Lista de ejercicios

1. En un determinado país, la probabilidad es 49/50 de que un avión de combate seleccionado al azar regrese de una misión sin percances. Jessica argumenta que esto significa que hay una misión con un percance en cada 50 vuelos consecutivos. Ella concluye que si un piloto de caza regresa con seguridad de 49 misiones consecutivas, debe regresar a casa antes de su quincuagésima misión. ¿Está en lo correcto Jessica? Explica por qué si o por qué no. Utiliza propiedades de la teoria de las probabilidades.

2. Sean A, B y C tres eventos. Muestra que:
$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$$
si y sólo si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 0$

3. Un profesor distraido escribió n cartas y las selló en sobres antes de escribir las direcciones en los sobres. Luego escribió las n direcciones en los sobres al azar. ¿ Cuál es la probabilidad de que al menos una carta fue dirigida correctamente?.

4. Una moneda se lanza n veces. Calcula la probabilidad de no obtener caras sucesivas. Sugerencia: Construye una secuencia de tipo Fibonacci.

5. Dos jugadores juegan el juego de `caras y sellos`, en el cual cada vez que en el lanzamiento de una moneda cae cara, el jugador A gana 1 dólar de B y cada vez que cae sello , el jugador B gana 1 de A. Supongamos que el jugador A tiene inicialmente un dólar y el jugador B tiene b dólares. Si continúan jugando este juego sucesivamente,
   - ¿Cuál es la probabilidad de que A se arruine?.
   - ¿Cuál es la probabilidad de que el juego siga para siempre sin que nadie gane?.

6. Una urna contiene 10 chips blancos y 12 chips rojos. Dos chips se extraen al azar y sin mirar sus colores, se descartan. ¿ Cuál es la probabilidad de que un tercer chip extraido sea rojo?.

7. Una caja contiene 7 bolas rojas y 13 azules. Se seleccionan dos bolas al azar y se descartan sin que se vean sus colores. Si una tercera pelota es seleccionada aleatoriamente y se observa que es roja, ¿ cuál es la probabilidad de que ambas bolas descartadas sean azules?.

8. Si dos dados son lanzados seis veces, ¿cuál es la probabilidad de que la sexta suma obtenida no sea una repetición?.

9. Un dado se lanza sucesivamente. Sea X el número de lanzamientos hasta que cada uno de los seis posibles resultados ocurran al menos una vez. Halla la función de masa de probabilidad de X.

10. Una urna contiene w chips blancos y b chips azules. Un chip se extrae al azar y luego se devuelve a la urna junto con $c > 0$ chips del mismo color. Este experimento se repite sucesivamente. Sea X_n el número de chips blancos extraidos durante las primeras n extracciones. Demuestra que $\mathbb{E}(X_n) = nw/(w+b)$.

11. Sea X una variable aleatoria discreta. Sea $0 < s < r$. Demuestra que si existe el r- ésimo momento absoluto de X, entonces también existe el momento absoluto de orden s de X.

12. Sea X una variable aleatoria con función densidad de probabilidad:
$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$
Prueba que $\mathbb{E}(|X|^\alpha)$ converge si $0 < \alpha < 1$ y diverge si $\alpha \geq 1$.

13. Sean g y h dos funciones densidad de probabilidad con funciones de distribución G y H respectivamente. Muestra que para $-1 \leq \alpha \leq 1$, la función:

$$f(x,y) = g(x)h(y)(1 + \alpha[2G(x) - 1][2H(y) - 1]).$$

es una función densidad de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias. Prueba, que g y h son las funciones de densidad marginal de f.

14. Los $2n$ asientos alrededor de una mesa circular están numerados en sentido horario. Los huéspedes en la cena forman n pares de rey y reina. Las reinas se sientan al azar en los asientos impares, con los reyes de manera aleatoria entre ellas. Sea N el número de reinas sentadas al lado de su rey. Encuentra la media y la varianza de N.

15. Sea X una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2/x^2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Encuentra la distribución y la función de densidad de $Y = X^2$.

16. Contruye un contraejemplo, con variables aleatorias discretas; que si $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ entonces no se cumple que X e Y son independientes.

17. Demuestra que si X e Y son variables aleatorias normales estándar independientes, entonces $X + Y$ y $X - Y$ son variables aleatorias independientes.

18. Si se cumple, para una variable aleatoria discreta N con un conjunto de posible valores $\{1, 2, 3, \dots\}$ que $\mathbb{E}(N) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq 1)$, prueba usando esta propiedad lo siguiente:

Sean $\{X_1, X_2, \dots X_n\}$ una secuencia de variables aleatorias independientes con $\mathbb{P}(X_j = i) = p_i(1 \leq j \leq n$ y $i \geq 1)$. Sea $h_k = \sum_{i=k}^{\infty} p_i$, entonces:

$$\mathbb{E}[\min(X_1, X_2, \dots X_n)] = \sum_{k=1}^{\infty} h_k^n.$$

19. Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Prueba que $\mathbb{P}(|X - \mu|) > k\sigma$ no depende de μ o σ.

20. Si X es una variable aleatoria, muestra que, para $\alpha > 1$ y $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \frac{1}{t} \ln \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \mathbb{M}_X(t).$$

21. Una función generadora de una secuencia de números reales $a = \{a_i : i = 0, 1, 2, \dots\}$ es definida como G_a

$$G_a(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i$$

para $s \in \mathbb{R}$ donde la suma converge.

La `convolución` de una secuencia real $a = \{a_i : i = 0, 1, 2, \dots\}$ y $b = \{b_i : i \geq 0\}$ es la secuencia $c = \{c_i : i \geq 0\}$, definida como:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

y se escribe como $c = a * b$

(a) Si a y b tienen funciones generadoras G_a y G_b, entonces la función generadora de c es:

$$G_c(s) = G_a(s)G_b(s)$$

(b) Prueba la identidad combinatoria

$$\sum_i \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

22. La `función generadora de probabilidad` de una variable aleatoria X es definida como la función generadora $G(s) = \mathbb{E}(s^X)$ de su función de masa de probabilidad. Por ser una serie de potencias:

(a) Existe un `radio de convergencia` $R(\geq 0)$ tal que la suma converge absolutamente si $|s| < R$ y diverge si $|s| > R$. La suma converge uniformemente sobre los conjuntos de a forma $\{s : |s| \leq R^{'}\}$ para $R^{'} < R$.

(b) $G_a(s)$ puede ser derivable o integrable término a término algún número de veces en el punto s satisfaciendo $|s| < R$.

(c) Si $G_a(s) = G_b(s)$ para $|s| < R^{'}$ donde $0 < R^{'} \leq R$ entonces $a_n = n_n$ para todo n. Además:

$$a_n = \frac{1}{n!} G_a^{(n)}(0).$$

(d) Si $a_i \geq 0$ para todo i y $G_a(s)$ es finito para $|s| < 1$, entonces $\lim_{s \to 1^+} G_s = \sum_{i=0}^{\infty} a_i$ si la suma es finita o igual a ∞.

23. Prueba lo siguiente:

(a) Si X tiene una función generadora $G(s)$ entonces:

- $\mathbb{E}(X) = G^{'}(1)$.
- En general $\mathbb{E}(X)[X(X-1)\dots(X-k+1)] = G^k(1)$.

(b) Si X e Y son independientes entonces $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$.

(c) Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes de Bernoulli, con parámetro p, con suma $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Prueba que

$$G_S(s) = (q + ps)^n \quad p + q = 1$$

En general prueba que la suma $S = X_1 + X_2 + \cdots X_n$ de variables independientes tomando valores no negativos tiene una función generadora dada por:

$$G_S = G_{X_1} G_{X_2} \dots G_{X_n}.$$

24. Si $X_1, X_2, \dots$ es una secuencia de variables aleatorias independientes identicámente distribuidas como una función generadora común G_X y $N \geq 0$ es una variable aleatoria que es independiente de las variables X_i y tiene una función generadora G_N, entonces $S = X_1 + X_2 + \cdots X_N$ tiene una función generadora dada:

$$G_S(s) = G_N(G_X(s))$$

25. Se define la función generadora de momentos de una variable aleatoria X a la función $M_X = G_X(e^t)$:

(a) Prueba que para una variable aleatoria Poisson de parámetro λ se tiene:

$$M(t) = \exp(\lambda(e^t - 1)).$$

(b) Sea $p_r > 0$ y $a_r \in \mathbb{R}$ para $1 \leq r \leq n$. ¿ Cuál de las siguientes expresiones es una función generadora de momentos y para que variable aleatoria?

$$M(t) = 1 + \sum_{r=1}^{n} p_r t^r \quad M(t) = \sum_{r=1}^{n} p_r e^{a_r t}.$$

(c) Sea X una variable aleatoria geométrica con parámetro p. Muestra que la función generadora de momentos de X, es dada por:

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}, \quad q = 1 - p, \quad t < -\ln q$$

Usa $M_X(t)$ para encontrar $\mathbb{E}(X)$ y $\mathbb{V}(X)$.

(d) Sea $Z \sim N(0,1)$. Usa $M_Z(t) = e^{t^2/2}$ para calcular $\mathbb{E}(Z^N)$, donde n es un número positivo.

26. Sean X e Y variables aleatorias binomiales independientes con paramétros (n, p) y (m, p) respectivamente. Calcula

$$\mathbb{P}(X = i | X + Y = j)$$

e interpreta el resultado.

27. Un ascensor puede transportar hasta 3.500 libras. El fabricante ha incluido un margen de seguridad de 500 libras y lista la capacidad en 3000 libras. La administración del edificio busca evitar accidentes al limitar el número de pasajeros en el ascensor. Si el peso de los pasajeros que utilizan el ascensor es $N(155, 625)$, ¿cuál es el número máximo de pasajeros que pueden utilizar el ascensor si las probabilidades de exceder la capacidad nominal de 3000 libras ha de ser mayor que 10.000 a 3?.

28. En un gran aeropuerto internacional, un banco de cambio de divisas con un solo cajero está abierto las 24 horas del día, 7 días a la semana. Supongamos que en algún tiempo $t = 0$, el banco está libre de clientes y nuevos clientes llegan en momentos aleatorios $T_1, T_1 + T_2, T_1 + T_2 + T_3, \ldots$ Donde $T_1, T_2, T_3, \ldots$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas y independientes con $\mathbb{T} = 1/\lambda$. Cuando el cajero está libre, el tiempo de servicio de un cliente que entra en el banco comienza a su llegada.

De lo contrario, el cliente se une a la cola y espera para ser atendido en un primer momento para dejar el banco después de ser atendido. Si el tiempo de servicio del i-ésimo cliente es S_i, donde $S_1, S_2, S_3, \ldots$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas y independientes con $\mathbb{E}(S_i) = 1/\mu$.

Muestra que si $\lambda < \mu$ entonces con probabilidad 1, eventualmente, para un periodo, el banco debería no tener de clientes de nuevo.

29. Sea la función de masa de probabilidad conjunta de $X_1, X_2, \ldots, X_r$ multinomial, es decir:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_r!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_r^{x_r},$$

donde $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ y $p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1$. Muestra que para $k < r$, $X_1 + X_2 + \cdots X_r$ tiene una distribución binomial.

30. (a) Si una variable aleatoria T tiene una distribución geométrica, entonces:

$$\mathbb{P}(T > n + m | T > n) = \mathbb{P}(T > m).$$

para todo n y m.

(b) Muestra el caso contrario: Si T es una variable aleatoria discreta es tal que:

$$\mathbb{P}(T > n + m | T > n) = \mathbb{P}(T > m).$$

para todo $n, m \in \mathbb{N}$, entonces T tiene una distribución geométrica.

31. (a) Supongamos que para un ensayo Bernoulli, p, la probabilidad de éxito es desconocida. Sea $\varepsilon > 0$ y $\alpha > 0$. Prueba que el valor de esta probabilidad se al menos $1-\alpha$, de que el error estimado sea menor que ε.

    (b) Para una moneda p, la probabilidad de conseguir cara es desconocida. Para estimar p, lanzamos la moneda 3000 veces y sea $\hat{p}$ la fracción de veces que cae cara hacia arriba. Demuestra que la probabilidad de que al menos 0.90 que $\hat{p}$ estima p p está en $\pm 0,03$.

32. Sean X y Y variables que toman valores sobre $\{0,1,2,\dots\}$ tal que $X = Y + Z$ donde Z es una variable aleatoria de Bernoulli con paramétro $p \in (0,1)$ independiente de Y. Sólo una de las siguientes aseveraciones es verdad. ¿ Cuál es ?:

    (a) $X + Z$ y $Y + Z$ son independientes.

    (b) X tiene los valores $2\mathbb{N}_0 = \{0,2,4,\dots\}$.

    (c) El soporte de Y es un subconjunto del soporte de X.

    (d) $\mathbb{E}[(X+Y)Z] = \mathbb{E}[(X+Y)]\mathbb{E}(Z)$

33. Se dice que una variable aleatoria X es discreta si existe un conjunto finito o contable $S \subset \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{P}(X \in S) = 1$. El conjunto S más pequeño con esa propiedad se llama `soporte` de X.

    Si X y Y son variables aleatorias de Bernoulli con el mismo paramétro $p = \dfrac{1}{2}$. ¿ Puede el soporte de su suma ser igual a $\{0,1\}$. ¿Qué sucede en el caso en que p no es necesariamente igual a $p = \dfrac{1}{2}$?.

34. Suponiendo que $f : [0,1] \to [0,1]$ es una función continua. Muestra un `método probabilistico` para evaluar $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$, usando la `Ley Fuerte de los Grandes Números`.

35. Sea $X_1, X_2, \dots$ una secuencia de variables aleatorias con funciones de distribución $F_1, F_2, \dots$ y las funciones generadoras de momentos $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \dots$ respectivamente. Sea X una variable aleatoria con función de distribución F y función generadora de momentos $M_X(t)$.

    Si para todos los valores de t, $M_{X_n}(t)$ converge a $M_X(t)$ entonces en los puntos de continuidad de F, F_n converge a F.

36. Resuelve lo siguiente:

    (a) Prueba que se cumple $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ o lo que es lo mismo

    $$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}}$$

    (b) Sea $\{X_1, X_2, \dots\}$ una secuencia de variables aleatorias normal estándar independientes. Sea $S_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots X_n^2$. Encuentra

    $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \le n + \sqrt{2n}).$$

37. Sea una secuencia $X_1, X_2, \dots$ de variables aleatoria binarias tomando valores en el conjunto $\{0,1\}$. Sea Y una variable aleatoria continua que toma valores en $[0,1]$. Relacionamos X e Y asumiendo que Y es el número real cuya representación binaria es $0.X_1X_2X_3\dots$, es decir

    $$Y = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} X_k$$

    (a) Suponiendo que X_i forman un proceso de Bernoulli con paramétro $\dfrac{1}{2}$. Muestra que Y es distibuida uniformemente (considera la probabilidad del evento $(i-1)/2^k < Y < i/2^k$, donde i y k son enteros positivos).

(b) Suponiendo que Y es distibuida uniformemente. Muestra que las X_i forman un proceso de Bernoulli con parametro $\frac{1}{2}$.

38. Un `proceso estocástico` $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es un `camino aleatorio simple` si

(a) $X_0 = 0$,

(b) El incremento $X_{n+1} - X_n$ es independiente de $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y

(c) El incremento $X_{n+1} - X_n$ cumple que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1) = \frac{1}{2}$$

Sea el espacio muestral Ω :

$$\Omega = [0,1] \times [0,1] \times \cdots = [0,1]^\infty$$

y sea la secuencia $\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots)$ de números reales en $[0,1]$, un elemento de Ω. Para $n \in \mathbb{N}_0$, sea la función $\gamma_n : \Omega \to [0,1]$, definida como

$$\gamma_n(\omega) = \omega_n$$

Para esta secuencia, definimos una nueva secuencia $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias:

$$\xi_n = \begin{cases} 1 & \gamma \geq \frac{1}{2} \\ -1 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Si escribimos:

$$X_0 = 0, \;\; X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Prueba que la secuencia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, definida anteriormente es un `camino aleatorio`.

39. Escribamos una definición más general de `camino aleatorio simple`:

(a) $X_0 = 0$,

(b) El incremento $X_{n+1} - X_n$ es independiente de $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y

(c) la variable aleatoria $X_{n+1} - X_n$ toman los valores de -1 y 1 con probabilidad $q = 1 - p$ y p. Algunos textos describen esto como que la variable aleatoria tiene la distribución

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

Y si $p = \frac{1}{2}$, se dice que el camino aleatorio es `simétrico`.

Prueba lo siguiente: Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ un camino aleatorio simétrico. Para un $n \in \mathbb{N}$ el camino aleatorio `promedio` sobre el intervalo $[0, n]$ es definido por:

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

- ¿ Es A_n un camino aleatorio simple (no necesariamente simétrico)?.
- Calcula la covarianza $\mathrm{Cov}(X_k, X_l) = \mathbb{E}[(X_k - \mathbb{E}(X_k))(X_l - \mathbb{E}(X_l))]$, para $k \leq l \in \mathbb{N}$.
- Calcula la varianza de A_n para $n \in \mathbb{N}$.

40. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ un camino aleatorio simétrico. ¿ Cuál es la probabilidad que X_n visite todos los puntos en el conjunto $\{1,2,3,4\}$ al menos una vez durante el intervalo de tiempo $n \in \{0,\ldots,10\}$?.

41. Sea $Y_1, Y_2, \ldots$ variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas que toma valores en $[0,\infty)$. Si se coloca $Z_0 = 0, Z_1 = Y_1, Z_2 = Y_1 + Y_2, \ldots$. Si Z_n es el tiempo del n-ésima llegada a una tienda (el proceso estocástico $\{Z_n : n \in \mathbb{N}\}$) es llamado `renewal process`. Sea N_t el número de llegadas durante $(0,t]$.

    (a) Muestra que:

    $$\mathbb{P}(N_t \geq n) = \mathbb{P}(Z_n \leq t)$$

    para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t \in [0,\infty)$.

    (b) Muestra que para `casi todo` ω,

    $$\lim_{t\to\infty} N_t(\omega) = +\infty$$

    (c) Si Z_{N_t} es el tiempo de la última llegada antes del tiempo t y Z_{N_t+1} es el tiempo de la próxima llegada después del tiempo t. Usa la ley fuerte de los grandes números y el resultado anterior para probar que

    $$\lim_{t\to\infty} Z_{N_t}/N_t = a$$

    donde a es el valor esperado de Y.