Curso: Introducción a la Probabilidad y Estadística CM -274
Práctica dirigida 8
Distribuciones discretas y continuas (2).

Lista de ejercicios

1. Sólo el 60% de ciertos tipos de semillas germinan cuando se plantan en condiciones normales. Supongamos que se plantan cuatro de estas semillas y X denota el número de las que germinarán. Encuentra las funciones de masa de probabilidad de X e $Y = 2X + 1$.

2. Sea X una variable aleatoria binomial con parámetros (n, p) y con una función de masa de probabilidad $p(x)$. Prueba que si $(n+1)p$ es un entero, entonces $p(x)$ es máximo en dos puntos diferentes. Encuentra ambos puntos.

3. Supongamos que los niños nacen a una tasa de Poisson de cinco por dia en un determinado hospital. ¿Cuál es la probabilidad de que (a) al menos dos bebés nazcan durante las siguientes seis horas; (b) ¿ no nacen bebés durante los próximos dos dias?.

4. Un pescador captura peces a una tasa de Poisson de dos por hora de un gran lago con muchos de peces. Ayer fue a pescar a las $10:00$ de la mañana y consiguió un solo pez a las $10:30$ y un total de tres al mediodia. ¿ Cuál es la probabilidad de que pueda duplicar esta hazaña mañana?.

5. En un dia al azar, el número de habitaciones vacantes de un gran hotel en la ciudad de Nueva York es de 35, en promedio. ¿ Cuál es la probabilidad de que el próximo sábado este hotel tenga por lo menos 30 habitaciones vacías?.

6. En una ciudad determinada, los delitos ocurren a una tasa de Poisson de cinco por mes. ¿ Cuál es la probabilidad de tener exactamente dos meses (no necesariamente consecutivos) sin delitos durante el próximo año?.

7. Pelotitas enumeradas $1, 2, \ldots, n$ son colocadas aleatoriamente en celdas numeradas $1, 2, \ldots$ y n. Por tanto para cada $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$, la probabilidad que la pelotita i se encuentra en una celda j es $1/n$. Para cada $i, 1 \leq i \leq n$, si la pelotita i está en la celda i, decimos que un `emparejamiento` ha ocurrido en la celda i.

   (a) ¿ Cuál es la probabilidad de que hay k `emparejamientos`?.

   (b) Sea $n \to \infty$. Muestra que la función de masa de probabilidad del número de `emparejamiento` es de Poisson con media 1.

8. Un padre pide a sus hijos cortar el césped de su patio trasero. Puesto que no especifica cuál de los tres hijos debe hacer el trabajo, cada muchacho lanza una moneda para determinar a la persona, que debe entonces cortar el césped. En el caso de que todos obtienen caras o sellos, siguen lanzando hasta que lleguen a una decisión. Sea p la probabilidad de caras y $q = 1 - p$, la probabilidad de sellos.

   (a) Encuentra la probabilidad de que lleguen a una decisión en menos de n lanzamientos.

   (b) Si $p = 1/2$, ¿ Cuál es el número mínimo de lanzamientos necesarios para llegar a una decisión con probabilidad 0.95?.

9. Un matemático fumador lleva dos cajas de fósforos, una en su bolsillo derecho y otra en su bolsillo izquierdo. Cada vez que quiere fumar, elige un bolsillo al azar y toma un fósforo de la caja en ese bolsillo. Si cada caja de fósforos contiene inicialmente N fósforos, ¿cuál es la probabilidad de que cuando el matemático descubre por primera vez que una caja está vacía, hay exactamente m fósforos en la otra caja, donde $m = 0, 1, 2, \ldots, N$?.

10. La probabilidad es p de que una bombilla elegida al azar sea defectuosa. Atornillamos una bombilla en una lámpara y encendemos la corriente. Si la bombilla funciona, nos detenemos; de lo contrario, intentaremos con otra y continuaremos hasta que se encuentre una buena bombilla. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos n bombillas son requeridas?.

11. Para estimar el número de truchas en un lago, capturamos 50 truchas, las etiquetamos y devolvemos. Más tarde pescamos 50 truchas y encontramos que cuatro de ellas fueron etiquetadas. A partir de este experimento, estima n, el número total de truchas en el lago.

12. A partir de las $5:00$ a.m., cada media hora hay un vuelo desde el aeropuerto de Lima al aeropuerto internacional de Los Ángeles. Suponiendo que ninguno de estos aviones está completamente lleno y que siempre tienen espacio para los pasajeros, una persona que quiere volar a Los Ángeles, llega al aeropuerto en un tiempo aleatorio entre $8:45$ a.m. y $9:45$ a.m. Encuentra la probabilidad de que esta persona espere (a) como máximo 10 minutos, (b) al menos 15 minutos.

13. El radio de una esfera es un número aleatorio entre 2 y 4. ¿ Cuál es el valor esperado de su volumen?. ¿ Cuál es la probabilidad de que su volumen sea a lo más 36π?.

14. Un agricultor que tiene dos piezas de madera de longitud a y b $(a < b)$ decide construir un gallinero en forma de triángulo para sus pollos. El envía a uno de sus hijos a cortar el pedazo más largo y el muchacho, sin tomar ningún criterio, hace un corte en la madera de longitud b, en un punto seleccionado al azar. ¿ Cuáles son las posibilidades de que las dos piezas resultantes y la pieza de longitud a se puedan utilizar para formar un gallinero triangular?.

15. Sea θ un número aleatorio entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Encuentra la función densidad de probabilidad de $X = \tan\theta$.

16. Sea X un número aleatorio de $(0,1)$. Encuentra la función densidad de (a) $Y = -\ln(1-X)$ y (b)$Z = X^n$.

17. Sea X una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0, 1+\theta)$, donde $0 < \theta < 1$ es un parámetro dado. Encuentra una función de X, $g(X)$, tal que $\mathbb{E}[g(X)] = \theta^2$.

18. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución F. Prueba que $F(X)$ está distribuida uniformemente sobre $(0,1)$.

19. Sea g una función de valor real no negativa en $\mathbb{R}$, que satisface la relación $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 1$. Muestra que si, una variable aleatoria X, la variable aleatoria $Y = \displaystyle\int_{-\infty}^{X} g(t)dt$ es uniforme, entonces g es la función densidad de X.

20. El espacio muestral de un experimento es $S = (0,1)$ y para cada subconjunto A de S, $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\int_A dx$. Sea X la variable aleatoria definida en S por $X(\omega) = 5\omega - 1$. Prueba que X es una variable aleatoria uniforme sobre el intervalo $(-1, 4)$.

21. Sea Y un número aleatorio de $(0,1)$. Sea X el segundo dígito de $\sqrt{Y}$. Prueba que para $n = 0, 1, \ldots, 9$, $\mathbb{P}(X = n)$ crece cuando n crece. Esto es notable porque muestra que $\mathbb{P}(X = n), n = 1, 2, 3, \ldots$, no es constante. Es decir, Y es uniforme, pero X no lo es.

22. Las calificaciones de una prueba de rendimiento que se da a 100.000 estudiantes se distribuyen normalmente con una media de 500 y una desviación estándar de 100. ¿ Cuál debe ser la puntuación de un estudiante para situarlo entre el 10% superior de todos los estudiantes?.

23. Una universidad tiene 1095 estudiantes. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que más de cinco estudiantes nacieron el dia de Navidad? Suponga que las tasas de natalidad son constantes durante todo el año y que cada año tiene 365 dias.

24. Sea $\Psi(x) = 2\Phi(x) - 1$. La función Ψ se denomina distribución normal positiva. Prueba que si Z es estándar normal, entonces $|Z|$, es positivo normal.

25. Sea Z una variable aleatoria normal estándar y sea α una constante. Encuentra el número real x que maximice $\mathbb{P}(x < Z < x + \alpha)$.

26. Sea X una variable aleatoria normal estándar. Calcula $\mathbb{E}(X \cos X), \mathbb{E}(\sin X)$ y $\mathbb{E}\left(\dfrac{X}{1+X^2}\right)$.

27. Supongamos que el CI de un estudiante elegido al azar de una universidad es una variable aleatoria normal con media 110 y desviación estándar 20. Determina el intervalo de valores que estan centrados en la media e incluye el 50% de los coeficientes de inteligencia de los estudiantes de esa universidad.

28. Supongamos que las puntuaciones de una cierta prueba de destreza manual son variables aleatorias-normales con una media de 12 y una desviación estándar 3. Si ocho individuos seleccionados al azar toman la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno haga una puntuación menor de 14?.

29. Supongamos que el tiempo de vida de las bombillas producidas por una determinada empresa son variables aleatorias normales con una media de 1000 horas y una desviación estándar de 100 horas. Supongamos que el tiempo de vida de las bombillas producidas por una segunda empresa son variables aleatorias normales con una media de 900 horas y una desviación estándar de 150 horas. Carlos compra una bombilla fabricada por la primera empresa y una por la segunda. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de esas bombilla dure 980 o más horas?.

30. Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Encuentra la función distribución de probabilidad de $|X - \mu$ y su valor esperado.

31. Determina los valores de k, para el cual, la siguiente función es la función densidad de una variable aleatoria normal:

$$f(x) = \sqrt{k}e^{-k^2x^2-2kx-1}, \quad -\infty < x < \infty.$$

32. Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Calcula la función densidad de $Y = X^2$.

33. Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Calcula la función densidad de $Y = e^X$.

34. Sea $X \sim N(0, 1)$. Calcula la función densidad de $Y = \sqrt{X}$.

35. Para examinar la precisión de un algoritmo que selecciona números aleatorios del conjunto $\{1, 2, \ldots, 40\}$, se seleccionan $100,000$ números y hay 3500 unos. Dado que el número esperado de unos es 2500.

    ¿Es justo decir que este algoritmo no es exacto?.

36. En un bosque, el número de árboles que crecen en una región de área R tienen una distribución de Poisson con media λR, donde λ es un número real positivo. Encuentra el valor esperado de la distancia de un cierto árbol a su vecino más cercano.

37. Supongamos que cada tres meses, en promedio, ocurre un terremoto en California. ¿Cuál es la probabilidad de que el siguiente terremoto ocurra después de tres pero antes de siete meses?.

38. Los clientes llegan a una oficina de correos a una tasa de Poisson de tres por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo cliente no llegue durante los próximos 3 minutos?.

39. Sea X una variable aleatoria exponencial con media 1. Halle la función densidad de probabilidad de $Y = -\ln X$.

40. Los huéspedes llegan a un hotel, de acuerdo a un proceso de Poisson, a razón de cinco por hora. Supongamos que durante los últimos 10 minutos ningún huésped ha llegado. ¿Cuál es la probabilidad de que (a) el siguiente llegue en menos de 24 minutos; (b) desde la llegada del décimo a la llegada del undécimo huésped no toma más de 2 minutos?.

41. Sea X una variable aleatoria exponencial con parámetro λ. Encuentra:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 2\sigma_X).$$

42. En una fábrica, una determinada máquina funciona durante un período que se distribuye exponencialmente con el parámetro λ. Luego se rompe y estará en el taller de reparaciones por un período, que también está distribuido exponencialmente con una media $1/\lambda$. Los tiempos de operación y reparación son independientes. Para esta máquina, decimos que un cambio de `estado` se produce cada vez que se rompe, o cada vez que se fija. En un intervalo de tiempo de longitud t, encuentre la función de masa de probabilidad del número de veces que ocurre un cambio de estado.

43. En la comunicación de datos, los mensajes suelen ser combinaciones de caracteres y cada carácter consta de un número de bits. Un bit es la unidad más pequeña de información y son 1 o 0. Supongamos que L, la longitud de un carácter (en bits) es una variable aleatoria geométrica con parámetro p. Si un emisor emite mensajes a una velocidad de 1000 bits por segundo. ¿Cuál es la distribución de T, el tiempo que tarda el emisor en emitir un carácter?.

44. Sea X, la vida útil (en años) de un tubo de radio, exponencialmente distribuida con media $1/\lambda$. Prueba que $[X]$, la parte entera de X, que es el número completo de años que el tubo funciona, es una variable aleatoria geométrica.

45. La variable aleatoria X es llamada `doble exponencial distribuida` si su función densidad es dada por:

$$f(x) = ce^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty$$

   (a) Encuentra el valor de c.
   (b) Prueba que $\mathbb{E}(X^{2n}) = (2n)!$ y $\mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0$.