Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Ciclo 2016-I

**Examen Parcial de Introducción a la Estadística y Probabilidades-CM 274**

---

# Problemas

1. (3 ptos.) Responde y resuelve las siguientes preguntas

   *a*) ¿ Qué es un camino aleatorio?
   Si $S_0, S_1, S_n$ es un camino aleatorio sobre los enteros en el cual $p(= 1 - q)$ es la probabilidad que un paso es dado, encuentra que para $S_0 = 0$ un punto de tiempo $n$ y una localización $k$, la probabilidad de que $S_n = k$, cuando $n$ es impar. Analiza para el caso en que $n$ es par.

   *b*) Si una moneda es lanzada $n$ veces con una probabilidad de salir cara $P$ y escribimos $Y$ como el número de caras obtenidas, entonces , ¿cuál es el `pmf` de Y?.

   *c*) Un punto $A$ se elige en el disco unitario $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Sea $R$ la distancia desde el origen a $A$. Encuentra $f_R$ y explica el sentido de la respuesta.

2. (3 ptos)

   *a*) Muestra que, si $X$ y $Y$ son variables aleatorias entonces $X + Y$, $XY$ y $\min\{X, Y\}$, son también variables aleatorias.

   *b*) Prueba que el conjunto de todas las variables aleatorias forman un espacio vectorial sobre los reales. Si el espacio muestral es finito, escribe una base para este espacio.

3. (2ptos) Un nuevo programa de computador consiste de dos módulos. El primer módulo contiene un error con una probabilidad de 0,3. El segundo módulo, tiene una probabilidad de 0,35 de tener un error independientemente del primer módulo. Un error en el primer módulo causa al programa fallar con probabilidad 0,6. Para el segundo módulo, esta probabilidad es 0,75. Si hay errores en ambos módulos, el programa falla con probabilidad de 0,9. Suponiendo que el programa ha fallado, determina la probabilidad de errores en ambos módulos.

4. (4ptos) Resuelve

   *a*) Ocho peones se colocan aleatoriamente en un tablero de ajedrez (no más de uno en un cuadrado del tablero de ajedrez). ¿ Cuál es la probabilidad que

      1) ellos estén en línea recta (cuenta las diagonales).
      2) no hay dos en la misma columna o fila.

   *b*) Sean $X$ y $Y$ variables aleatorias independientes con varianzas finitas y sea $U = X + Y$ y $V = XY$. Bajo que condiciones $U$ y $V$ son no correlacionadas.

   *c*) Sea $X_1, X_2, \ldots X_n$ variables aleatorias independientes y supongase que $X_k$ es una variable aleatoria Bernoulli con parámetro $p_k$. Muestra que $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ cuya esperanza y varianza es dada por

$$E(Y) = \sum_{1}^{n} p_k \qquad var(Y) = \sum_{1}^{n} p_k(1 - p_k).$$

*d*) Sea $X$ una variable aleatoria continua no negativa, con una función densidad $f$. Muestra que

$$E(X^r) = \int_0^\infty r x^{r-1} \mathbb{P}(X > x) dx \qquad \text{para} \quad r \geq 1.$$

5. (3 ptos)

*a*) Encuentra la función densidad de $Y = aX$ con $a > 0$ en términos de la función densidad de $X$. Muestra que las variables aleatorias continuas $X$ y $-X$ tienen la misma función de distribución si y sólo si $f_X(x) = f_{-X}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

*b*) Se traza una línea por el punto (1, 0) en una dirección elegida al azar. Sea $(0, Y)$ un punto que corta el eje $Y$. Muestra que $Y$ tiene la densidad estándar de Cauchy:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)} \quad (y \in \mathbb{R}).$$

Prueba que $1/Y$ tiene la misma distribución de $Y$. Explica geométricamente. (En este ejercicio se puede ignorar la posibilidad que la línea sea paralela a uno de los ejes, ya que la probabilidad sería 0).

6. (3ptos) Calcula

*a*) El `cdf` de una variable aleatoria discreta $N$ es dado por

$$F_N(x) = 1 - \frac{1}{2^n} \quad \text{si} \quad x \in [n, n+1) \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots$$

y tiene el valor de 0 si $x < 1$.

- ¿ Cuál es el `pdf` de $N$?.
- Calcula $P(4 \leq N \leq 10)$.

*b*) Sea `cdf` de una variable aleatoria continua $X$ dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2/4 & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Encuentra el `pdf` de $X$.

*c*) Sea $X$ una variable aleatoria continua cuyo `pdf` es dado por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha(1+x)^{-3} & x > 0 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

encuentra la función de densidad condicional $f_{X|0,25 \leq X \leq 0,5}(x)$. Comprueba tu respuesta integrando $f_{X|0,25 \leq X \leq 0,5}(x)$ entre 0,25 y 0,5 y mostrando que sale 1.

7. (2ptos) Resuelve

*a*) La probabilidad de que un evento ocurra en un experimento es 0,5. Usa la desigualdad de Chebyshev para mostrar que la probabilidad de que este evento ocurra entre 450 y 550 en 1000 experimentos indepedientes excede de 0,9.

*b*) Una moneda muestra una cara cada cinco intentos, es lanzada 100 veces. Sea $X$ la variable aleatoria que denota el número de caras obtenidas. Demuestra que $E(X) = 20$ y que $Var(X)$ = 16. Ahora encuentra una cota superior de la probabilidad que $X \geq 60$, usando la desigualdad de Markov y la desigualdad de Chebyshev.