Introducción a la probabilidad y estadística CM274

César Lara Avila

16 de septiembre de 2017

https://github.com/C-Lara

8 . Transformaciones de variables aleatorias

Transformaciones

Las transformaciones de las variables aleatorias aparecen por todas partes en estadística.

- **Conversión de unidades:** en una dimensión, la estandarización y las transformaciones a escala-localización pueden ser herramientas útiles para aprender acerca de toda una familia de distribuciones.

  Un cambio de escala-localización es lineal, convirtiendo una variable aleatoria X a la variable aleatoria $Y = aX + b$ donde a y b son constantes (con $a > 0$).

- **Sumas y promedios como resúmenes :** Es común en estadística resumir n observaciones por su sumas o promedios. Si llevamos $X_1, \ldots, X_n$ en la suma $T = X_1 + \cdot + X_n$ o la media muestral $\overline{X}_n = T/n$ tenemos una transformación de R^n a R.

  El término para una suma de variables aleatorias independientes es convolución.

Transformaciones

- **Valores extremos:** En muchos contextos, podemos estar interesados en la distribución de las observaciones más extremas. Para la preparación para desastres, las agencias gubernamentales pueden estar preocupadas por la inundación o terremoto más extremos en un período de 100 años; en finanzas, un administrador de portafolio con una visión hacia la gestión de riesgo querrá saber el peor 1 % o 5 % de los rendimientos del portafolio.

  En estas aplicaciones, nos interesa el máximo o mínimo de un conjunto de observaciones.

  La transformación que ordena observaciones, llevando $X_1, \dots, X_n$ en el orden estadístico $\text{mín}(X1, \dots, X_n), \dots, \text{máx}(X_1, \dots, X_n)$, es una transformación de R^n a R^n que no es invertible.

Con unas pocas distribuciones básicas, podemos definir otras distribuciones usando transformaciones. Por ejemplo las distribuciones, Beta y Gamma, son generalizaciones de las distribuciones uniforme y exponencial.

Algunos resultados importantes: caso discreto

- Si nos encontramos en el caso discreto, obtenemos el PMF de $g(X)$ trasladando el evento $g(X) = y$ en un evento equivalente involucrando X. Para ello, buscamos todos los valores x tales que $g(x) = y$; siempre que X sea igual a cualquiera de estas x, ocurrirá el evento $g(X) = y$. Esto da la fórmula:

$$\mathbb{P}(g(X) = y) = \sum_{x:g(x)=y} \mathbb{P}(X = x).$$

  Para una función g inyectiva, la situación es particularmente simple, porque sólo hay un valor de x tal que $g(x) = y$, a saber $g^{-1}(y)$. Entonces podemos usar

$$\mathbb{P}(g(X) = y) = \mathbb{P}(X = g^{-1}(y))$$

  para convertir entre los PMF de X y $g(X)$.

Algunos resultados importantes: caso continuo

- En el caso continuo, un enfoque universal es partir de la CDF de $g(X)$ y trasladar el evento $g(X) \leq y$ en un evento equivalente que involucra a X. Para una función general g, tenemos que pensar cuidadosamente sobre cómo expresar $g(X) \leq y$ en términos de X y no hay una fórmula fácil que podamos conectar.

  Pero cuando g es continua y estrictamente creciente, la traslación es fácil: $g(X) \leq y$ es el mismo como $X \leq g^{-1}(y)$, así

$$F_{g(X)}(y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)).$$

Entonces podemos diferenciar con respecto a y para obtener el *PDF* de $g(X)$. Esto da una versión unidimensional de la fórmula de cambio de variables, que se generaliza a transformaciones invertibles en múltiples dimensiones.

Cambio de variable

(Cambio de variable en una dimensión). Sea X una una variables aleatoria continua, con PDF f_X y sea $Y = g(X)$, donde g es diferenciable y estrictamente creciente (o estrictamente decreciente). Entonces el PDF de Y es dado por

$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|,$$

donde $x = g^{-1}(y)$. El soporte de Y es todo $g(x)$ con x en el soporte de X.

En efecto:

Sea g es estrictamente creciente. El CDF de Y es

$$F_Y(y)(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y) = \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)) = F_X(x),$$

Cambio de variable

Luego por la regla de la cadena, el PDF de Y es

$$f_Y(y) = f_X(x)\frac{dx}{dy}.$$

La prueba para g estrictamente decreciente es análoga. En ese caso el PDF termina como $-f_X(x)\frac{dx}{dy}$, que es no negativo ya que $\frac{dx}{dy} < 0$ si g es estrictamente decreciente. Usando $|\frac{dx}{dy}|$, cubre ambos casos.

Al aplicar la fórmula de cambio de variable, podemos elegir si se calcula $\frac{dy}{dx}$ o calcular $\frac{dx}{dy}$ y luego tomar el recíproco. De cualquier manera, al final deberíamos expresar el PDF de Y como una función de y.

La fórmula de cambio de variables (en el caso de que g estrictamente creciente) es fácil de recordar cuando se escribe en la forma

$$f_Y(y)dy = f_X(x)dx,$$

que tiene una simetría estéticamente agradable.

Ejemplos

Ejemplo 1: Sea $X \sim N(0,1)$, $Y = e^X$, usemos la fórmula de cambio de variable para encontrar el PDF de y.

En efecto:

Desde que $g(x) = e^x$ es estrictamente creciente. Sea $y = e^x$, así $x = \log y$ y $dy/dx = e^x$. Entonces

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \varphi(x)\frac{1}{e^x} = \varphi(\log y)\frac{1}{y}, \quad y > 0.$$

Ten en cuenta que después de aplicar la fórmula de cambio de variable, escribimos todo a la derecha en términos de y y luego especificamos el soporte de la distribución. Para determinar el soporte, sólo observamos que como x varía desde $-\infty$ a ∞, e^x oscila entre 0 y ∞.

Podemos obtener el mismo resultado trabajando a partir de la definición del CDF, trasladando el evento $Y \leq y$ en un evento equivalente involucrando X.

Ejemplos

Para $y > 0$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(e^X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \log y) = \Phi(\log y),$$

así el PDF otra vez

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\Phi(\log y) = \varphi(\log y)\frac{1}{y}, \quad y > 0.$$

Ejemplo 2: Sea $X \sim N(0,1)$, $Y = X^2$. La distribución de Y es un ejemplo de una distribución Chi-cuadrada. Para encontrar el PDF de Y, ya no podemos aplicar la fórmula de cambio de variables porque $g(x) = x^2$ no es uno a uno; en lugar de eso, empezamos revisando la CDF.

Dibujando el gráfico de $y = g(x) = x^2$, podemos ver que el evento $X^2 \leq y$ es equivalente al evento $-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}$.

Ejemplos

Entonces

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) = 2\Phi\sqrt{y} - 1,$$

Así

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y) = 2\varphi(\sqrt{y}) \cdot y^{-1/2} = \varphi(\sqrt{y})y^{-1/2}, \quad y > 0.$$

También podemos usar la fórmula de cambio de variable para encontrar el PDF de una transformación de escala-localización.

Ejemplo 3: Sea X una variable aleatoria que tiene un PDF f_X y sea $Y = a + bX$ con $b \neq 0$. Sea $y = a + bx$, para reflejar la relación entre Y y X. Entonces $\frac{dy}{dx} = b$, así el PDF de Y es

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)\frac{1}{|b|}.$$

Ejemplos

Ejemplo 4: Sea $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, así $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ sobre $[0, \infty]$. Calculemos la densidad de $Y = X^2$.

Usemos la fórmula de cambio de variable,

$y = x^2 \to dy = 2xdx \to dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$.

Luego tenemos que: $f_X(x)dx = \lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda e^{-\lambda\sqrt{y}} \frac{dy}{2\sqrt{y}} = f_Y(y)dy$.

$\therefore f_Y(y) = \frac{\lambda}{2\sqrt{y}} e^{-\lambda\sqrt{y}}$.

Ejemplo 5: Asumamos que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Muestra que $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ es normal estándar, esto es, $Z \sim N(0, 1)$.

Mostremos los cálculos

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \to dz = \frac{dx}{\mu} \to dx = \sigma dz. \text{ Entonces}$$

$f_X(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}dz = f_Z(z)dz$.

$\therefore f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$. Esto muestra que Z es normal estándar.