Respuestas al examen final

Solución 1

- Sea F la función de distribución de $|X-\mu|$. $F(t)=0$ si $t<0$, para $t\geq 0$.

$$\begin{aligned} F(t) &= \mathbb{P}(|X-\mu|\leq t)=\mathbb{P}(-t\leq X-\mu\leq t) \\ &= \mathbb{P}(\mu-t\leq X\leq \mu+t)=\mathbb{P}\left(-\frac{t}{\sigma}\leq \frac{X-\mu}{\sigma}\leq \frac{t}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{t}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)-\left[1-\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right]=2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)-1. \end{aligned}$$

  Por tanto,

$$F(t)=\begin{cases} 2\Phi\left(\dfrac{t}{\sigma}\right)-1 & t\geq 0 \\ 0 & \text{otros casos.} \end{cases}$$

  Esto produce,

$$F^{'}(t)=\frac{2}{\sigma}\Phi^{'}\left(\frac{t}{\sigma}\right) \qquad t\geq 0.$$

  Así,

$$\mathbb{E}(|X-\mu|)=\int_0^\infty t\frac{2}{\sigma}\Phi^{'}\left(\frac{t}{\sigma}\right)dt.$$

  Sustituyendo $u=t/\sigma$, obtenemos,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X-\mu|) &= \int_0^\infty u\Phi^{'}(u)du=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty ue^{-u^2/2}du \\ &= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-u^2/2}\right]_0^\infty=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

- Podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $\mu=0$ y $\sigma=1$. Suponemos que $m>1$. En este caso al menos la mitad de la masa de probabilidad está a la derecha de 1, así $\mathbb{E}(XI_{\{X\geq m\}})\geq \frac{1}{2}$. Ahora $0=\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(X[I_{\{X\geq m\}})+I_{\{X<m\}}])$, implicando que $\mathbb{E}(XI_{\{X<m\}})\leq -\frac{1}{2}$. Igualmente,

$$\mathbb{E}(X^2I_{\{X\geq m\}})\geq \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{E}(X^2I_{\{X<m\}})\leq \frac{1}{2}$$

  Por definición de la mediana y el hecho de que X es continua,

$$\mathbb{E}(X|X<m) \leq -1, \qquad \mathbb{E}(X^2|X<m) \leq 1.$$

Resulta que, $\mathbb{V}(X|X<m) \leq 0$, que implica a su vez que condicionada a $(X|X<m)$, X es concentrada en un sólo valor. Esto contradice, la continuidad de X y deducimos que $m \leq 1$. La posibilidad $m < -1$, puede ser considerado con la variable $-X$.

- Considere la función $w = x, z = (y - \rho x)/\sqrt{1-\rho^2}$ con inversa $x = w, y = \rho w + z\sqrt{1-\rho^2}$ y Jacobiano,

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} = \sqrt{1-\rho^2}.$$

La función es inyectiva y por tanto $W(=X)$ y Z satisfacen,

$$f_{W,Z}(w,z) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}(1-\rho^2)(w^2+z^2) \right\} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(w^2+z^2)},$$

implicando que W y Z son variables $N(0,1)$ independientes. Ahora,

$$\{X>0, Y>0\} = \left\{ W>0,\ Z > -W\rho/\sqrt{1-\rho^2} \right\},$$

Y por tanto moviendo a coordenadas polares,

$$\mathbb{P}(X>0, Y>0) = \int_{\theta=\alpha}^{\frac{1}{2}\pi} \int_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{2\pi} d\theta.$$

donde $\alpha = -\tan^{-1}(\rho/\sqrt{1-\rho^2}) = -\sin^{-1}\rho$.

Para la siguiente parte del ejercicio, sea el caso de $\rho \neq 1$. Si escribimos $X = U, Y = \rho U + \sqrt{1-\rho^2}V$, tenemos que U y V son variables $N(0,1)$ independientes. Se cumple que $Y > X$ si y sólo si $(1-\rho)U < \sqrt{1-\rho^2}V$. Llevando a coordenadas polares,

$$\mathbb{E}(\max\{X,Y\}) = \int_0^{\infty} \frac{re^{-\frac{1}{2}r^2}}{2\pi} \left[\int_{\psi}^{\psi+\pi} \left\{ \rho r\cos\theta + r\sqrt{1-\rho^2}\sin\theta \right\} \right] d\theta$$

donde $\tan\psi = \sqrt{(1-\rho)/(1+\rho)}$, lo que conduce al resultado. Para la segunda parte,

$$\mathbb{E}(\max\{X,Y\}^2) = \mathbb{E}(X^2 I_{\{X>Y\}}) + \mathbb{E}(Y^2 I_{\{Y>X\}}) = \mathbb{E}(X^2 I_{\{X<Y\}}) + \mathbb{E}(Y^2 I_{\{Y>X\}}),$$

por la simetría de las marginales de X e Y. Añadiendo, obtenemos $2\mathbb{E}(\max\{X,Y\}^2) = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) = 2$.

Solución 2

- Colocando $x = yu$, tenemos:

$$f_Y(y) = ce^{-y} \int_0^y x^{n_1-1}(y-x)^{n_2-1}dx = ce^{-y}y^{n_1+n_2-1} \int_0^1 u^{n_1+n_2-1}(1-u)^{n_2-1}du$$
$$= cy^{n_1+n_2-1}e^{-y}\frac{\Gamma(n_1)\Gamma(n_2)}{\Gamma(n_1+n_2)},$$

y desde la ecuación:

$$\int_0^\infty f_Y(y)dy = c\Gamma(n_1)\Gamma(n_2),$$

tenemos, $c^{-1} = \Gamma(n_1)\Gamma(n_2)$, donde $F_Y(y)$ es una distribución gamma con parámetros $n_1 + n_2$. Similarmente, podemos encontrar que X tiene una distribución gamma con parametro n_1:

$$f_X(x) = cx^{n_1-1} \int_x^\infty (y-x)^{n_2-1}e^{-y}dy = \frac{1}{\Gamma(n_1)}x^{n_1-1}e^{-x}, \quad x > 0.$$

- (a) La densidad de $Y = X_1 + X_2$ es dado por:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y-x_2)f_{X_2}(x_2)dx_2$$
$$= \begin{cases} \int_0^y dx_2 = y & 0 \le y \le 1 \\ \int_{y-1}^1 dx_2 = 1-(y-1) = 2-y & 1 \le y \le 2, \end{cases}$$

esto es,

$$f_Y(y) = 1 - |1-y|, \qquad 0 \le y \le 2.$$

(b) La densidad de $Z = X_1 - X_2$, es dada por:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(z+x_2)f_{X_2}(x_2)dx_2 = \begin{cases} \int_{-z}^1 dx_2 = 1+z & -1 \le z \le 0, \\ \int_0^{1-z} dx_2 = 1-z & 0 \le z \le 1, \end{cases}$$

esto es,

$$f_Z(z) = 1 - |z|, \qquad -1 \le z \le 1. \tag{1}$$

(c)

$$W = |X_1 - X_2| = |Z|.$$

Tenemos,

$$F_W(w) = \mathbb{P}(W \leq w) = \mathbb{P}(|Z| \leq w) = \mathbb{P}(-w \leq Z \leq w) = F_Z w - F_Z(-w),$$

y así,

$$f_W(w) = f_Z(w) + f_Z(-w),$$

Por el resultado (1),tenemos que,

$$f_W(w) = (1 - |w|) + (1 - |w|) = 2(1 - w), \qquad 0 \leq w \leq 1.$$

(d) La densidad de $V = X_1/X_2$ es dado por:

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} |x_2| f_{x_1}(x_2 v) f_{x_2}(x_2) dx_2 = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 x_2 dx_2 = \frac{1}{2}, & 0 \leq v \leq 1, \\ \displaystyle\int_0^{1/v} x_2 dx_2 = \frac{1}{2v^2}, & v \geq 1, \end{cases}$$

- Sea $Y = \sum_{j=1}^{n} 2 \log X_j = \sum_{j=1}^{n} Y_j$, donde:

$$Y_j = -2 \log X_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

variables aleatorias independientes con densidad:

$$f_{Y_j}(y_j) = f_{X_j}(e^{-y_j/2}) \left| \frac{d}{dy_j} e^{-y_j/2} \right| = \frac{1}{2} e^{-y_j/2}, \qquad y_j > 0.$$

Así Y_j tiene la distribución Gamma con parámetros $\lambda = 1/2$ y $s = 1$. Pero la distribución Gamma tiene la propiedad de que Y, es la suma de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y por tanto tiene una distribución Gamma con parámetros $\lambda = 1/2$ y $s = n$, esto es,

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^n \Gamma(n)} y^{n-1} e^{-y/2}, \qquad y > 0,$$

Esto es, Y tiene una distribución χ^2 con $2n$ grados de libertad. Para el siguiente problema, la función densidad conjunta de variables aleatorias,

$$\xi = \sqrt{-2 \log X_1} \cos 2\pi X_2, \qquad \eta = \sqrt{-2 \log X_1} \sin 2\pi X_2,$$

es dado por,

$$f(\xi, \eta) = f_{(x_1, x_2)}(x_1(\xi, \eta), x_2(\xi, \eta)) |J(\xi, \eta)|.$$

Pero,

$$J(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} e^{-(\xi^2 + \eta^2)/2}$$

y así,

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\eta^2/2}, \qquad -\infty < \xi < \infty, \quad -\infty < \eta < \infty.$$

Por el ejercicio anterior, se deduce que ξ y η son variables aleatorias $N(0,1)$ independientes.

- Desde la definición de función distribución, tenemos:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(X \leq z, Y \leq z) = F(z,z), \\ F_W(w) &= \mathbb{P}(W \leq w) = 1 - \mathbb{P}(W > w) = 1 - \mathbb{P}(X > w, Y > w) \end{aligned}$$

Usando el teorema de adición,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

con $A = \{X \leq w\}, B = \{Y \leq w\}$, tenemos:

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(X > w, Y > w) &= \mathbb{P}(X \leq w) + \mathbb{P}(Y \leq w) - \mathbb{P}(X \leq w, Y \leq w) \\ &= F_X(w) + F_Y(w) - F(w,w) \end{aligned}$$

Si F es continua, obtenemos las densidades de Z y W, tomando las derivadas de las correspondientes funciones de distribución:

$$\begin{aligned} f_Z(z) = \frac{d}{dz} F(z,z) &= \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{z} f(x,y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{z} f(x,z) dx + \int_{-\infty}^{z} f(z,y) dy, \end{aligned}$$

y

$$f_W(w) = f_X(w) + f_Y(w) - \int_{-\infty}^{w} f(x,w) dx - \int_{-\infty}^{w} f(w,y) dy.$$

Solución 3

- De los resultados anteriores $f_1(x)$, la función densidad de probabilidad de $X_{(1)}$, está dada por,

$$f_1(x) = \frac{2!}{(1-1)!(2-1)!} \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{1-1} (e^{-\lambda x})^{2-1} = 2\lambda e^{-2\lambda x}, \qquad x \geq 0.$$

También se tiene, que la función densidad conjunta $f_{12}(x,y)$ de $X_{(1)}$ y $X_{(2}$, es dado por,

$$\begin{aligned} f_{12}(x,y) &= \frac{2!}{(1-1)!(2-1-1)!(2-2)!} \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} \\ &= (1 - e^{-\lambda x})^{1-1} (e^{-\lambda x} - e^{-\lambda y})^{2-1-1} = 2\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, \quad 0 \leq x < y < \infty. \end{aligned}$$

Sea $U = X_{(1)}$ y $V = X_{(2)} - X_{(1)}$. Mostraremos que $g(u,v)$, la función densidad de probabilidad conjunta de U y V, cumplen que $g(u,v) = g_U(u)g_V(v)$. Esto prueba que U y V son independientes. Para encontrar $g(u,v)$, debes notar que el sistema de dos ecuaciones, con dos incógnitas:

$$\begin{cases} x = u \\ y - x = v \end{cases}$$

Definiendo una transformación inyectiva desde,

$$R = \{(x,y) : 0 \leq x < y < \infty\},$$

a la región:

$$Q = \{(u,v) : u \geq 0, v > 0\}.$$

El sistema tiene solución única: $x = u, y = u + v$. Así:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0.$$

Por el teorema de cambio de variable:

$$g(u,v) = f_{12}(u, u+v)|J| = 2\lambda^2 e^{-\lambda(u+2v)}, \quad u \geq 0, v \geq 0.$$

Desde que,

$$g(u,v) = g_U(u)g_V(v),$$

donde,

$$g_U(u) = 2\lambda e^{-2\lambda u}, \qquad u \geq 0,$$

y

$$g_V(v) = \lambda e^{-\lambda v}, \qquad v > 0,$$

tenemos que U y V son independientes. Además, U es exponencial con parámetro 2λ y V es exponencial con parámetro λ.

- Los estadísticos de orden de los X_i tienen función densidad conjunta,

  $$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda^n n! \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\right),$$

  sobre el conjunto I de la sucesiones crecientes de los reales positivos. Definimos una función inyectiva de I a $(0,\infty)^n$ como,

  $$y_1 = nx_1, y_r = (n+1-r)(x_r - x_{r-1}) \qquad 1 < r \leq n,$$

  con inversa $x_r = \sum_{k=1}^{r} y_k/(n-k+1)$ para $r \geq 1$. El jacobiano es $(n!)^{-1}$, de donde la densidad conjunta de $Y_1, Y_2, \cdots Y_n$ es,

  $$\frac{1}{n!}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i(y)\right) = \lambda^n \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} y_k\right).$$

Solución 4

- Encontramos la constance c usando la ecuación,

$$1 = M_X(0) = c \cdot \frac{3+4+2}{3-1},$$

Así obtenemos $c = 2/9$. Luego obtenemos,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{dM_X}{ds}(s)\bigg|_{s=0} = \frac{2}{9} \cdot \frac{(3-e^s)(8e^{2s}+6e^{3s}) + e^s(3+4e^{2s}+2e^{3s})}{(3-e^s)^2}\bigg|_{s=0} = \frac{37}{18}.$$

Ahora usamos la identidad,

$$\frac{1}{3-e^s} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-e^s/3} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{e^s}{3} + \frac{e^{2s}}{9} + \cdots\right),$$

que es válido siempre y cuando s sea suficientemente pequeño para que $e^s < 3$. Se sigue que,

$$M_X(s) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} \cdot (3+4e^{2s}+2e^{3s}) \cdot \left(1 + \frac{e^s}{3} + \frac{e^{2s}}{9} + \cdots\right)$$

Identificando los coeficientes de e^{0s} y e^s, obtenemos,

$$p_X(0) = \frac{2}{9}, \qquad p_X(1) = \frac{2}{27}.$$

- Para cada vector v, la función:

$$g_v(X) = v^T G(X) v$$

es una función escalar convexa de la matriz X y la desigualdad de Jensen, tenemos:

$$g_v(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}[g_v(X)],$$

esto es, para cada v,

$$v^T G(\mathbb{E}X) v^T \leq E v^T G(X) v.$$

Así la relación,

$$G(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}[G(X)]$$

Para el siguiente caso, usamos el resultado anterior, mostremos que la función matricial $G(X) = X^{-1}$ es convexa. Para esto debemos mostrar que las matrices simétricas $X > 0$, $Y > 0$, de orden r y $0 \leq \lambda \leq 1$, la relación,

$$[\lambda X + (1-\lambda)Y]^{-1} \leq \lambda X^{-1} + (1-\lambda)Y^{-1},$$

se cumple. Es decir, debemos tener una matriz no singular A, tal que $X = AA^T, Y = ADA^T$, donde D es una matriz diagonal, con elementos $d_1, d_2, \ldots, d_r$. Así la ecuacion anterior es equivalente a,

$$[\lambda I + (1-\lambda)D]^{-1} \leq \lambda I + (1-\lambda)D^{-1},$$

que se cumple para matrices diagonales. El resultado se cumple de la convexidad de la función escalar $y = x^{-1}$. Se debe notar que la desigualdad estricta se cumple si $0 \leq \lambda \leq 1$.

- Como $(d^2/dy^2)\log y = -1/y^2 < 0$, se sigue que $g(y) = \log y$ es una función convexa, por tanto por la desigualdad de Jensen, se tiene:

$$\mathbb{E}[\log Y] \leq \log \mathbb{E}(Y).$$

Si consideramos la variable aleatoria $Y_n = \sum_{i=1}^{n} \log X_i$, donde $X_1, X_2, \ldots X_n$ son idénticamente distribuidas e independientes. Se sigue que $\mathbb{E}(Y_n) = n\mathbb{E}[\log X_i]$ y $\mathbb{V}(Y_n) = n\mathbb{V}(\log X_i)$. Por la desigualdad de Chebyshev, para cada $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}[|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| < n\epsilon] \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(Y_n)}{n^2\epsilon^2},$$

o

$$\mathbb{P}[n(\mathbb{E}(\log X_i) - \epsilon)] < \sum_{i=1}^{n} \log X_i < n[\mathbb{E}(\log X_i) + \epsilon] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{e\epsilon^2},$$

o

$$\mathbb{E}[\exp\{n(\mathbb{E}(\log X_i) - \epsilon)\}] < X_1 X_2 \ldots X_n < \exp\{n(\mathbb{E}(\log X_i)\epsilon)\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{e\epsilon^2}.$$

Así y por el ejercicio anterior, $\mathbb{E}[\log X] \leq \log \mathbb{E}(X)$, se obtienen los resultados pedidos.

Solución 5

- X_n converge a 0 en probabilidad, ya que para cada $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \epsilon)$ es la probabilidad que el punto aleatorio seleccionado desde $[0,1]$ esté en $\left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right]$. Ahora $n \to \infty$ implica que $2^k \to \infty$ y la longitud del intervalo $\left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right] \to 0$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \epsilon) = 0$.

  Sin embargo, X_n no converge a ningún punto, ya que para todo entero positivo N, existe un $m > N$ y $n > M$ tal que $X_m = 0$ y $X_n = 1$, haciendo imposible para $|X_n - X_m|$ ser menor que un $0 < \epsilon < 1$.

- Desde una de las variantes de la desigualdad de Chebyshev, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\overline{X}_n) &= \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2\sum_{k=1}^{n-1} \texttt{Cov}(X_k, X_{k+1})\right\} \\ &\leq \frac{1}{n^2}\{nM + 2(n-1)M\} \to 0, \qquad \text{si } n \to \infty.\end{aligned}$$

- Por la ley de las grandes números,

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots X_n}{n} \to 2,$$

con probabilidad 1 y,

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots Y_n}{n} \to 3,$$

con probabilidad 1, cuando $n \to \infty$.Se debe notar que si dos eventos A y B tienen ambos probabilidad 1, entonces el evento $A \cap B$ también tiene probabilidad 1, tanto la convergencia que implica X_i y la que implica Y_i ocurren. Por tanto,

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{Y_1 + Y_2 + \cdots Y_n} = \frac{(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n}{(Y_1 + Y_2 + \cdots Y_n)/n} \to \frac{2}{3},$$

con probabilidad 1. Cuando $n \to \infty$. No era necesario suponer que los X_i son independientes de los Y_j debido a la convergencia puntual con probabilidad 1.

Solución 6

- La variable aleatoria X_i^2 es gamma con parámetros $\lambda = 1/2$ y $r = 1/2$. Por tanto,

  $$\mu = \mathbb{E}(X_i^2) = \frac{r}{\lambda} = 1$$

  y

  $$\sigma^2 = \mathbb{V}(X_i^2) = \frac{r}{\lambda^2} = 2$$

  Por el teorema del límite central,

  $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \le n + \sqrt{2n}) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{2n}} \le 1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le 1\right) = \Phi(1) = 0.8413.\end{aligned}$$

- De acuerdo al teorema del límite central,

  $$\mathbb{P}(-1 < S_n^* < 1) \to \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.68,$$

  mientras que la desigualdad de Chebyshev, no da información, desde que,

  $$\mathbb{P}(|S_n| \ge \delta) \le \delta^{-2} = 1, \qquad \delta = 1.$$

  Para $k = 2$, la desigualdad de Chebyshev, presenta,

  $$\mathbb{P}(-2 < S_n^* < 2) \ge 0.75,$$

  mientras que el teorema del límite central, produce como un límite $\Phi(2) - \Phi(-2) = 0.9544$. De manera similar para $k = 3$, tenemos 0.8888 y 0.9974 respectivamente.

- El segundo momento de los X_i es,

  $$2\int_0^{e^{-1}} \frac{x^2}{2x(\log x)^2} dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{2u}}{u^2} du,$$

  (Se debe sustituir $x = e^u$), una integral finita. Por tanto, las X tienen una media y varianza finita. La función densidad es simétrica es alrededor de 0 y así la media es 0. Por propiedad, si $0 < x < e^{-1}$,

  $$f_2(x) = \int_{-e^{-1}}^{e^{-1}} f(y) f(x-y) dy \ge \int_0^x f(y) f(x-y) dy \ge f(x) \int_0^x f(y) dy,$$

  ya que $f(x-y)$, vista como una función de y, está aumentando en $[0, x]$. Así,

$$f_2(x) \geq \frac{f(x)}{2\log|x|} = \frac{1}{4|x|(\log|x|)^3},$$

para $0 < x < e^{-1}$. Continuando este procedimiento, obtenemos,

$$f_n(x) \geq \frac{k_n}{|x|(\log|x|)^{n+1}}, \qquad 0 < x < e^{-1},$$

para alguna constante k_n. Por tanto $f_n(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y en particular la función densidad conjunta de $(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/\sqrt{n}$ no converge a la apropiada densidad normal en el origen.