (модальные) и продвинутые ребята (LQR). С этим мы применяли наблюдатели (LQE) и очень даже успешно (хотя честно не всё идеально). Было классно пробовать моделировать нелинейную систему. Это прикольно отражало реальную боль нашего мира и то, что не всё чего мы хотим достижимо. Но я считаю это стоило всего и работа вправду выдалась интересной