Respuestas al examen parcial (2017-2)

Solución 1

Cualquier entero positivo m tiene una factorización única en la forma $m = \prod_i p_i^{m(i)}$ para enteros no negativos $m(1), m(2), \ldots$ Así

$$\mathbb{P}(M = m) = \prod_i \mathbb{P}(N(i) = m(i)) = \prod_i \left(1 - \frac{1}{p_i^{\beta}}\right) \frac{1}{p_i^{\beta m(i)}} = C\left(\prod_i p_i^{-m(i)}\right)^{\beta} = \frac{C}{m^{\beta}}$$

donde $C = \prod_i (1 - p_i^{-\beta})$. Ahora $\sum_m \mathbb{P}(M = m) = 1$, así $C^{-1} = \sum_m m^{-\beta}$.

Solución 2
Sea,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(X = a_1) = p_1, & \mathbb{P}(X = a_2) = p_2, \quad \ldots, & \mathbb{P}(X = a_n) = p_n; \\ \mathbb{P}(Y = a_1) = q_1, & \mathbb{P}(Y = a_2) = q_2, \quad \ldots, & \mathbb{P}(X = a_n) = q_n; \end{array}$$

También

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1.$$

Esto implica que,

$$(p_1 - q_1) + (p_2 - q_2) + \cdots + (p_n - q_n) = 0.$$

Las relaciones $\mathbb{E}(X^r) = \mathbb{E}(Y^r)$, para $r = 1, 2, \ldots, n-1$ implica que,

$$\begin{aligned} a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n &= a_1 q_1 + a_2 q_2 + \cdots + a_n q_n, \\ a_1^2 p_1 + a_2^2 p_2 + \cdots + a_n^2 p_n &= a_1^2 q_1 + a_2^2 q_2 + \cdots + a_n^2 q_n, \\ &\vdots \\ a_1^{n-1} p_1 + a_2^{n-1} p_2 + \cdots + a_n^{n-1} p_n &= a_1^{n-1} q_1 + a_2^{n-1} q_2 + \cdots + a_n^{n-1} q_n, \end{aligned}$$

Esta y la relación anterior nos dan las siguientes n ecuaciones y las n incógnitas, $p_1 - q_1, p_2 - q_2, \ldots, p_n - q_n$, cuya forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 - q_1 \\ p_2 - q_2 \\ p_3 - q_3 \\ \vdots \\ p_n - q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Ahora

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{j=n,n-1,\ldots,2} (a_j - a_i) \neq 0, \quad \text{si } i < j.$$

desde que todos los a_i son todos diferentes. La fórmula para el determinante de este tipo de matrices es bien conocida. Estos se conocen como determinantes de Vandermonde. El determinante anterior es distinto de cero implica que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

es invertible. Así para la solución para la ecuación (1) es

$$p_1 - q_1 = p_2 - q_2 = \cdots p_n - q_n = 0$$

Por tanto $p_1 = q_1, p_2 = q_2, \dots, p_n = q_n$, implica que X e Y son igualmente distribuidas.

Solución 3

a) Sea I_{ij} la función indicador de que los jugadores i y j lanzen el mismo número. Entonces

$$\mathbb{E}(I_{ij}) = \mathbb{P}(I_{ij} = 1) = \sum_{i=1}^{6} (\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{6}, \quad i \neq j.$$

La puntuación total del grupo es $S = \sum_{i<j} I_{ij}$, tal que

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{i<j} \mathbb{E}(i_{ij}) = \frac{1}{6}\binom{n}{2}.$$

Aseveramos que la familia $\{I_{ij} : i < j\}$ es independiente por pares. EL cálculo para esto es como sigue: si $i < j < k$ entonces

$$\mathbb{E}(I_{ij}I_{jk}) = \mathbb{P}(i, j, k \text{ lanzan el mismo número}) = \sum_{i=1}^{6} (\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{36} = \mathbb{E}(I_{ij})\mathbb{E}(I_{jk}).$$

Así,

$$\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i<j} I_{ij}\right) = \sum_{i<j} \mathrm{Var}(I_{ij}) = \binom{n}{2}\mathrm{Var}(I_{12})$$

por simetría. Pero $\mathrm{Var}(I_{12}) = \frac{1}{6}(1 - \frac{1}{6}$.

b) Sea X_{ij} la puntuación común de jugadores i y j, tal que $X_{ij} = 0$ si sus puntuaciones son diferentes. Esta vez la puntuación total es $S = \sum_{i<j} X_{ij}$ y

$$\mathbb{E}(S) = \binom{n}{2}\mathbb{E}(X_{12}) = \binom{n}{2}\frac{1}{6} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{12}\binom{n}{2}.$$

Los X_{ij} no son independientes por pares y debes resolverlo de esta manera,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(S) &= \mathbb{E}\left\{\left(\sum_{i<j} X_{ij}\right)^2\right\} - \mathbb{E}(S)^2 \\ &= \binom{n}{2}\mathbb{E}(X_{12}^2) + \binom{n}{3}\mathbb{E}(X_{12}X_{23}) + \left\{\binom{n}{2}^2 - \binom{n}{2} - \binom{n}{3}\right\}\mathbb{E}(X_{12})^2 - (\frac{7}{12})^2\binom{n}{2}^2 \\ &= \frac{315}{144}\binom{n}{2} + \frac{35}{432}\binom{n}{3}. \end{aligned}$$

Solución 4

Sea A/B la fracción racional y a un entero. Los posibles residuos de la división de A por a son $0, 1, \ldots, a-1$. Así la probabilidad que A es divisible por a es $1/a$. De manera similar para B. Por tanto la probabilidad que ambos A y B sean divisibles por a es $1/a^2$.

La fracción A/B es una fracción irreducible si y sólo si ambos A y B no son divisibles por uno de los números primos $2, 3, 5, \ldots$. Así la probabilidad requerida es dada por

$$p = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \cdots = \frac{6}{\pi^2}.$$

Esto es obtenido notando que

$$\frac{1}{p} \sum_{a,b,c,\ldots} \frac{1}{(2^a \dot{3}^b \dot{5}^c \cdots)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

donde la suma se extiende sobre todos los enteros no negativos $a, b, c, \ldots$ y tomando en cuenta que para algún entero positivo n es de la forma $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdots$.

Solución 5

Etiquetamos los asientos $1, 2, \ldots, 2n$ en el sentido de las agujas del reloj. En beneficio de la definición, dictamos que el asiento 1 sea ocupado por una mujer; esto determina el sexo del ocupante de cualquier otro asiento.

Para $1 \leq k \leq 2n$, sea A_k el evento donde los asientos $k, k+1$ están ocupados por una de las parejas (identificamos el asiento $2n+1$ con el asiento 1). La probabilidad requerida es

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1}^{2n} A_i^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{1}^{2n} A_i\right) = 1 - \sum_i \mathbb{P}(A_i) + \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \cdots.$$

Ahora $\mathbb{P}(A_i) = n(n-1)!^2/n!^2$, ya que hay n parejas que pueden ocupar los asientos i y $i+1$, $(n-1)!$ formas de distribuir las $n-1$ mujeres restantes y $(n-1)!$ formas de distribuir los $n-1$ hombres restantes. Del mismo modo, si $1 \leq i < j \leq 2n$, entonces

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \begin{cases} n(n-1)\dfrac{(n-2)!^2}{n!^2} & \text{si } |i-j| \neq 1 \\ 0 & \text{si } |i-j| = 1, \end{cases}$$

sujeto a $\mathbb{P}(A_1 \cap A_{2n}) = 0$. En general,

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{(n-k)!^2}{n!^2} = \frac{(n-k)!}{n!}$$

si $i_1 < i_2 < \cdots i_k$ y $i_{j+1} - i_j \geq 2$ para $1 \leq j < k$ y $2n + i_1 - i_k \geq 2$. En otro caso esta probabilidad es 0. Así

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{1}^{2n} A_i^c\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n-k)!}{n!} S_{k,n}$$

donde $S_{k,n}$ es el número de maneras de escoger, k pares de asientos adyacentes que no se superponen.

Finalmente, calculamos $S_{k,n}$. Consideramos primero el número $N_{k,m}$ de formas de escoger k pares de asientos adyacentes no superpuestos de una línea (en lugar de un círculo) de m asientos etiquetados como $1, 2, \ldots, m$. Hay una correspondencia uno a uno entre el conjunto de tales disposiciones y el conjunto de vectores de tamaño $(m-k)$ que contienen k unos y $(m-2k)$ ceros.

Para resolver esto, tomamos esa disposición de asientos y cuenta 0 para un asiento no elegido y 1 para un par de asientos elegidos, el resultado es un vector mencionado anteriormente. De manera inversa, tomamos dicho vector, lee sus elementos en orden y construye la disposición de los asientos en la que cada 0 corresponde a un asiento no elegido y cada 1 corresponde a un par elegido. Se sigue que $N_{k,m} = \binom{m-k}{k}$.

Cambiando a $S_{k,n}$, se elige o no el par $2n$, 1 si se elige y 0 si no. Si se elige, se requieren otros $k-1$ pares de una línea de $2n-2$ asientos. Si no se elige, se requieren k pares de una línea de $2n$ asientos. Por lo tanto

$$S_{k,n} = N_{k-1,2n-2} + N_{k,2n} = \binom{2n-k-1}{k-1} + \binom{2n-k}{k} = \binom{2n-k}{k}\frac{2n}{2n-k}.$$

Solución 6

La función $g(x) = \log x$ es cóncava para $x > 0$, luego para un $\lambda(0 \leq \lambda \leq 1)$

$$\lambda \log x_1 + (1-\lambda)\log x_2 \leq \log(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2).$$

Así

$$x_1^{\lambda} x_2^{1-\lambda} \leq \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,$$

y colocando $\lambda = p^{-1}, 1-\lambda = q^{-1}, x_1 = X^p/\mathbb{E}(X^p), x_2 = Y^q/\mathbb{E}(Y^q)$, obtenemos

$$\frac{X}{[\mathbb{E}(X^p)]^{1/p}} + \frac{Y}{[\mathbb{E}(Y^p)]^{1/p}} \leq \lambda\frac{X^p}{\mathbb{E}(X^p)} + (1-\lambda)\frac{Y^q}{\mathbb{E}(Y^q)}.$$

Tomando esperanza en ambos lados de la ecuación anterior tenemos el resultado pedido. Si $p = q = 1/2$, tenemos la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Si aplicamos el resultado anterior con $p = q = 1/2$, para las variables aleatorias $|X|^{(t+h)/2}$ y $|X|^{(t-h)/2}$, tenemos

$$\mathbb{E}^2(|X|^t) \leq \mathbb{E}(|X|^{t+h})\mathbb{E}(|X|^{t-h}), \qquad 0 \leq h \leq t. \tag{2}$$

Colocando $t_1 = t+h, t_2 = t-h$, la ecuación (2) llega a ser

$$\mathbb{E}^2[|X|^{(t_1+t_2)/2}] \leq \mathbb{E}(|X|^{t_1})\mathbb{E}(|X|^{t_2}),$$

o tomando logaritmos.

$$2\log\mathbb{E}[|X|^{(t_1+t_2)/2}] \leq \log\mathbb{E}(|X|^{t_1}) + \log\mathbb{E}(|X|^{t_2}).$$

Si escribimos $g(t) = \log\mathbb{E}(|X|^t$, se tiene

$$g\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}g(t_1) + \frac{1}{2}g(t_2),$$

luego $g(t)$ es convexa y continua. Desde $g(0) = 0$, la pendiente $g(t)/t$ de la línea que conecta el origen con el punto $(t, g(t))$ incrementa cuando t incrementa y así

$$e^{g(t)/t} = [\mathbb{E}(|X|^t)]^{1/t}.$$

es una función creciente de t.

Solución 7

En un caso particular dado en el seminario.

Pongamos a los estudiantes en algún orden aleatorio. Supongamos que los dos primeros alumnos forman el primer equipo, el tercero y el cuarto forman el segundo equipo, el quinto y el sexto forman el tercer equipo y así sucesivamente. Definimos F para `femenino` y M para `masculino`.

Dado que nuestro interés es el género de los estudiantes, el número total de maneras en que podemos formar 13 equipos, cada uno compuesto por dos estudiantes, es igual al número de permutaciones distinguibles de una secuencia de 23 M y tres F que es igual a $\dfrac{26!}{23!3!} = \dbinom{26}{3}$.

El conjunto de valores posibles de la variable aleatoria X es $\{2, 4, \ldots, 26\}$. Para calcular las probabilidades asociadas con estos valores, debes tener en cuenta que para $k = 1, 2, \ldots, 13$, $X = 2k$ si y sólo si ocurre uno de los siguientes eventos:

- A: Uno de los primeros $k - 1$ equipos es un equipo femenino-femenino, el equipo k-ésimo es un equipo masculino-femenino o femenino-masculino, y los equipos restantes son todos equipos masculino-masculino.

- B: Los primeros $k - 1$ equipos son todos masculino-masculino y el equipo k-ésimo es un equipo masculino-femenino o femenino-masculino.

Para encontrar $\mathbb{P}(A)$, ten en cuenta que para que ocurra A, hay $k - 1$ posibilidades de que uno de los primeros $k - 1$ equipos sea un equipo femenino-femenino, dos posibilidades para que el k-ésimo equipo (masculino-femenino y femenino- masculino) y una posibilidad para que los equipos restantes sean todos masculino-masculino. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2(k-1)}{\binom{26}{3}}.$$

Para encontrar $\mathbb{P}(B)$, ten en cuenta que para que ocurra B, existe una posibilidad para los primeros $k-1$ de que todos sean masculino-masculino, dos posibilidades para el k-ésimo equipo: masculino-femenino y femenino-masculino.

El número de posibilidades para los $13 - k$ equipos restantes es igual al número de permutaciones distinguibles de dos F y $(26 - 2k) - 2M$, que es por propiedad $\dfrac{(26-2k)!}{2!(26-2k-2)!} = \dbinom{26-2k}{2}$.Por tanto,

$$\mathbb{P}(B) = \frac{2\binom{26-2k}{2}}{\binom{26}{3}}$$

Y así, para $1 \leq k \leq 13$,

$$\mathbb{P}(X = 2k) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \frac{2\binom{2(k-1)+26-2k}{2}}{\binom{26}{3}} = \frac{1}{650}k^2 - \frac{1}{26}k + \frac{1}{4}.$$

En general se cumple para $1 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}(x = 2k) = \frac{2(k-1) + 2\binom{2n-2k}{2}}{\binom{2n}{3}}.$$

Así $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k\mathbb{P}(X = 2k) = \frac{(n+1)^2}{2n-1}$.

Solución 8

Empezamos,

$$\lambda^k = \left(\sum_i p_i\right)^k = \sum_{r_1, r_2, \ldots, r_k} p_{r_1} p_{r_2} \cdots p_{r_k} \geq k! \sum_{\{r_1, \ldots, r_k\}} p_{r_1} p_{r_2} \cdots p_{r_k},$$

donde la última suma es sobre todo los subconjuntos $\{r_1, \ldots, r_k\}$ de k elementos distintos de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Luego,

$$\lambda^k \leq k! \sum_{\{r_1,\dots,r_k\}} p_{r_1} p_{r_2} \cdots p_{r_k} + \binom{k}{2} \sum_i p_i^2 \sum_{r_1,\dots,r_{k-2}} p_{r_1} p_{r_2} \cdots p_{r_{k-2}}$$
$$\leq k! \sum_{r_1,\dots,r_k} p_{r_1} p_{r_2} \cdots p_{r_k} + \binom{k}{2} \max_i p_i \Big(\sum_j p_j \Big)^{k-1}$$

Así

$$\sum_{\{r_1,\dots,r_k\}} p_{r_1} p_{r_2} \cdots p_{r_k} = \frac{\lambda^k}{k!} \left\{ 1 + O\left(\frac{k^2}{\lambda} \max_i p_i \right) \right\}. \tag{3}$$

Por el teorema de Taylor aplicada a la función $\log(1-x)$, existe un θ_r satisfaciendo $0 < \theta_r < \{2(1-c)^2)\}^{-1}$ tal que

$$\prod_{r=1}^n (1 - p_r) = \prod_r \exp\{-p_r - \theta_r p_r^2\} = \exp\{-\lambda - \lambda O(\max_i p_i)\}. \tag{4}$$

Finalmente

$$\mathbb{P}(X = k) = \left(\prod_r (1 - p_r) \right) \sum_{\{r_1,\dots,r_k\}} \frac{p_{r_1} \cdots p_{r_k}}{(1 - p_{r_1}) \cdots (1 - p_{r_k})}$$

Luego de (3) y (4) se obtiene el resultado pedido.