ЗАДАНИЕ 1

**Вариант 1**

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \geqslant 0, \\ u\Big|_{t=0} = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u\Big|_{x=0} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = 1, \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $f(x)$ — некоторая заданная функция.

Найти численное решение задачи (1), используя разностную схему с весами для аппроксимации уравнения:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \sigma \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + (1-\sigma)\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}, \quad j = 1, \dots, N-1. \tag{2}$$

Представить сведения о теоретических свойствах численного метода (2). Описать логическую схему программы. Пояснить, каким способом аппроксимируются граничные условия. Показать поведение $u_j^n$. В качестве функции $f(x)$ при тестировании использовать функцию $\sin(\pi x) + x$. Определить время $t^{n^*}$ необходимое для установления решения. Показать сходимость численного метода на серии последовательно измельчающихся сеток. Численно определить порядок сходимости схемы построив таблицу изменения погрешности численного решения в зависимости от величин шага по пространству $h$ и шага по времени $\tau$. Численно определить условие устойчивости схемы при $\sigma = \dfrac{1}{4}$. Вычисления вести с двойной точностью.

ЛИТЕРАТУРА


1. Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: учеб. пособие: в 4 ч. Ч. 3. Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов — Новосибирск: НГУ, 2007. — 160 с.

2. Михайлов А. П. Учебные задания вычислительной практики в компьютерном классе: учеб. пособие. — Новосибирск: НГУ, 2003 — 86 с.

ЗАДАНИЕ 1

**Вариант 2**
Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \geqslant 0, \\ u\Big|_{t=0} = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = -1, \quad t \geqslant 0, \\ u\Big|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $f(x)$ — некоторая заданная функция.

Найти численное решение задачи (1), используя разностную схему с весами для аппроксимации уравнения:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \sigma \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + (1-\sigma)\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}, \quad j = 1, \dots, N-1. \tag{2}$$

Представить сведения о теоретических свойствах численного метода (2). Описать логическую схему программы. Пояснить, каким способом аппроксимируются граничные условия. Показать поведение $u_j^n$. В качестве функции $f(x)$ при тестировании использовать функции $-2x^3 - x + 3$ и 1. Определить время $t^{n^*}$ необходимое для установления решения. Показать сходимость численного метода на серии последовательно измельчающихся сеток. Численно определить порядок сходимости схемы построив таблицу изменения погрешности численного решения в зависимости от величин шага по пространству $h$ и шага по времени $\tau$. Численно определить условие устойчивости схемы при $\sigma = \dfrac{1}{6}$. Вычисления вести с двойной точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: учеб. пособие: в 4 ч. Ч. 3. Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов — Новосибирск: НГУ, 2007. — 160 с.

2. Михайлов А. П. Учебные задания вычислительной практики в компьютерном классе: учеб. пособие. — Новосибирск: НГУ, 2003 — 86 с.

ЗАДАНИЕ 1

**Вариант 3**

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \geqslant 0, \\ u\Big|_{t=0} = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u\Big|_{x=0} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\Big|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $f(x)$ — некоторая заданная функция.

Найти численное решение задачи (1), используя разностную схему с весами для аппроксимации уравнения:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \sigma \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + (1-\sigma)\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}, \quad j = 1, \ldots, N-1. \tag{2}$$

Представить сведения о теоретических свойствах численного метода (2). Описать логическую схему программы. Показать поведение $u_j^n$. В качестве функции $f(x)$ при тестировании использовать функции $-x^2 + x$ и 1. Определить время $t^{n^*}$ необходимое для установления решения. Показать сходимость численного метода на серии последовательно измельчающихся сеток. Численно определить порядок сходимости схемы для весов $\sigma_1 = \dfrac{1}{2}$ и $\sigma_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{h^2}{12\tau}$ построив таблицы изменения погрешностей численного решения в зависимости от величин шага по пространству $h$ и шага по времени $\tau$. Численно показать абсолютную устойчивость схемы при $\sigma_2$. Вычисления вести с двойной точностью.

ЛИТЕРАТУРА


1. Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: учеб. пособие: в 4 ч. Ч. 3. Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов — Новосибирск: НГУ, 2007. — 160 с.

2. Михайлов А. П. Учебные задания вычислительной практики в компьютерном классе: учеб. пособие. — Новосибирск: НГУ, 2003 — 86 с.

ЗАДАНИЕ 1

**Вариант 4**

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \geqslant 0, \\ u\Big|_{t=0} = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0.5, \quad t \geqslant 0, \\ u\Big|_{x=1} = 1, \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $f(x)$ — некоторая заданная функция.

Найти численное решение задачи (1), используя разностную схему Дюфорта – Франкела для аппроксимации уравнения:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} = \frac{u_{j+1}^n - (u_j^{n+1} + u_j^{n-1}) + u_{j-1}^n}{h^2}, \quad j = 1, \ldots, N-1. \tag{2}$$

Представить сведения о теоретических свойствах численного метода (2). Описать логическую схему программы. Пояснить, каким способом аппроксимируются граничные условия. Показать поведение $u_j^n$. В качестве функции $f(x)$ при тестировании использовать функции $-0.5x^2 + 0.5x + 1$ и $x$. Определить время $t^{n^*}$ необходимое для установления решения. Показать сходимость численного метода на серии последовательно измельчающихся сеток. Численно определить порядок сходимости схемы построив таблицу изменения погрешности численного решения в зависимости от величин шага по пространству $h$ и шага по времени $\tau$. Пояснить, как вычисляются значения $u_j^1$. Вычисления вести с двойной точностью.

ЛИТЕРАТУРА


1. Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: учеб. пособие: в 4 ч. Ч. 3. Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов — Новосибирск: НГУ, 2007. — 160 с.

2. Михайлов А. П. Учебные задания вычислительной практики в компьютерном классе: учеб. пособие. — Новосибирск: НГУ, 2003 — 86 с.

ЗАДАНИЕ 1

**Вариант 5**
Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \geqslant 0, \\ u\Big|_{t=0} = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u\Big|_{x=0} = 0.5, \quad t \geqslant 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = -0.5, \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $f(x)$ — некоторая заданная функция.

Найти численное решение задачи (1), используя разностную схему Дюфорта – Франкела для аппроксимации уравнения:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} = \frac{u_{j+1}^n - (u_j^{n+1} + u_j^{n-1}) + u_{j-1}^n}{h^2}, \quad j = 1, \ldots, N-1. \tag{2}$$

Представить сведения о теоретических свойствах численного метода (2). Описать логическую схему программы. Пояснить, каким способом аппроксимируются граничные условия. Показать поведение $u_j^n$. В качестве функции $f(x)$ при тестировании использовать функции $0.5(1-x) - \sin(1.5\pi x)$ и $0.5$. Определить время $t^{n^*}$ необходимое для установления решения. Показать сходимость численного метода на серии последовательно измельчающихся сеток. Численно определить порядок сходимости схемы построив таблицу изменения нормы изменений численного решения в зависимости от величин шага по пространству $h$ и шага по времени $\tau$. Пояснить, как вычисляются значения $u_j^1$. Вычисления вести с двойной точностью.

ЛИТЕРАТУРА


1. Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: учеб. пособие: в 4 ч. Ч. 3. Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов — Новосибирск: НГУ, 2007. — 160 с.

2. Михайлов А. П. Учебные задания вычислительной практики в компьютерном классе: учеб. пособие. — Новосибирск: НГУ, 2003 — 86 с.

ЗАДАНИЕ 1

**Вариант 6**

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \geqslant 0, \\ u\Big|_{t=0} = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 1, \quad t \geqslant 0, \\ u\Big|_{x=1} = 1, \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $f(x)$ — некоторая заданная функция.

Найти численное решение задачи (1), используя разностную схему Саульева для аппроксимации уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1/2} - u_j^n}{0.5\tau} &= \frac{u_{j+1}^n - u_j^n - u_j^{n+1/2} + u_{j-1}^{n+1/2}}{h^2}, \quad j = 1, \ldots, N-1, \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n+1/2}}{0.5\tau} &= \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} - u_j^{n+1/2} + u_{j-1}^{n+1/2}}{h^2}, \quad j = 1, \ldots, N-1. \end{aligned} \tag{2}$$

Представить сведения о теоретических свойствах численного метода (2). Описать логическую схему программы. Пояснить, каким способом аппроксимируются граничные условия. Пояснить, как вычисляются значения $u_0^{n+1/2}$ и $u_N^{n+1/2}$. Показать поведение $u_j^n$. В качестве функции $f(x)$ при тестировании использовать функции $x - 1 + 4\cos(3\pi x)$ и 1. Определить время $t^{n^*}$ необходимое для установления решения. Показать сходимость численного метода на серии последовательно измельчающихся сеток. Численно определить порядок сходимости схемы построив таблицу изменения нормы изменений численного решения в зависимости от величин шага по пространству $h$ и шага по времени $\tau$. Вычисления вести с двойной точностью.

ЛИТЕРАТУРА


1. Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: учеб. пособие: в 4 ч. Ч. 3. Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов — Новосибирск: НГУ, 2007. — 160 с.

2. Михайлов А. П. Учебные задания вычислительной практики в компьютерном классе: учеб. пособие. — Новосибирск: НГУ, 2003 — 86 с.

ЗАДАНИЕ 1

**Вариант 7**
Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \geqslant 0, \\ u\Big|_{t=0} = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u\Big|_{x=0} = 1, \quad t \geqslant 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = -1, \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $f(x)$ — некоторая заданная функция.

Найти численное решение задачи (1), используя разностную схему Саульева для аппроксимации уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1/2} - u_j^n}{0.5\tau} &= \frac{u_{j+1}^n - u_j^n - u_j^{n+1/2} + u_{j-1}^{n+1/2}}{h^2}, \quad j = 1, \ldots, N-1, \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n+1/2}}{0.5\tau} &= \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} - u_j^{n+1/2} + u_{j-1}^{n+1/2}}{h^2}, \quad j = 1, \ldots, N-1. \end{aligned} \tag{2}$$

Представить сведения о теоретических свойствах численного метода (2). Описать логическую схему программы. Пояснить, каким способом аппроксимируются граничные условия. Пояснить, как вычисляются значения $u_0^{n+1/2}$ и $u_N^{n+1/2}$. Показать поведение $u_j^n$. В качестве функции $f(x)$ при тестировании использовать функции $x^4 - 2.5x^2 + 1$ и $-2x$. Определить время $t^{n^*}$ необходимое для установления решения. Показать сходимость численного метода на серии последовательно измельчающихся сеток. Численно определить порядок сходимости схемы построив таблицу изменения относительной ошибки численного решения в зависимости от величин шага по пространству $h$ и шага по времени $\tau$. Вычисления вести с двойной точностью.

ЛИТЕРАТУРА


1. Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: учеб. пособие: в 4 ч. Ч. 3. Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов — Новосибирск: НГУ, 2007. — 160 с.

2. Михайлов А. П. Учебные задания вычислительной практики в компьютерном классе: учеб. пособие. — Новосибирск: НГУ, 2003 — 86 с.

ЗАДАНИЕ 1

**Вариант 8**
Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \geqslant 0, \\ u\Big|_{t=0} = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ u\Big|_{x=0} = 0.5, \quad t \geqslant 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $f(x)$ — некоторая заданная функция.

Найти численное решение задачи (1), используя компактную разностную схему для аппроксимации уравнения:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{12}\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^{n}}{\tau} + \frac{5}{6}\frac{u_{j}^{n+1} - u_{j}^{n}}{\tau} + \frac{1}{12}\frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^{n}}{\tau} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_{j}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{1}{2}\frac{u_{j+1}^{n} - 2u_{j}^{n} + u_{j-1}^{n}}{h^2}, \quad j = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \tag{2}$$

Представить сведения о теоретических свойствах численного метода (2). Описать логическую схему программы. Пояснить, каким способом аппроксимируются граничные условия. Показать поведение $u_j^n$. В качестве функции $f(x)$ при тестировании использовать функции $0.5 + \sin(2.5\pi x)$ и $0.5(1 - x)$. Определить время $t^{n^*}$ необходимое для установления решения. Показать сходимость численного метода на серии последовательно измельчающихся сеток. Численно определить порядок сходимости схемы построив таблицу изменения относительной ошибки численного решения в зависимости от величин шага по пространству $h$ и шага по времени $\tau$. Численно показать абсолютную устойчивость схемы. Вычисления вести с двойной точностью.

ЛИТЕРАТУРА


1. Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: учеб. пособие: в 4 ч. Ч. 3. Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов — Новосибирск: НГУ, 2007. — 160 с.

2. Михайлов А. П. Учебные задания вычислительной практики в компьютерном классе: учеб. пособие. — Новосибирск: НГУ, 2003 — 86 с.

ЗАДАНИЕ 1

**Вариант 9**

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \geqslant 0, \\ u\Big|_{t=0} = f(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = -1, \quad t \geqslant 0, \\ u\Big|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $f(x)$ — некоторая заданная функция.

Найти численное решение задачи (1), используя компактную разностную схему для аппроксимации уравнения:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{12}\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^{n}}{\tau} + \frac{5}{6}\frac{u_{j}^{n+1} - u_{j}^{n}}{\tau} + \frac{1}{12}\frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^{n}}{\tau} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_{j}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{1}{2}\frac{u_{j+1}^{n} - 2u_{j}^{n} + u_{j-1}^{n}}{h^2}, \quad j = 1, \ldots, N-1. \end{aligned} \tag{2}$$

Представить сведения о теоретических свойствах численного метода (2). Описать логическую схему программы. Пояснить, каким способом аппроксимируются граничные условия. Показать поведение $u_j^n$. В качестве функции $f(x)$ при тестировании использовать функции $-2x^3 - x + 3$ и 1. Определить время $t^{n^*}$ необходимое для установления решения. Показать сходимость численного метода на серии последовательно измельчающихся сеток. Численно определить порядок сходимости схемы построив таблицу изменения относительной ошибки численного решения в зависимости от величин шага по пространству $h$ и шага по времени $\tau$. Численно показать абсолютную устойчивость схемы. Вычисления вести с двойной точностью.

ЛИТЕРАТУРА


1. Хакимзянов Г. С., Черный С. Г. Методы вычислений: учеб. пособие: в 4 ч. Ч. 3. Численные методы решения задач для уравнений параболического и эллиптического типов — Новосибирск: НГУ, 2007. — 160 с.

2. Михайлов А. П. Учебные задания вычислительной практики в компьютерном классе: учеб. пособие. — Новосибирск: НГУ, 2003 — 86 с.