

## Лабораторная работа № 1.09V (VirtualLab)

# Определение момента инерции методом крутильных колебаний

### Содержание

Введение . . . . .	2
Описание установки . . . . .	6
Порядок выполнения работы . . . . .	7
Обработка результатов . . . . .	8
Контрольные вопросы . . . . .	9
Приложение . . . . .	10

## Цели работы

1. Определение момента инерции различных твердых тел методом крутильных колебаний
2. Проверка справедливости теоремы Гюйгенса-Штейнера

## Задачи

1. Измерение модуля кручения пружины
2. Определение моментов инерции различных тел и сравнение их с табличными значениями

## Введение

Для изучения динамики вращения твердых тел используется понятие момента инерции. Момент инерции тела — мера инертности твердых тел при вращательном движении. Момент инерции аналогичен массе при поступательном движении, которая характеризует свойства объекта сохранять свою скорость или сопротивляться ее изменению. Моментом инерции тела (системы тел) относительно данной оси называется скалярная физическая величина, равная сумме произведений масс  $n$  материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (1)$$

В случае непрерывного распределения массы по объему для вычисления момента инерции используется не суммирование, а интегрирование по всему объему тела  $V$ :

$$I = \int_V r^2 dm. \quad (2)$$

Момент инерции зависит от распределения массы в пределах объема тела и является аддитивной величиной, т.е. полный момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции всех частей этого тела относительно той же оси.

Для нахождения момента инерции в определенных ситуациях удобно использовать теорему Гюйгенса-Штейнера, которая формулируется следующим образом: если момент инерции тела относительно некото-

рой оси вращения, проходящей через центр масс, имеет значение  $I_c$ , то относительно любой другой оси, находящейся на расстоянии  $a$  от первой и параллельной ей, он будет равен

$$I = I_c + ma^2, \quad (3)$$

где  $m$  - масса тела.

Для проверки теоремы Гюйгенса-Штейнера в данной лабораторной работе есть возможность менять расстояние  $a$  для случая расположения грузов на штанге и для сплошного диска.

Экспериментальное определение момента инерции может быть выполнено с помощью крутильных колебаний — периодического процесса, в котором тело вращается вокруг некоторой неподвижной оси под действием упругих сил. В данной экспериментальной установке используется механическая система, которая создает крутильные колебания с помощью спиральной пружины. На ось вращения, которая жестко соединена с пружиной, можно устанавливать различные тела (диск, шар, цилиндр).

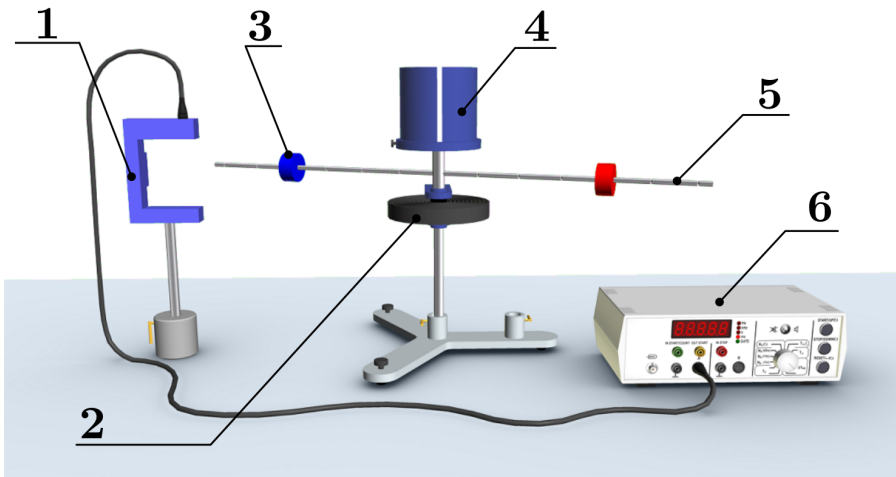


РИС. 1. Схема установки: фотодатчик (1), крутильная пружина (2), груз на стержне (3), объект (4), стержень (5), хронометр (6).

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела записывается в следующем виде:

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}, \quad (4)$$

где  $\vec{M}$  - суммарный момент всех сил, действующих на тело,  $I$  - момент инерции тела,  $\vec{\varepsilon}$  - угловое ускорение тела. Очевидно, что уравнение (4) может быть спроектировано на любую выбранную ось вращения.

Чтобы вывести систему из положения равновесия нужно повернуть исследуемое тело на некоторый угол  $\varphi_0$ . Тогда спиральная пружина также закручивается на этот угол. Пружина создает возвращающий момент силы  $\vec{M}$ , который стремится вернуть систему в состояние равновесия. Таким образом возникают крутильные слабо затухающие колебания. В данной установке можно пренебречь трением в системе, поэтому можно считать, что потеря энергии нет.

В случае упругого закручивания спиральной пружины момент возвращающий момент силы  $M$  прямо пропорционален углу  $\varphi$ :

$$M = -k \cdot \varphi. \quad (5)$$

С учетом (4) и  $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$  уравнение (5) примет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{k}{I}\varphi = 0, \quad (6)$$

где  $k$  - коэффициент пропорциональности, называемый модулем кручения. Значение  $k$  определяется параметрами самой пружины (ее геометрическими размерами и материалом).

Дифференциальное уравнение (6) является уравнением гармонических колебаний с собственной частотой  $\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}$ . Его общим решением является функция

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \theta_0), \quad (7)$$

где  $\varphi_0$  - амплитуда колебаний,  $\theta_0$  - начальная фаза колебаний, обе величины определяются из начальных условий. Период колебаний можно определить как

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}, \quad (8)$$

откуда можно получить значение момента инерции системы

$$I = \frac{T^2 k}{4\pi^2}. \quad (9)$$

Численное значение модуля кручения  $k$  можно определить экспериментально путем измерения внешнего момента сил  $\vec{M}$  и угла поворота штанги  $\varphi$ . Для этого необходимо приложить внешнюю силу  $\vec{F}$ , величину которой можно определить с помощью динамометра, и измерить угол  $\varphi$ . С учетом  $M = r \cdot F$ , где  $r$  - расстояние от оси вращения до точки приложения силы, получим для модуля кручения

$$k = \left| \frac{M}{\varphi} \right| = \left| \frac{r \cdot F}{\varphi} \right|. \quad (10)$$

Так как исследуемое тело является частью механической системы «тело + штанга», то для того, чтобы получить именно момент инерции тела  $I_0$ , нужно вычесть из значения  $I$  момент инерции самой штанги  $I_{rod}$  (который вычисляется отдельно)

$$I_0 = I - I_{rod} \quad (11)$$

## Описание установки

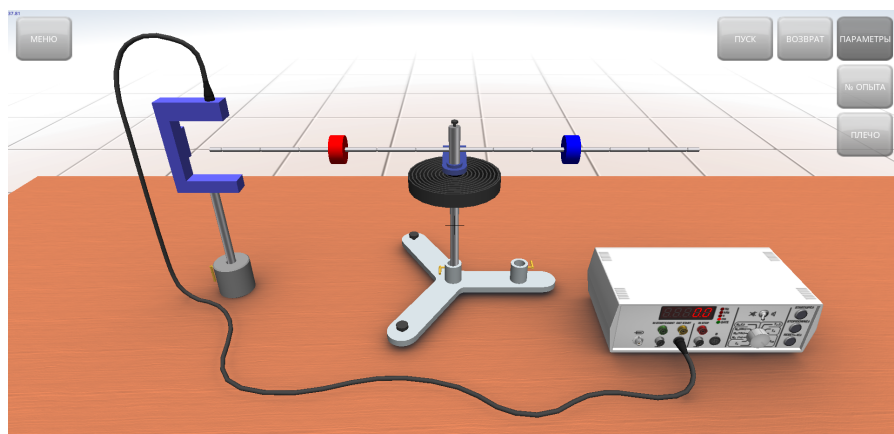


Рис. 2. Меню управления

На рис. 1 представлен внешний вид виртуальной лабораторной установки. На рис. 2 показано меню управления и назначение каждого элемента. Кнопка «Пуск» запускает вращение штанги. Кнопка «Возврат» останавливает эксперимент и возвращает установку в исходное состояние. Кнопка «Параметры» позволяет менять исследуемый объект (шар, цилиндр, диск) и плечо до оси вращения. Электронный хронометр отображает продолжительность каждого полного периода колебаний. Кнопка «ИНФО» содержит в себе геометрические размеры и массы тел.

При выполнении работы на виртуальной установке имитируется возникновение случайной погрешности, поэтому результаты измерений при одинаковых параметрах установки, как и в случае реального эксперимента, будут различными.

## Порядок выполнения работы

1. Запустите виртуальную лабораторную установку. Доступ к ней откроется после выполнения теста.
2. Выберите на кнопке «№ опыта» вкладку «Пружина»
3. По показаниям динамометра определите значение силы  $F$ .
4. Вычислите модуль кручения  $k$  по формуле (10). Учитывайте, что пружина закручивается на угол  $\varphi = \pi$ .
5. С помощью кнопки «Плечо» можно изменить плечо силы  $F$ . Повторите пункты для всех доступных значений плеча силы. Результаты внесите в Таблицу 1 (см. Приложение).
6. Выберите на кнопке «№ опыта» вкладку «Штанга». Нажмите кнопку «Пуск» и определите период колебаний  $T_1$ .
7. Проведите серию из трех пусков и вычислите среднее значение периода колебаний  $\langle T \rangle = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3}$ .
8. Изменяя положение грузов на штанге относительно оси вращения проведите серию измерений. Результаты внесите в Таблицу 2.
9. Выберите в качестве объекта измерений «Диск №1» и, изменяя его положение относительно оси вращения, проведите серию измерений аналогично пп. 7-8. При записи данных в Таблицу 3 обратите внимание, что в виртуальной модели непосредственно задается расстояние между осью вращения и центром масс диска.
10. Для каждого тела сложной формы (шар, цилиндр и диск №2) проведите серию измерений периода колебаний  $T$ , заполнив Таблицу 4.

## Обработка результатов

1. Используя данные Таблицы 1, рассчитайте среднее значение модуля кручения  $k$  и его погрешность.
2. Постройте график зависимости квадрата периода колебаний системы  $T^2$  от квадрата расстояния  $a^2$  по данным Таблицы 2. Убедитесь, что данная зависимость имеет линейный вид.
3. Используя любые известные вам методы интерполяционной обработки линейных зависимостей (метод наименьших квадратов, метод парных точек и т.п.) найдите параметры полученного графика: его угловой коэффициент:

$$\alpha = \frac{8\pi^2 m}{k}, \quad (12)$$

и вертикальное смещение относительно начала координат

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2}{k} I_{rod}. \quad (13)$$

4. Используя значение модуля кручения  $k$  из п.1, с помощью формул (12) и (13) найдите массу  $m$  каждого из грузов (сравните ее со значением заданным во вкладке «ИНФО» виртуальной модели) и собственный момент инерции штанги  $I_{rod}$  и оцените погрешность его значения.
5. По данным Таблицы 3 для диска №1 проведите аналогичные построения и вычисления. Найдите массу и собственный центральный момент инерции диска, учитывая для этом случае соотношение (11).
6. Для всех остальных тел (шар, диск №2, полый и сплошной цилиндры) по данным Таблицы 4 найдите центральные моменты инерции с помощью соотношений (9) и (11). Используйте в расчетах уже известные значения момента инерции штанги и модуля кручения пружины.
7. С помощью формул Приложения 5 найдите расчетные моменты инерции всех тел и сравните их с экспериментальными.
8. Рассчитайте погрешности измерений и расчётов, заполните бланк отчёта.



## Контрольные вопросы

1. Что такое момент инерции твердого тела? Каковы единицы измерения момента инерции?
2. От чего зависит момент инерции?
3. Что называют периодом гармонических колебаний?
4. Что называют крутильными колебаниями?
5. От чего зависит период колебаний тела на спиральной пружине?
6. Какие законы использовались для вывода формулы (6)?
7. Выведите формулу для определения момента инерции шара.
8. Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера.
9. Назовите примеры тел, момент инерции которых меняется во время вращения?

## Приложение

**Таблица 1:** Определение модуля кручения пружины

Плечо $r$ , см					
Сила $F$ , Н					
Модуль кручения $k$ , Н·м/рад					
$\langle k \rangle \pm \Delta k =$					

**Таблица 2:** Определение момента инерции штанги

$a$ , см	$T_1$ , с	$T_2$ , с	$T_3$ , с	$\langle T \rangle$ , с	$a^2$ , м <sup>2</sup>	$T^2$ , с <sup>2</sup>
5						
10						
15						
20						
25						
30						

**Таблица 3:** Теорема Гюйгенса-Штейнера для диска №1

$a$ , см	$T_1$ , с	$T_2$ , с	$T_3$ , с	$\langle T \rangle$ , с	$a^2$ , м <sup>2</sup>	$T^2$ , с <sup>2</sup>
2						
6						
10						
14						

**Таблица 4:** Моменты инерции других тел

Объект	$T_1, \text{с}$	$T_2, \text{с}$	$T_3, \text{с}$	$\langle T \rangle, \text{с}$	$I, \text{кг}\cdot\text{м}^2$
Сплошной диск					
Полый цилиндр					
Сплошной цилиндр					
Шар					

**Таблица 5:** Соотношения для моментов инерции тел различной формы

Материальная точка массы $m$ на расстоянии $r$ от оси вращения	$mr^2$
Однородный тонкий стержень массой $m$ , длиной $\ell$ , относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно его длине	$\frac{m\ell^2}{12}$
Кольцо или труба с тонкими стенками радиусом $r$ и массой $m$ . Ось вращения проходит через центр перпендикулярно основанию	$mr^2$
Круглый сплошной диск (цилиндр) радиусом $r$ и массой $m$ относительно оси, проходящей через центр диска (цилиндра) перпендикулярно основанию	$\frac{mr^2}{2}$
Однородный шар радиусом $r$ и массой $m$ относительно оси, проходящей через центр шара	$\frac{2}{5}mr^2$