1 Integración de Riemann

La integración desempeña un papel importante en la teoria de la probabilidad.

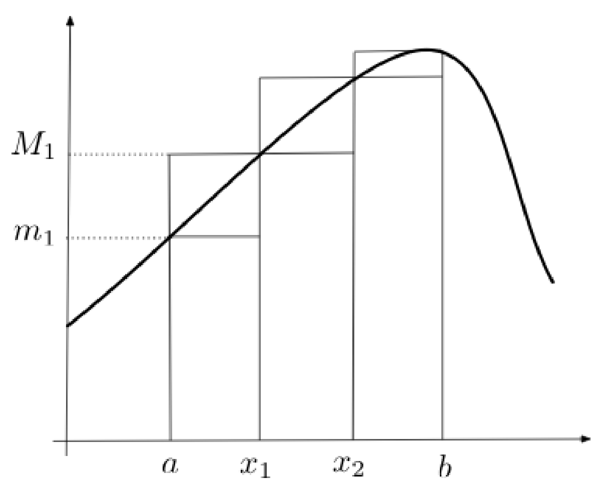
Definición 1.1 Una partición de un intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito de puntos $Q = \{x_i : i = 0, \ldots, n\}$ satisfaciendo $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$.

Definición 1.2 Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y una partición de $[a, b]$, definimos

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{x \in \Delta_i} f(x) \\ m_i &= \inf_{x \in \Delta_i} f(x) \\ U(P, f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i |\Delta_i| \\ L(P, f) &= \sum_{i=1}^{n} m_i |\Delta_i|. \end{aligned}$$

donde $\Delta_i = (x_{i-1}, x_i)$ y $|\Delta_i| = |x_{i-1} - x_i|$.

De las notas de Guy Lebanon, sea el siguiente gráfico, que muestra una partición de cuatro puntos y los correspondientes valores m_i y M_i. Cuando el número de puntos en la partición incrementa, la diferencia $|M_i - m_i|$ tiende a decrecer.



Ejemplo 1.1 Considere la función $f(x) = x$ sobre $[0, 3]$ y la partición $Q = \{0, 1, 2, 3\}$. Entonces $|\Delta_i| = 1$ para todo i y $L(Q, f) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2$ y $U(Q, f) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3$. A medida que añadimos puntos adicionales a la partición la diferencia $U(Q, f) - L(Q, f)$ tiende a 0.

Definición 1.3 Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Entonces

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf_Q U(Q, f)$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup_Q L(Q, f),$$

donde $\inf_Q$ y $\sup_Q$, se definen sobre todos las posibles particiones Q de $[a, b]$. Si las dos cantidades definidas anterioremente son iguales y finitas, decimos que f es Riemann-integrable en $[a, b]$ t denotamos el valor común como

$$\int_a^b f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

A veces consideramos las integrales sobre toda la línea real, lo que implica que $a \to \infty, b \to -\infty$ en la definicón anterior.

Definición 1.4 Una partición Q es un refinamiento de una partición P si cada punto de P está también en Q. Dada dos particiones P_1, P_2, definimos un refinamiento común como la partición compuesta de todos los puntos que están en P_1 o en P_2.

Proposición 1.1 Si $P^{'}$ es una refinamiento de la partición P entonces

$$L(P, f) \leq L(P', f)$$
$$U(P', f) \leq U(P, f).$$

En efecto, para el primer caso asumamos que $P^{'}$ contiene un punto $x^{'}(x_i < x^{'} < x_{i+1})$ más que P. En este caso $L(P^{'}, f) - L(P, f) = (m_i^{'}\Delta_i^{'} + m_{i+1}^{'}\Delta_{i+1}^{'}) - (m_i\Delta_i)$ y desde que $m_i^{'}, m_{i+1}^{'} \geq m$, tenemos que $L(P^{'}, f) - L(P, f) \geq 0$. Si $P^{'}$ contiene varios puntos además de P, podemos repetir este argumento varias veces para establecer $L(P^{'}, f) - L(P, f) \geq 0$.

Proposición 1.2

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx \geq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

Proposición 1.3 Una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es Riemann-integrable si y sólo si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists Q \quad \text{tal que} \quad U(Q, f) - L(Q, f) < \epsilon.$$

Corolario 1.1 Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continuo, entonces es Riemann-integrable.

Proposición 1.4 Las siguientes propiedades se aplican a la integral de Riemann

1. Linealidad:

$$\int_a^b af(x) + bg(x)\,dx = a\int_a^b f(x)\,dx + b\int_a^b g(x)\,dx.$$

2. Descomposición del intervalo: para todo $q \in (a,b)$, se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^q f(x)\,dx + \int_q^b f(x)\,dx.$$

3. $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \cdot |b-a|.$$

4. Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ entonces

$$\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx.$$

Proposición 1.5 Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que es acotada y continua a excepción de un número finito de puntos en los que es tal vez discontinua es Riemann integrable.

Proposición 1.6 Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función que es acotada y P es una partición de $[a,b]$ tal que $U(P,f) - L(P,f) < \epsilon$, entonces

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)|\Delta_i| - \int_a^b f\,dx\right| < \epsilon, \qquad \forall t_i \in \Delta_i,\ i = 1,\dots,n.$$

La siguiente proposición formula una conexión muy importante entre la diferenciación y la integración. Conduce a muchas técnicas útiles de la integración, y es importante en la teoria de la probabilidad en la formulación de una conexión entre el cdf y el pdf de una variable aleatoria continua.

Proposición 1.7 (Teorema Fundamental del CaĺCulo) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función que es acotada e integrable. Entonces

- $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ es una función continua sobre $[a,b]$.
- Si f es continua, entonces F es diferenciable y

$$F^{'}(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Además, para alguna función diferenciable F cuya derivada $F^{'}(t) = f(t)$ es Riemann-integrable,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Para esta última parte de la preposición, la función F es llamada <u>antiderivada</u> de f.

Ejemplo 1.2 $cx^{n+1}/(n+1)$ es la antiderivada de cx^n,

$$\int_a^b cx^n\, dx = \frac{c}{n+1} x^{n+1}\Big|_a^b = \frac{c}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

Ejemplo 1.3 $(1/c)e^{cx}$ es la antiderivada de e^{cx},

$$\int_a^b e^{cx}\, dx = (1/c)e^{cx}\Big|_a^b = (1/c)\left(e^{cb} - e^{ca}\right).$$

Por ejemplo

$$\int_0^\infty e^{-r/2}\, dr = \left(-2e^{-r/2}\right)\Big|_0^\infty = -2(0-1) = 2.$$

Ejemplo 1.4 Una variable aleatoria X es continua si una función F_X puede ser escrita de la forma

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du, \qquad \text{para } \; x \in \mathbb{R}.$$

para alguna función no negativa f_X. En efecto si X es continua y F_X es bien definida, podemos tomar

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{d}{dx} F_X(x) & \text{si la derivada existe en } \; x \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Si X es una distribución exponencial con parámetro λ, entonces

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } \; x > 0 \end{cases}$$

entonces la función f, llamada de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } \; x > 0 \end{cases}$$

Proposición 1.8 (Cambio de Variable) Sea g es un función diferenciable estrictamente creciente, cuya derivada $g^{'}$ es continua en $[a,b]$ y f es una función continua. Entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f(g(t))g^{'}(t)\,dt.$$

En efecto, sean $f, g, g^{'}$ son continuas, $f(g(t))g^{'}(t)$ es continua y es por tanto Riemann-integrable. Definiendo $F(t) = \displaystyle\int_{g(a)}^{t} f(t)\,dt$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(g(t))g^{'}(t)\,dt &= \int_a^b F^{'}(g(t))g^{'}(t)\,dt \\
&= \int_a^b (F\circ g)^{'}(t)\,dt \\
&= (F\circ g)(b) - (F\circ g)(a) \\
&= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

El cambio de variables proporciona una herramienta útil para calcular integrales

Ejemplo 1.5 Usando la variable de transformación $y = f(x) = (x-\mu)/\sigma$, $f^{'}(x) = 1/\sigma$ se tiene

$$\int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\,dy = \int_a^b \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\frac{1}{\sigma}dx.$$

Ejemplo 1.6 Usando la variable de transformación $y = f(x) = -x^2/2$ con $f^{'}(x) = -x$,

$$\int_a^b e^{-x^2/2}(-x)dx = \int_{-a^2/2}^{-b^2/2} e^y\,dy = e^{-b^2/2} - e^{-a^2/2}.$$

En particular

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2/2}\,xdx = -\int_0^{-\infty} e^y\,dy = -(e^y)\Big|_0^{-\infty} = -(0-1) = 1.$$

Proposición 1.9 (Integración por partes) Para dos funciones diferenciables $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tenemos

$$\int_a^b f(x)g^{'}(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f^{'}(x)g(x)\,dx.$$

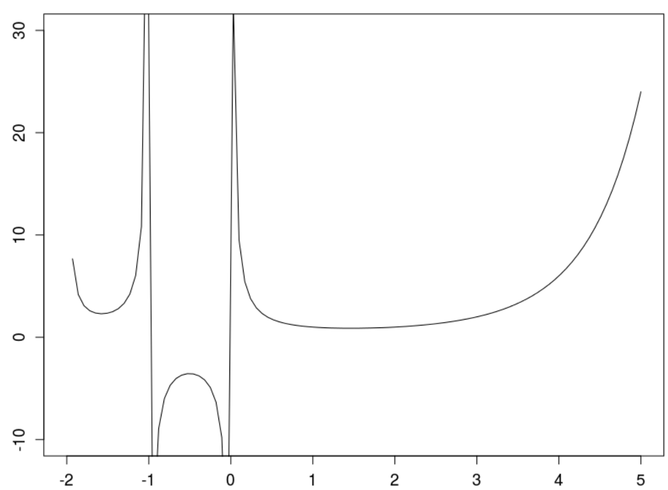
Ejemplo 1.7 Sea la función Gamma para $c > 1$, cumple

$$\begin{aligned}\Gamma(c) &= \int_0^\infty x^{c-1}e^{-x}\,dx \\ &= \left(-x^{c-1}e^{-x}\right)\Big|_0^\infty - \left(-(c-1)\int_0^\infty x^{c-2}e^{-x}\,dx\right) \\ &= (0-0) + (c-1)\int_0^\infty x^{c-2}e^{-x}\,dx \\ &= (c-1)\Gamma(c-1).\end{aligned}$$

Aplicando la ecuación recursivamente, junto con la expresión

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \exp(-t)\,dt = \left(-e^{-t}\right)\Big|_0^\infty = 1 - 0 = 1,$$

El gráfico muestra a la función Gamma para valores reales, positivos y negativos. El gráfico muestra un comportamiento inesperado para $x < 1$, específicamente: un comportamiento no monotóno para $x < 1$ y discontinuidades en enteros no positivos.



Ejemplo 1.8 La distribución Gamma con parámetros $s(> 0)$ y $\lambda(> 0)$ tiene una función densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(s)}\lambda^s x^{s-1}e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

La distribuida Chi-Cuadrada con n grados de libertad, tiene una función densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2}n)}(\dfrac{1}{2}x)^{\frac{1}{2}n-1}e^{-\frac{1}{2}x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

2 Integrales múltiples

Si puedes hacer integrales individuales, puedes hacer múltiples integrales: haz más de una integral, manteniendo variables distintas a la variable actual constantes en la integración. Por ejemplo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^y (x-y)^2 dxdy &= \int_0^1 \int_0^y (x^2 - 2xy + y^2) dxdy \\
&= \int_0^1 (x^3/3 - x^2 y + xy^2)\Big|_0^y dy \\
&= \int_0^1 (y^3/3 - y^3 + y^3) \\
&= \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Al hacer un cambio de variables con integrales múltiples, se necesita de Jacobiano. Vamos a indicar la versión bidimensional. Supongamos que hacemos un cambio de las variables (transformación) de (x, y) a (u, v), digamos con $x = g(u, v), y = h(u, v)$. Entonces sobre los límites apropiados de integración, donde $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ es el valor absoluto del determinante del Jacobiano.

$$\int \int f(x,y) dxdy = \int \int f(g(u,v), h(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Asumimos que las derivadas parciales existen y son continuas y que el determinante es distinto de cero.

Ejemplo 2.1 Encontremos el área de un círculo de radio 1. Para encontrar el área de una región, sólo necesitamos integrar 1 sobre esa región (por lo que cualquier dilema proviene de los límites de la integración, la función que estamos integrando, es sólo la constante 1). Así el área es

$$\int \int_{x^2+y^2 \le 1} 1 dxdy = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 1 dxdy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy.$$

Nota que los límites para la variable interna (x) de la integral doble pueden depender de la variable exterior (y), mientras que los límites externos son constantes. La última integral puede hacerse con una sustitución trigonométrica, pero en lugar de ello, vamos a simplificar el problema transformándolo en coordenadas polares: sea

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

donde r es la distancia desde (x, y) al origin y $\theta \in [0, 2\pi)$ es el ángulo. La matriz Jacobiana de esta transformación es

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

así el valor del determinante es $r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$. Esto es, $dxdy$ llega a ser $rdrd\theta$. Luego es área del círculo es

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi.$$

Para un círculo de radio r, se sigue que el valor del área es πr^2, ya que podemos imaginar convertir nuestras unidades de medida a la unidad para la cual el radio es 1.

Proposición 2.1 (Propiedad de Fubini) Sea $f : Q = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$. Supongamos que para cada $y \in [c, d]$, la integral $\displaystyle\int_a^b f(x, y) dx$ existe y además que $\displaystyle\int_a^b f(x, y) dx$ como una función de y es integrable en $[c, d]$. Entonces

$$\int \int_Q f = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Si f es continua sobre el rectángulo $Q = [a, b] \times [c, d]$,

$$\int \int_Q f = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

3 Referencias

1. Understanding Analysis, Stephen Abbott, Springer 2004.
2. Probability And Introduction, Geoffrey Grimmett Dominic Welsh Oxford University Press 2014.
3. Calculus, Michael Spivak, Editorial Reverte , 1992
4. Probability, The Analysis of Data, volumen 1 Guy Lebanon.