

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. М.В.Ломоносова  
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Телепов Александр Юрьевич

**Исследование применимости  
методов машинного обучения  
в обратной задаче гравиметрии**

Специальность 01.03.02 —  
прикладная математика и информатика

Курсовая работа

Научный руководитель:  
д. фм. н. Дмитриев В. И.

Москва — 2019

# 1 Введение

Гравиметрия — это наука об измерении величин, характеризующих гравитационное поле Земли и других небесных тел. Гравиметрия рассматривает теории и методы измерения силы тяжести для решения различных задач геодезии, геофизики и других наук о Земле.

В разведочной геофизике гравиметрия используется для поиска и уточнения строения залежей полезных ископаемых, а также выявления предпосылок для их образования. Одно из основных геодезических приложений гравиметрии — построение моделей геоида. Точное знание геоида необходимо, в частности, в навигации — для пересчёта геодезических высот, непосредственно измеряемых GPS-приёмниками, а также в физической океанологии — для определения высот морской поверхности.

Особенностью обратных задач геофизики, в частности — гравиметрии, является их некорректность. А именно обратная задача гравиметрии неустойчива и может иметь не единственное решение. Некорректность обратной задачи гравиметрии связана с тем, что оператор ее прямой задачи является интегральным оператором первого рода. То есть даже имея абсолютно точный обратный оператор можно получить сильно различающиеся решения при малых погрешностях в начальных данных, которые принципиально неизбежны в силу погрешности реальных измерений.

В данной работе исследуется возможность применения методов машинного обучения для определения параметров источников гравитационного поля по нормальной составляющей ускорения свободного падения, измеренной на поверхности земли.

## 2 Постановка задачи

Основываясь на принципе суперпозиции, в прямой и обратной задачах гравиметрии используется только аномальное гравитационное поле:

$$U_a(M) = U(M) - U^N,$$

где  $U^N(M)$  - нормальный потенциал для некоторого среднего распределения плотности среды  $\rho_N(M)$ .

Далее всюду предполагается что мы имеем дело уже с аномальной плотностью, аномальным потенциалом и т.д.

### 2.1 Прямая задача

По заданым области  $V$  и аномальной плотности определить гравитационное поле на поверхности земли.

Решение дается в виде интеграла:

$$g(x, y) = \iiint_{V_0} \frac{G\rho(M_0)\cos\psi}{r^2} dv_0,$$

где  $G$  - гравитационная постоянная,

$\psi$  - угол между вертикалью и вектором  $\vec{r} = \overrightarrow{MM_0}$ ,

$\cos\psi = \frac{z_0}{r}$ ,  $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2$ .

### 2.2 Обратная задача

По заданному на поверхности гравитационному полю  $z = 0$  определить форму области аномальной плотности  $V$  и аномальную плотность  $\rho(x, y, z)$ .

По теореме Новикова если  $V$  - звездна и  $\rho = \text{const}$  в области  $V$  то задача может иметь только 1 решение. В этом случае ищется поверхность  $S$  - граница области  $V$ .

В данной работе рассматривается следующая модельная задача:

В заданной области на поверхности измерена нормальная составляющая ускорения свободного падения на равномерной сетке.

Требуется определить координаты  $(x, y, z)$  всех источников гравитационного поля под поверхностью земли.

Считается, что источники имеют сферическую форму (за границей сферы поле точечного источника совпадает с полем сферы).

Заметим, что если мы умеем определять все параметры 1 любого источника, то мы можем решить задачу, последовательно вычитая поле найденного источника и снова находя параметры какого-либо из оставшихся источников.

### 3 Методы решения обратной задачи

#### 3.1 Метод продолжения гравитационного поля

Алгоритмы продолжения гравитационного поля вглубь земли используются для уменьшения влияния совокупности источников на создаваемое поле в окрестности отдельно взятого тела.

Рассмотрим поведение карт напряженности гравитационного при увеличении глубины их построения  $z$ . При стремлении  $z$  к  $z_i$  - координате залегания  $i$ -го тела  $g(x_i, y_i)$  будет стремиться к плюс бесконечности и определяться практически характеристиками только  $i$ -го тела. Следовательно если мы умеем продолжать гравитационное поле, то сможем легко определить координаты  $(x, y)$  всех источников.

Таким образом при продолжении гравитационного поля вглубь земли лучше проявляются характеристики источников поля.

Рассмотрим поведение  $f_p(h) = \frac{\partial g(h, p)}{\partial h}(h)$ .

$$g(h, p) = \frac{GM}{h^2 + p^2}$$

$$f_p(h) = \frac{-2GMh}{(p^2 + h^2)^2}$$

$f_p(h)$  имеет единственный минимум в точке  $h_* = \frac{p}{\sqrt{3}}$ , равный  $\frac{-MG}{8h_*}$ .

Умея продолжать напряженность гравитационного поля мы можем чис-

ленно считать производную по  $h$  и сторить ее график. По нему мы можем найти  $h_*$  и  $f_p(h_*)$ . Отсюда находится  $M = \frac{8f_p(h_*)h_*}{G}$ .

Найдем

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{S: x^2+y^2 \leq p_0^2} g(x, y) dx dy = \iint_{S: x^2+y^2 \leq p_0^2} g(h, p) p dp d\varphi \\
 I &= \iint_{S: x^2+y^2 \leq p_0^2} g(h, p) p dp d\varphi = \frac{1}{2} GMh \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{p_0} \frac{2p}{(h^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}} dp = \\
 &= 2\pi GM \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{p_0^2 + h^2}} \right)
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$f_c(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 h &= f_{p_0}^{-1} \left( \frac{I}{-4\pi GM} \right) \\
 f_c^{-1}(x) &= \frac{c(1 - x^2)}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}}
 \end{aligned}$$

Для решения обратной задачи предлагается использовать метод продолжения гравитационного потенциала [1].

Пусть  $\Delta U = 0$ ,  $z \geq h$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$

$U \rightarrow 0$  регулярно,  $r \rightarrow \infty$

Возьмем функцию Грина в виде

$$G(M, M_0) = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0 - 2h)^2}}$$

Учтем, что  $\left. \frac{\partial G(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0} \right|_{z=h} = 0$  и применим интегральную формулу

Грина:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left( G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\sigma - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} G \Delta V d\Omega$$

Если  $V$  - гармоническая, то:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} G(M, M_0) \Big|_{z_0=h} \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0} \Big|_{z_0=h} dx_0 dy_0$$

Так как

$$G(M, M_0) \Big|_{z_0=h} = \frac{2}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-h)^2}}$$

получим

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \frac{\partial V(x_0, y_0, z_0)}{\partial z_0} \Big|_{z_0=h} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-h)^2}} dx_0 dy_0$$

Заметим, что

$$\Delta U(M) = -4\pi\rho(M),$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = g_z(x, y, z)$$

Записав формулу для  $U(x, y, z)$  в области, где отсутствуют источники ( $\rho(M_0) = 0$ ) и продифференцировав по  $z$  получим:

$$g_z(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \frac{g_z(x_0, y_0, h)(h-z)}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (h-z)^2)^{\frac{3}{2}}} dx_0 dy_0$$

Это - интегральное уравнение первого рода для напряженности на глубине  $z = h$  с  $\delta$ -образным ядром. Решение этого уравнения является некорректной задачей.

В [1] был предложен итерационный метод решения данного интегрального уравнения.

Перепишем уравнение в виде

$$g(x, y, h) + \frac{h}{\pi} \iint_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \frac{g(x_0, y_0, h) - g(x, y, h)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + h^2} dx_0 dy_0 = g(x, y, 0)$$

Итерационный процесс записывается следующим образом:

$$g_n(x, y, h) = g_{n-1} + g(x, y, 0) - \frac{h}{\pi} \iint_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \frac{g_{n-1}(x_0, y_0, h)}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + h^2} dx_0 dy_0$$

## 4 Численные эксперименты

Для сравнения методов планируется взять некоторое количество случайно сгенерированных полей при различных уровнях зашумленности (к исходному правильно вычисленному полю прибавляется случайный шум, взятый из некоторого фиксированного распределения).

Результаты курсовой работы будут представлены в виде графиков точности определения параметров источников гравитационного поля от уровня шума в начальных данных для предложенных методов решения обратной задачи.

Также критериями качества метода будет являться скорость работы, а также возможность и эффективность параллельной реализации.

### 4.1 Метод продолжения гравитационного поля

В главе 2.1 был описан итерационный метод решения интегрального уравнения с  $\delta$ -образным ядром.

Считая  $U_z(x, y)$  равной 0 всюду вне

$$S = \left[ \frac{-Nh_x}{2}, \frac{Nh_x}{2} \right] \times \left[ \frac{-Mh_y}{2}, \frac{Mh_y}{2} \right]$$

и постоянной в областях

$$x \in \left[ \left( n - \frac{1}{2} \right) h_x, \left( n + \frac{1}{2} \right) h_x \right], y \in \left[ \left( m - \frac{1}{2} \right) h_y, \left( m + \frac{1}{2} \right) h_y \right]$$

Формула из главы 2.1 преобразуется в:

$$U_{nm}^s = U_{nm}^{s-1} - \sum_{i=-N}^N \sum_{j=-M}^M a_{ij}^{nm} U_{ij}^{s-1}$$

$$n \in \left[ \frac{-N}{2}, \frac{N}{2} \right], m \in \left[ \frac{-M}{2}, \frac{M}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
x_n &= nh_x, y_m = mh_y \\
a_{ij}^{nm} &= \varphi(x_i - x_n + \frac{h_x}{2}, y_j - y_m + \frac{h_y}{2}) + \varphi(x_i - x_n - \frac{h_x}{2}, y_j - y_m - \frac{h_y}{2}) - \\
&\quad - \varphi(x_i - x_n - \frac{h_x}{2}, y_j - y_m + \frac{h_y}{2}) - \varphi(x_i - x_n + \frac{h_x}{2}, y_j - y_m - \frac{h_y}{2}) \\
\varphi(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \arctg \left( \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)
\end{aligned}$$

При последовательном увеличении глубины алгоритм будет уточнять глубину залегания ближайщего источника, т.к влияние остальных тел будет уменьшаться. После пересечения глубины залегания источника алгоритм будет искать такой источник под «перескоченным», которой будет давать мало отличающиеся на поверхности поле. Мощность и глубина залегания такого источника источника увеличатся - это мы и возьмем за критерий останова.



## Список литературы

- [1] Dmitriev V. I., Dmitrieva I. V. Iterative method for analytical continuation of the gravity field // Computational Mathematics and Modeling. United States, 2012. Vol. 23, no. 1. P. 51–55.