Curso: Introducción a la Probabilidad y Estadística CM -274
Práctica dirigida 10
Distribuciones multivariadas(1).

Lista de ejercicios

1. Una pequeña universidad tiene 90 profesores hombres y 30 profesores mujeres. Un comité ad hoc de cinco es seleccionado al azar para escribir la visión y la misión de la universidad. Sea X e Y el número de hombres y mujeres en este comité, respectivamente.

   (a) Encuentra la función masa de probabilidad de X e Y.

   (b) Encuentra las funciones masa de probabilidad marginal p_X y p_Y de las variables aleatorias X e Y.

2. Rodamos un dado equilibrado y sea el resultado dado denotado por X. A continuación, lanzar una moneda X veces y sea Y que denote el número de sellos. ¿ Cuál es la función de masa de probabilidad conjunta de X e Y y las funciones de masa de probabilidad marginal de X e Y?.

3. Sea la función de masa de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X e Y, definida como:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{70}x(x+y) & \text{si } x = 1,2,3 \;\; y = 3,4 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

   Encuentra $\mathbb{E}(X)$ e $\mathbb{E}(Y)$.

4. Para $\lambda > 0$, sea:

$$F_X(x,y) = \begin{cases} 1 - \lambda e^{-\lambda(x+y)} & \text{si } x > 0, \; y > 0 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

   Determina si F es una función de distribución de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias X e Y.

5. Un círculo de radio 1 se inscribe en un cuadrado de lados de longitud 2. Un punto se selecciona al azar del cuadrado. ¿ Cuál es la probabilidad de que esté dentro del círculo?. Tenga en cuenta que por un punto que se selecciona al azar desde el cuadrado queremos decir que el punto se selecciona de una manera que todos los subconjuntos de iguales áreas del cuadrado son igualmente probables de contener el punto.

6. Un granjero decide construir un gallinero en forma de triángulo para sus pollos. El envía a su hijo a cortar la madera y el niño, sin pensar en el propósito, hace dos cortes en dos puntos seleccionados al azar. ¿ Cuáles son las posibilidades de que las tres piezas de madera que se obtienen puedan ser utilizadas para formar un gallinero triangular?.

7. Sean X e Y variables aleatorias con una función densidad de probabilidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}(x^2+y^2) & \text{si } 0 < x < 1, \; 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

   Encuentra $\mathbb{E}(X^2+Y^2)$.

8. Sean X e Y variables aleatorias con esperanza finitas. Muestra que si $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, entonces $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

9. Supongamos que h es la función densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua. Sea la función densidad de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias X e Y dada por:

$$f(x,y) = h(x)h(y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Prueba que $\mathbb{P}(X \geq Y) = 1/2$.

10. Tres puntos M, N y L se colocan en un círculo al azar e independientemente. ¿ Cuál es la probabilidad de que MNL sea un ángulo agudo?.

11. Dos números x e y se seleccionan al azar en el intervalo $(0,1)$. Para $i = 0,1,2$, determine la probabilidad de que el entero más cercano a $x + y$ sea i.

12. Sea X e Y variables aleatorias continuas con función densidad de probabilidad $f_{XY}(x,y)$. Sea $Z = Y/X, X \neq 0$. Prueba que la función densidad de probabilidad de Z es dado por :

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x,y,z) dx.$$

13. Sea la función de masa de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X e Y es dado por:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{7}x^2 y & \text{si } (x,y) = (1,1),(1,2),(2,1) \\ 0 & \text{en otras partes.} \end{cases}$$

¿ Son X e Y independientes?.

14. Sean X e Y, variables aleatorias independientes, teniendo como función de masa de probabilidad:

$$p_X(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^x, \quad x = 1,2,3,\ldots$$

Encuentra $\mathbb{P}(X = 1, Y = 3)$ y $\mathbb{P}(X + Y = 3)$.

15. ¿ Cuál es la probabilidad de que exista exactamente dos niñas entre las siete primeras y exactamente cuatro niñas entre los primeros 15 bebes nacidos en un hospital en una semana determinada?. Suponga que los acontecimientos de que un niño nacido es una niña o es un niño son equiprobables.

16. Una moneda es lanzada n veces por Jessica y n veces por César. ¿ Cuál es la probabilidad de que obtengan el mismo número de caras?.

17. Sea la función densidad de probabilidad conjunta de X e Y dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 8xy & \text{si } 0 \leq x < y \leq 1 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Determine si $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

18. Sea la función densidad de probabilidad conjunta de X e Y definida como:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Encuentra $\mathbb{E}(X^2 Y)$.

19. Sean X e Y dos variables independientes con la misma función densidad de probabilidad, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } 0 < x < \infty \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Muestra que g, la función densidad de probabilidad de X/Y, es dada por:

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+t)^2} & \text{si } 0 < t < \infty \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

20. Sean X e Y dos puntos aleatorios independientes del intervalo $(0,1)$. Calcula la función de distribución de probabilidad y la función de densidad de probabilidad de $\max(X,Y)/\min(X,Y)$.

21. Sean X e Y variables positivas aleatorias positivas con una función densidad de probabilidad idéntica e^{-x} para $x > 0$. Encuentra la función densidad de probabilidad conjunta de $U = X + Y$ y $V = X/Y$.

22. Sean X e Y dos variables aleatorias uniformes, independientes sobre $(0,1)$. Muestra que las variables aleatorias $U = \cos(2\pi X)\sqrt{-2\ln Y}$ y $V = \sin(2\pi X)\sqrt{-2\ln Y}$ son variables aleatorias normales estándar independientes.

23. Sean X e Y dos variables aleatorias continuas independientes positivas, con funciones de densidad de probabilidad $f_1(x)$ y $f_2(y)$, respectivamente. Encuentra la función de densidad de probabilidad de $U = U/Y$.

24. Demuestra que si X e Y son variables aleatorias normales estándar independientes, entonces $X + Y$ y $X - Y$ son variables aleatorias independientes.

25. Sean X e Y variables aleatorias independientes (estrictamente positivas) exponenciales cada una con parámetro λ ?. ¿ Son las variables aleatorias $X + Y$ y X/Y independientes?.