Lista de ejercicios

1. Lanzamos una moneda dos veces y sea X el número de caras obtenidas. ¿ Cuál es la esperanza o el valor esperado de X?.

2. Escribimos los números $a_1, a_2, \dots$, para bolas idénticas y las mezclamos en una caja. ¿Cuál es el valor esperado de una bola seleccionada al azar?.

3. El departamento de matemáticas de una universidad envía 8 a 12 profesores a la reunión anual de la Sociedad Matemática Latinoamericana, que dura cinco dias. El hotel en el que se celebra la conferencia ofrece una tarifa de un dolar por dia por persona, si las reservas se realizan 45 o más dias de antelación, pero cobra un cargo de cancelación de 2 dolares por persona. El departamento no está seguro de cuántos profesores irán.

   Sin embargo, de la experiencia pasada se sabe que la probabilidad de la asistencia de i profesores es $1/5$ para $i = 8, 9, 10, 11$ y 12. Si la tarifa regular del hotel es $2a$ dolares por dia por persona. ¿ Debería hacer el departamento alguna reserva?si es así, ¿ cuántos?.

4. En la loteria de un determinado estado, los jugadores eligen seis enteros diferentes entre el 1 y 49, siendo el orden de selección irrelevante. La comisión de la loteria entonces selecciona seis de estos números al azar como los números que deberian ser los ganadores. Un jugador gana el gran premio de $1, 200, 000$ soles, si los seis números que ha seleccionado coinciden con los números ganadores. Gana el segundo y tercer premio de 800 y 35 soles, respectivamente, si exactamente cinco y cuatro de sus seis números seleccionados coinciden con los números ganadores. ¿ Cuál es la esperanza de la cantidad que un jugador gana en un juego?.

5. En un juego, un jugador lanza una moneda sucesivamente hasta que consigue una `Cara`. Si esto ocurre en el k-ésimo lanzamiento, el jugador gana 2^k soles. Por lo tanto, si el resultado del primer lanzamiento es cara, el jugador gana 2 soles. Si el resultado del primer lanzamiento es sello y el segundo lanzamiento es cara, el gana 4. Si los resultados de los dos primeros lanzamientos son sellos, pero el tercero sale cara, ganará 8 soles y así sucesivamente. La pregunta es, para jugar este juego, ¿ cuánto debe pagar una persona, que está dispuesta a jugar este juego?.

6. Sea X_0, la cantidad de lluvia que caerá en los Estados Unidos el próximo dia de Navidad. Para $n > 0$, sea X_n la cantidad de lluvia que caerá en los Estados Unidos en Navidad, n años después. Sea N el menor número de años que transcurren antes de una lluvia de Navidad mayor que X_0. Supongamos que $P(X_i = X_j) = 0$ si $i \neq j$, los sucesos relativos a la cantidad de lluvia en dias de Navidad de diferentes años son independientes y los X_n son idénticamente distribuidos. Hallar el valor esperado de N.

7. Los aviones de la fuerza área de un país se numeran de 1 a N. En una guerra este país pierde n aviones aleatorios al enemigo. que descubre que los aviones capturados están numerados. Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son los números de aviones capturados, ¿ qué es $\mathbb{E}(\max X_i)$?. ¿ Cómo puede el enemigo usar $\mathbb{E}(\max X_i)$ para encontrar una estimación de N, el número total de aviones de ese país?.

8. Una urna contiene w chips blancos y b chips azules. Un chip se extrae al azar y luego se devuelve a la urna junto con $c > 0$ chips del mismo color. Este experimento se repite sucesivamente. Sea X_n el número de chips blancos sacados durante los primeros n extracciones. Demuestre qua $\mathbb{E}(X_n) = nw/(w + b)$.

9. Una urna contiene w chips blancos y b chips azules. Un chip se extrae al azar y luego se devuelve a la urna junto con $c > 0$ chips del mismo color. Demuestre que si $n = 2, 3, 4, \dots$, tales experimentos se hacen, entonces en cada extracción la probabilidad de un chip blanco es todavia $w/(w + b)$ y la probabilidad de un chip azul es $b/(w + b)$. Este modelo se introdujo por primera vez en estudios preliminares de `enfermedades contagiosas`, `la propagación de epidemias`, así como en `propensión a accidentes` de las matemáticas actuariales.

10. Se sabe que $\sum_{x=1}^{\infty} 1/x^2 = \pi^2/6$.

    (a) Muestra que $p(x) = 6/(\pi x)^2$, $x = 1, 2, 3, \ldots$, es la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria X.

    (b) Prueba que $\mathbb{E}(X)$ no existe.

    (c) Muestra que $p(x) = (|x| + 1)^2/27$, $x = -2, -1, 0, 1, 2$ es la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria X.

    (d) Calcula $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(|X|$ y $\mathbb{E}(2X^2 - 5X + 7)$.

11. La función distribución de una variable aleatoria X es dado por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -3 \\ 3/8 & -3 \le x < 0 \\ 1/2 & 0 \le x < 3 \\ 3/4 & 3 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4 \end{cases}$$

12. Supongamos que, para una variable aleatoria discreta X, $\mathbb{E}(X) = 2$ y $\mathbb{E}[X(X-4)] = 5$. Encuentra la varianza y la desviación estándar de $-4X + 12$.

13. Encuentra la varianza y la desviación estándar de una variable aleatoria X con función distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -3 \\ 3/8 & -3 \le x < 0 \\ 3/4 & 0 \le x < 6 \\ 1 & x \ge 6. \end{cases}$$

14. Sea X un entero aleatorio, del conjunto $\{1, 2, \ldots, N\}$. Encuentra $\mathbb{E}(X), \mathbb{V}(X)$ y la desviación estándar de X.

15. Sean X e Y una variable aleatoria y ω un punto dado. Sea $t > 0$:

$$\mathbb{P}(|Y - \omega| \le t) \le \mathbb{P}(|X - \omega| \le t)$$

    entonces, decimos que X es más concentrado sobre ω que Y.

    Sea X una variable definida como:

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/2.$$

    Sea Y una variable definida como:

$$\mathbb{P}(Y = -10) = \mathbb{P}(Y = 10) = 1/2.$$

    ¿ Cuál de las dos variables aleatorias es concentrada alrededor del 0?. Explica tu respuesta.

16. Para $n = 1, 2, 3, \ldots$, sea $x_n = (-1)^n \sqrt{n}$. Sea X una variable aleatoria discreta con un conjunto positivo de valores $A = \{x_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ y una funci ón de masa de probabilidad

$$p(X_n) = \mathbb{P}(X = x_n) = \frac{6}{(\pi n)^2}.$$

    Muestra que inclusive si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^3 p(x_n) < \infty$, $\mathbb{E}(X^3)$ no existe.

17. Sean X e Y dos variablea aleatoriaa discretas con un idéntico conjunto posible de valores $A = \{a, b, c\}$, donde a, b y c son tres diferentes números reales. Muestra que si $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ y $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y)$, entonces X e Y son idénticamente distribuidas. Esto es:

$$\mathbb{P}(X = t) = \mathbb{P}(Y = t) \text{ para } t = a, b, c.$$

18. Una variable aleatoria X con función densidad:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

es llamada una variable aleatoria de Cauchy.

(a) Encuentra el valor de c.

(b) Muestra que el valor de $\mathbb{E}(X)$ no existe.

19. Para alguna función de variable aleatoria continua X con una función de distribución de probabilidad F y densidad f. Prueba que se cumple:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty [1 - F(t)]dt - \int_0^\infty F(-t)dt.$$

20. Un punto x es seleccionado desde el intervalo $(0, \pi/4)$ aleatoriamente. Calcula $\mathbb{E}(\cos 2X)$ y $\mathbb{E}(\cos^2 X)$.

21. Sea X una variable aleatoria con función densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Calcula $\mathbb{V}(X)$.

22. Supongamos que X, el tiempo de entrecruzamiento entre dos clientes que entran en una determinada oficina postal, satisface:

$$\mathbb{P}(X > t) = \alpha e^{-\lambda t} + \beta e^{-\mu t}, \quad t \geq 0,$$

donde $\alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \lambda > 0, \mu > 0$. Calcula el valor esperado de X.

23. Sea $n \geq 1$, sea X_n una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad, dado por:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{c_n}{x^{n+1}} & x \geq c_n, \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

X_n es llamada variable aleatoria de Pareto y son usadas para estudiar distribuciones de ingresos.

(a) Calcula $c_n, n \geq 1$.

(b) Encuentra $\mathbb{E}(X_n), n \geq 1$.

(c) Determina la función densidad de $Z_n = \ln X_n,\ n \geq 1$.

(d) ¿ Para qué valores de m, $\mathbb{E}(X_n^{m+1})$ existe?.

24. Sea X una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad $f(x)$. Determina el valor de y, para el cual $\mathbb{E}(|x - y|)$ es mínimo.

25. Sea X una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad, dado por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} x \sin x & \text{si } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Prueba que :

$$\mathbb{E}(X^{n+1}) + (n+1)(n+2)\mathbb{E}(X^{n-1}) = \pi^{n+1}.$$

26. Sea X una variable aleatoria continua con función densidad f. Muestra que si $\mathbb{E}(X)$ existe, entonces:

$$\lim_{x \to -\infty} x\mathbb{P}(X \leq x) = \lim_{x \to \infty} x\mathbb{P}(X > x) = 0.$$

27. Sea X una variable aleatoria no negativa con función densidad f. Muestra que:

$$\mathbb{E}(X^r) = \int_0^\infty r x^{r-1} \mathbb{P}(X > x) dx$$

para algún $r \geq 1$, para el cuál la esperanza es finita.

28. Muestra que la media μ, mediana m y la varianza σ^2 de una variable aleatoria continua X, satisface $(\mu - m)^2 \leq \sigma^2$.

29. Sea X una variable aleatoria no negativa con un función distribución F. Definamos:

$$I(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } X > t \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

   (a) Prueba que $\displaystyle\int_0^\infty I(t) dx = X.$

   (b) Si X es una variable aleatoria continua, tomando valores no negativos, muestra que:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty [1 - F_X(x)] dx,$$

   cuando esta integral existe. Usa el resultado de la parte (a).

   (c) Paraa $r > 0$, usa la parte (b) para probar que:

$$\mathbb{E}(X^r) = r \int_0^\infty t^{r-1} [1 - F(t)] dt.$$

30. Usa el resultado (b) del ejercicio anterior, para mostrar que:

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^\infty g(x) f_X(x) dx$$

cuando X y $g(X)$ son variables aleatorias continuas y $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$.