Respuestas al examen final

Las respuestas del examen están escritas de manera muy simplificadas.

Solución 1

Sea E el evento en que A responderá correctamente en su primera pregunta. Sea F y G el correspondiente evento para B y C respectivamente,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B\cap C) &= \mathbb{P}(A\cap B\cap C|E\cap F\cap G)\mathbb{P}(E\cap F\cap G)\\ &\quad+\mathbb{P}(A\cap B\cap C|E^c\cap F\cap G)\mathbb{P}(E^c\cap F\cap G)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C|E^c\cap F^c)\mathbb{P}(E^c\cap F^c).\end{aligned}\tag{1}$$

Ahora

$$\mathbb{P}(A\ BC|EFG)=\mathbb{P}(ABC)\tag{2}$$

y

$$\mathbb{P}(ABC|E^cF^c)=1.\tag{3}$$

Para calcular $\mathbb{P}(ABC|E^cFG)$, debemos notar que A ya ha perdido, el juego continua entre B y C. Sea $B\cap C$ el evento que B pierda y C gana. Entonces,

$$\mathbb{P}(ABC|E^cFG)=\mathbb{P}(B\cap C).\tag{4}$$

Sea F_2 el evento que B responde la segunda ecuación correctamente, entonces

$$\mathbb{P}(BC)=\mathbb{P}(BC|F_2)\mathbb{P}(F_2)+\mathbb{P}(BC|F_2^c)\mathbb{P}(F_2^c).\tag{5}$$

Para encontrar $\mathbb{P}(BC|F_2)$, ten en cuenta que esta cantidad es la probabilidad de que B pierda a C dado que B no perdió la primera jugada. Por tanto, por independencia, esta es la probabilidad de que B pierda a C dado que C juega primero. Ahora por simetría, esta cantidad es la misma que C pierde con B si B juega primero. Por lo tanto, es igual a $\mathbb{P}(CB)$ y así resulta,

$$\mathbb{P}(BC)=\mathbb{P}(CB)\cdot p+1\cdot(1-p)$$

señalando que $\mathbb{P}(BC)=\dfrac{1}{1+p}$. Por tanto por (4),

$$\mathbb{P}(ABC|E^c\cap F\cap G)=\frac{1}{1+p}.$$

sustituyendo, esto, (4) y (3) en (1) producen,

$$\mathbb{P}(ABC)=\mathbb{P}(ABC)\cdot p^3+\frac{1}{1+p}(1-p)p^2+(1-p)^2.$$

Resolviendo, esto para $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$, obtenemos

$$\mathbb{P}(ABC)=\frac{1}{(1-p)(1+p+p^2)}.$$

Ahora, encontramos $\mathbb{P}(BCA)$ y $\mathbb{P}(CAB)$,

$$\mathbb{P}(BCA)=\frac{p}{(1+p)(1+p+p^2)},\qquad \mathbb{P}(CAB)=\frac{p^2}{(1+p)(1+p+p^2)},$$

Solución 2

$\mathbb{P}(X < 1) = F(1-) = 1/2.$

$\mathbb{P}(X = 1) = F(1) - F(1-) = 1/6.$

$\mathbb{P}(1 \leq X < 2) = F(2-) - F(1-) = 1/4.$

$\mathbb{P}(X > 1/2) = 1 - F(1/2) = 1 - 1/2 = 1/2.$

$\mathbb{P}(X = 3/2) = 0.$

$\mathbb{P}(1 < X \leq 6) = F(6) - F(1) = 1 - 2/3 = 1/3.$

Solución 3

- Sea F la función de distribución de X. Entonces X es simétrica alrededor de α si y sólo si para todo $x, 1 - F(\alpha + x) = F(\alpha - x)$ o bajo diferenciación $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$ o bajo diferenciación $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$.
- $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$ si y sólo si $(\alpha - x - 3)^2 = (\alpha + x - 3)$. Esto es verdad para todo x, si y sólo si $\alpha - x - 3 = -(\alpha + x - 3)$, lo que da $\alpha = 3$. El mismo argumento muestra que g es simétrico alrededor de $\alpha = 1$.

Solución 4

Para poder saber cuántas aristas tiene el grafo, nos basta verificar para cada $i \in [1, N]$ si su cantidad de divisores es menor o igual a K, en cuyo caso aportaría con d_i aristas; mientras que si $d_i > K$, entonces aporta con K aristas.

Ahora, la cantidad de formas en las que se puede formar el grafo es simplemente la multiplicación de la cantidad de formas en las que se pueden distribuir sus aristas en función a lo siguiente:

$$\texttt{formas(i)} = \begin{cases} 1 & d_i <= K \\ \binom{d_i}{K} & d_i > K \end{cases}$$

Con lo que ya tenemos la expresión para ambas preguntas. En el caso de $N = 30$ y $K = 5$ tenemos:

$$\texttt{Divisores} = [0, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 5, 1, 3, 3, 4, 1, 5, 1, 5, 3, 3, 1, 7, 2, 3, 3, 5, 1, 7]$$

Notamos que solamente se da el caso en que $d_i > K$ para $i = 24$ y $i = 30$, en cuyos casos se da que,

$$\binom{d_{24}}{5} = 21 = \binom{d_{30}}{5}$$

,

Por ello, dado que los demás son menores que 5, su aporte a la cantidad de aristas es su mismo valor y su aporte a la cantidad de formas es 1.

$$\sum_{i=1}^{30} d_i = 81 - 2 \cdot 2(7 - 5 = 2\,\text{en}\,24\,\text{y}\,30) = 77$$

$$\prod_{i=1}^{30} \texttt{formas(i)} = 21 \cdot 21 = 441\, mod\, (10^9 + 7) = 441$$

Solución 5

- Tenemos que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} ce^{-|x|} dx = 1$, así,

$$c = \frac{1}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} ce^{-|x|} dx} = \frac{1}{2\displaystyle\int_{0}^{\infty} ce^{-x} dx} = \frac{1}{2}.$$

- $\mathbb{E}(X^{2n+1}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} x^{2n+1} e^{-|x|} dx = 0$, ya que el integrando es una función impar.

$$\mathbb{E}(X^{2n}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} x^{2n} e^{-|x|} dx = \int_{0}^{\infty} x^{2n} e^{-x} dx,$$

  ya que el integrando es una función par. Usamos inducción para probar que $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$.
  Para $n = 1$, la integral es el valor esperado de una variable exponencial con parámetro 1 y así es igual a $1 = 1!$. Ahora asumimos que la identidad es válido para $n-1$. Usando integración por partes, mostraremos esto para n,

$$\int_{0}^{\infty} x^n e^{-x} dx = -\left[-x^n e^{-x} \right]_0^{\infty} + \int_{0}^{\infty} n x^{n-1} e^{-x} dx = 0 + n(n-1)! = n!.$$

  Así $\mathbb{E}(X^{2n}) = (2n)!$.

Solución 6

Sea $h_1(x, y) = \cos(2\pi x)\sqrt{-2\ln y}$ y $h_2(x, y) = \sin(2\pi x)\sqrt{-2\ln y}$. Entonces el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} \cos(2\pi x)\sqrt{-2\ln y} = u \\ \sin(2\pi x)\sqrt{-2\ln y} = v \end{cases}$$

definimos una relación uno a uno del conjunto,

$$R = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

en el conjunto,

$$Q = \{(u, v) : -\infty < u\infty, -\infty < v < \infty\};$$

Así podemos resolverlo únicamente en términos de x y y. Calculando tenemos:

$$\cos 2\pi x = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \qquad y \qquad \sin 2\pi x = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

que nos proporciona determinar el único valor de x. Por ejemplo, si $u > 0$ y $v > 0$, entonces $2\pi x$ es determinada en el primer cuadrante desde $2\pi x = \arccos(u/\sqrt{u^2 + v^2}$. Luego la primera condición del teorema de cambio de variable se satisface. Para verificar la segunda ecuación, note que $u > 0$ y $v > 0$,

$$w_1(u, v) = \frac{1}{2\pi} \arccos\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right), w_2(u, v) = \exp[-(u^2 + v^2)/2].$$

Así,

$$J = \frac{1}{2\pi} \exp[-(u^2 + v^2)/2] \neq 0.$$

Ahora X y Y siendo variables aleatorias independientes en $(0, 1)$ implica que f, la función densidad conjunta es,

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otras partes.} \end{cases}$$

Por el teorema, $g(u,v)$ la función densidad de probabilidad de U y V es dado,

$$g(u,v) = \frac{1}{2\pi}\exp[-(u^2+v^2)], \qquad -\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < \infty.$$

La función densidad de probabilidad U es calculada como sigue:

$$g_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{u^2+v^2}{2}\right)dv = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-v^2}{2}\right)dv,$$

operando

$$g_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-u^2}{2}\right),$$

lo que demuestra que U es una distribución estándar. De manera similar,

$$g_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-v^2}{2}\right),$$

Desde $g(u,v) = g_U(u)g_V(v)$, U y V son variables aleatorias normal estándar.

Solución 7

Las obras completas de Shakespeare en orden cronológico y sin errores son el resultado de escribir N símbolos específicos (incluyendo la barra de espacio) para algunos valores grandes N.

Para $i = 1, 2, \ldots$, sea A_i el evento de que los símbolos numerados $(i-1)N+1$ al número iN, mecanografiados por el mono, formen las obras completas de Shakespeare, en orden cronológico sin errores. También para $i = 1, 2, \ldots$, sea,

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } A_i \text{ ocurren} \\ 0 & \text{en otros casos;} \end{cases}$$

entonces $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{P}(A_i) = (1/m)^N$. Ahora, desde que $\{X_1, X_2, \ldots\}$ es una secuencia de variables aleatorias idénticamente distribuidas e independientes, por la ley de los grandes números, tenemos que,

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \left(\frac{1}{m}\right)^N\right) = 1.$$

Esta relación muestra que $\sum_{i=1}^{\infty} X_i = \infty$, la razón es que de lo contrario $\sum_{i=1}^{\infty} X_i < \infty$ implica que $\lim_{n\to\infty}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$ es 0 y no $(1/m)^N > 0$. Ahora $\sum_{i=1}^{\infty} X_i = \infty$ implica que el número infinitos de los X_i es igual a 1, lo que significa que infinitamente muchos de los A_i se produciran. Por lo tanto, no sólo una vez, sino un número infinito de veces, el mono producirá las obras completas de Shakespeare en orden cronológico sin errores.

Solución 8

- $S_n \sim \texttt{Binomial}(n,p)$, entonces por la desigualdad de Chebyshev,

  $$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$$

  donde la última desigualdad se deduce desde que $p(1-p)$ es máximo cuando $p = 1/2$.

- Una posible solución es por la desigualdad de Jensen, desde que la varianza es positiva, se cumple $\mathbb{E}(X) \leq [\mathbb{E}(X^2)]^{\frac{1}{2}}$ y así con todas las desigualdades.