Examen Parcial

- Responde cada pregunta, justificando, los resultados utilizados. Cada pregunta del examen contiene el desarrollo de propiedades hechas en clase y en las notas de clase.
- Está prohibido compatir cuadernos entre estudiantes. Si se trasgede esta regla, se eliminará la utilización de los cuadernos en el examen.
- Se prohiben, copias de todo índole, así como el uso de libros electrónicos.

---

1. Responde cada una de la preguntas:

   (a) (1 pto) En un determinado país, la probabilidad es $49/50$ de que un avión de combate seleccionado al azar regrese de una misión sin percances. Jessica argumenta que esto significa que hay una misión con un percance en cada 50 vuelos consecutivos. Ella concluye que si un piloto de caza regresa con seguridad de 49 misiones consecutivas, debe regresar a casa antes de su quincuagésima misión. ¿Está en lo correcto Jessica? Explica por qué si o por qué no. Utiliza propiedades de la teoria de las probabilidades.

   (b) (1 pto) Sean A, B y C tres eventos. Muestra que:
   $$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$$
   si y sólo si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 0$

   (c) (1pto) Un profesor distraido escribió n cartas y las selló en sobres antes de escribir las direcciones en los sobres. Luego escribió las n direcciones en los sobres al azar. ¿ Cuál es la probabilidad de que al menos una carta fue dirigida correctamente?.

   (d) (1 pto) Una moneda se lanza n veces. Calcula la probabilidad de no obtener caras sucesivas. Sugerencia: Construye una secuencia de tipo Fibonacci.

2. Resuelve las siguientes preguntas:

   (a) (2 ptos) Dos jugadores juegan el juego de `caras y sellos`, en el cual cada vez que en el lanzamiento de una moneda cae cara, el jugador A gana 1 dólar de B y cada vez que cae sello , el jugador B gana 1 de A. Supongamos que el jugador A tiene inicialmente un dólar y el jugador B tiene b dólares. Si continúan jugando este juego sucesivamente,
      - ¿Cuál es la probabilidad de que A se arruine?.
      - ¿Cuál es la probabilidad de que el juego siga para siempre sin que nadie gane?.

   (b) (1 pto) Una urna contiene 10 chips blancos y 12 chips rojos. Dos chips se extraen al azar y sin mirar sus colores, se descartan. ¿ Cuál es la probabilidad de que un tercer chip extraido sea rojo?.

   (c) (1 pto) Una caja contiene 7 bolas rojas y 13 azules. Se seleccionan dos bolas al azar y se descartan sin que se vean sus colores. Si una tercera pelota es seleccionada aleatoriamente y se observa que es roja, ¿ cuál es la probabilidad de que ambas bolas descartadas sean azules?.

3. Prueba y/o calcula las siguientes preguntas:

   (a) (1 pto) Si dos dados son lanzados seis veces, ¿cuál es la probabilidad de que la sexta suma obtenida no sea una repetición?.

   (b) (1 pto) Un dado se lanza sucesivamente. Sea X el número de lanzamientos hasta que cada uno de los seis posibles resultados ocurran al menos una vez. Halla la función de masa de probabilidad de X.

(c) (2 ptos) Una urna contiene w chips blancos y b chips azules. Un chip se extrae al azar y luego se devuelve a la urna junto con $c > 0$ chips del mismo color. Este experimento se repite sucesivamente. Sea X_n el número de chips blancos extraidos durante las primeras n extracciones. Demuestra que $\mathbb{E}(X_n) = nw/(w+b)$.

4. Resuelve:

(a) (0.5 ptos) Sea X una variable aleatoria discreta. Sea $0 < s < r$. Demuestra que si existe el r-ésimo momento absoluto de X, entonces también existe el momento absoluto de orden s de X.

(b) (1 pto) Sea X una variable aleatoria con función densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Prueba que $\mathbb{E}(|X|^\alpha)$ converge si $0 < \alpha < 1$ y diverge si $\alpha \geq 1$.

(c) (1 pto) Sean g y h dos funciones densidad de probabilidad con funciones de distribución G y H respectivamente. Muestra que para $-1 \leq \alpha \leq 1$, la función:

$$f(x,y) = g(x)h(y)(1 + \alpha[2G(x) - 1][2H(y) - 1]).$$

es una función densidad de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias. Prueba, que g y h son las funciones de densidad marginal de f.

(d) (0.5 ptos) Los $2n$ asientos alrededor de una mesa circular están numerados en sentido horario. Los huéspedes en la cena forman n pares de rey y reina. Las reinas se sientan al azar en los asientos impares, con los reyes de manera aleatoria entre ellas. Sea N el número de reinas sentadas al lado de su rey. Encuentra la media y la varianza de N.

(e) (0.5 ptos) Sea X una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2/x^2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Encuentra la distribución y la función de densidad de $Y = X^2$.

(f) (0.5 ptos) Contruye un contraejemplo, con variables aleatorias discretas; que si $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ entonces no se cumple que X e Y son independientes.

5. Prueba y calcula, los siguientes ejercicios:

(a) (1 pto) Demuestra que si X e Y son variables aleatorias normales estándar independientes, entonces $X + Y$ y $X - Y$ son variables aleatorias independientes.

(b) (1 pto) Si se cumple, para una variable aleatoria discreta N con un conjunto de posible valores $\{1, 2, 3, \ldots\}$ que $\mathbb{E}(N) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq 1)$, prueba usando esta propiedad lo siguiente:

Sean $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$ una secuencia de variables aleatorias independientes con $\mathbb{P}(X_j = i) = p_i (1 \leq j \leq n \text{ y } i \geq 1)$. Sea $h_k = \sum_{i=k}^{\infty} p_i$, entonces:

$$\mathbb{E}[\min(X_1, X_2, \ldots X_n)] = \sum_{k=1}^{\infty} h_k^n.$$

(c) (1 pto) Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Prueba que $\mathbb{P}(|X - \mu|) > k\sigma$ no depende de μ o σ.

(d) (1pto) Si X es una variable aleatoria, muestra que, para $\alpha > 1$ y $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{t} \ln \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \mathbb{M}_X(t).$$