Curso: Introducción a la Probabilidad y Estadística CM -274
Práctica dirigida
.

Lista de ejercicios

---

1. Sean $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \{0, 1, \dots\}$, entonces

$$\binom{z}{m} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(z+1)}{m!\Gamma(z-m+1)} & \text{si } \; m \leq z \\ (-1)^m \dfrac{\Gamma(m-z)}{m!\Gamma(-z)} & \text{si } \; z < 0 \\ (-1)^{[[m-z]]} \dfrac{\Gamma(z+1)\Gamma(m-z)}{m!} \dfrac{\langle z \rangle (1 - \langle z \rangle)}{\Gamma(1 + \langle z \rangle)\Gamma(2 - \langle z \rangle)} & \text{si } \; 0 \leq z < m \end{cases}$$

en donde $\langle z \rangle$ representa a la parte decimal de z, Γ, la función gamma y $[[m-z]]$ a la parte entera de $m-z$.

2. Prueba los siguientes resultados

(a) (Fórmula de Wallis)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots (2n)2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

(c) Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{1}{2}\ln(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^3} + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^5} + \cdots$$

(d) (Fórmula de Stirling) Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$n! = \sqrt{2\pi} n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{\theta n}, \qquad \text{en donde} \qquad \frac{1}{12n+1} < \theta_n < \frac{1}{12n}.$$

3. (a) Sea X una variable aleatoria que toma un número finito de valores $(x_i, 1 \leq i \leq n)$, con masa de probabilidad $\mathbb{P}(X = x) = f(x)$. Supongamos que $(a_i, 1 \leq i \leq n)$ tal que $a_i > 0$ para $1 \leq i \leq n$ y $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Muestra que,

$$-\sum_{i=1}^{n} f(i) \log a_i \geq -\sum_{i=1}^{n} f(i) \log f(i)$$

y que la igualdad se cumple si y sólo si $a_i = f(i)$ para todo i.

(b) Las variables aleatorias X e Y toman un número finito de valores y tienen una masa conjunta $f(x, y)$. Definimos

$$I(X, Y) = \sum_x \sum_y f(x, y) \log\left(\frac{f(x, y)}{f_X(x) f_Y(y)}\right).$$

Muestra que $I \geq 0$ y que la igualdad se cumple si X e Y son independientes.

4. (a) Sea X una variable aleatoria binomial con parámetros n y p, tal que $np = \lambda$. Muestra que para un k fijo, $n \to \infty$ con λ fijo, se cumple

$$\mathbb{P}(X = k) \to \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}.$$

   (b) Durante $1979 - 1981$, en Bristol, 1103 carteros sufrieron 215 mordiscos de perro. Un total de 191 carteros fueron mordidos, de los cuales 145 fueron mordidos solo una vez. ¿Cuál debería ser el lema del cartero: `una vez mordido, dos veces nervioso` o `una vez mordido, dos veces mordido`?.

5. Los términos $t_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^k$, de una distribución binomial, crecen con k hasta alcanzar su máximo valor cuando $np + p - 1 \leq k + np + p$, después de lo cual decrecen con k.

6. Sea Ω un experimento aleatorio y A un evento relativo a ese experimento, de probabilidad igual a p. Consideremos un nuevo experimento aleatorio consistente en la repetición indefinida del experimento Ω, de tal manera que cada repetición es independiente de las otras. Sea X_n el número de veces que ocurre el evento A en las primeras n repeticiones del experimento y ϵ un número positivo arbitrario, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\left|\frac{X_n}{n} - p\right| > \epsilon\right] = 0$$

7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea X una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y $p \in (0,1)$. Dados a y b dos números reales tales que $a < b$, definimos, para cada entero no negativo k tal que $np + a\sqrt{npq} \leq k \leq np + b\sqrt{npq}$, $x_{k,n} = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X_n = k)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x_{k,n}^2\right\}} = 1 \qquad \text{uniformemente en k.}$$

   Usa el anterior resultado para el caso, en el que tenemos un entero no negativo tal que $k \leq n$, para probar que se cumple,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = 0 \qquad \text{uniformemente en k.}$$

8. (Teorema integral de Moivre-Laplace) Sean a y b dos números reales tales que $a < b$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea X_n una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y $p \in (0,1)$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(a < \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

   Utiliza este teorema de Moivre-Laplace para estimar la probabilidad de que en más 10000 dǵitos, seleccionados al azar, el número 7 no aparezca más de 985 veces.

9. Sea X una variable aleatoria con distribución normal de parámetros $\mu = 2.4$ y $\sigma^2 = 1.6$. Encuentra $\mathbb{P}(2 < X < 3), \mathbb{P}(-1 < X < 0.5), \mathbb{P}(X > -1.5)$ y $\mathbb{P}(X > 3.1)$.

10. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ y sea $M > 0$. Encuentra $\mathbb{E}[\min(X, M)]$.

11. En una estación meteorológica se cuenta con un tipo de aparato de medición, el cual tiene un tiempo de vida que se distribuye exponencialmente, de tal manera que su tiempo promedio de vida es de 1000 horas.

    Si se utilizan 10 de estos aparatos de forma consecutiva, uno de ellos después de que el anterior ya no funciona, a) ¿ cuál es la probabilidad de que algunos de los aparatos estará funcionando después de 1000 horas?, b) si después de 5000 horas todavía está funcionando algunos de los aparatos, ¿ cuál es la probabilidad de que alguno de ellos siga funcionando después de 10000 horas más?.

12. (a) Sea X una variable aleatoria con función de distribución F_X, Y una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$ y definimos la función $d : (0,1) \to \mathbb{R}$ mediante la relación $d(t) = \inf\{s \in \mathbb{R} : F_X(s) \geq t\}$, entonces la función de distribución de la variable aleatoria $d(Y)$ es F_X. ¿ Qué sucede en el caso estricto?.

(b) Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p, entonces

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sum_{k=0}^{[[x]]} p(1-p)^k & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

donde $[[x]]$ es el mayor entero menor o igual a x.

Prueba si U tiene distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$, entonces $\left[\left[\frac{\ln(1-U)}{\ln(1-p)}\right]\right]$ tienen distribución geométrica con paramétrica p.

(c) Sea X una variable aleatoria con distribución Poisson de parámetro λ, entonces,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sum_{k=0}^{[[x]]} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

donde $[[x]]$ es el mayor entero menor o igual a x.
Prueba si U tiene distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$, entonces,

$$c(Y) = \inf\{j \in \{0,1,\dots\} : \sum_{k=0}^{j} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} > Y\}$$

tiene distribución de Poisson con paramétro λ.

13. Sea X una variable aleatoria con función de distribución dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10}x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 2 \\ \frac{1}{10}x^2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Encuentra la esperanza de X.

14. Sea X una variable aleatoria con función de distribución dada por,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{5}(x+1) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{5}(x+2) & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Encuentra las esperanzas de X y X^2.

15. Sea X una variable aleatoria con función densidad dada por,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{6}{\pi^2 x^2} & x \in \{1,3,\dots\} \cup \{-2,-4,\dots\} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

¿ Está definida la esperanza de X?.

16. Muestra que la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x-m|f(x)dx$ se vuelve mínima cuando m es la mediana de la distribución con densidad f.

17. Si $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^2) = 0$, prueba que $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.

18. Sea $n \in \mathbb{N}$, X una variable aleatoria tal que X^n tiene esperanza finita y p un polinomio de grado n, entonces

$$\mathbb{E}(p(X)) = p(0) + \int_0^{\infty} p^{'}(x)[1 - F(x)]dx - \int_{-\infty}^{0} p^{'}(x)F_X(x)dx.$$

19. (a) Si X es una variable aleatoria que es uniformemente distribuida entre -1 y 1, encuentra el PDF de $\sqrt{|X|}$ y el PDF de $-\ln|X|$.
    (b) Encuentra el PDF de e^X en términos del PDF de X. Muestra el resultado en el caso donde X es uniformememente distribuida entre 0 y 1.
    (c) Encuentra el PDF de $|X|^{1/3}$ y $|X|^{1/4}$ en términos del PDF de X.

20. Las variables aleatorias X, Y y Z son independientes y uniformemente distribuidas entre cero y uno. Encuentra el PDF de $X + Y + Z$.

21. Sea X e Y variables aleatorias con correlación ρ. Muestra que $\mathbb{E}(\mathrm{Var}(Y|X)) \leq (1-\rho^2)\mathrm{Var}Y$.

22. Considera a un jugador que en cada apuesta gana o pierde su apuesta con probabilidades p y $1-p$, independientemente de las apuestas anteriores. Cuando $p > 1/2$, un sistema de juego , conocido como la estrategia de Kelly, es apostar siempre la fracción $2p-1$ de la fortuna actual. Calcula la esperanza de la fortuna después de n apuestas, comenzando con x unidades y empleando la estrategia de Kelly.

23. Muestra que para una variable aleatoria discreta o continua X y alguna función $g(Y)$ de otra variable aleatoria Y, tenemos $\mathbb{E}(Xg(Y)|Y) = g(Y)\mathbb{E}(X|Y)$.

24. Sean $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ los estadísticas de orden de una familia de variables aleatorias independientes con una función de distribución continua común F. Demuestra que

$$Y_n = [F(X_{(n)})]^n, \qquad Y_r = \left[\frac{F(X_{(r)})}{F(X_{(r+1)})}\right], \qquad 1 \leq r < n,$$

son independientes y uniformemente distribuidas en $[0, 1]$.

25. Supongamos que una variable aleatoria, satisface

$$\mathbb{E}(X) = 0, \quad \mathbb{E}(X^2) = 1, \quad \mathbb{E}(X^3) = 0, \quad \mathbb{E}(X^4) = 3$$

y sea

$$Y = a + bX + cX^2$$

Encuentra el coeficiente de correlación $\rho(X, Y)$.

26. Sea X una variable aleatoria con función densidad dada

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x \in \{-1, 1\} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y sea Z un variable aleatoria, independiente de X, con distribución uniforme en en el conjunto $\{-1, 1\}$. Definimos la variable aleatoria Y de la siguiente manera:

$$Y = \begin{cases} Z & \text{si } X = 0 \\ 0 & \text{en otros caso} \end{cases}$$

Muestra que X e Y son independientes y que se cumple $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

27. Si el sol sale durante n dias consecutivos, ¿cuál es la probabilidad de que salga mañana, si se sabe que la salida o no del sol es una variable aleatoria de Bernoulli?.

28. Consideremos el experimento aleatorio consistente en la elección al azar de un número real en el intervalo $(0, 1)$ y sea X el número que se obtiene.¿ Cuál es la probabilidad de que a) X sea un número racional? y b) X pertenezca al conjunto de Cantor?.

29. Si el n-ésimo momento de la variable aleatoria X con función de distribución F existe, muestra que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X-c)^k = k &\int_c^{\infty} (x-c)^{k-1}[1-F(x)]dx \\ - k &\int_{-\infty}^{c} (x-c)^{k-1}F(x)dx, \qquad 1 \leq k \leq n.\end{aligned}$$

30. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, encuenta el momento de orden n de una variable aleatoria con distribución normal estándar.