Lista de ejercicios

1. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces $Y = \alpha X + \beta \sim N(\alpha\mu, \alpha^2\sigma^2)$.
2. (a) Si $X \sim \text{Bernoulli}(p)$, entonces $\mathbb{E}(X) = p$.
   (b) Si $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ entonces $\mathbb{E}(X) = np$.
   (c) Si $X \sim \text{Geometrica}(p)$ entonces $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.
   (d) Si $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ entonces $\mathbb{E}(X) = \lambda$.
   (e) Si $X \sim \text{Uniforme}((\alpha, \beta))$ entonces $\mathbb{E}(X) = \frac{\beta + \alpha}{2}$.
   (f) Si $X \sim \text{Uniforme}((\alpha, \beta))$ entonces $\mathbb{E}(X) = \frac{\beta + \alpha}{2}$.
   (g) Si $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$ entonces $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.
   (h) Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces $\mathbb{E}(X) = \mu$.
   (i) Si $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ entonces $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$.
3. (a) Si X es una variable aleatoria discreta con una función de masa de probabilidad $p(x)$, entonces para una función g se cumple:
   $$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x:p(x)>0} g(x)p(x).$$
   (b) Si X es una variable aleatoria continua con una función de masa de probabilidad $f(x)$, entonces para una función g de valor real, se cumple:
   $$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$
   (c) Si a y b son constantes, entonces:
   $$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}(X) + b.$$
4. (a) Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$.
   (b) Prueba que:
   $$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$
5. (a) Si X e Y son variables aleatorias continuas, entonces $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
   (b) Sea X_i una variable aleatoria tal que :
   $$X_i = \begin{cases} 1, & \text{i-ésimo lanzamiento es un éxito,} \\ 0, & \text{i-ésimo lanzamiento es una falla.} \end{cases}$$
   Calcula $\mathbb{E}(X)$ donde $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. ($X \sim \text{Binom}(n, p)$).

6. (a) Si X e Y son independientes, entonces para dos funciones f y g se cumple que:

$$\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y))).$$

7. (a) `(Desigualdad de Markov)` Si X es una variable aleatoria de valores positivos, entonces para un $a > 0$, se cumple:

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

   (b) `(Desigualdad de Chebyshev)` Si X es una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2, entonces para algún $k > 0$, tenemos:

$$\mathbb{P}\{|X - \mu| \geq k\} \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

8. Considera la densidad gamma con parámetros α y λ,

$$\frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es de la forma $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx$. Prueba:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$
- $\Gamma(k) = (k-1)!$ si k es entero.
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

9. Suponiendo que $f : [0,1] \to [0,1]$ es una función continua. Muestra un `método probabilistico` para evaluar $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$, usando la `Ley Fuerte de los Grandes Números`.

10. (a) Se lanza una moneda en repetidas ocasiones, las caras que se producen en cada lanzamiento tienen probabilidad p. Encuentra la función generadora de probabilidad del número T de lanzamientos antes de que n caras hayan aparecido por primera vez.

   (b) Encuentra la función generadora de la función de masa binomial negativa:

$$f(k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, \ldots$$

   donde $0 < p < 1$ y r es un entero positivos. Deduce la media y la varianza.

11. (a) Sean $X_2, X_3, \ldots$ variables aleatorias independientes tal que:

$$\mathbb{P}(X_n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n\log n}, \;\; \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}$$

   Muestra que esta secuencia cumple la ley débil de los grandes números, pero no la ley Fuerte, en el sentido que $n^{-1}\sum_1^n X_i$ converge a 0 en probabilidad.

(b) Sean $X_1, X_2, \dots$ variables aleatorias independientes con una función densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \leq 2, \\ \dfrac{c}{x^2 \log|x|} & \text{si} \quad |x| > 2 \end{cases}$$

donde c es una constante. Muestra que X_i no tiene media, pero $n^{-1} \sum_1^n X_i \to 0$ en probabilidad cuando $n \to 0$.

12. (a) Sea $X_1, X_2, \cdots$ una secuencia de variables aleatorias Bernoulli con parámetro p, independientes e idénticamente distribuidas. Prueba que para un $\epsilon > 0$, se tiene:

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - p\Big| \geq \epsilon\Big) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$$

donde $S_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$.

(b) Sea X una variable no negativa. Prueba:

$$\mathbb{E}(X) \leq [\mathbb{E}(X^2)]^{\frac{1}{2}} \leq [\mathbb{E}(X^3)]^{\frac{1}{3}} \leq \dots$$

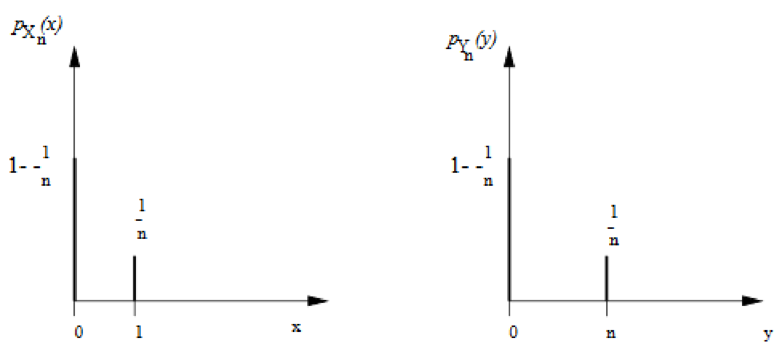
(c) Sea X e Y variables aleatorias independientes, con media 0 y varianza 1 y una función generadora de momentos $M(t)$. Si $X + Y$ y $X - Y$ son independientes, muestra que:

$$M(2t) = M(t)^3 M(-t)$$

y deduce que X e Y tienen una distribución normal con media 0 y varianza 1 .

13. Considera un Proceso de Poisson, con parámetro λ y sea $N(G_i)$ denota el número de llegadas del proceso durante el intervalo $(t_i, t_i + c_i]$. Supongamos que tenemos n intervalos, $i = 1, 2, \cdots, n$ mutualmente disjuntos. Denotemos la unión de esos intervalos por G y su longitud total $c = c_1 + c_2 + \cdots c_n$. Dado $k_i \geq 0$ y con $k_1 + k_2 + \cdots + k_n$, determina:

$$\mathbb{P}\Big(N(G_1) = k_1, N(G_2) = k_2, \dots, N(G_n) = k_n | N(G) = k\Big).$$



14. Sean X_n e Y_n con distribuciones, mostradas en el anterior gráfico:

(a) Encuentra la media y la varianza de X_n y Y_n.

(b) ¿ Qué nos dice la desigualdad de Chebyshev acerca de la convergencia de X_n e Y_n?.

(c) ¿ Es Y_n convergente en probabilidad?. ¿ Cuál es el valor si es que es convergente en probabilidad?.

(d) ¿Si una secuencia de variables aleatorias converge en probabilidad a a, entonces la secuencia de valores esperados converge también a a?. Prueba o da un contraejemplo.

Una secuencia de variables aleatorias se dice que converge a un número c en *media cuadrática*, si se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - c)^2] = 0$$

(e) Usa la desigualdad de Markov, para probar que la cobvergencia en media cuadrática implica convergencia en probabilidad.

(f) Da un ejemplo que muestra que la convergencia en probabilidad no implica convergencia en media cuadrática.

15. Resuelve lo siguiente:

(a) Prueba que se cumple $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ o lo que es lo mismo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}$$

(b) Sea $\{X_1, X_2, \dots\}$ una secuencia de variables aleatorias normal estándar independientes. Sea $S_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots X_n^2$. Encuentra:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \leq n + \sqrt{2n}).$$

16. Si X e Y tienen función generadora de probabilidad conjunta:

$$G_{X,Y}(s,t) = \mathbb{E}(s^X t^Y) = \frac{\{1-(p_1+p_2)\}^n}{\{1-(p_1 s + p_2 t)\}^n}, \text{ donde } p_1 + p_2 \leq 1$$

encuentra las funciones de masa marginales de X e Y y la funcón de masa de $X + Y$. Encuentra la probabilidad generadora condicional $G_{X|Y}(s|y) = \mathbb{E}(s^X | Y = y)$ de X dado que $Y = y$.

17. Sea una secuencia $X_1, X_2, \dots$ de variables aleatoria binarias tomando valores en el conjunto $\{0,1\}$. Sea Y una variable aleatoria continua que toma valores en $[0,1]$. Relacionamos X e Y asumiendo que Y es el número real cuya representación binaria es $0.X_1X_2X_3\dots$, es decir:

$$Y = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} X_k$$

(a) Suponiendo que X_i forman un proceso de Bernoulli con paramétro $\frac{1}{2}$. Muestra que Y es distribuida uniformemente (considera la probabilidad del evento $(i-1)/2^k < Y < i/2^k$, donde i y k son enteros positivos).

(b) Suponiendo que Y es distibuida uniformemente. Muestra que las X_i forman un proceso de Bernoulli con paramétro $\frac{1}{2}$.

18. Consideremos sobre (a,b) una variable X, tal que :

$$F_X(x) = \begin{cases} (x-a)/(b-a) & x \in (a,b) \\ 0 & x \leq a \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

y

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & x \in (a,b) \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Calcula la esperanza y varianza de X.

19. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes y supongamos que X_k es de Bernoulli con parámetro p_k. Muestra que $Y = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ tiene media y varianza dada por:

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{1}^{n} p_k, \quad \mathbb{V}(\mathbb{Y}) = \sum_{1}^{n} p_k(1-p_k)$$

20. Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vector de variables aleatorias. La `matriz de covarianza` **V(X)** de **X** es definida como la matriz simétrica $n \times n$ con entradas $(v_{i,j} : 1 \leq i, j \leq n)$ dado por $v_{i,j} = \text{cov}(X_i, X_j)$. Muestra que $\det(\mathbf{V(X)}) = 0$ si y sólo si las X_i son linealmente dependiente con probabilidad 1, esto es $\mathbb{P}(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = b) = 1$ para algún $\mathbf{a}$ y b.

21. Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vector de variables aleatorias cada una con la distribución de Bernoulli con parámetro p. Sea $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ creciente ($f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$ siempre que $x_i \leq y_i$ para cada i).

   - Sea $e(p) = \mathbb{E}(f\mathbf{X})$. Muestra que $e(p_1) \leq e(p_2)$ si $p_1 \leq p_2$.

22. Sea X y Y variables aleatorias con densidad conjunta $f(x,y) = cx(y-x)e^{-y}$, $0 \leq x \leq y\infty$.

   (a) Encuentra c.

   (b) Muestra que:

$$f_{X|Y}(x|y) = 6x(y-x)y^{-3}, \ \ 0 \leq x \leq y,$$
$$f_{Y|X}(y|x) = (y-x)e^{x-y}, \quad 0 \leq x \leq y \leq \infty$$

   (c) Calcula $\mathbb{E}(X|Y) = \dfrac{1}{2}Y$ y $\mathbb{E}(Y|X) = X + 2$.

23. Si X es una variable aleatoria discreta y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, prueba que:

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in Im\ X} g(x)\mathbb{P}(X = x).$$

siempre que esta suma converga absolutamente.

24. Prueba el siguiente resultado:

   (a) Para una variable aleatoria no negativa X se cumple:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)dt$$

   (b) Si X es una variable aleatoria tomando los valores $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, entonces:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

25. Sea el número de éxitos en n pruebas de Bernoulli, donde la probabilidad de éxito en cada prueba es $p = \dfrac{1}{2}$. Proporciona un valor númerico para el límite cuando n tiende al infinito para cada una de las siguientes expresiones:

- $\mathbb{P}(\frac{n}{2} - 10 \leq S_n \leq \frac{n}{2} + 10)$
- $\mathbb{P}(\frac{n}{2} - \frac{n}{10} \leq S_n \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{10})$
- $\mathbb{P}(\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} \leq S_n \leq \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2})$

26. (a) Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{2n}$ variables aleatorias idénticamente distribuidas e independientes. Encuentra:

$$\mathbb{E}[X_1 | X_1 + X_2 + \ldots, X_n = x_0],$$

donde x_0 es una constante.

(b) Definimos:

$$S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k, \quad 1 \leq k \leq 2n.$$

Encuentra:

$$\mathbb{E}[X_1 | S_n = s_n, S_{n+1} = s_{n+1}, \ldots S_{2n} = s_{2n}]$$

donde $s_n, s_{n+1}, \ldots, s_{2n}$ son constantes.

27. Sean X e Y variables aleatorias tomando valores enteros positivos, tal que:

$$\mathbb{P}(X = k | X + Y = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

para algún p y todo $0 \leq k \leq n$. Muestra que X e Y tienes distribuciones de Poisson.

28. (a) Prueba que $\mathbb{E}\{\mathbb{E}(X|Y, Z)|Y\} = \mathbb{E}(X|Y)$.

(b) Supongamos que $\mathbb{E}|X^r| < \infty$, donde $r > 0$. Deduce que $x^r \mathbb{P}(|X| \geq x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. De igual forma si $x^r \mathbb{P}(|X| \geq x) \to 0$, cuando $x \to \infty$ donde $r \geq 0$, muestra que $\mathbb{E}|X^s| < \infty$ para $0 \leq s < r$.

(c) Sea X una variable aleatoria que toma valores en el intervalo $[-M, M]$. Muestra que

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \geq \frac{\mathbb{E}|X| - a}{M - a}$$

si $0 \leq a < M$.

29. Sea $Y_1, Y_2, \ldots$ variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas que toma valores en $[0, \infty)$. Si se coloca $Z_0 = 0, Z_1 = Y_1, Z_2 = Y_1 + Y_2, \ldots$. Si Z_n es el tiempo del n-ésima llegada a una tienda (el proceso estocástico $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$) es llamado *renewal process*. Sea N_t el número de llegadas durante $(0, t]$.

(a) Muestra que:

$$\mathbb{P}(N_t \geq n) = \mathbb{P}(Z_n \leq t)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t \in [0, \infty)$.

(b) Muestra que para *casi todo* ω,

$$\lim_{t \to \infty} N_t(\omega) = +\infty$$

(c) Si Z_{N_t} es el tiempo de la última llegada antes del tiempo t y Z_{N_t+1} es el tiempo de la próxima llegada después del tiempo t. Usa la ley fuerte de los grandes números y el resultado anterior para probar que:

$$\lim_{t \to \infty} Z_{N_t} / N_t = a$$

donde a es el valor esperado de Y.