Examen Sustitutorio

- Responde cada pregunta, justificando, los resultados utilizados. Cada pregunta del examen contiene el desarrollo de propiedades hechas en clase y en las notas de clase.
- Está prohibido compatir cuadernos entre estudiantes. Si se trasgede esta regla, se eliminará la utilización de los cuadernos en el examen.
- Se prohiben, copias de todo índole, así como el uso de libros electrónicos.

---

1. En un concurso, a los concursantes A, B y C se les pregunta a su vez, una pregunta científica general. Si un concursante da una respuesta equivocada a una pregunta, se retira del juego. Los dos restantes seguirán compitiendo hasta que uno de ellos se retire. La última persona que queda será la ganadora. Supongamos que un concursante conoce la respuesta a una pregunta independientemente de los otros concursantes, con probabilidad p. Sea CAB el evento de que C se retira primero, A después y B gana, con representaciones similares para otros casos. Calcula y compara las probabilidades de ABC, BCA y CAB.

2. La función F es la función de distribución de una variable aleatoria X, es dada por:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ (1/4)t + 1/4 & -1 \leq t < 0 \\ 1/2 & 0 \leq t < 1 \\ (1/12)t + 7/12 & 1 \leq t < 2 \\ 1 & t \geq 2. \end{cases}$$

   (a) Dibuje el gráfico de F.

   (b) Calcula la siguientes cantidades: $\mathbb{P}(X < 1), \mathbb{P}(X = 1), \mathbb{P}(1 \leq X < 2), \mathbb{P}(X > 1/2), \mathbb{P}(X = 3/2)$ y $\mathbb{P}(1 < X \leq 6)$.

3. Sea X una variable aleatoria continua con una función densidad f. Decimos que X es `simétrica alrededor de` α si para todo x,

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha + x) = \mathbb{P}(X \leq \alpha - x).$$

   (a) Prueba que X es simétrica alrededor de α si y sólo si para todo x, tenemos $f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$.

   (b) Sea X una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   y sea Y una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad:

$$g(x) = \frac{1}{\pi[1 + (x-1)^2]}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Encuentra los puntos en los que X e Y son simétricas.

4. Construye un grafo con exactamente N nodos convenientemente enumerados desde el 1 hasta N. Pero este grafo es especial, dado que para cada nodo deben haber K o menos aristas dirigidas hacia sus divisores propios. El el caso de que algún nodo tenga sólo $k \leq K$ divisores propios, ese nodo tendrá exactamente k aristas a esos k divisores. Además note que si un nodo tiene $M > K$ divisores propios, entonces ese nodo tendrá exactamente K aristas a algún grupo de K divisores propios de

los M disponibles. Un divisor propio de un entero P es cualquier divisor de P que sea menor estrictamente que P. Por ejemplo, 1, 2 y 3 son divisores propios de 6, pero 6 no lo es.

Dado el valor para K y el número de nodos N en el grafo, halla la expresión que determinará la cantidad de aristas que tendrá el grafo y la cantidad de formas en las que se puede diseñar el grafo con las condiciones dadas. Pruebe su expresión desarrollando la respuesta para $N = 30$ y $K = 5$ mod $10^9 + 7$.

5. La variable aleatoria X es llamada `doble exponencial distribuida` si su función densidad es dada por:

$$f(x) = ce^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty$$

   (a) Encuentra el valor de c.

   (b) Prueba que $\mathbb{E}(X^{2n}) = (2n)!$ y $\mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0$.

6. Sean X e Y dos variables aleatorias uniformes, independientes sobre $(0, 1)$. Muestra que las variables aleatorias $U = \cos(2\pi X)\sqrt{-2\ln Y}$ y $V = \sin(2\pi X)\sqrt{-2\ln Y}$ son variables aleatorias normales estándar independientes.

7. Supongamos que un `mono inmortal` está escribiendo constantemente en un procesador de textos que no se rompe, que dura para siempre y tiene una memoria infinita. Supongamos que el teclado del procesador de palabras tiene $m - 1$ tecla, una barra espaciadora para espacios en blanco y teclas separadas para diferentes símbolos. Si el mono presiona uno de los m símbolos (incluida la barra de espacio) al azar, y si al final de cada línea y al final de cada página, el procesador de palabras avanza a una nueva línea y una nueva página por si mismo, ¿ cuál es la probabilidad de que el mono finalmente escribirá la obras completas de Shakespeare en orden cronológico y sin errores?.

8. (a) Sea $X_1, X_2, \cdots$ una secuencia de variables aleatorias Bernoulli con parámetro p, independientes e idénticamente distribuidas. Prueba que para un $\epsilon > 0$, se tiene:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$$

   donde $S_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$.

   (b) Sea X una variable aleatoria no negativa. Prueba:

$$\mathbb{E}(X) \leq [\mathbb{E}(X^2)]^{\frac{1}{2}} \leq [\mathbb{E}(X^3)]^{\frac{1}{3}} \leq \dots$$