1 Teoria de conjuntos

Definición 1.1 Un conjunto es una colección desordenada de elementos.

Por ejemplo, $\{a, -2, 5\}$ es el conjunto que contiene los elementos a, -2 y 5. Alternativamente, describimos un conjunto especificando una determinada condición cuyos elementos satisfacen, por ejemplo $\{x : x^2 = 1\}$ es el conjunto que contiene los elementos 1 y -1 (suponiendo que x es un número real).

1. No hay importancia para el orden en que aparecen los elementos de un conjunto. Así, $\{1, 2, 3\}$, es el mismo conjunto que $\{3, 2, 1\}$.
2. Un elemento puede aparecer en un conjunto o no, pero puede no aparecer más de una vez. Los conjuntos se indican típicamente mediante una letra mayúscula, por ejemplo A o B.
3. Es posible que los elementos de un conjunto sean conjuntos , por ejemplo $\{1, 2, \{3, 4\}\}$ es un conjunto que contiene tres elementos (dos escalares y un conjunto).

Definición 1.2 Si a es un elemento en un conjunto A, escribimos $a \in A$. Si a no es un elemento de A, escribimos $a \notin A$. El conjunto vacio denotado por $\emptyset$ ó $\{\}$ no contiene elementos.

Definición 1.3 Un conjunto A con un número finito de elementos se denomina conjunto finito y su tamaño (número de elementos) se denota como $|A|$. Un conjunto con un número infinito de elementos se denomina conjunto infinito.

Definición 1.4 Denotaremos $A \subset B$ si todos los elementos de A están también en B. Denotamos $A = B$ si $A \subset B$ y $B \subset A$ lo que implica que los dos conjuntos son idénticos. La diferencia entre dos conjuntos $A - B$ es el conjunto de elementos en A pero no en B. El complemento de un conjunto A con respecto a un conjunto Ω es $A^c = \Omega - A$ (podemos omitir el conjunto Ω si es obvio en un contexto particular). La diferencia simétrica entre dos conjuntos A, B es

$$A \triangle B = \{x : x \in A - B \text{ ó } x \in B - A\}$$

Ejemplo 1.1 Tenemos $\{1, 2, 3\} - \{3, 4\} = \{1, 2\}$ y $\{1, 2, 3\} \triangle \{3, 4\} = \{1, 2, 4\}$. Suponiendo $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, tenemos $\{1, 2, 3\}^c = \{4, 5\}$.

En muchos casos consideramos conjuntos indexados por un conjunto finito o infinito. Por ejemplo $U_a, a \in A$ representa múltiples conjuntos, un conjunto para cada elemento de A.

Definición 1.5 Para múltiples conjuntos $U_a, a \in A$, definimos las operaciones de unión e intersección, como sigue

$$\bigcup_{a \in A} U_a = \{u : u \in U_a \text{ para uno o más } a \in A\}$$
$$\bigcap_{a \in A} U_a = \{u : u \in U_a \text{ para todo } a \in A\}.$$

Ejemplo 1.2 A continuación se presentan tres ejemplos de conjuntos múltiples, $U_a, a \in A$. El primer ejemplo muestra dos conjuntos: $\{1\}$ y $\{2\}$. El segundo ejemplo muestra varios conjuntos: $\{1, -1\}, \{2, -2\}, \{3, -3\}$, y así sucesivamente. El tercer ejemplo muestra múltiples conjuntos, cada uno de los cuales contiene todos los números reales entre dos números naturales consecutivos.

$$
\begin{aligned}
U_i &= \{i\}, && i \in A = \{1,2\} \\
U_i &= \{i,-1\}, && i \in A = \mathbb{N} = \{1,2,\dots\} \\
U_a &= \{a+r : 0 \leq r \leq 1\}, && a \in A = \mathbb{N} = \{1,2,\dots\}
\end{aligned}
$$

Definición 1.6 Los conjuntos $U_a, a \in A$ son mutualmente disjuntos si $\bigcap_{a\in A} U_a = \emptyset$ y son disjuntos dos a dos si $a \neq b$ implica que $U_a \cap U_b = \emptyset$. La unión de conjuntos disjuntos dos a dos $U_a, a \in A$ es denotado algunas veces como $\biguplus_{a\in A} U_a$.

Ejemplo 1.3 Si $A_1 = \{1\}, A_2 = \{1,2\}, A_3 = \{1,2,3\}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\{A_i : i \in \{1,2,3\}\} &= \{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\} \\
\bigcup_{i\in\{1,2,3\}} &= \{1,2,3\} \\
\bigcap_{i\in\{1,2,3\}} &= \{1\}
\end{aligned}
$$

Proposición 1.1 Para todos los conjuntos $A, B, C \subset \Omega$

1. La unión e intersección son conmutativas y distributivas.

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= B \cup A && (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\
A \cap B &= B \cap A && (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)
\end{aligned}
$$

2. $(A^c)^c = A$, $\emptyset^c = \Omega$, $\Omega^c = \emptyset$.
3. $\emptyset \subset A$.
4. $A \subset A$.
5. $A \subset B$ y $B \subset C$ implica que $A \subset C$.
6. $A \subset B$ si y sólo si $B^c \subset A^c$.
7. $A \cup A = A = A \cap A$.
8. $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cap \Omega = A$.
9. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Definición 1.7 El conjunto potencia de un conjunto A, es el conjunto de todos los subconjuntos de A, incluyendo el conjunto vacio $\emptyset$ y A. Este conjunto es denotado por 2^A.

Proposición 1.2 Si A es un conjunto finito entonces

$$|2^A| = 2^{|A|}$$

Ejemplo 1.4

$$
\begin{aligned}
2^{\{a,b\}} &= \{\emptyset, \{a,b\}, \{a\}, \{b\}\} \\
|2^{\{a,b\}}| &= 4 \\
\sum_{A\in 2^{\{a,b\}}} |A| &= 0+2+1+1 = 4
\end{aligned}
$$

Proposición 1.3 (Ley distributiva de conjuntos)

$$\left(\bigcup_{a\in A} U_a \bigcap C\right) = \bigcup_{a\in A}\left(U_a \bigcap C\right)$$
$$\left(\bigcap_{a\in A} U_a \bigcup C\right) = \bigcap_{a\in A}\left(U_a \bigcup C\right)$$

Proposición 1.4

$$S - \bigcup_{a\in A} U_a = \bigcap_{a\in A}(S - U_a)$$
$$S - \bigcap_{a\in A} U_a = \bigcup_{a\in A}(S - U_a)$$

Proposición 1.5 (Ley de Morgan)

$$\left(\bigcup_{a\in A} U_a\right)^c = \bigcap_{a\in A} U_a^c$$
$$\left(\bigcap_{a\in A} U_a\right)^c = \bigcup_{a\in A} U_a^c$$

Definición 1.8 El conjunto de los números naturales, enteros y racionales se escriben de la siguiente manera, para todo lo que sigue

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$$
$$\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

El conjunto de los números reales es denotado por $\mathbb{R}$.

Definición 1.9 Denotaremos los intervalos cerrados, abiertos y semiabiertos entre $a, b \in \mathbb{R}$ como

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

Ejemplo 1.5

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, n/(n+1)) = [0, 1),$$
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [0, n/(n+1)) = [0, 1/2).$$

Definición 1.10 El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es denotado por

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

De manera similar, generalizamos el producto cartesiano de $n \in \mathbb{N}$ conjuntos. Producto cartesiano repetido del mismo conjunto, denotado como

$$A^n = A \times \cdots \times A, \qquad n \in \mathbb{N},$$

es el conjunto de vectores n dimensional, cuyos componentes son los elementos de A.

Ejemplo 1.6 R^n es el conjunto de vectores n dimensional, cuyos componentes son los números reales.

Definición 1.11 Una relación R sobre un conjunto A es un subconjunto de $A \times A$, es decir un conjunto de pares de elementos de A. Si $(a, b) \in \mathbb{R}$, denotamos $a \sim b$ y si $(a, b) \notin \mathbb{R}$, denotamos $a \nsim b$. Una relación es reflexiva si $a \sim a$ para todo $a \in A$. Es simétrica si $a \sim b$ implica $b \sim a$ para todo $a, b \in A$. Es transitiva si $a \sim b$ y $b \sim c$ implica que $a \sim c$ para todo $a, b, c \in A$. Una relación de equivalencia es una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo 1.7 Considere la relación, donde $a \sim b$ si $a \leq b$ sobre $\mathbb{R}$, esta relación es reflexiva y transitiva, pero no es simétrica.

Si tenemos la relación $a = b$ sobre $\mathbb{Z}$ esta es una relación de equivalencia.

Definición 1.12 El conjunto $U_a, a \in A$ forma una partición de U si

$$\biguplus_{\alpha \in A} U_\alpha = U.$$

En otras palabras, la unión de conjuntos disjuntos dos a dos $U_a, a \in A$ es U. Los conjuntos U_a son llamados clases de equivalencia.

Una relación de equivalencia $\sim$ sobre A induce una partición de A, como sigue: $a \sim b$ si y sólo si a y b están en la misma clase de equivalencia.

Ejemplo 1.8 Considere el conjunto A de todas las ciudades y la relación $a \sim b$ si las ciudades a, b están en el mismo país. Esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva, y por lo tanto es una relación de equivalencia. Esta relación de equivalencia induce una partición de todas las ciudades en clases de equivalencia compuestas por todas las ciudades del mismo país. El número de clases de equivalencia es el número de países.

La generalización del tamaño de un conjunto A a conjuntos infinitos, puede hacerse notando que dos conjuntos finitos A, B tienen el mismo tamaño si y sólo si existe una biyección entre ellos, y generalizando esta noción a conjuntos infinitos.

Definición 1.13 Dos conjuntos A y B (finito o infinito) tienen la misma cardinalidad, denotado por $A \sim B$ si existe una biyección entre ellos. La cardinalidad define una relación de equivalencia. La relación de cardinalidad divide así el conjunto de todos los conjuntos en clases de equivalencia que contienen conjuntos con la misma cardinalidad. Para cada nÃºmero natural $k \in \mathbb{N}$ tenemos una clase de equivalencia que contiene todos los conjuntos finitos de ese tamaño. Pero también hay otras clases de equivalencia que contienen conjuntos infinitos, la más importante es la clase de equivalencia que contiene los números naturales $\mathbb{N}$.

Definición 1.14 Sea A un conjunto infinito. Si $A \sim \mathbb{N}$, entonces A es infinito contable. Si $A \nsim \mathbb{N}$ entonces A es un conjunto infinito no contable.

Proposición 1.6 Cada subconjunto infinito E de un conjunto contable infinito A es infinito contable.

Proposición 1.7 Una unión contable de conjuntos infinitos contables es contable infinita.

Corolario 1.1 Si A es infinito contable entonces lo es también A^n, para $n \in \mathbb{N}$.

Se puede demostrar que los conjuntos infinito contables son los conjuntos `más pequeños` (en términos de la definición de cardinalidad) entre todos los conjuntos infinitos. En otras palabras, si A es infinito no contable , entonces existe una función sobreyectiva $f : A \to \mathbb{N}$ pero no una función sobreyectiva $f : \mathbb{N} \to A$.

Proposición 1.8 (Ejercicio) Asumiendo que $a < b$ y $d \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q} \\ &\mathbb{N} \not\sim [a,b] \\ &\mathbb{N} \not\sim (a,b) \\ &\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R} \\ &\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Definición 1.15 La expansión binaria de un número $r \in [0,1]$ es definida como $0.b_1b_2,\ldots$ donde $b_n \in \{0,1\}, n \in \mathbb{N}$ y

$$r = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n 2^{-n}.$$

Ejemplo 1.9 La expansión binaria de $1/4$ es 0.01 y la expansión binaria de $3/4$ es $0.11 = 1/2 + 1/4$.

Definición 1.16 Sean A y R dos conjuntos. La notación A^R denota un producto cartesiano de copias múltiples de A, una copia para cada elemento del conjunto R. En otras palabras, A^R es el conjunto de todas las funciones de R a A. La notación A^∞ denota $A^{\mathbb{N}}$, un producto de copias infinitas contables de A.

Ejemplo 1.10 El conjunto $\mathbb{R}^\infty$ es el conjunto de todas las secuencias sobre la recta real $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R}^\infty = \{(a_1, a_2, a_2, \ldots,) : a_n \in \mathbb{R} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

y el conjunto $\{0,1\}^\infty$ es el conjunto de todas las secuencias binarias infinitas. El conjunto $\mathbb{R}^{[0,1]}$ es el producto cartesiano de múltiples copias de los números reales; una copia para cada elemento del intervalo $[0,1]$ o en otras palabras el conjunto de todas las funciones desde $[0,1]$ a $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.11 El conjunto $\{0,1\}^A$ es el conjunto de todas las funciones de A a $\{0,1\}$, cada una de estas funciones implica una selección de un subconjunto arbitrario de A (los elementos seleccionados se asignan a 1 y los elementos restantes se asignan a 0). Una interpretación similar puede darse a conjuntos de tamaño 2 que son diferentes de $\{0,1\}$. Si tenemos $|B| = 2$, entonces B^A corresponde al conjunto potencia 2^A.

Definición 1.17 Para una secuencia de conjuntos $A_n, n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\begin{aligned} \inf_{k\geq n} A_k &= \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \\ \sup_{k\geq n} A_k &= \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \\ \liminf_{n\to\infty} A_n &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} A_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \\ \limsup_{n\to\infty} A_n &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} A_k = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k. \end{aligned}$$

Aplicando la ley de Morgan, se tiene

$$\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right)^c = \limsup_{n\to\infty} A_n^c$$

Definición 1.18 Sea una secuencia de conjuntos $A_n, n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ y definimos el límite de $A_n, n \in \mathbb{N}$ como

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n,$$

La notación $A_n \to A$ es equivalente a la notación $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Ejemplo 1.12 Para una secuencia de conjuntos $A_k = [0, k/(k+1))$, tenemos

$$\begin{aligned}
\inf_{k\geq n} A_k &= [0, n/(n+1)) \\
\sup_{k\geq n} A_k &= [0, 1) \\
\limsup_{n\to\infty} A_n &= [0, 1) \\
\liminf_{n\to\infty} A_n &= [0, 1) \\
\lim A_n &= [0, 1).
\end{aligned}$$

Tenemos las siguientes interpretaciones del lim inf y lim sup

Proposición 1.9 Sea una secuencia de subconjuntos $A_n, n \in \mathbb{N}$ de Ω. Entonces

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} A_n &= \left\{\omega \in \Omega : \sum_{n\in\mathbb{N}} I_{A_n}(\omega) = \infty\right\} \\
\liminf_{n\to\infty} A_n &= \left\{\omega \in \Omega : \sum_{n\in\mathbb{N}} I_{A_n^c}(\omega) < \infty\right\}.
\end{aligned}$$

En otras palabras, $\limsup_{n\to\infty} A_n$ es el conjunto de $\omega \in \Omega$ que aparecen infinitamente a en la secuencia A_n, y $\liminf_{n\to\infty} A_n$ es el conjunto de $\omega \in \Omega$ que siempre aparecen en la secuencia A_n excepto por un número finito de veces.

En efecto si $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$, entonces por definición para todo n existe un k_n tal que $w \in A_{k_n}$. Para ese ω tenemos $\sum_{n\in\mathbb{N}} I_{A_n}(\omega) = \infty$. Por otro lado, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} I_{A_n}(\omega) = \infty$, entonces existe una secuencia, $k_1, k_2, \ldots$ tal que $w \in A_{k_n}$, implicando que para todo $n \in \mathbb{N}, \omega \in \cup_{i\geq n} A_i$. La prueba del segundo caso es similar.

Corolario 1.2

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Definición 1.19 Una secuencia de conjuntos $A_n, n \in \mathbb{N}$, es <u>monótona no-decreciente</u> si $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ y <u>monótona no-creciente</u> si $\cdots A_3 \subset A_2 \subset A_1$. Denotamos esto como $A_n \nearrow$ y $A_n \searrow$ respectivamente. Si $\lim A_n = A$, denotamos esto como $A_n \nearrow A$ y $A_n \searrow A$ respectivamente.

Proposición 1.10 Si $A_n \nearrow$ entonces $\lim_{n\to\infty} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y si $A_n \searrow$, entonces $\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

En efecto, para la primera parte de la proposición, debemos probar que A_n es monótona no-decreciente , entonces $\limsup A_n = \liminf A_n = \cup_n A_n$. Desde que $A_i \subset A_{i+1}$, tenemos $\cap_{k\geq n} A_k = A_n$ y

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Corolario 1.3 Sea $B_n = \cup_{k\geq n} A_k$ y $C_n = \cap_{k\geq n} A_k$ son secuencias monótonas, entonces

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} A_n$$
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} A_n.$$

2 Referencias

1. Book of Proof, 2013 by Richard Hammack Second Edition.
2. Probability, The Analysis of Data, volumen 1 Guy Lebanon.