Lista de ejercicios

1. Rose ha invitado a n amigos a su fiesta de cumpleaños. Si todos asisten y cada uno le da la mano a todos los demás invitados en la fiesta exactamente una vez. ¿Cuál es el número de apretones de manos?.
2. ¿ Cuántas matrices $n \times m$ con entradas 0 o 1 hay?.
3. ¿Cuántos números de seis dígitos hay?. ¿Cuántos de ellos contienen el dígito 5?. Ten en cuenta que el primer dígito de un número de n dígitos es distinto de cero.
4. La población de una ciudad es de 20.000 habitantes. Si cada residente tiene tres iniciales, ¿ es cierto que al menos dos personas tienen las mismas iniciales?.
5. Supongamos que cuatro cartas se sacan sucesivamente de una baraja de 52 cartas, con reemplazo y al azar. ¿ Cuál es la probabilidad de sacar al menos un rey?.
6. Se selecciona aleatoriamente un entero del conjunto $\{1, 2, \ldots, 1, 000, 000\}$. ¿ Cuál es la probabilidad de que contenga el dígito 5?.
7. Al lanzar cuatro dados, ¿ cuál es la probabilidad de lanzar, al menos un 3?.
8. Se selecciona aleatoriamente un número del conjunto $\{0000, 0001, 0002, \ldots, 9999\}$. ¿ Cuál es la probabilidad de que la suma de los dos primeros dígitos del número seleccionado sea igual a la suma de sus dos últimos dígitos?.
9. ¿ Cuál es la probabilidad de que un número aleatorio de r dígitos $(r \geq 3)$ contenga al menos un 0, al menos un 1 y al menos un 2?.
10. Una moneda se lanza 10 veces. ¿ Cuál es la probabilidad de obtener exactamente tres caras?.
11. En el popular programa de televisión `Who Wants to Be a Millionaire` se pide a los concursantes que clasifiquen cuatro elementos de acuerdo con alguna norma: por ejemplo, puntos de referencia en orden geográfico, películas en el orden de la fecha de lanzamiento, cantantes en el orden de fecha de nacimiento . ¿ Cuál es la probabilidad de que un concursante pueda obtener la respuesta correcta sólo con adivinar?.
12. ¿ Cuantas permutaciones del conjunto $\{a, b, c, d, e\}$ inicia con a y termina en con c.
13. Robert tiene ocho invitados, dos de los cuales son Jim y John. Si llegan los invitados en un orden aleatorio, ¿cuál es la probabilidad de que John no llegue justo después de Jim?.
14. Un concurso de baile tiene 11 competidores, de los cuales tres son estadounidenses, dos son mexicanos, tres rusos y tres italianos. Si el resultado del concurso sólo enumera la nacionalidad de los bailarines, ¿ cuántos resultados son posibles?.
15. Se tiran seis dados. ¿ Cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellos muestren la misma cara?.
16. Un dado se lanza ocho veces. ¿ Cuál es la probabilidad de obtener exactamente dos 3, tres 1 y tres 6?.
17. Hay 12 estudiantes en una clase. ¿ Cuál es la probabilidad de que sus cumpleaños sean en 12 meses diferentes?. Suponga que todos los meses tienen la misma probabilidad de incluir el cumpleaños de una persona seleccionada al azar.
18. Si ponemos cinco libros de matemáticas, seis de biología, ocho de historia y tres de literatura en una estantería al azar, ¿ cuál es la probabilidad de que todos los libros de matemáticas estén juntos?.

19. Si n bolas se colocan aleatoriamente en n cajas, ¿ cuál es la probabilidad de que cada caja sea ocupada?.

20. Una ciudad tiene seis parques. Un sábado, seis compañeros de clase, que no son conscientes de la decisión de cada uno, elegir un parque al azar y van allí al mismo tiempo. ¿ Cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellos vayan al mismo parque?.

21. En una fiesta, 15 parejas casadas están sentadas al azar en una mesa redonda. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los hombres estén sentados junto a sus esposas? Supongamos que de estas parejas casadas, cinco esposos y sus esposas tienen más de 50 años y los restantes maridos y esposas son todos menores de 50 años. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los hombres mayores de 50 años estén sentados junto a sus esposas? Tenga en cuenta que cuando la gente está sentada alrededor de una mesa redonda, sólo sus asientos en relativos entre si importan. La posición exacta de una persona no es importante.

22. Una caja contiene cinco azules y ocho bolas rojas. Jim y Jack comienzan a sacar bolas de la caja, respectivamente, una a la vez, al azar y sin reemplazo hasta que se saque una bola azul. ¿Cuál es la probabilidad de que Jack saque la pelota azul?.

23. En una pequeña ciudad, 11 de los 25 profesores tiene una opinión en contra el aborto, ocho están a favor del aborto,y el resto son indiferentes. Se selecciona una muestra aleatoria de cinco profesores para una entrevista.

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que todos ellos esten a favor del aborto?.

    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que todos ellos tengan la misma opinión?.

24. Sea x un número positivo y sea $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ una ecuación. Un vector $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ satisfaciendo $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ se dice que es `una solución entera no negativa` de la ecuación si para cada $i, 1 \leq i \leq k$, x_i es un entero no negativo. Se dice que es una `solución entera positiva` de la ecuación si para cada $i, 1 \leq i \leq k$, x_i es un entero positivo.

    (a) ¿ Cuántas soluciones enteras no negativas distintas tiene la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$?.

    (b) ¿ Cuántas soluciones enteras positivas distintas tiene la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$?.

25. Un profesor distraído escribió n cartas y las selló en sobres antes de escribir las direcciones en los sobres. Luego escribió las n direcciones en los sobres al azar. ¿ Cuál es la probabilidad de que por lo menos una carta fue dirigida correctamente?.

26. Jim tiene 20 amigos. Si decide invitar a seis de ellos a su fiesta de cumpleaños, ¿ cuántas opciones tiene?.

27. Una muestra aleatoria de n elementos se toma de una población de tamaño N sin reemplazo. ¿ Cuál es la probabilidad de que se incluya un elemento fijo de la población? Simplifique tu respuesta.

28. Lili tiene 20 amigos. Entre ellos están Karen y Claude , que son marido y mujer. Lili quiere invitar a seis de sus amigos a su fiesta de cumpleaños. Si ni Karen ni Claude iran a la fiesta si es que no van con su pareja. ¿ cuántas opciones tiene Lili?.

29. Prueba que $\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$.

30. Prueba que

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^k \binom{n}{k} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

31. Muestra que

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r}.$$

32. Por una argumento combinatorio, prueba que $r \leq n$ y $r \leq m$,

$$\binom{n+m}{r} = \binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n}{0}.$$

33. Evalua la siguiente suma:

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}.$$

34. Aproxima el valor de $[2^n(n!)^2]/(2n)!$ cuando $n \to \infty$.

35. Supongamos que lanzamos una moneda $2n$ veces. ¿ Cuál es la probabilidad de que salgan un igual número de caras y sellos?.

36. Frente a la oficina de Jeff hay un estacionamiento con 13 plazas de aparcamiento en una fila. Cuando los coches llegan a este aparcamiento, se estacionan aleatoriamente en uno de los lugares vacíos. Jeff estaciona su coche en el único lugar vacío que queda, luego se va a su oficina. A su regreso encuentra que hay siete plazas vacías. Si no ha estacionado su coche en un extremo del estacionamiento, ¿ cuál es la probabilidad de que ambos espacios de estacionamiento que están al lado del auto de Jeff estén vacíos?.

37. Un dado es lanzado seis veces. ¿ Cuál es la probabilidad de obtener exactamente dos 6?.

38. Se selecciona al azar un número de cuatro dígitos. ¿ Cuál es la probabilidad de que el lugar de la unidades, sea menor que el lugar de las decenas, el lugar de las decenas sea menor que el lugar de las centenas y el lugar de las centenas sea menor que el lugar de los miles? Ten en cuenta que el primer dígito de un número de n dígitos es distinto de cero.

39. Una baraja ordinaria de 52 tarjetas se reparte 13 cartas a cuatro jugadores al azar. ¿ Cuál es la probabilidad de que cada jugador reciba 13 cartas del mismo tipo (suite)?.

40. Un tren consta de n coches. Cada uno de los m pasajeros $(m > n)$ elegirá un coche al azar. ¿ Cuál es la probabilidad de que (a) haya al menos un pasajero en cada carro, (B) exactamente haya $r(r < n)$ carros que permanezcan desocupados?.

41. Sea n un entero positivo. Una muestra aleatoria de cuatro elementos es escogida del conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, N$, uno a la vez y con reemplazo. ¿ Cuál es la probabilidad de que la suma de los dos primeros elementos sea igual a la suma de los dos últimos elementos?.

42. Una moneda se lanza n veces. Calcula la probabilidad de no obtener caras sucesivas.

43. (Problema de Newton-Pepys). Isaac Newton fue consultado sobre el siguiente problema de Samuel Pepys, que quería la información con propósito de juego de apuestas.¿ Cuál de los siguientes eventos tiene la probabilidad más alta?,

```
A : Al menos un 6 aparece cuando se hacen rodar 6 dados.
B : Por lo menos dos 6 aparecen cuando 12 dados  son rodados
c : Al menos tres 6 aparecen cuando se hacen rodar 18 .
```

44. (Bose -Einstein)¿ Cuántas maneras hay de elegir k veces de un conjunto de n objetos con reemplazo, si el orden no importa (sólo nos preocupamos por cuántas veces se eligió cada objeto, no el orden en que fueron elegidos)?.

45. (Problema de correspondencia de Montmort) Considere una baraja de n cartas, etiquetadas de 1 a n. Tiramos las cartas una a una, diciendo los números 1 a n cuando lo hagas. Ganamos el juego si en algún momento, el número que se dice en voz alta es el mismo en la carta que se voltea. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?.