2. Бонусное задание (+1 балл) Рассмотрим семейство функций $H = \{h_\theta(x) = \lceil 0.5\sin(\theta x)\rceil : \theta \in \mathbb{R}\}$. Докажите, что $\mathrm{VCdim}(H) = \infty$ не смотря на то, что функция задаётся лишь одним параметром.

Будем рассматривать множество X вида $x_i = 10^{-i}$

и параметр вида $\theta = \pi(1 + \sum_{i=1}^{m}(1-y_i)10^i$, где y_i из {0,1}

Покажем, что мно-во {x1,..xm} можно разукрасить для любого m >=1.

Подставим xj и параметр в ф-ию 0.5 sin(θ x):

0.5 sin(θ xj) =0.5sin(π 10^{-j} + π $\sum_{i=1}^{m}(1-y_i)10^{i-j}$)

Упростим полученное выражение

То выражение, которое содержит оператор суммирования (π $\sum_{i=1}^{m}(1-y_i)10^{i-j}$) при i>j будет кратно 2 π оно никак не повлияет на синус поэтому его можно не учитывать.

Тогда выражение примет вид:

0.5 sin(θ xj) =0.5sin(π 10^{-j} + π $\sum_{i=1}^{min(m,j)}(1-yi)10^{i-j}$)

Выделим отдельно yj

0.5 sin(θ xj) =0.5sin(π 10^{-j} + (1-yj) π + π $\sum_{i=1}^{min(m,j-1)}(1-yi)10^{i-j}$)

Оценим выражение π 10^{-j} + π $\sum_{i=1}^{min(m,j-1)}(1-yi)10^{i-j}$. Оно будет меньше чем π и больше нуля.

Тогда при yj=1 выражение от исходной ф-ии будет равно 1, а при yj=0 равно нулю.

Тогда ф-ия $h_\theta(x) = \lceil 0.5\sin(\theta x)\rceil$ размечает любое xj при любых yj => VCdim(H) = ∞