Lista de ejercicios

1. La función densidad de probabilidad de una variable de X es dado por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

   - Encuentra el valor de c.
   - Encuentra la función de de distribución de probabilidad de X.

2. La función de distribución para la duración de una telenovela (en decenas de horas) es

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{16}{x^2} & \text{si} \quad x \geq 4 \\ 0 & \text{si} \quad x < 4. \end{cases}$$

   Encuentra la esperanza de X y muestra que la varianza no existe.

3. El error de una medición tiene la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

   Encuentra la distribución y las funciones de densidad de la magnitud del error.

4. Sea X una variable aleatoria no negativa con una función de distribución F. Definimos

$$I(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X > t \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

   - Prueba que $\displaystyle\int_0^\infty I(t)dt = X.$
   - Usando el resultado anterior, prueba que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty [1 - F(t)]dt.$$

   - Si $r > 0$, y usando el resultado anterior prueba que

$$\mathbb{E}(X^r) = r\int_0^\infty t^{r-1}[1 - F(t)]dt.$$

5. La función de distribución de una variable aleatoria X es dado por

$$F(x) = \alpha + \beta \arctan\frac{x}{2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

   Determina las constantes α y β y la función densidad de X.

6. Supongamos que X, el tiempo de entrecruzamiento entre dos clientes que entran en una determinada oficina postal, satisface,

$$\mathbb{P}(X > t) = \alpha e^{-\lambda t} + \beta e^{-\mu t}, \qquad t \geq 0,$$

donde $\alpha + \beta = 1, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \lambda \geq 0, \mu > 0$. Calcula el valor esperado de X.

7. Consideremos un experimento donde observamos el valor de una variable aleatoria X y estimamos el valor de una constante desconocida θ usando alguna variable aleatoria $T = g(X)$ que es una función de X. La variable aleatoria T se llama estimador. Piensa en X como los datos observados en el experimento y θ como un parámetro desconocido relacionado con la distribución de X.

   Por ejemplo, considere el experimento de lanzar una moneda n veces, donde la moneda tiene una probabilidad desconocida θ de caras. Después de realizar el experimento, hemos observado el valor de $X \sim \text{Binomial}(n, \theta)$. El estimador más natural para θ es entonces X/n.

   El sesgo de un estimador T para θ se define como $b(T) = \mathbb{E}(T) - \theta$. El error cuadrático medio es el promedio cuadrático medio cuando se usa $T(X)$ para estimar θ:

$$\text{MSE}(T) = \mathbb{E}(T - \theta)^2.$$

   Muestra que

$$\text{MSE}(T) = \mathbb{V}(T) + (b(T))^2.$$

   Esto implica que para un MSE fijo, el sesgo más bajo sólo puede alcanzarse a costa de una mayor varianza y viceversa; esta es una forma de compensación sesgo-varianza, un fenómeno que surge a lo largo de la estadística.

8. Sean f y g PDF con $f(x) > 0$ y $g(x) > 0$ para todo x. Sea X una variable aleatoria con PDF f. Encuentra la esperanza del radio

$$R = \frac{g(X)}{f(X)}.$$

   Estas relaciones aparecen con mucha frecuencia en inferencia estadística, cuando se utiliza con una cantidad conocida como relación de verosimilitud y cuando se utiliza una técnica computacional conocida como muestreo por importancia.

9. Sea F una CDF continua y estrictamente creciente. Sea μ la media de la distribución. La función cuantil, F^{-1}, tiene muchas aplicaciones en estadística y econometría. Muestra que el área bajo la curva de la función quantil de 0 a 1 es μ.