Lista de ejercicios

1. La experiencia ha demostrado que al caminar en un cierto parque, el tiempo X, en minutos, de ver dos personas fumando tiene una función de densidad de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

   (a) Calcula el valor de λ.

   (b) Encuentra la función de distribución de probabilidad de X.

   (c) ¿ Cuál es la probabilidad que Jessica, que acaba de ver a una persona fumando, vea a otra persona fumando en 2 a 5 minutos, ¿ en al menos 7 minutos?.

2. (a) Realiza un gráfico de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}|x-3| & 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

   (b) Encuentra F, la función distribución de X y muestra que es continua.

   (c) Realiza un gráfico de F.

3. La función densidad de probabilidad de una variable aleatoria X es dado por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

   (a) Calcula el valor de c.

   (b) Encuentra la función de distribución de probabilidad de X.

4. Sea X una variable aleatoria continua con función densidad y distribución f y F respectivamente. Asumiendo que $\alpha \in \mathbb{R}$ es un punto en el cúal, $\mathbb{P}(X \leq \alpha) < 1$, prueba que:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{1-F(\alpha)} & \text{si } x \geq \alpha \\ 0 & \text{si } x < \alpha, \end{cases}$$

   es también una función densidad de probabilidad.

5. Sea X una variable aleatoria continua con una función densidad f. Decimos que X es `simétrica alrededor de` α si para todo x,

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha + x) = \mathbb{P}(X \leq \alpha - x).$$

   (a) Prueba que X es simétrica alrededor de α si y sólo si para todo x, tenemos $f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$.

(b) Sea X una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

y sea Y una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad:

$$g(x) = \frac{1}{\pi[1 + (x-1)^2]}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Encuentra los puntos en los que X e Y son simétricas.

6. Sea X un número aleatorio de $(0, 1)$. Encuentra la función densidad de probabilidad de $Y = 1/X$.

7. Sea X una variable aleatoria con función densidad:

$$f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}, \quad -\infty < x < \infty$$

Encuentra $\mathbb{P}(-2 < X < 1)$.

8. Sea X una variable de aleatoria continua con una función densidad de probabilidad,

$$f(x) = \begin{cases} 2/x^2 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 \text{ en otros casos,} & \end{cases}$$

Encuentra las funciones de distribución y densidad de $Y = X^2$.

9. (Método de las transformaciones) Sea X una variable aleatoria continua con función densidad f_X y el conjunto de valores posibles A. Para la función invertible $h : A \to \mathbb{R}$, sea $Y = h(X)$ una variable aleatoria con el conjunto de valores posibles $B = h(A) = \{h(a) : a \in A\}$. Supongamos que la inversa de $y = h(x)$ es la función $x = h^{-1}(y)$, que es diferenciable para todos los valores de $y \in B$. Entonces, demuestra que, f_Y es la función densidad de Y, es dada por:

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) |(h^{-1})'(y)|, \quad y \in B.$$

10. Sea X una variable aleatoria con función densidad.

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Usando el método de las transformaciones, encuentra la función densidad de probabilidad de $Y = \sqrt{X}$.

11. Sea X una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Usando el método de las transformaciones, encuentra la función densidad de probabilidad de $Y = 1 - 3X^2$.

12. Sea f la función densidad de probabilidad deuna variable aleatoria X. En términos de f, calcula la función de densidad de probabilidad de X^2.

13. Sea X e Y variables aleatorias independientes con una función de distribución común F y una función de densidad f. Muestra que $V = \max\{X, Y\}$ tiene una función distribución $\mathbb{P}(V \leq x) = F(x)^2$ y función densidad $f_V(x) = 2f(x)F(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Encuentre la función densidad de $U = \min\{X, Y\}$.

14. Sea X uniformemente distribuida en $[0, \frac{1}{2}\pi]$. Encuentra la función densidad de $Y = \sin X$.

15. Encuentra la función densidad de $Y = \sin^{-1} X$ cuando:

    (a) X es uniformemente distribuido en $[0, 1]$.

    (b) X es uniformemente distribuido en $[-1, 1]$.

16. La función de masa de probabilidad de valor entero, se define como

$$\begin{cases} 1/4, & x = -2 \\ 1/8, & x = -1 \\ 1/8, & x = 0, \\ 1/2, & x = 1, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

    Calcula $p_{X|B}(x)$, donde B es el evento en que la variable aleatoria X toma valores impares.

17. Sea X una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad dado por:

$$f_X(x) = \begin{cases} (1/2)e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

    Sea B el evento $X < 1$, calcula $f_{X|X<1}(x)$.

18. Sea X una variable aleatoria continua, cuya función de probabilidad es dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(1+x)^{-3} & x \geq 0 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

    Encuentra la densidad condicional $f_{X|0.25 \leq X \leq 0.5}(x)$. Verifica que tu respuesta es correcta, integrando $f_{X|0.25 \leq X \leq 0.5}(x)$ con respecto a x entre los límites 0.25 y 0.5 y mostrando que el valor resultante es 1.

19. Sea X una variable aleatoria positiva con función densidad f y función distribución F. Definimos la funci"on de Hazard $H(x) = -\log[1 - F(x)$ y la razón de Hazard como:

$$r(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \mathbb{P}(X \leq x + h | X > x), \quad x \geq 0.$$

    Muestra que:

    (a) $r(x) = H^{'}(x) = f(x)/[1 - F(x)]$.

    (b) Si $r(x)$ aumenta con x, entonces $H(x)/x$ aumenta con x.

    (c) $H(x)/x$ aumenta con x si y sólo si $[1 - F(x)]^{\alpha} \leq 1 - F(\alpha x)$ para todo $0 \leq \alpha \leq 1$,

    (d) Si $H(x)/x$ aumenta con x, entonces $H(x+y) \geq H(x) + H(y)$, para todo $x, y \geq 0$.

20. ¿ Es verdad que si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \ \alpha \geq 0, \ \forall i$ y $f_i, \ i = 1, 2, \ldots, n$ una secuencia de funciones densidades, entonces $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ es una función densidad de probabilidad?.