Curso: Introducción a la Probabilidad y Estadística CM -274
Práctica dirigida 12
Teorema del límite central, Estimadores de orden
Más sobre distribuciones, Principio de máxima verosimilitud.

Lista de ejercicios

---

1. (a) Prueba que para todo $x > 0$,

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{-x^2/2} < 1-\Phi(x) < \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$$

   (b) Usa la parte (a) para probar que $1-\Phi(x) \sim \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. Esto es, $x \to \infty$, el radio de los dos lados se acerca a 1.

   (c) Sea Z una variable normal estándar. Muestra que para $x > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(Z > t + \frac{x}{t} | Z \geq t\right) = e^{-x}.$$

2. (a) Sea Z una variable aleatoria normal estándar. Muestra que la variable aleatoria $Y = Z^2$ es gamma y encuentra sus parámetros.

   (b) Sea X una variable aleatoria normal, con media y desviación estándar σ. Encuentra la función distribución de $W = \left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2$.

3. Sea α y β enteros positivos, X una variable aleatoria beta con parámetros α y β, e Y sea una variable aleatoria binomial con parámetros $\alpha+\beta-1$ y p, $0 < p < 1$. Entonces:

$$\mathbb{P}(X \leq p) = \mathbb{P}(y \geq \alpha).$$

4. Para un entero $n \geq 3$, sea X una variable aleatoria con función densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

   Tal variable aleatoria, tiene muchas aplicaciones estadística. Ella es llamada la distribución `t` con n grados de libertad. Calcula, la esperanza y la varianza de X.

5. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia de variables aleatorias con funciones de distribución $F_1, F_2, \ldots$ y funciones de generación de momentos $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \ldots$, respectivamente. Sea X una variable aleatoria con función de distribución F y función generadora de momentos $M_X(t)$. Si para todos los valores de t, $M_{X_n}(t)$ converge a $M_X(t)$, entonces en los puntos de continuidad de F, F_n converge a F.

6. El tiempo que tarda un estudiante para terminar una prueba de aptitud (en horas) tiene la función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} 6(x-1)(2-x) & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

   Aproxima la probabilidad de que el promedio de tiempo que tarda una muestra aleatoria de 15 estudiantes en completar la prueba es de menos de 1 hora y 25 minutos.

7. Si se seleccionan 20 números aleatorios independientemente del intervalo $(0,1)$. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que la suma de estos números sea al menos ocho?.

8. Cada vez que Jim carga un artículo a su tarjeta de crédito, redondea la cantidad al dólar más cercano en sus registros. Si ha utilizado su tarjeta de crédito 300 veces en los últimos 12 meses. ¿ Cuál es la probabilidad de que su historial difiera del gasto total, como mucho en 10 dólares?.

9. Una psicóloga quiere estimar μ, el IQ medio de los estudiantes de una universidad. Para ello, toma una muestra de tamaño n de los estudiantes y mide su IQ. Entonces encuentra el promedio de estos números. Si ella cree que los coeficientes de inteligencia de estos estudiantes son variables aleatorias independientes con varianza 170, usando el teorema del límite central, ¿cuán grande debe elegir una muestra para estar al 98% seguro de que su promedio es exacto dentro de ± 0.2?.

10. Cada vez que Erika carga un gasto a su tarjeta de crédito, omite los centavos y registra sólo el valor en dólares. Si este mes ha cargado su tarjeta de crédito 20 veces, utilizando la desigualdad Chebyshev, encuentra un límite superior en la probabilidad de que su registro muestra por lo menos 15 dólares menos que la cantidad real es cargada.

11. Sean $\{X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots X_{(n)}\}$ los estimadores de orden de las variables aleatorias idénticamente distribuidas e independientes $X_1, X_2, \ldots X_n$ con funciones de distribución de probabilidad y densidad F y f respectivamente. Entonces F_k y f_k, las funciones distribución de probabilidad y densidad de $X_{(k)}$ respectivamente, están dadas por:

$$F_k(x) = \sum_{i=k} \binom{n}{i} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i}, \qquad -\infty < x \infty.$$

y

$$f_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} f(x) [F(x)]^{k-1} [1 - F(x)]^{n-k}, \qquad -\infty < x \infty.$$

12. Sean $X_1, X_2, \ldots X_{2n+1}$, $2n+1$ números aleatorios de $(0,1)$. Calcula la función de densidad de probabilidad de las $X_{(n+1)}$, la mediana de esos números.

13. Sean $\{X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots X_{(n)}\}$ los estimadores de orden de las variables aleatorias idénticamente distribuidas e independientes $X_1, X_2, \ldots X_n$ con funciones de distribución de probabilidad y densidad F y f respectivamente. Entonces para $x < y$, $f_{ij}(x,y)$, la función densidad de probabilidad conjunta de $X_{(i)}$ y $X_{(j)} (i < j)$ es dada por:

$$f_{ij}(x,y) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)} f(x) f(y) [F(x)]^{i-1} [F(y) - F(x)]^{j-i-1} [1 - F(y)]^{n-j}.$$

Esto es claro que para $x \geq y$, $f_{ij}(x,y) = 0$.

14. Sean $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$ una secuencia de variables aleatorias no negativas, idénticamente distribuidas e independientes. Sea F la función distribución de probabilidad de $X_i, 1 \leq i \leq n$. Prueba:

$$\mathbb{E}(X_{(n)}) = \int_0^\infty (1 - [F(x)]^n) dx.$$

15. Sean $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n$ una secuencia de variables aleatorias binomiales no negativas, independientes, cada una con parámetros (n, p). Encuentra la función de masa de probabilidad $X_{(i)}, 1 \leq i \leq m$.

16. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una población con función de distribución de probabilidad F y función de densidad de probabilidad f.

    (a) Calcula la función densidad de probabilidad del rango muestral $R = X_{(n)} - X_{(1)}$.

(b) Usa el resultado anterior, para encontrar la función densidad de probabilidad del rango muestral de n números aleatorios de $(0, 1)$.

17. Alice modela el tiempo que pasa cada semana en la tarea como una variable aleatoria exponencialmente distribuida con el parámetro desconocido θ. Los tiempos de tarea en diferentes semanas son independientes. Después de pasar 10, 14, 18, 8 y 20 horas en las primeras 5 semanas del semestre. ¿Cuál es el estimador de máxima verosimilitud de θ?.

18. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la distribución exponencial con función densidad de probabilidad:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, \qquad 0 < x < \infty, \qquad \theta \in \Omega = \{\theta : 0 < \theta < \infty\}.$$

Encuentra el estimador de máxima verosimilitud para θ.

19. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la distribución geométrica con función de masa de probabilidad: $f(x; p) = (1-p)^{x-1}p,\ x = 1, 2, 3, \ldots$. Encuentra el estimador de máxima verosimilitud para p.

20. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de la distribución $N(\theta_1, \theta_2)$, donde:

$$\Omega = \{(\theta_1, \theta_2) : -\infty < \theta_1 \infty, -\infty < \theta_2 < \infty\}.$$

Encuentra los estimador de máxima verosimilitud para μ y σ^2.