Curso: Introducción a la Probabilidad y Estadística CM -274
Práctica dirigida 7 Funciones generadoras de probabilidad
Momentos, transformada de Laplace.

Lista de ejercicios

---

1. Si $u_0, u_1, \ldots$ tiene una función generadora $U(s)$ y $v_0, v_1, \ldots$ una función generadora $V(s)$, encuentra $V(s)$ en términos de $U(s)$, cuando $(a) v_n = 2u_n$, $(b) v_n = u_n + 1$, $(c) v_n = nu_n$.

2. Sea $0 < p = 1 - q < 1$. ¿ De qué secuencia es $U(s) = \sqrt{1 - 4pqs^2}$, la función generadora?.

3. Si X es una variable aleatoria con función generadora de probabilidad $G_X(s)$ y k es un entero positivo. Muestra que $Y = kZ$ y $Z = X + k$, tienen funciones generadoras de probabilidad:
$$G_Y(s) = G_X(s^k), \quad G_Z(s) = s^k G_X(s).$$

4. Si X es uniformemente distribuida en $\{0, 1, 2, \ldots a\}$, tal que:
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{a+1} \text{ para } k = 0, 1, 2, \ldots a,$$
muestra que X tienen una función generadora de probabilidad:
$$G_X(s) = \frac{1 - s^{a+1}}{(a+1)(1-s)}.$$

5. Sea X una variable aleatoria tomando valores en el conjunto finito $\{1, 2, \ldots N\}$. La función generadora de probabilidad de Dirichlet es definida como la función $\Delta(s) = \mathbb{E}(X^{-s})$. Expresa la media (esperanza) de X en términos de Δ.

6. Sea X una variable aleatoria, con una función generadora de probabilidad $G_X(s)$ y sea $u_n = \mathbb{P}(X > n)$. Muestra que la función generadora $U(s)$ de la secuencia $u_0, u_1, \ldots$, satisface:
$$(1 - s)U(s) = 1 - G_X(s).$$
siempre que la serie definiendo esa serie converga.

7. Sea X una variable aleatoria con una función generadora de probabilidad $\mathbb{G}_X(s)$. La r-ésima derivada de $\mathbb{G}_X(s)$ en $s = 1$ es igual $\mathbb{E}(X[X-1]\cdots[X-r+1])$ para $r = 1, 2, \ldots$. Esto es:
$$\mathbb{G}_X^{(r)}(1) = \mathbb{E}(X[X-1]\cdots[X-r+1]).$$

8. Sea N y $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias X, cada una tomando valores en $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Si las X_i son idénticamente distribuidas con una función generadora de probabilidad $\mathbb{G}_X$, entonces la suma:
$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N,$$
tiene una función generadora de probabilidad:
$$\mathbb{G}_S(s) = \mathbb{G}_N(\mathbb{G}_X(s)).$$

9. Determina qué distribuciones de los reales no negativos, tiene una media μ y una mediana 2μ.

10. Muestra por la desigualdad de Jensen que $\mathbb{E}(X^2) \geq \mathbb{E}(X)^2$.

11. Sea X una variable aleatoria continua, cuya función densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Encuentra la función generadora de momentos de X.

12. Sea X una variable aleatoria de Bernoulli, con parámetro p, esto es:

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} 1 - p & x = 0 \\ p & x = 1 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Determina $\mathbb{M}_X(t)$ y $\mathbb{E}(X^n)$.

13. Sea X una variable aleatoria binomial con parámetros (n, p). Encuentra la función generadora de momentos de X y calcula $\mathbb{E}(X)$ y $\mathbb{V}(X)$,

14. Sea X una variable aleatoria exponencial con un parámetro λ. Usando la función generadora de momentos, calcula la esperanza y la varianza de X.

15. Sea Z la variable aleatoria normal estándar.

    (a) Calcula la función generadora de momentos de Z.

    (b) Usa la parte(a) para encontrar la función generadora de momentos de X, donde X es una variable aleatoria normal con media μ y varianza σ^2.

    (c) Usa la parte (b) para calcular la media y la varianza de X.

16. Prueba que la función $t/(1-t), t < 1$, no puede tener función generadora de momentos de una variable aleatoria.

17. Para una variable aleatoria X, $M_X(t) = (1/81)(e^t + 2)^4$. Encuentra $\mathbb{P}(X < 2)$.

18. Supongamos que $\forall n \geq 1$, el n-ésimo momento de la variable aleatoria X, es dada por $\mathbb{E}(X^n) = (n+1)!2^n$. Encuentra la distribución de X.

19. Sea Z una variable aleatoria exponencial, con parámetro s. Muestra que:

$$\mathcal{L}_X(s) = \mathbb{P}(Z > X).$$

20. Prueba las siguientes propiedades de la transformada de Laplace:

    (a) $\mathcal{L}_Y(s) = e^{-bs}\mathcal{L}_X(as)$ si $Y = aX + b$.

    (b) $\mathcal{L}_{X+Y}(s) = \mathcal{L}_X(s)\mathcal{L}_Y(s)$ si X e Y son variables aleatorias independientes.

    (c) $\mathcal{L}_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(s) = (\mathcal{L}_X(s))^n$ si $X_i, i = 1, 2, \ldots, n$ son independientes e idénticamente distribuidas y $X = X_1 + X_2 + \ldots X_n$.

    (d) $\mathcal{L}_X^{(n)}(0) = (-1)^n \mathbb{E}(X^n)$.

    (e) $\mathcal{L}_X(s) = \mathbb{G}(e^{-s})$ si X es una variable aleatoria discreta entera.