Curso: Introducción a la Probabilidad y Estadística CM -274
Práctica dirigida 8
Distribuciones discretas y continuas(1).

Lista de ejercicios

---

1. Si en el lanzamiento de un dado, el evento de obtener 4 o 6 se llama éxito y el evento de obtener $1,2,3$, o 5 se llama fracaso, entonces:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si } 4,6 \text{ es obtenido} \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

es una variable de Bernoulli con paramétro $p = 1/3$. Calcula la función de masa de probabilidad de X.

2. Sea X una variable binomial con paramétros n y p. Entonces $p_X(x)$, la función de masa de probabilidad de X es:

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{si } x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

3. En un hospital de una ciudad, 10 bebés, de los cuales seis eran niños, nacieron el jueves pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que los primeros seis nacimientos fueran todos niños?. Suponga que los eventos que un bebe nacido es una niña o es un niño son equiprobables.

4. Un agente de bienes raíces afirma que sólo el 30% de las casas en un determinado vecindario se valoran en menos de 200.000 soles. Una muestra aleatoria de 20 casas de esa vecindad es seleccionada y evaluada. Los resultados en (miles de soles) son los siguientes:

```
285 156 202 306 276 562 415
245 185 143 186 377 225 192
510 222 264 198 168 363
```

Basándose en estos datos, ¿es aceptable la afirmación del agente inmobiliario?.

5. Sea p la probabilidad de que una persona elegida al azar esté en contra del aborto y sea X el número de personas contra el aborto en una muestra aleatoria de tamaño n.

   Supongamos que, en una muestra aleatoria particular de n personas, k están contra el aborto. Demuestra que $\mathbb{P}(X = k)$ es el máximo para $\hat{p} = k/n$. Es decir, $\hat{p}$ es el valor de p que hace que el resultado $X = k$ más probable.

6. Un pueblo de 100.000 habitantes está expuesto a una enfermedad contagiosa. Si la probabilidad de que una persona se infecte sea de $0,04$. ¿ Cuál es la esperanza o valor esperado de que las personas se infecten?.

7. Dos revisores, Ruby y Myra, leyeron un libro independientemente y encontraron r y m erratas, respectivamente. Supongamos que la probabilidad de que una errata es notada por Ruby es p y la probabilidad de que sea notada por Myra es q, donde esas dos probabilidades son independientes. Si el número de erratas notadas por Ruby y Myra es b, estima el número de erratas inadvertidas.

8. Una clase de postgrado consta de seis estudiantes. ¿Cuál es la probabilidad de que tres de ellos hayan nacido ya sea en abril o en octubre?.

9. Un fabricante de chips afirma que sólo el 3% de sus chips son defectuosos. Si se selecciona una muestra aleatoria de 24 chips y se observa que dos de ellos son defectuosas. ¿Es justo rechazar la afirmación del fabricante basada en esta observación?.

10. Sólo el 60% de ciertos tipos de semillas germinan cuando se plantan en condiciones normales. Supongamos que se plantan cuatro semillas y X denota el número de las que germinarán. Encuentra las funciones de masa de probabilidad de X e $Y = 2X + 1$.

11. Sea X una variable aleatoria binomial con parámetros (n, p) y función de masa de probabilidad $p_X(x)$. Prueba que si $(n+1)p$ es un entero, entonces $p_X(x)$ es el máximo en dos puntos diferentes. Encuentra ambos puntos.

12. En el conjunto $\{x : 0 \leq x \leq 1\}$, 100 números son seleccionados aleatoriamente y redondeada a tres lugares decimales. ¿ Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos es 0.345?.

13. Sea un juego en el que un jugador apuesta a cualquier número del 1 al 6. Entonces tres dados son lanzados. Si uno, dos o los tres coinciden con el número que el jugador a escogido , entonces el o ella recibe una, dos o tres veces la apuesta original más su apuesta original, respectivamente.

    De lo contrario, el jugador pierde su apuesta. Sea X la ganancia neta del jugador por unidad de participación. Halle la función de masa de probabilidad de X y luego determine la cantidad esperada (esperanza) de que el jugador perderá por unidad de participación.

14. Sea X una variable aleatoria Binomial de paramétros n y p. Prueba que:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x=1}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = n^2p^2 - np^2 + np.$$

15. (a) ¿ Cuál es la probabilidad de un número par de éxitos en n pruebas independientes de Bernoulli?.

    (b) Prueba:

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} p^{2k} (1-p)^{n-2k} = \frac{1}{2}[1 + (1-2p)^n].$$

16. Una urna contiene n bolas cuyos colores son rojo o azul, igualmente probables. (Por ejemplo, la probabilidad de que todas las bolas sean rojas es $(1/2)^n$). Si sacamos k bolas de la urna, sucesivamente con reemplazo y al azar, sin que aparezcan bolas rojas. ¿Cuál es la probabilidad de que la urna no contenga bolas rojas?.

17. Cada semana, el número promedio de llamadas erróneas recibidas por una tienda de pedidos por correo es de siete. ¿ Cuál es la probabilidad de que reciban (a) dos llamadas incorrectas mañana, (b) al menos una llamada equivocada mañana?.

18. Supongamos que, en promedio, en cada tres páginas de un libro hay un error tipográfico. Si el número de errores tipográficos en una sola página del libro es una variable aleatoria de Poisson. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos un error en una página específica del libro?.

19. Supongamos que n pasas se mezclan cuidadosamente en una masa de galletas. Si horneamos k galletas de pasas de igual tamaño de esta mezcla. ¿Cuál es la probabilidad de que una galleta contiene al menos una pasa?.

20. Sea N (t) el número de terremotos que ocurren en o antes del tiempo t en todo el mundo. Supongamos que $\{N(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson y la probabilidad de que la magnitud de un terremoto en la escala de Richter sea 5 o más es p. Encuentra la probabilidad de k terremotos de tales magnitudes en o antes de t en todo el mundo.

21. Jim compra 60 boletos de loteria cada semana. Si sólo el 5% de los boletos de loteria ganan. ¿ Cuál es la probabilidad de que gane la próxima semana?.

22. Supongamos que el 3% de las familias de una gran ciudad tienen un ingreso anual de más de 60.000 soles. ¿Cuál es la probabilidad de que, de 60 familias al azar, como máximo tres tengan un ingreso anual de más de 60.000 soles?.

23. Supongamos que el $2,5\%$ de la población de un pueblo fronterizo son inmigrantes ilegales. Encuentra la probabilidad de que, en un teatro de esta ciudad con 80 espectadores aleatorios, haya por lo menos dos inmigrantes ilegales.

24. En un dia al azar, el número de habitaciones disponibles de un gran hotel de la ciudad de Lima es de 35, en promedio. ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo sábado este hotel tenga por lo menos 30 habitaciones disponibles?.

25. En promedio, hay tres errores de impresión en cada 10 páginas de un libro en particular. Si cada capítulo del libro contiene 35 páginas.¿ Cuál es la probabilidad de que los capítulos 1 y 5 tengan 10 errores de impresión cada uno?.

26. Los niños de una pequeña ciudad tienen sus propios arcos y flechas. En un concurso reciente de tiro, el 4% de ellos fueron tiros que no golpearon el objetivo ni siquiera una vez en 100 disparos. Si el número de veces que un niño seleccionado al azar ha alcanzado el objetivo es aproximadamente una variable aleatoria de Poisson, determina el porcentaje de niños que han alcanzado el objetivo al menos dos veces.

27. Supongamos que X es una variable de Poisson con $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=3)$. Encuentra $\mathbb{P}(X=5)$.

28. Supongamos que en una noche de verano, las estrellas fugaces se observan a una tasa de Poisson, una cada 12 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que se observen tres estrellas fugaces en 30 minutos?.

29. Supongamos que en Japón los terremotos ocurren a una tasa de Poisson de tres por semana. ¿ Cuál es la probabilidad de que el siguiente terremoto ocurra después de dos semanas?.

30. En una ciudad determinada, los delitos ocurren a una tasa de Poisson de cinco por mes. ¿Cuál es la probabilidad de tener exactamente dos meses (no necesariamente consecutivos) sin delitos durante el próximo año?.

31. Sea $\{N(t), t \geq 0\}$ un proceso de Poisson [1] . ¿ Cuál es la probabilidad de (a) un número par de eventos en $(t, t+\alpha)$, (b) un número impar de eventos en $(t, t+\alpha)$?.

32. Sea X una variable aleatoria con paramétro λ. Muestra que el máximo de $\mathbb{P}(X=i)$ ocurre en $[\lambda]$, donde $[\lambda]$ es el mayor entero menor o igual que λ.

33. De una baraja ordinaria de 52 cartas extraemos cartas al azar, con reemplazo y sucesivamente hasta que se saca un as. ¿ Cuál es la probabilidad de que se necesiten al menos 10 extracciones?.

34. Felipe y Ana juegan una serie de juegos de backgammon hasta que uno de ellos gana cinco juegos. Supongamos que los juegos son independientes y la probabilidad de que Felipe gane un juego es 0.58.

    (a) Encuentra la probabilidad de que la serie termine en siete juegos.

    (b) Si la serie termina en siete juegos, ¿cuál es la probabilidad de que Felipe gane?.

35. Dos jugadores participan en un juego en el que cada jugador A gana con probabilidad p, $0 < p < 1$ y pierde con B con probabilidad $q = 1-p$. Supongamos que en cada jugada resulta una pérdida de 1 sol, para el perdedor y ningún cambio para el ganador. Si el jugador A tiene inicialmente un sol y el jugador B tiene b soles. ¿Cuál es la probabilidad de que B se arruine?.

36. En 500 cálculos independientes, un científico ha cometido 25 errores. Si un segundo científico comprueba siete de estos cálculos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que detecte dos errores?. Debes suponer que el segundo científico encontrará definitivamente el error de un mal cálculo.

37. En una comunidad de $a+b$ votantes potenciales, a están a favor del aborto y $b(b < a)$ están en contra. Supongamos que se hace una votación para determinar la voluntad de la mayoria con respecto a la legalización del aborto. Si $n(n < b)$ personas aleatorias de estas $a+b$ votantes potenciales no votan. ¿Cuál es la probabilidad de que aquellos que están en contra del aborto ganen?.

[1] un proceso de Poisson es una variable aleatoria de Poisson con paramétro λt.

38. La probabilidad es p de que Claudio golpee al objetivo M cuando dispara hacia el. La probabilidad es q si Luisa golpea el objetivo A cuando dispara. Claudio y Luisa disparan un tiro cada uno en sus objetivos. Si ambos golpean sus objetivos, se detienen; de lo contrario, continuarán.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que se detengan después de que cada uno haya disparado r veces?.

   (b) ¿Cuál es el valor esperado del número de veces que cada uno de ellos han disparado antes de detenerse?.

39. Supongamos que pruebas independientes de Bernoulli con parámetro p se realizan sucesivamente. Sea N el número de pruebas necesarias para obtener x éxitos y X el número de éxitos en los primeras n pruebas. Muestra que:

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{x}{n}\mathbb{P}(X = x).$$

40. Los dígitos después del punto decimal de un número aleatorio entre 0 y 1 son números seleccionados al azar, con sustitución, independientemente y sucesivamente del conjunto $\{0, 1, \ldots, 9\}$. En un número aleatorio promedio en $(0, 1)$ ¿cuántos dígitos hay antes del quinto 3?.

41. Supongamos que el 15% de la población de una ciudad son ancianos. Sea X el número de ciudadanos, no ancianos que entran en un centro comercial antes de que llegue el décimo anciano. Encuentra la función de masa de probabilidad de X. Suponga que cada cliente que entra en el centro comercial es una persona aleatoria de toda la población.

42. Una máquina expendedora contiene latas de jugo de toronja que cuestan 75 centavos de dolar cada una, pero no está funcionando correctamente. La probabilidad de que acepte una moneda es del 10%. Jessica tiene un cuarto (moneda de 25 centavos) y cinco monedas de diez centavos. Determina la probabilidad de que ella debe probar las monedas por lo menos 50 veces antes de que ella recibe una lata de jugo de toronja.

43. Una moneda se lanza repetidamente. ¿Cuál es la probabilidad de que el quinto sello, ocurra antes de la décima cara?.

44. Sea X una variable aleatoria con paramétro p y sean n y m enteros no negativos.

   (a) ¿ Para qué valores de n, $\mathbb{P}(X = n)$ es máximo?.

   (b) ¿Cual es la probabilidad de que X es par?.

   (c) Muestra la siguiente propiedad para la distribución geométrica: [2].

$$\mathbb{P}(X > n + m | X > m) = \mathbb{P}(X > n).$$

45. La experiencia pasada demuestra que el 30% de los clientes que ingresan a la tienda ZETA hará una compra. De los clientes que realizan una compra, el 85% utiliza tarjetas de crédito. Sea X el número de los siguientes seis clientes que entran en la tienda, realizan una compra y usan una tarjeta de crédito. Encuentra la función de masa de probabilidad, el valor esperado y la varianza de X.

[2] Esta propiedad es conocida como memoryless property