Examen Parcial

- Responde cada pregunta, justificando, los resultados utilizados. Cada pregunta del examen contiene el desarrollo de propiedades hechas en clase y en las notas de clase, así como el conocimiento de cursos anteriores.
- Está prohibido la utilización de cuadernos entre los estudiantes participantes.
- La prueba dura 3 horas.
- Se prohiben, copias de todo índole, así como el uso de libros electrónicos.

---

1. (2ptos) Sea $\beta > 1$, $p_1, p_2, \dots$, denota números primos y sea $N(1), N(2), \dots$ variables aleatorias independientes, $N(i)$ teniendo función de masa de probabilidad $\mathbb{P}(N(i) = k) = (1 - \gamma_i)\gamma_i^k$ para $k \geq 0$, donde $\gamma_i = p_i^{-\beta}$, para todo i.

   Muestra que $M = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{N(i)}$ es un número aleatorio con función de masa de probabilidad $\mathbb{P}(M = m) = Cm^{-\beta}$ para $m \geq 1$, donde C es una constante satisfaciendo

   $$C = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_i^{\beta}}\right) = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\beta}}\right)^{-1}.$$

2. (2ptos) Sean X e Y dos variables aleatorias discretas con idéntico conjunto de posibles valores $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, donde $a_1, a_2, \dots a_n$ son diferentes números reales. Muestra que si

   $$\mathbb{E}(X^r) = \mathbb{E}(Y^r), \quad r = 1, 2, \dots, n-1,$$

   entonces X e Y son idénticamente distribuidas. Esto es,

   $$\mathbb{P}(X = t) = \mathbb{P}(Y = t) \quad \text{para } t = a_1, a_2, \dots, a_n.$$

3. (2ptos) Cada miembro de un grupo de n jugadores tira un dado.
   (a) Para cualquier par de jugadores que lanzen el mismo número, el grupo suma 1 punto. Encuentra la media y la varianza de la puntuación total del grupo.
   (b) Encuentre la media y la varianza de la puntuación total si cualquier par de jugadores que lanzan el mismo número anotan ese número.

4. (2ptos) Encuentra la probabilidad que dada una fracción m/n (donde m y n son enteros) es irreducible.

5. (3ptos) El problema de los `menages` plantea la siguiente pregunta. Algunos consideran deseable que los hombres y las mujeres alternen cuando están sentados en una mesa circular. Si n parejas están sentadas al azar de acuerdo con esta regla, muestra que la probabilidad de que nadie se sienta junto a su pareja es

   $$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

   Puede resultar útil mostrar primero que el número de formas de seleccionar k pares no superpuestos de asientos adyacentes es $\binom{2n-k}{k}2n(2n-k)^{-1}$.

6. (3ptos) Sea $p > 0, q > 0$ tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$ y X, Y variables aleatorias positivas. Entonces

$$\mathbb{E}(XY) \leq [\mathbb{E}(X^p)]^{1/p}[\mathbb{E}(Y^q)]^{1/q}.$$

   Muestra también que

$$g(t) = \log \mathbb{E}(|X|^t)$$

   es una función convexa. Entonces muestra que $[\mathbb{E}(|X|^t)]^{1/t}$ es una función creciente en t.

7. (3ptos) A una clase de ingeniería que tiene $2n-3$ estudiantes varones y tres mujeres, hay n puestos de trabajo disponibles. Para asignar cada puesto de trabajo a dos estudiantes, el profesor forma n equipos uno a la vez, cada uno compuesto por dos estudiantes seleccionados al azar. En este proceso, sea X el número total de estudiantes seleccionados cuando aparece el primer equipo formado por un hombre y una mujer. Encuentra la función de masa de probabilidad y el valor esperado de X.

8. (3 ptos) Sean $\{I_r : 1 \leq r \leq n\}$ variables aleatorias Bernoulli independientes con respectivos paramétros $\{p_r : 1 \leq r \leq n\}$ satisfaciendo $p_r \leq c < 1$ para todo r y algún c. Sea $\lambda = \sum_{r=1}^{n} p_r$ y $X = \sum_{r=1}^{n} X_r$. Muestra que

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\left\{1 + O\left(\lambda \max_r p_r + \frac{k^2}{\lambda} \max p_r\right)\right\}.$$