Respuestas al examen parcial

Solución 1

- Jessica se equivoca. Considera los siguientes 50 vuelos. Para $1 \leq i \leq 50$, sea A_i, el evento en que i ésima misión se completará sin contratiempos. Entonces $\bigcap_{i=1}^{50} A_i$, es el evento en que todas las próximas 50 misiones se completarán con éxito. Probemos que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{50} A_i\right) > 0$. Esto prueba que Jessica está equivocada. Se debe notar que la probabilidad de la ocurrencia simultánea de cualquier número de A_i^c es distinto de cero.

  Además, consideremos un conjunto de E consistiendo de $n (n \leq 50)$ de los A_i^c. Es razonable suponer que la probabilidad de la ocurrencia simultánea de los eventos en E es estrictamente menor que la probabilidad de la ocurrencia simultánea de los sucesos de cualquier subconjunto de E. Usando estos hechos, del principio de inclusión-exclusión, tenemos:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{50} A_i^c\right) \leq \sum_{i=1}^{50} \mathbb{P}(A_i^c) = \sum_{i=1}^{50} \frac{1}{50} = 1.$$

  Así por la Ley de Morgan,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{50} A_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{50} A_i^c\right) > 1 - 1 > 0.$$

- Si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 0$. Entonces $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$. Desde que $A \cap B \cap C \subseteq A \cap B$. Eso implica que:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C).$$

  Suponiendo la última igualdad, implica que

$$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \cap C) + [\mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)] = 0. \tag{1}$$

  Desde que $\mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \geq 0$, tenemos la suma de tres cantidades distintas de cero igual a 0, así cada una de ellas es igual a cero. Esto es:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \quad \mathbb{P}(B \cap C) = 0, \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C). \tag{2}$$

  Reescribiendo (1) como :

$$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + [\mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)] = 0.$$

  el mismo argumento implica que,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \quad \mathbb{P}(A \cap C) = 0, \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C). \tag{3}$$

  Comparando (2) y (3), tenemos:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C) = 0.$$

- El número total de formas en que uno puede escribir n direcciones en n sobres es $n!$. Por lo que el espacio muestral contiene $n!$ puntos. Ahora calculamos el número de resultados en el cual al menos un sobre se trata correctamente.

  Para hacer esto, sea E_i el evento de que la i ésima carta es direccionada correctamente, entonces $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$ es el evento de que al menos una carta es direccionada correctamente. Para calcular $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n)$, utilizamos el principio de inclusión-exclusión, desde que $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n)$ hay n términos de la forma $\mathbb{P}(E_i)$, $\binom{n}{2}$ términos de la forma $\mathbb{P}(E_i \cap E_j)$, $\binom{n}{3}$ términos de la forma $\mathbb{P}(E_i \cap E_j \cap E_k)$ y así.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = n\frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} + \cdots + \\ (-1)^{n-2}\binom{n}{n-1}\frac{[n-(n-1)]!}{n!} + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

  Esta expresión simplificada, es de la forma:

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

- Sea x_i el número de secuencia de C y S de longitud i, sin sucesivas caras. El conjunto de todas las secuencias de caras (C)y sellos (S) de longitud i, sin caras sucesivas, son obtenidas agregando un S en la parte final de todas las secuencia longitud $i-1$ o SC en la parte final de todas las secuencia longitud $i-2$. Por tanto:

$$x_i = x_{i-1} + x_{i-2}, \quad i \geq 2.$$

  Por teoria de recurrencia, la solución de esta ecuación es $x_i = A\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^i + B\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^i$ y usando las condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $x_2 = 2$, obtenemos $A = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$ y $A = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}$. Así la respuesta es:

$$\frac{x_n}{2^n} = \frac{1}{10 \times 2^{2n}}\Big[(5+3\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^n + (5-3\sqrt{5})(1-\sqrt{5})^n\Big].$$

Solución 2

- Sea E el evento de que A será arruinado si él o ella comienza con i dólares y sea $p_i = \mathbb{P}(E)$. Nuestro objetivo es calcular p_a. Para ello, definimos F como el evento que A gana el primer juego. Entonces:

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E|F^c)\mathbb{P}(F^c).$$

  En esta fórmula, $\mathbb{P}(E|F)$ es la probabilidad que A se arruine, dado que gana el primer juego; así $\mathbb{P}(E|F)$ es la probabilidad que A si el capital es $i+1$, esto es, $\mathbb{P}(E|F) = p_{i+1}$. De manera similar, $\mathbb{P}(E|F^c) = p_{i-1}$. Así:

$$p_i = p_{i+1} \cdot \frac{1}{2} + p_{i-1} \cdot \frac{1}{2}. \tag{4}$$

  Ahora $p_0 = 1$, ya que si A comienza con 0 dólares, el o ella ya está arruinado. Además, si el capital de A alcanza $a+b$, entonces B se arruina. Luego $p_{a+b} = 0$. Por lo tanto, tenemos que resolver el sistema de ecuaciones recursivas (4), sujeto a las condiciones de $p_0 = 1$ y $p_{a+b} = 0$. Para ello, observe que (4) implica que:

$$p_{i+1} - p_i = p_i - p_{i-1}.$$

Así, colocando $p_1 - p_0 = \alpha$, conseguimos:

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_0 + \alpha \\
p_2 &= p_1 + \alpha = p_0 + \alpha + \alpha = p_0 + 2\alpha \\
p_3 &= p_2 + \alpha = p_0 + 2\alpha + \alpha = p_0 + 3\alpha \\
&\vdots \\
p_i &= p_0 + i\alpha \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ahora $p_0 = 1$, da $p_i = 1 + i\alpha$. Pero $p_{a+b} = 0$, así $0 = 1 + (a+b)\alpha$. Esto produce $\alpha = -1/(a+b)$, por lo tanto:

$$p_i = 1 - \frac{i}{a+b} = \frac{a+b-i}{a+b}.$$

En particular, $p_a = b/(a+b)$. Así la probabilidad de que A sea arruinado es $b/(a+b)$. El mismo método se puede utilizar con modificaciones obvias para calcular q_i, la probabilidad de que B se arruine si comienza con i dólares. El resultado es:

$$q_i = \frac{a+b-i}{a+b}.$$

Desde que B empieza con b dólares, estará arruinado con probabilidad $q_b = a/(a+b)$. Así la probabilidad, que el juego sigue de manera indefinida, sin que nadie gane es $1 - (q_b + p_a)$. Pero $1 - (q_b + p_a) = 1 - a/(a+b) - b/(a+b) = 0$. Por lo tanto, si este juego se juega sucesivamente, eventualmente A se arruina o B se arruina.

- Para $i \geq 1$, sea R_i el evento que el i ésimo chip que se extrae es rojo y W_i el evento que el chip extraido sea blanco. Intuitivamente, debe quedar claro que los dos chips descartados no proporcionan información, por lo que $\mathbb{P}(R_3) = 12/22$, es igual que si fuera el primer chip extraído de la urna. Para probar esto matemáticamente, ten en cuenta que $\{R_2W_1, W_2R_1, R_2R_1, W_2W_1\}$ es una partición del espacio muestral, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R3) = &\mathbb{P}(R_3|R_2W_1)\mathbb{P}(R_2W_1) + \mathbb{P}(R_3|W_2R_1)P(W_2R_1) \\
&+\mathbb{P}(R_3|R_2R_1)\mathbb{P}(R_2R_1) + \mathbb{P}(R_3|W_2W_1)\mathbb{P}(W_2W_1).
\end{aligned} \tag{5}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_2W_1) &= \mathbb{P}(R_2|W_1)\mathbb{P}(W_1) = \frac{12}{22} \times \frac{10}{22} = \frac{20}{77} \\
\mathbb{P}(W_2R_1) &= \mathbb{P}(W_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) = \frac{10}{21} \times \frac{12}{22} = \frac{20}{77} \\
\mathbb{P}(R_2R_1) &= \mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) = \frac{11}{21} \times \frac{12}{22} = \frac{22}{77}
\end{aligned}$$

y

$$\mathbb{P}(W_2W_1) = \mathbb{P}(W_2|W_1)\mathbb{P}(W_1) = \frac{9}{21} \times \frac{10}{22} = \frac{15}{77}$$

Sustituyendo eso valores en la ecuación (5), conseguimos $\mathbb{P}(R_3) = \frac{11}{20} \times \frac{20}{77} + \frac{11}{20} \times \frac{20}{77} + \frac{12}{20} \times \frac{15}{77} = \frac{12}{22}$.

- Sean BB, BR y RR, los eventos en que las bolas desechadas son azul y azul, azul y rojo, rojo y rojo, respectivamente. También, sea R el evento de que la tercera pelota seleccionada sea roja. Dado que $\{BB, BR, RR\}$ es una partición del espacio muestral, la fórmula de Bayes puede usarse para calcular $\mathbb{P}(BB|R)$.

$$\mathbb{P}(BB|R) = \frac{\mathbb{P}(R|BB)\mathbb{P}(BB)}{\mathbb{P}(R|BB)\mathbb{P}(BB) + \mathbb{P}(R|BR)\mathbb{P}(BR) + \mathbb{P}(R|RR)\mathbb{P}(RR)}$$

Ahora:

$$\mathbb{P}(BB|B) = \frac{13}{20} \times \frac{12}{19} = \frac{39}{95}, \quad \mathbb{P}(RR|R) = \frac{7}{20} \times \frac{6}{19} = \frac{21}{190},$$

Y así:

$$\mathbb{P}(BR) = \frac{13}{20} \times \frac{7}{19} + \frac{7}{20} \times \frac{13}{19} = \frac{91}{190},$$

donde la última ecuación sigue ya que BR es la unión de dos eventos disjuntos: la primera bola descartada era azul, la segunda era roja y viceversa. Así:

$$\mathbb{P}(BB|R) = \frac{\frac{7}{18} \times \frac{39}{95}}{\frac{7}{18} \times \frac{39}{95} + \frac{6}{18} \times \frac{91}{190} + \frac{5}{18} \times \frac{21}{190}} \approx 0.46.$$

Solución 3

- Sea A_i el suceso que la sexta suma obtenida es $i, i = 2, 3, \ldots, 12$. Sea B el suceso que la sexta suma obtenida no es una repetición. Por la ley de probabilidad total:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=2}^{12} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

Se debe notar, que en esta suma, para $i = 2$ y $i = 12$ son iguales. Esto es verdad, también, para los términos $i = 3$ y 11, para los términos $i = 4$ y 10, para los términos $i = 5$ y 9, para los términos $i = 6$ y 8. Por lo que se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= 2\left[\sum_{i=2}^{6} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)\right] + \mathbb{P}(B|A_7)\mathbb{P}(A_7) \\ &= 2\left[\left(\frac{35}{36}\right)^5\left(\frac{1}{36}\right) + \left(\frac{34}{36}\right)^5\left(\frac{2}{36}\right) + \left(\frac{33}{36}\right)^5\left(\frac{3}{36}\right) + \left(\frac{32}{36}\right)^5\left(\frac{4}{36}\right)\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{31}{36}\right)^5\left(\frac{5}{36}\right)\right] + \left(\frac{30}{36}\right)^5\left(\frac{6}{36}\right) = 0.5614.\end{aligned}$$

- Para $1 \leq i \leq 6$, sea E_i, el evento que la salida i, no ocurre durante los primeros lanzamientos del dado. Entonces:

$$\mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{6} E_i\right).$$

Para calcular $\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \ldots E_6)$, usamos el principio de inclusión y exclusión. Para hace esto, calculamos las probabilidades, de todas las posibles intersecciones, de los eventos $E_1, \ldots, E_6$, más las probabilidades que se obtienen al intersectar un número impar de eventos y sustraer todas las probabilidades que se obtienen al intersectar un número par de eventos. Claramente, hay $\binom{6}{1}$ términos de la forma $\mathbb{P}(E_i)$, $\binom{6}{2}$ términos de la forma $\mathbb{P}(E_i \cap E_j)$, $\binom{6}{3}$ términos de la forma $\mathbb{P}(E_i \cap E_j \cap E_k)$ y así sucesivamente. Ahora, para todo $i, \mathbb{P}(E_i) = (5/6)^n$; para todo i y j, $\mathbb{P}(E_i \cap E_j) = (4/6)^n$; para todo i, j y k, $\mathbb{P}(E_i \cap E_j \cap E_k) = (3/6)^n$ y así sucesivamente. Así:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > n) &= \mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots E_6) \\
&= \binom{6}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^n - \binom{6}{2}\left(\frac{4}{6}\right)^n + \binom{6}{3}\left(\frac{3}{6}\right)^n - \binom{6}{4}\left(\frac{2}{6}\right)^n + \binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\
&= 6\left(\frac{5}{6}\right)^n - 15\left(\frac{4}{6}\right)^n + 20\left(\frac{3}{6}\right)^n - 15\left(\frac{2}{6}\right)^n + 6\left(\frac{1}{6}\right)^n.
\end{aligned}$$

Sea p, la función de masa de probabilidad de X. El conjunto de posibles valores de X, es $\{6, 7, 8, \dots\}$ y además que:

$$\begin{aligned}
p(n) &= \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X > n-1) - \mathbb{P}(X > n) \\
&= \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - 5\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} + 10\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1} - 10\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1} + 5\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}, \quad n \geq 6.
\end{aligned}$$

- Para $n \geq 1$, sea p_n, la función de masa de probabilidad de X_n. Probemos por inducción que $\mathbb{E}(X_n) = nw/(w+b)$. Para $n = 1$,

$$\mathbb{E}(X_1) = 0 \cdot \frac{b}{w+b} + 1 \cdot \frac{w}{w+b} = \frac{w}{w+b}.$$

Supongamos que $\mathbb{E}(X_n) = nw/(w+b)$, para algún entero $n \geq 1$. Para demostrar que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = (n+1)w/(w+b)$, se debe notar que:

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} kp_{n+1}(k) = (n+1)p_{n+1}(n+1) + \sum_{k=1}^{n+1} kp_{n+1}(k). \tag{6}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}
p_{n+1}(n+1) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = n+1) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = n+1 | X_n = n)\mathbb{P}(X_n = n) \\
&= \frac{w+nc}{w+b+nc} p_n(n)
\end{aligned} \tag{7}$$

y para $1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned}
p_{n+1}(k) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = k)\mathbb{P}(X_n = k) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = k-1)\mathbb{P}(X_n = k-1) \\
&= \frac{b + (n-k)c}{w+b+nc} p_n(k) + \frac{w + (k-1)c}{w+b+nc} p_n(k-1).
\end{aligned} \tag{8}$$

En la ecuación (6), sustituyendo (7) por $p_{n+1}(n+1)$ y (8) para $p_{n+1}(k$, obtenemos:

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \frac{(n+1)(w+nc)}{w+b+nc} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k[b+(n-k)c]}{w+b+nc} p_n(k) + \sum_{k=1}^{n} \frac{k[w+(k-1)c]}{w+b+nc} p_n(k-1). \tag{9}$$

Pero:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k[w+(k-1)c]}{w+b+nc} p_n(k-1) &= \frac{1}{w+b+nc} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(w+kc) p_n(k) \\
&= \frac{1}{w+b+nc} \left[\sum_{k=1}^{n-1} k(w+kc+c) p_n(k) + w \sum_{k=0}^{n-1} p_n(k) \right] \\
&= \frac{1}{w+b+nc} \left[\sum_{k=1}^{n} k(w+kc+c) p_n(k) + w \sum_{k=1}^{n} p_n(k) - n(w+nc+c)p_n(n) - wp_n(n) \right].
\end{aligned} \tag{10}$$

Relacionando (9) y(10), producen lo necesario, para completar la prueba:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}) &= \frac{(n+1)(w+nc) - n(w+nc+c)}{w+b+nc} p_n(n) \\
&\quad + \sum_{k=1} n \frac{k[b+(n-k)c] + k(w+kc+c)}{w+b+nc} p_n(k) + \frac{w}{w+b+nc} \\
&= \frac{w+b+nc+c}{w+b+nc} \sum_{k=1}^{n} k p_n(k) + \frac{w}{w+b+nc} \\
&= \frac{w+b+nc+c}{w+b+nc} \mathbb{E}(X_n) + \frac{w}{w+b+nc} \\
&= \frac{w+b+nc+c}{w+b+nc} \cdot \frac{nw}{w+b} + \frac{w}{w+b+nc} = \frac{(n+1)w}{w+b}.
\end{aligned}$$

Solución 4

- Para $0 < s < r$, se tiene:

$$|x|^s \leq \max(1, |x|^r) \leq 1 + |x|^r, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sea A el conjunto de todos los posibles valores de X y sea p la función de masa de probabilidad. Desde que el r ésimo absoluto de X existe, $\sum_{x \in A} |x|^r p(x) < \infty$. Ahora:

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in A} |x|^s p(x) &\leq \sum_{x \in A} (1 + |x|^r) p(x) \\
&= \sum_{x \in A} p(x) + \sum_{x \in A} |x|^r p(x) = 1 + \sum_{x \in A} |x|^r p(x) < \infty,
\end{aligned}$$

implica que el momento absoluto de orden s de X también existe.

- Se debe notar que:

$$\mathbb{E}(|X|^\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^\alpha}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x^2)} dx$$

desde que el integrando es una función par. Ahora para $0 < \alpha < 1$,

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x^2}dx + \int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}dx.$$

La primera integral en el lado derecho es convergente. Para mostrar que el segundo término es convergente, se debe notar que:

$$\frac{x^\alpha}{1+x^2}dx \leq \frac{x^\alpha}{x^2} = \frac{1}{x^{2-\alpha}}.$$

Por tanto:

$$\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^{2-\alpha}}dx = \frac{1}{1-\alpha} < \infty.$$

Para $\alpha \geq 1$,

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}dx \geq \int_1^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}dx \geq \int_1^\infty \frac{x}{(1+x^2)}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_1^\infty = \infty.$$

Así $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}dx$ diverge.

- Sea G y g, las funciones de distribución y densidad de Y, respectivamente. Por definición:

$$G(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t})$$

y esto produce:

$$G(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \mathbb{P}(1 \leq X \leq \sqrt{t}) & 1 \leq t \leq 4 \\ 1 & t \geq 4. \end{cases}$$

Ahora:

$$\mathbb{P}(1 \leq X \leq \sqrt{t}) = \int_1^{\sqrt{t}} \frac{2}{x^2}dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^{\sqrt{t}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{t}}.$$

Por tanto:

$$G(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2 - \dfrac{2}{\sqrt{t}} & 1 \leq t \leq 4 \\ 1 & t \geq 4. \end{cases}$$

La función densidad de Y, g, se encuentra derivando G:

$$g(t) = G^{'}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t\sqrt{t}} & \text{si} \quad 1 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

- Sea A_i el evento de que el i ésimo par de rey y reina están ubicados de manera adyacente. Entonces:

$$N = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}, \tag{11}$$

Así:

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(1_A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = n\mathbb{P}(A_1),$$

por simetria. Por conteo $\mathbb{P}(A_1) = 2/n$ y así $\mathbb{E}(N) = n(2/n) = 2$ independiente del valor de n. Para encontrar la varianza, debemos calcular $\mathbb{E}(N^2)$. Por (11) tenemos:

$$\mathbb{E}(N^2) = \mathbb{E}\left(\sum_i 1_{A_i} + 2\sum_{i<j} 1_{A_i \cap A_j}\right) = n\mathbb{P}(A_1) + n(n-1)\mathbb{P}(A_1 \cap A_2). \tag{12}$$

Usando probabilidad condicional:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) \\ &= \frac{2}{n}\left(\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{2}{n-1}\right) = \frac{2(2n-3)}{n(n-1)^2}\end{aligned}$$

donde los dos términos corresponden a si la segunda reina se encuentra o no junto a la primera pareja. De las ecuaciones anteriores:

$$\mathbb{E}(N^2) = 2 + n(n-1) \cdot \frac{2(2n-3)}{n(n-1)^2},$$

y así, la varianza de N es igual a $\mathbb{E}(N^2) - \mathbb{E}(N)^2 = \dfrac{2(n-2)}{n-1}$.

- Supongamos que X tienen una distribución dada por:

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3}$$

y además Y dada como:

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X = 0 \\ 1 & \text{si} \quad X \neq 0 \end{cases}$$

Un espacio muestral con dos variables aleatorias que tengan esas distribuciones, puede ser dado por $\Omega = \{-1, 0, 1\}$, el espacio de eventos es dado por todos los subconjuntos de Ω, $\mathbb{P}$ es dado por $\mathbb{P}(-1) = \mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) = \dfrac{1}{3}$ y $X(\omega) = \omega, Y(\omega) = |\omega|$. Entonces X e Y son dependientes, pues se cumple lo siguiente:

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0$$

pero :

$$\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{x,y} xy\mathbb{P}(X=x, Y=y)\\ &= (-1)\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} = 0\end{aligned}$$

y

$$\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0\cdot\frac{2}{3} = 0.$$

Solución 5

- Sea $U = X+Y$ y $V = X-Y$. Sea $g(u,v)$, la función densidad de probabilidad conjunta de U y V. Mostremos que $g(u,v) = g_U(u)g_V(v)$. Para hacer esto, sea $f(x,y)$ la función de densidad de probabilidad conjunta de X e Y. Entonces

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}, \qquad -\infty < x\infty, -\infty < y\infty.$$

El sistema de dos ecuaciones, dos incógnitas:

$$\begin{cases} x+y=u\\ x-y=v\end{cases}$$

define una correspondencia $1-1$ desde el plano $x-y$ y el plano $u-v$ y tiene una única solución:

$$\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2}\\ y = \dfrac{u-v}{2}\end{cases}$$

Así:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0.$$

Por el teorema de cambio de variable:

$$\begin{aligned} g(u,v) &= f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})|\mathbf{J}|\\ &= \frac{1}{4\pi}\exp\Big[-\frac{(\frac{u+v}{2})^2 + (\frac{u-v}{2})^2}{2}\Big] = \frac{1}{4\pi}e^{-(u^2+v^2)/4}, \quad -\infty < u,v < \infty.\end{aligned}$$

Esto da:

$$g_U(u) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)/4}dv = \frac{1}{4\pi}e^{-u^2/4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/4}dv$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-u^2/4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-v^2/4}dv = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-u^2/4}, \qquad -\infty < u\infty,$$

donde la última igualdad se sigue, pues $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-v^2/4}$, es la función densidad de probabilidad de una variable aleatoria normal con media 0 y varianza 2. Así la integral sobre todo el intervalo $(-\infty, \infty)$ es 1. De manera similar:

$$g_V(v) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-v^2/2}, \qquad -\infty < v\infty.$$

Desde que $g(u, v) = g_U(u)g_V(v)$, U y V son variables aleatorias normales independientes cada una con media 0 y varianza 2.

- Por el resultado dado en el problema:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\min(X_1, X_2, \ldots X_n)\right] &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1, X_2, \ldots, X_n) \geq k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 \geq k, X_2 \geq k, \ldots, X_n \geq k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_1 \geq k)\mathbb{P}(X_2 \geq k) \cdots \mathbb{P}(X_n \geq k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} [\mathbb{P}(X_1) \geq k]^n = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} p_i \right)^n \right] = \sum_{k=1}^{n} h_k^n.
\end{aligned}$$

- Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X-\mu| > k\sigma) &= \mathbb{P}(X-\mu > k\sigma) + \mathbb{P}(X-\mu < -k\sigma) = \mathbb{P}(Z > k) + \mathbb{P}(Z < -k) \\
&= [1-\Phi(k)] + [1-\Phi(k)] = 2[1-\Phi(k)].
\end{aligned}$$

Esto muestra que $\mathbb{P}(|X-\mu| > k\sigma)$ no depende de μ o σ.

- Por la desigualdad de Markov,

$$\mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{t}\ln\alpha\right) = \mathbb{P}(tX \geq \ln\alpha) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\mathbb{M}_X(t).$$