Introducción a la probabilidad y estadística CM274

César Lara Avila

16 de septiembre de 2017

https://github.com/C-Lara

6. Variables aleatorias continuas

Introducción

Todas las variables aleatorias asignan un número a cada resultado en un espacio muestral. Mientras que las variables aleatorias discretas asumen un conjunto discreto de valores posibles, las variables aleatorias continuas tienen un conjunto continuo de valores.

Ejemplo 1 Dado que el tiempo es continuo, la cantidad de tiempo que Luis por llegar temprano (o tarde) para la clase es una variable aleatoria continua.

Supongamos que se mide cuánto Luis llega temprano a la clase cada dia (en unidades de minutos). Es decir, el resultado de un ensayo en nuestro experimento es un tiempo en minutos. Asumiremos que hay fluctuaciones aleatorias en el momento exacto en que aparece. Dado que en principio Luis podía llegar, por ejemplo, a 3.43 minutos de anticipación, o 2.7 minutos de retraso (correspondiente al resultado $-2,7$), o en cualquier otro momento, el espacio muestral consta de todos los números reales.

Así, la variable aleatoria que da el resultado en sí tiene un rango continuo de valores posibles.

Cálculo

Aunque asumiremos que tu puedes calcular las formas más familiares de derivados e integrales a mano. Pero las expresiones delicadas, dejaremos que la computadora haga la mayor parte del cálculo.

Conceptualmente, debes estar confortable con dos puntos de vista de una integral definida.

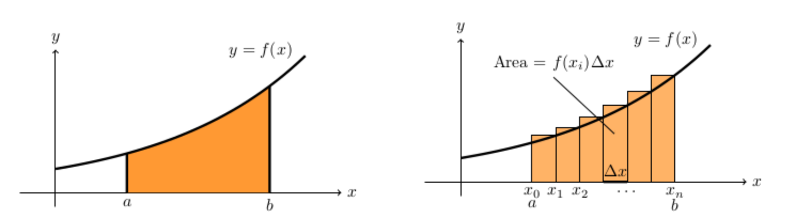
1. $\int_a^b f(x)dx = \text{area bajo la curva } y = f(x).$
2. $\int_a^b f(x)dx = \text{suma de } f(x)dx.$

La conexión entre los dos puntos de vista:

$$\begin{aligned} \text{área } &\approx \text{suma de área rectángulos} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots f(x_n)\Delta x \\ &= \sum_1^n f(x_i)\Delta x. \end{aligned}$$

Cálculo

A medida que la anchura Δx de los intervalos se hace más pequeña, la aproximación se hace mejor.



En el cálculo aprendiste a calcular integrales encontrando antiderivadas. Esto es importante para los cálculos, pero no confundas este método con la razón por la que usamos integrales.

Nuestro interés en las integrales proviene principalmente de su interpretación como una `suma` y en mucho menor grado su interpretación como área.

Variables aleatorias continuas

Una variable aleatoria continua toma un rango de valores, que puede ser finito o infinito en extensión. Aquí hay algunos ejemplos de rangos: $[0,1]$, $[0,\infty)$, $(-\infty,\infty)$, $[a,b]$.

Definición: Una variable aleatoria X es continua, si existe una función continua $f(x)$ tal que para algún $c \leq d$, tenemos

$$\mathbb{P}(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx \tag{1}$$

La función $f(x)$ es llamada la **función de densidad de probabilidad** (PDF). El PDF satisface las siguientes propiedades:

1. $f(x) \geq 0$ (f es no negativa).
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (esto es equivalente a: $\mathbb{P}(-\infty < X < \infty) = 1$).

Función de densidad de probabilidad

La función de densidad de probabilidad $f(x)$ de una variable aleatoria continua es el análogo de la función de masa de probabilidad $p(x)$ de una variable aleatoria discreta. Aquí hay dos diferencias importantes:

1. A diferencia de $p(x)$, el PDF $f(x)$ no es una probabilidad. Tienes que integrar para obtener la probabilidad.
2. Como $f(x)$ no es una probabilidad, no hay restricción de que $f(x)$ sea menor o igual a 1.

Notas:

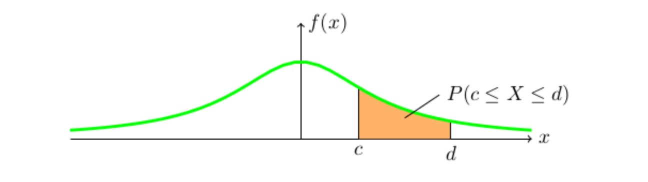
En la propiedad 2, hemos integrado sobre $(-\infty, \infty)$ ya que no conocíamos el rango de valores tomado por X. Formalmente, esto tiene sentido porque simplemente definimos $f(x)$ como 0 fuera del rango de X.

En la práctica, debemos integrar entre los límites dados por el rango de X.

Vista gráfica de la probabilidad

Si se grafica la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua X entonces

$$\mathbb{P}(c \leq X \leq d) = \text{área bajo la gráfica entre c y d.}$$



Pregunta:

¿Cuál es el área total bajo el PDF $f(x)$?.

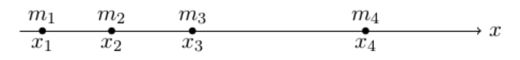
Los términos: masa de probabilidad y densidad de probabilidad

¿Por qué usamos los términos masa y densidad para describir el PMF y el PDF? ¿Cuál es la diferencia entre los dos?

La respuesta simple es que estos términos son completamente análogos a la masa y la densidad que se vió en la física y el cálculo. Vamos a revisar esto primero para la función de masa de probabilidad y luego discutir la función de densidad de probabilidad.

Masa con una suma:

Si las masas m_1, m_2, m_3 y m_4 son puestas en las posiciones x_1, x_2, x_3 y x_4, entonces la masa de probabilidad es $m_1 + m_2 + m_3 + m_4$.



Podemos definir una función de masa $p(x)$ con $p(x_j) = m_j$ para $j = 1, 2, 3, 4$, y $p(x) = 0$ en caso contrario.

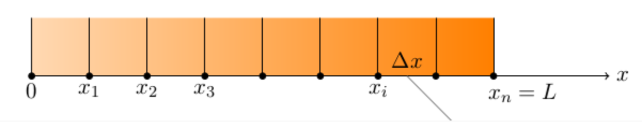
Los términos: masa de probabilidad y densidad de probabilidad

En esta notación la masa total es $p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) + p(x_4)$.

La función de masa de probabilidad se comporta exactamente de la misma manera, excepto que tiene la dimensión de probabilidad en lugar de masa.

Masa con una integral de densidad:

Supongamos que se tiene una varilla de longitud L metros con densidad variable $f(x) kg/m$. (Observa que las unidades son de masa/longitud.)



masa de la i-ésima pieza $\approx f(x_i)\Delta x$

Los términos: masa de probabilidad y densidad de probabilidad

Si la densidad varía continuamente, debemos encontrar la masa total de la barra por integración:

$$\text{masa total} = \int_0^L f(x)dx.$$

Esta fórmula viene de dividir la barra en pequeñas piezas y sumando la masa de cada pieza. Es decir:

$$\text{masa total} \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

En el límite cuando Δx tiende a cero, la suma se convierte en integral.

La función de densidad de probabilidad se comporta exactamente de la misma manera, excepto que tiene unidades de probabilidad/(unidad x) en lugar de kg/m. De hecho, la ecuación (1) es exactamente análoga a la integral anterior para la masa total.

Ejemplo

Ejemplo 2 Supongamos que X tiene un pdf $f(x) = 0$ en $[0, 1/3]$ (esto significa que $f(x) = 0$ fuera de $[0, 1/3]$). Grafiquemos el pdf y calculemos $\mathbb{P}(.1 \leq X \leq .2)$ y $\mathbb{P}(.1 \leq X \leq 1)$.

En efecto: $\mathbb{P}(.1 \leq X \leq .2)$, es mostrado a la izquierda de la figura que continua. Calculemos la integral:

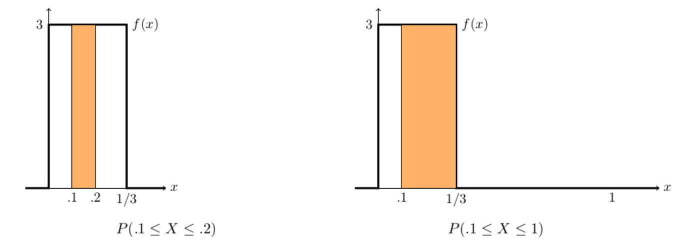
$$\mathbb{P}(.1 \leq X \leq .2) = \int_{.1}^{.2} f(x)dx = \int_{.1}^{.2} 3dx = .3$$

O podemos encontrar el área geométricamente:

$$\text{área del rectángulo} = 3 \cdot .1 = .3$$

$\mathbb{P}(.1 \leq X \leq 1)$ se muestra a la derecha de la figura que continua. Puesto que hay un área bajo $f(x)$ hasta $1/3$, tenemos $\mathbb{P}(.1 \leq X \leq 1) = 3 \cdot (1/3 - .1) = .7$.

Ejemplo



Preguntas:

1. En el ejemplo anterior $f(x)$ toma valores mayores que 1. ¿Por qué esto no viola la regla de que las probabilidades están siempre entre 0 y 1?.
2. Sea X una variable aleatoria continua:
   - ¿ Qué es $\mathbb{P}(a \leq X \leq a)$?
   - ¿ Qué es $\mathbb{P}(X = 0)$?
   - ¿ $\mathbb{P}(X = a) = 0$ significa que X no puede ser igual a?

Notación

Podemos definir una variable aleatoria dando su rango y una función de densidad de probabilidad.

Por ejemplo podríamos decir, sea X una variable aleatoria con rango $[0, 1]$ y pdf $f(x) = x/2$. Implícitamente, esto significa que X no tiene densidad de probabilidad fuera del rango dado. Si quisiéramos ser absolutamente rigurosos, diríamos explícitamente que $f(x) = 0$ fuera de [0,1], pero en la práctica esto no será necesario.

Función de distribución acumulativa

La función de distribución acumulativa CDF de una variable aleatoria continua X es definida de igual manera que el CDF de las variables aleatorias discretas.

$$F(b) = \mathbb{P}(X \leq b).$$

Ten en cuenta que la definición es acerca de la probabilidad. Al usar el cdf primero debes pensar en que es una probabilidad. Entonces cuando lo vaa a calcular, puedes utilizar,

$$F(b) = \mathbb{P}(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx, \quad \text{donde} \quad f(x) \text{ es el pdf de X .}$$

Algunas observaciones

Notas:

1. Para las variables aleatorias discretas, hemos definido la función de distribución acumulativa, pero no tuvimos mucha ocasión de usarlo. El cdf desempeña un papel mucho más prominente para las variables aleatorias continuas.
2. Como antes, iniciamos la integral en $-\infty$ porque no conocíamos el rango preciso de X. Formalmente, esto todavía tiene sentido ya que $f(x) = 0$ fuera del rango de X. En la práctica, conoceremos el rango y inicializaremos la integral al inicio del rango.
3. En la práctica, a menudo decimos X tiene distribución F (x) en lugar de X tiene función de distribución acumulativa $F(x)$.

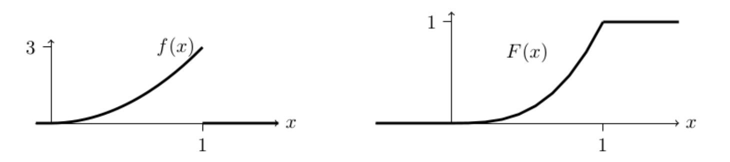
Ejemplo

Ejemplo 3 Encontremos el cdf, para el pdf $f(x) = 3x^2$ en $[0,1]$. Supongamos X es una variable con esa distribución. Hallemos también $\mathbb{P}(X < 1/2)$.

$f(x) = 3x^2 en$ $[0,1] \to F(a) = \int_0^a 3x^2 dx = a^3$ en $[0,1]$. Por tanto:

$$F(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 0 \\ a^3 & \text{si } 0 \leq a \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < a \end{cases}$$

Aquí los gráficos de $F(x)$ y $f(x)$, así como el valor pedido $\mathbb{P}(X < 1/2) = F(1/2) = 1/8$.



Propiedades de la función de distribución acumulativa

A continuación se presenta un resumen de las propiedades más importantes de la función de distribución acumulativa (CDF)

1. (Definición) $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$
2. $0 \leq F(x) \leq 1$
3. $F(x)$ es no decreciente, esto es, si $a \leq b$ entonces $F(a) \leq F(b)$.
4. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ y $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
5. $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$
6. (Teorema fundamental del cálculo) $F^{'}(x) = f(x)$.

Las propiedades 2, 3, 4 son idénticas a las de las distribuciones discretas.

Propiedades de la función de distribución acumulativa

La propiedad 5, puede ser vista algebraicamente:

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \\
\Leftrightarrow &\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \\
\Leftrightarrow\ & \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).
\end{aligned}
$$

La propiedad 5 también puede verse geométricamente. La región anaranjada representa $F(b)$ y la región de rayas representa $F(a)$. Su diferencia es $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$.