Curso: Introducción a la Probabilidad y Estadística CM -274
Práctica dirigida
.

Lista de ejercicios

---

1. (a) Determine si la siguiente es una función de distribución:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\pi} e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

   (b) Determine si la siguiente es una función de distribución:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{1+t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

   (c) Determine si la siguiente es una función de distribución:

$$F(t) = \begin{cases} (1/2)e^{t} & \text{si } t < 0 \\ 1 - (3/4)e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

2. (a) En el experimento de rodar un dado equilibrado dos veces, sea X el máximo de los dos números obtenidos. Determina y dibuja la función de masa de probabilidad y la función de distribución de X.

   (b) Sea X el número de nacimientos en un hospital hasta que nazca la primera niña. Determina la función de masa de probabilidad y la función de distribución de X. Debes suponer que $1/2$ es la probabilidad que un bebé nacido es una niña.

   (c) Un dado se lanza sucesivamente. Sea X el número de lanzamientos hasta que cada uno de los seis posibles resultados ocurre al menos una vez. Encuentra la función de masa de probabilidad de X.

3. (a) Supongamos que n enteros aleatorios se seleccionan de $\{1, 2, \ldots, N\}$ con reemplazo. ¿ Cuál es el valor esperado del mayor número seleccionado? Demuestra que para N grande la respuesta es aproximadamente $nN/(n+1)$.

   (b) Sean X e Y dos variables aleatorias discretas con un conjunto idéntico de posibles valores $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son diferentes números reales. Muestra, que si se cumple:

$$\mathbb{E}(X^r) = \mathbb{E}(Y^r), \ r = 1, 2, \ldots, n-1.$$

   Entonces X e Y son idénticamente distribuidos. Esto es:

$$\mathbb{P}(X = t) = \mathbb{P}(Y = t), \quad \text{para } t = a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

4. (a) Sea X una variable aleatoria continua con una función de densidad f_X y el conjunto de valores posibles A. Para la función invertible $h : A \to \mathbb{R}$ sea $Y = h(X)$ una variable aleatoria con el conjunto de valores posibles $B = h(A) = \{h(a) : a \in A\}$. Supongamos que la inversa de $y = h(x)$ es la función $x = h^{-1}(y)$, que es diferenciable para todos los valores $y \in B$. Entonces f_Y, la función de densidad de Y, está dada por:

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) |(h^{-1})'(y)|, \quad y \in B.$$

(b) Sea la función densidad de X, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Usando el método anterior, encuentra la función densidad de $Y = X\sqrt{X}$ y $Z = e^{-X}$.

(c) Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $f(x)$. Determina el valor de y para que el valor $\mathbb{E}(|X - y|)$ es mínimo.

5. (a) Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad f. Muestra que si $\mathbb{E}(X)$ existe ($\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx < \infty$), entonces:

$$\lim_{x\to-\infty} x\mathbb{P}(X \leq x) = \lim_{x\to\infty} x\mathbb{P}(X > x) = 0.$$

(b) Sea X un número aleatorio de $(0,1)$. Encuentra la función densidad de probabilidad de $Y = 1/X$.

(c) Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución F y función de densidad f. Encuentre la función de distribución y la función de densidad de $Y = |X|$.

6. Sean X e Y variables aleatorias continuas con función de densidad de probabilidad conjunta $f(x,y)$. Sea $Z = Y/X, X \neq 0$. Prueba que la función de densidad de probabilidad de Z está dada por:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x, xz) dx.$$

7. (a) Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con funciones de distribución F y G, respectivamente. Encuentra la función de distribución de $\max(X,Y)$ y $\min(X,Y)$.

(b) Sean X e Y dos puntos aleatorios independientes del intervalo $(0,1)$. Calcula la función de distribución de probabilidad y la función de densidad de probabilidad de $\max(X,Y)/\min(X,Y)$.

8. (a) Una caja contiene nueve bombillas, de las cuales dos son defectuosas. ¿ Cuál es el valor esperado del número de bombillas que uno tendrá que probar (al azar y sin reemplazo) para encontrar ambas bombillas defectuosas?.

(b) Para $n = \infty$ demuestra que no se cumple la linealidad de la esperanza.

(c) Una moneda es lanzada n veces ($n > 4$). ¿ Cuál es el número esperado de exactamente tres caras consecutivas?,

9. (a) Sea X una variable aleatoria con función de masa de probabilidad $p(i) = 1/5, i = 1, 2, \ldots, 5$, cero en otros casos. Encuentra $\mathbb{M}_X(t)$.

(b) Sea X una variable con función densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } x \in (-1, 3) \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

10. (a) Sea X una variable aleatoria con media μ. Muestra que si $\mathbb{E}[(X-\mu)^{2n}] < \infty$, entonces $\alpha > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha^{2n}} \mathbb{E}[(X-\mu)^{2n}].$$

(b) Sea la función de densidad de una variable aleatoria X dada por:

$$f(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}, \quad x \geq 0,$$

Muestra que :

$$\mathbb{P}(0 < X < 2n + 2) > \frac{n}{n+1}$$