Lista de ejercicios

1. Un dado de seis caras se carga de tal manera que cada cara par es dos veces más probable que cada cara impar. Construye un modelo probabilístico para un solo lanzamiento de este dado y encuentra la probabilidad de que un 1, 2 o 3 se presentará.

2. Una cierta familia tiene 6 niños, consistiendo en 3 muchachos y 3 muchachas. Asumiendo que el orden de los nacimientos son igualmente probables, ¿cuál es la probabilidad de que los tres hijos mayores sean las 3 chicas?.

3. Una ciudad con 6 distritos tiene 6 robos en una semana en particular. Suponiendo que los robos se localizan de manera aleatoria, con todas las posibilidades de que donde ocurrió un robo es igualmente probable. ¿Cuál es la probabilidad de que algún distrito haya tenido más de un robo?.

4. Los alces habitan en un cierto bosque. Hay N alces, de los cuales una simple muestra aleatoria de tamaño n son capturados y etiquetados (`muestra aleatoria simple` significa que todos los $\binom{N}{n}$ conjuntos de n alces son igualmente probables). Los alces capturados son devueltos a la población y luego se lanza una nueva muestra, esta vez con el tamaño m. Este es un método importante que es ampliamente utilizado en ecología, conocido como `captura-recaptura`.

   ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente k de los m alces en la nueva muestra se etiquetó previamente?. (Suponga que un alce que fue capturado antes no se vuelve más o menos probable que sea capturado de nuevo.)

5. Un frasco contiene r bolas rojas y g bolas verdes, donde r y g son números enteros positivos fijados. Una bola es sacada del tarro aleatoriamente (con todas las posibilidades igualmente probables) y entonces una segunda bola se saca aleatoriamente.

   - Explica intuitivamente por qué la probabilidad de que la segunda bola sea verde es la misma que la probabilidad de que la primera pelota sea verde.
   - Define la notación para el espacio muestral del problema y utilízalo para calcular las probabilidades de (a) y muestra que son iguales.
   - Supongamos que hay 16 bolas en total y que la probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color es la misma que la probabilidad de que sean colores diferentes. ¿Qué son r y g (enumera todas las posibilidades)?.

6. Alicia asiste a un pequeño colegio en el que cada clase es sólo una vez a la semana. Ella está decidiendo entre 30 clases que no se superponen. Hay 6 clases para elegir de cada dia de la semana, de lunes a viernes. Confiando en la benevolencia de la aleatoriedad, Alicia decide registrarse en 7 clases seleccionadas al azar de los 30, con todas las opciones igualmente probables.

   ¿Cuál es la probabilidad de que ella tenga clases todos los dias, de lunes a viernes? (Este problema se puede hacer directamente usando la definición de probabilidad, o usando el principio inclusión-exclusión.)

7. Prueba que para tres eventos A, B y C, se cumple

   $$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - 2.$$

   Generaliza el resultado.

8. Encuentra una forma de probar esta igualdad, a través de una secuencia de pasos, utilizando los axiomas de la probabilidad,

   $$\mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (A^c \cup B)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B).$$

9. Considere el experimento cuyo espacio muestral es toda la línea real.

   - Sea $\{a_n\}$ es una secuencia creciente de números crecientes que converge a a y $\{b_n\}$ una secuencia decreciente que converge a b. Muestra que

   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}([a_n, b_n]) = \mathbb{P}([a.b]).$$

   - Sea $\{a_n\}$ una secuencia decreciente que que converge a a y $\{b_n\}$ una secuencia creciente que converge a b. Es cierto que

   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}([a_n, b_n]) = \mathbb{P}([a.b])?.$$