Cadenas de Markov

Daniel Remigio Valentin

Universidad Nacional de Ingeniería

Procesos Estocásticos :

Una sucesión de de observaciones $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ se denomina **proceso estocástico** si verifica lo siguiente :

- Si los valores de estas observaciones no se pueden predecir exactamente.

Procesos Estocásticos :

Una sucesión de de observaciones $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ se denomina **proceso estocástico** si verifica lo siguiente :

- Si los valores de estas observaciones no se pueden predecir exactamente.
- Pero se pueden especificar las probabilidades para los distintos valores posibles en cualquier instante de tiempo.

Introducción

Procesos Estocásticos :

Una sucesión de de observaciones $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ se denomina **proceso estocástico** si verifica lo siguiente :

- Si los valores de estas observaciones no se pueden predecir exactamente.
- Pero se pueden especificar las probabilidades para los distintos valores posibles en cualquier instante de tiempo.

Ahora tenemos que:

X_1 : v.a. que define el **estado inicial del proceso**

X_n : v.a. que define el **estado del proceso en el instante de tiempo** n

Para cada posible valor del estado inicial s_1 y para cada uno de los sucesivos valores s_n de los estados $X_n, n = 1, 2, \ldots$ especificamos:

$$P(X_{n+1} = s_{n+1})|X_1 = s_1, X_2 = s_2, \ldots, X_n = s_n$$

Propiedad Markoviana :

Si el estado actual X_n y los estados previos $X_1, \ldots, X_{n-1}$ son conocidos, entonces, la probabilidad del estado futuro x_{n+1}, no depende de los estados anteriores $X_1, \ldots, X_{n-1}$, y solamente depende del estado actual X_n, es decir para $n = 1, 2, \ldots$ y cualquier sucesión de estados $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$

Cadenas de Markov

Propiedad Markoviana :

Si el estado actual X_n y los estados previos $X_1, \ldots, X_{n-1}$ son conocidos, entonces, la probabilidad del estado futuro x_{n+1}, no depende de los estados anteriores $X_1, \ldots, X_{n-1}$, y solamente depende del estado actual X_n, es decir para $n = 1, 2, \ldots$ y cualquier sucesión de estados $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$

$$P(X_{n+1} = s_{n+1} | X_1 = s_1, X_2 = s_2, ..., X_n = s_n) = P(X_{n+1} = s_{n+1} | X_n = s_n)$$

Cadena de Markov finita

Es una cadena de Markov para la que existe sólo un número finito k de estados posibles $s_1, \ldots, s_k$ y en cualquier instante de tiempo la cadena está en uno de estos k estados.

Probabilidad de transición

Es la probabilidad condicionada:

Cadena de Markov finita

Es una cadena de Markov para la que existe sólo un número finito k de estados posibles $s_1, \ldots, s_k$ y en cualquier instante de tiempo la cadena está en uno de estos k estados.

Probabilidad de transición

Es la probabilidad condicionada:

$$P(X_{n+1} = s_{n+1} | x_n = s_n)$$

Probabilidad de transición estacionaria

Una cadena de Markov tiene probabilidades de transición estacionarias si para cualquier par de estados s_i y s_j existe una probabilidad de transición pij tal que:

Cadena de Markov finita

Es una cadena de Markov para la que existe sólo un número finito k de estados posibles $s_1, \ldots, s_k$ y en cualquier instante de tiempo la cadena está en uno de estos k estados.

Probabilidad de transición

Es la probabilidad condicionada:

$$P(X_{n+1} = s_{n+1} | x_n = s_n)$$

Probabilidad de transición estacionaria

Una cadena de Markov tiene probabilidades de transición estacionarias si para cualquier par de estados s_i y s_j existe una probabilidad de transición pij tal que:

$$P(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i) = pij \text{ para } n = 1, 2, \ldots$$

Son aquellas matrices cuadradas cuyos elementos son no negativos y tal que la suma de los elementos de cada fila es igual a 1.

Matriz de transición en un solo paso

Cadenas de Markov

Matriz Estocástica

Son aquellas matrices cuadradas cuyos elementos son no negativos y tal que la suma de los elementos de cada fila es igual a 1.

Matriz de transición en un solo paso

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = s_j | X_n = s_i) \to P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

La matriz de transición P de cualquier cadena de Markov finita con probabilidades de transición estacionarias es una matriz estocástica

Ejemplo:

Supongamos que el clima de una determinada región sólo puede ser soleado (s_1) o nublado (s_2) y que las condiciones del clima en mañanas sucesivas forman una cadena de Markov con probabilidades de transición estacionarias. La matriz de transición está dada por:

Cadena de Markov

Ejemplo:

Supongamos que el clima de una determinada región sólo puede ser soleado (s_1) o nublado (s_2) y que las condiciones del clima en mañanas sucesivas forman una cadena de Markov con probabilidades de transición estacionarias. La matriz de transición está dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Si un día concreto está nublado, cuál es la probabilidad de que esté nublado el día siguiente?.

$$p_{22} = 0{,}4$$

Ejemplo:

En un pequeño pueblo el clima puede cambiar, de un día para otro, consideremos 2 estados del tiempo: clima seco y clima húmedo. La probabilidad de tener un clima seco es 0.8, si el día actual es seco; pero si es húmedo la probabilidad de obtener un clima seco es de 0.6. Suponga que dichos valores no cambian en el tiempo. Se pide determinar:

- Matriz de Transición.
- Diagrama de transición.
- La probabilidad de estado.

Matriz de transición:

X: Estado del clima $X = \begin{cases} 0 & \text{Clima seco} \\ 1 & \text{Clima húmedo} \end{cases}$

La probabilidad de obtener un clima seco al día siguiente si hoy el clima esta seco:
$P\{X_{t+1} = 0|X_t = 0\} = 0{,}8$.
La probabilidad de obtener un clima seco al día siguiente si hoy el clima esta húmedo:
$P\{X_{t+1} = 0|X_t = 1\} = 0{,}6$
luego tenemos:

	0	1
0	$P_{00} = 0{,}8$	$P_{01} = 0{,}2$
1	$P_{10} = 0{,}6$	$P_{11} = 0{,}4$

Donde P_{ij}:Probabilidad de pasar del clima i al clima j

Por lo tanto la matriz de transición es:

La probabilidad de obtener un clima seco al día siguiente si hoy el clima esta seco: $P\{X_{t+1}=0|X_t=0\}=0{,}8$.
La probabilidad de obtener un clima seco al día siguiente si hoy el clima esta húmedo:
$P\{X_{t+1}=0|X_t=1\}=0{,}6$
luego tenemos:

	0	1
0	$P_{00}=0{,}8$	$P_{01}=0{,}2$
1	$P_{10}=0{,}6$	$P_{11}=0{,}4$

Donde P_{ij}:Probabilidad de pasar del clima i al clima j

Por lo tanto la matriz de transición es:

$$M_T=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Diagrama de transición

Cadenas de Markov

La probabilidad de obtener un clima seco al día siguiente si hoy el clima esta seco:
$P\left\{X_{t+1}=0|X_t=0\right\}=0{,}8.$
La probabilidad de obtener un clima seco al día siguiente si hoy el clima esta húmedo:
$P\left\{X_{t+1}=0|X_t=1\right\}=0{,}6$
luego tenemos:

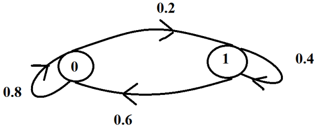
	0	1
0	$P_{00}=0{,}8$	$P_{01}=0{,}2$
1	$P_{10}=0{,}6$	$P_{11}=0{,}4$

Donde P_{ij}:Probabilidad de pasar del clima i al clima j

Por lo tanto la matriz de transición es:

$$M_T=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Diagrama de transición



La probabilidad de estado estable del sistema

π_0:Probabilidad que cierto día sea seco

π_1:Probabilidad que cierto día sea húmedo

De lo anterior podemos concluir que :

$\pi_0 + \pi_1 = 1$

entonces tenemos:

$\pi_0 = 1 - \pi_1$

$$\begin{aligned} \pi_0 + \pi_1 &= 1 \\ \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} &= \pi_0 \\ \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11} &= \pi_1 \end{aligned}$$

reemplazando tenemos que:

La probabilidad de estado estable del sistema

π_0:Probabilidad que cierto día sea seco

π_1:Probabilidad que cierto día sea húmedo

De lo anterior podemos concluir que :

$\pi_0 + \pi_1 = 1$

entonces tenemos:

$\pi_0 = 1 - \pi_1$

$$\begin{aligned} \pi_0 + \pi_1 &= 1 \\ \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} &= \pi_0 \\ \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11} &= \pi_1 \end{aligned}$$

reemplazando tenemos que:

$\pi_0 = 0{,}75$

$\pi_1 = 0{,}25$