1 Desigualdades y teoremas límites

Las desigualdades y el comportamiento asintótico de secuencias de variables aleatorias es un parte importante de la teoria de las probabilidades. El principal contexto involucra una secuencia $X_1, X_2, \ldots$ de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con media μ y varianza σ^2.

Existen importantes desigualdades que se pueden aplicarse al caso especial de variables de Bernoulli idénticamente distribuidas, que es la manera en que se aplica frecuentemente en combinatoria y en informática o que proporcionan conceptualmente una interpretación de la probabilidad y esperanza, en términos de secuencias independiente y idénticas. La desigualdad de Markov, utiliza sólo la esperanza de una variable aleatoria y proporciona límites que suelen ser bastante sueltos.

La desigualdad de Chebychev, utiliza tanto la esperanza como la varianza de una variable aleatoria y normalmente genera límites más estrictos.

El límite de Chernoff, requiere un conocimiento de la función generadora de momentos de una variable aleatoria. Puesto que el conocimiento de una función de generación de momentos implica un conocimiento de los momentos de todos los órdenes, debemos esperar que el límite de Chernoff proporcione límites más estrictos que los obtenidos de las desigualdades de Markov o de Chebychev.

1.1 Desigualdad de Markov

Teorema 1.1 Sea X es una variable no negativa y supongamos que $\mathbb{E}(X)$ existe. Entonces se cumple:

$$\mathbb{P}(X > a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Para algún $a > 0$.

Fijemos un número positivo a y consideremos una variable aleatoria Y_a definida como:

$$Y_a = \begin{cases} 0, & \text{si } X < a \\ a, & \text{si } X \leq a \end{cases}$$

Luego:

$$Y_a \leq X$$

Lo que implica, si tomamos esperanzas en ambos lados:

$$\mathbb{E}(Y_a) \leq \mathbb{E}(X)$$

$$\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y_a) = a\mathbb{P}(Y_a = a) = a\mathbb{P}(X \geq a)$$

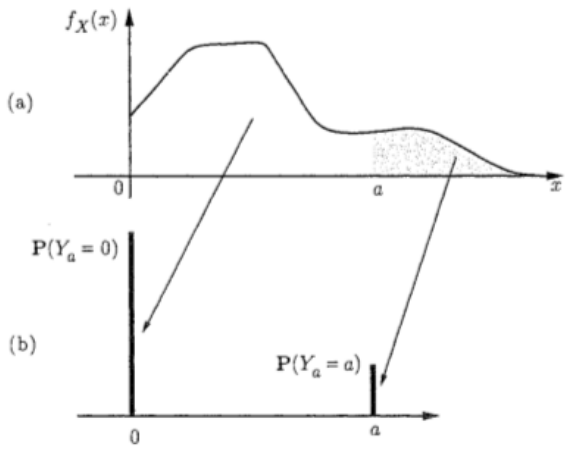
Por tanto :

$$a\mathbb{P}(X \leq a) \leq \mathbb{E}(X).$$

Ejemplo 1.1 Sea X la variable aleatoria que denota la edad (en años) de un niño de un determinado colegio. Si la edad promedio de edad de ese colegio es 12.5 años, entonces usando la desigualdad de Markov, la probabilidad que un niño es tiene por lo menos 20 años satisface la desigualdad

$$\mathbb{P}(X \geq 20) \leq 12.5/20 = 0.6250.$$

Este resultado es ilustrado mediante el siguiente gráfico:



Donde la parte a) muestra el `función densidad de probabilidad` de una variable aleatoria no negativa X. La parte b) muestra la `función de masa de probabilidad` de una variable Y_a, que se construye de la siguiente manera: Toda la masa de probabilidad en la `función de densidad de probabilidad` de X que se encuentra entre 0 y a se asigna a 0 y toda la masa que se encuentra por encima de a es asignada a a, puesto que la masa se desplaza a la izquierda, la esperanza sólo puede disminuir.

En general si X es una variable aleatoria y h una función no decreciente y no negativa. La esperanza $h(X)$ asumiendo que existe, es dada por:

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) f_X(u) du,$$

y escribimos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(u) f_X(u) du \geq \int_{a}^{\infty} h(u) f_X(u) du \geq h(a) \int_{t}^{\infty} f_X(u) du = h(a) \mathbb{P}(X \geq a).$$

Esto conduce a la desigualdad de Markov: $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \dfrac{\mathbb{E}(h(X))}{h(a)}$ para $a > 0$.

1.2 Desigualdad de Chebyshev

La desigualdad de Chebyshev, dice que si una variable aleatoria tiene una pequeña varianza, entonces la probabilidad que toma un valor lejos de la media es también pequeña.

Teorema 1.2 Sea $\mu = \mathbb{E}(X)$ y $\sigma^2 = \mathbb{V}(X)$. Entonces para un $t > 0$

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2} \qquad y \qquad \mathbb{P}(|Z| \geq k) \leq \frac{1}{k^2}.$$

donde $Z = (X - \mu)/\sigma$. En particular $\mathbb{P}(|Z| > 2) \leq 1/4$ y $\mathbb{P}(|Z| > 3) \leq 1/9$.

Aplicando la desigualdad de Markov, podemos concluir que:

$$\mathbb{P}((X - \mu)^2 \leq t^2) \leq \frac{\mathbb{E}(X - \mu)^2}{t^2} = \frac{\sigma^2}{t^2}.$$

Para completar el evento $(X - \mu)^2 \geq t^2$ es idéntico al evento $|X - \mu| \geq t$, así:

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \leq t) = \mathbb{P}((X - \mu)^2 \leq t^2) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}.$$

Para la segunda parte se coloca $t = k\sigma$.

Ejemplo 1.2 Supongamos que probamos un modelo de predicción sobre un conjunto de n casos de prueba. Sea $X_i = 1$ si el predictor es incorrecto y $X_i = 0$ si el predictor es correcto. Entonces $\overline{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$ es la taza de error observado. Cada X_i puede ser considerado una variable de Bernoulli con media desconocida p. Intuitivamente $\overline{X}_n$ debe ser cercano a p, pero que tan probable es que $\overline{X}_n$ esté fuera de un entorno de tamaño ϵ, sabiendo que $\mathbb{V}(\overline{X}_n) = \mathbb{V}(X_1)/n = p(1-p)/n$. En efecto:

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| > \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(\overline{X}_n)}{\epsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$$

desde que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ para todo p. Para $\epsilon = .2$ y $n = 100$, la cota es .0625.

Ejemplo 1.3 Volvamos al ejemplo (1.1) de los niño de la escuela media y recalculamos el límite usando la desigualdad de Chebychev. En este caso también necesitamos la varianza de las edades de los niños, que tomamos como 3. Buscamos la probabilidad de que un niño en la escuela pueda ser mayor que 20. Primero debemos poner esto en la forma requerida por La ecuación de Chebychev:

$$\mathbb{P}(X \geq 20) = \mathbb{P}[(X - \mathbb{E}(X)) \geq (20 - \mathbb{E}(X))] = \mathbb{P}[(X - \mathbb{E}(X)) \geq 7.5)].$$

Sin embargo:

$$\mathbb{P}[(X - 12.5) \geq 7.5] \neq \mathbb{P}[|X - 12.5| \geq 7.5)] = \mathbb{P}(5 \leq X \geq 20).$$

Así no podemos aplicar la desigualdad de Chebyshev para calcular directamente $\mathbb{P}(X \leq 20)$. En efecto, calculamos, una cota para $\mathbb{P}(5 \leq X \geq 20)$ y obtenemos:

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}(X)| \geq 7.5)] \leq \frac{3}{(7.5)^2} = 0.0533,$$

que sigue siendo un límite mucho más estricto que el obtenido anteriormente.

1.3 Desigualdad de Hoeffding

Empecemos con un resultado importante:

Proposición 1.1 Supongamos que $\mathbb{E}(X) = 0$ y que $a \leq x \leq b$. Entonces:

$$\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2(b-a)^2/8}.$$

Para desarrollar la desigualdad de Hoeffding, necesitamos el `método de Chernoff.`

Proposición 1.2 (Método de Chernoff) Sea X una variable aleatoria. Entonces:

$$\mathbb{P}(X > \epsilon) \leq \inf_{t \geq 0} e^{-t\epsilon} \mathbb{E}(e^{tX}).$$

Este método puede ser derivado de la desigualdad de Markov con la función $h(x) = e^{tx}$ que es la función generadora de momentos $\mathbb{E}(e^{tX})$.

Para algún $t > 0$

$$\mathbb{P}(X > \epsilon) = \mathbb{P}(e^X > e^\epsilon) = \mathbb{P}(e^{tX} > e^{t\epsilon}) \leq e^{-t\epsilon} \mathbb{E}(e^{tX}).$$

Desde que esto es cierto para $t \geq 0$ el resultado sigue.

Teorema 1.3 (**Desigualdad de Hoeffding**) Sean $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ observaciones indepedientes, tal que $\mathbb{E}(Y_i) = 0$ y $a_i \leq Y_i \leq b_i$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces, para algún $t > 0$

$$\mathbb{P}(|\overline{Y}_n - \mu| \geq \epsilon) \leq 2e^{-2n\epsilon^2/(b-a)^2}.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos $\mu = 0$. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\overline{Y}_n| \geq \epsilon) &= \mathbb{P}(\overline{Y}_n \geq \epsilon) + \mathbb{P}(\overline{Y}_n| \leq -\epsilon) \\ &= \mathbb{P}(\overline{Y}_n \geq \epsilon) + \mathbb{P}(-\overline{Y}_n \geq \epsilon)\end{aligned}$$

Usamos el método de chernoff. Para algún $t > 0$, desde la desigualdad de Markov, que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{Y}_n \geq \epsilon) &= \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq n\epsilon\Big) = \mathbb{P}(e^{\sum_{i=1}^n y_i} \geq e^{n\epsilon}) \\ &= \mathbb{P}\Big(e^{t\sum_{i=1}^n y_i} \geq e^{tn\epsilon}\Big) \leq e^{-tn\epsilon}\mathbb{E}\Big(e^{t\sum_{i=1}^n y_i}\Big) \\ &= e^{-tn\epsilon}\prod_i (e^{tY_i}) = e^{-tn\epsilon}(\mathbb{E}(e^{tY_i}))^n\end{aligned}$$

Por la proposición (1.1): $\mathbb{E}(e^{tY_i}) \leq e^{t^2(b-a)^2/8}$. Así:

$$\mathbb{P}(\overline{Y}_n \geq \epsilon) \leq e^{-tn\epsilon}e^{t^2n(b-a)^2/8}$$

Esto se reduce al mínimo cuando $t = 4\epsilon/(b-a)^2$ dando el resultado:

$$\mathbb{P}(\overline{Y}_n \geq \epsilon) \leq e^{-2n\epsilon^2/(b-a)^2}$$

Aplicando el mismo argumento a $\mathbb{P}(-\overline{Y}_n \geq \epsilon)$ se produce el resultado.

Corolario 1.1 Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son independientes con $\mathbb{P}(a \leq X_i \leq b) = 1$ y una media común μ, entonces con probabilidad de al menos $1 - \delta$, se cumple:

$$|\overline{X}_n - \mu| \leq \sqrt{\frac{(b-a)^2}{2n}\log\Big(\frac{2}{\delta}\Big)}.$$

Ejemplo 1.4 Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim$ Bernoulli(p). Desde la desigualdad Hoeffding se tiene,

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| > \epsilon) \leq 2\epsilon^{-2n\epsilon^2}.$$

donde $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim$ Bernoulli(p). Sea $n = 100$ y $\epsilon = .2$. Por la desigualdad de Chebyshev, tenemos

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| > \epsilon) \leq .0625$$

De acuerdo a la desigualdad de Hoeffding:

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| > .2) \leq 2e^{-2(100)(.2)^2} = .00067$$

que es mucho más pequeño que el resultado obtenido por la desigualdad de Chebyshev .0625.

La desigualdad de Hoffding proporciona una manera de crear un `intervalo de confianza` para un parámetro binomial p. Sea $\alpha > 0$ y sea

$$\epsilon_n = \sqrt{\frac{1}{2n}\log\Big(\frac{2}{\alpha}\Big)}$$

Por la desigualdad de Hofffing:

$$\mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| > \epsilon_n) \leq 2e^{-2n\epsilon_n^2} = \alpha.$$

Sea $C = (\overline{X}_n - \epsilon_n, \overline{X}_n + \epsilon_n)$. Entonces $\mathbb{P}(p \notin C) = \mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| > \epsilon_n) \leq \alpha$. Así, $\mathbb{P}(p \in C) \geq 1 - \alpha$, esto es, el intervalo aleatorio C contiene el paramétro p con probabilidad $1 - \alpha$.

Llamamos a C un `intervalo de confianza` $1 - \alpha$.

El siguiente resultado extiende la desigualdad de Hoeffding a funciones más generales $g(x_1, \ldots, x_n)$. Consideramos la desigualdad de McDiarmind.

1.4 Desigualdad de McDiarmind

Teorema 1.4 Teorema de McDiarmid Sea $X_1, X_2, \ldots X_n$ variables aleatorias independientes. Suponganse que

$$\sup_{x_1,\ldots,x_n,x_i'} \Big|g(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n) - g(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i',x_{i+1},\ldots,x_n)\Big| \leq c_i$$

para $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$$\mathbb{P}\Big(g(X_1,\ldots,X_n) - \mathbb{E}(g(X_1,\ldots,X_n)) \geq \epsilon\Big) \leq \exp\Big\{-\frac{2\epsilon^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2}\Big\}.$$

Si tomamos $g(x_1, \ldots, x_n) = n^{-1}\sum_{i=1}^n x_i$, es la desigualdad de Hoeffding.

Ejemplo 1.5 Supongamos que lanzamos m pelotas en n recipientes. ¿ Qué fracción de los recipientes están vacios?.

Sea Z el número de recipientes vacios y sea $F = Z/n$ la fracción de recipientes vacios. Podemos escribir $Z = \sum_{i=1}^n Z_i$, donde $Z_i = 1$ de un recipiente i está vacío y $Z_i = 0$ en otro caso. Entonces:

$$\mu = \mathbb{E}(Z) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Z_i) = n(1-1/n)^m = ne^{m\log(1-1/n)} \approx ne^{-m/n}.$$

y $\theta = \mathbb{E}(F) = \mu/n \approx e^{-m/n}$. ¿ Cuán cerca está Z de μ?. Se debe notar que las variables Z_i no son independientes, por lo que no se puede aplicar la desigualdad de Hoeffding. En este caso procedemos de otra forma:

Definamos las variables $X_1, \ldots, X_m$ donde $X_s = i$ si la pelota s cae en el recipiente i. Entonces $Z = g(X_1, \ldots, X_m)$. Si movemos una pelota a un recipiente diferente, entonces Z puede cambiar a lo más 1. Así del Teorema de McDiarmind con $c_i = 1$ tenemos:

$$\mathbb{P}(|Z - \mu| > t) \leq 2e^{-2t^2/m}.$$

Como las fracción de recipientes vacios es $F = Z/m$ con media $\theta = \mu/n$. Tenemos:

$$\mathbb{P}(|F-\theta|>t)=\mathbb{P}(|Z-\mu|>nt)\leq 2e^{-2n^2t^2/m}.$$

1.5 Cotas para los valores esperados

Teorema 1.5 Desigualdad de Cauchy -Schwartz Si X y Y tienen varianza finita, entonces:

$$\mathbb{E}|XY|\leq\sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}.$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz puede ser escrita como:

$$\mathrm{Cov}^2(X,Y)\leq\delta_X^2\delta_Y^2.$$

Teorema 1.6 Desigualdad de Jensen Si g es convexa, entonces:

$$\mathbb{E}g(X)\geq g(\mathbb{E}X)$$

Si g es cóncava

$$\mathbb{E}g(X)\leq g(\mathbb{E}X).$$

En efecto, sea $L(x)=a+bx$ una línea tangente a $g(x)$ en el punto $\mathbb{E}(X)$. Desde que g es convexa, está por encima de la línea $L(X)$. Así:

$$\mathbb{E}g(X)\geq\mathbb{E}L(X)=\mathbb{E}(a+bX)=a+b\mathbb{E}(X)=L(\mathbb{E}(X))=g(\mathbb{E}X).$$

De la desigualdad de Jensen, se cumple $\mathbb{E}(X^2)\geq(\mathbb{E}X)^2$ y si X es positiva, entonces $\mathbb{E}(1/X)\geq 1/\mathbb{E}(X)$. Desde que log es cóncava, $\mathbb{E}(\log X)\leq\log\mathbb{E}(X)$.

1.6 Distancia de Kullback-Leibler

Definamos la distancia de **Kullback-Leibler** entre dos densidades f_1 y f_2 como:

$$D(f_1,f_2)=\int f_1(x)\log\Big(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\Big)dx$$

Debemos notar que $D(f_1,f_1)=0$ y usando la desigualdad de Jensen se cumple que $D(f_1,f_2)\geq 0$. En efecto sea $X\sim f_1$. Entonces:

$$-D(f_1,f_2)=\mathbb{E}\log\Big(\frac{f_1(X)}{f_2(X)}\Big)\leq\log\mathbb{E}\Big(\frac{f_1(X)}{f_2(X)}\Big)=\log\int f_1(x)\frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx=\log\int f_2(x)dx=\log(1)=0.$$

Así $D(f_1,f_2)\geq 0$, es decir $D(f_1,f_2)\geq 0$.

La distancia de Kullbacker-Leibler es una medida de la información que se pierde cuando f_1 se aproxima a f_2. Un ejemplo en R.

```
> set.seed(1000)
> X<- rexp(10000, rate=0.2)
> Y<- rexp(10000, rate=0.4)
> KL.dist(X, Y, k=5)
> KLx.dist(X, Y, k=5)
```

El anterior script usa el paquete **FNN** de *R*.

La distancia de Kullbacker-Leibler entre una distribución Gaussiana f_1 con media μ_1 y varianza σ_1^2 y una distribución Gaussiana f_2 con media μ_2 y varianza σ_2^2 es dado por:

$$D(f_1, f_2) = \log \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} - \frac{1}{2}.$$

Si tenemos una cota exponencial sobre $\mathbb{P}(X_n > \epsilon$, podemos acotar $\mathbb{E}(X_n)$ como sigue:

Teorema 1.7 Supongamos que $X_n \geq 0$ y para cada $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(X_n > \epsilon) \leq c_1 e^{-c_2 n \epsilon^2} \tag{1}$$

para algún $c_2 > 0$ y $c_1 > 1/e$. Entonces:

$$\mathbb{E}(X_n) \leq \sqrt{\frac{C}{n}}.$$

donde $C = (1 + \log(c_1))/c_2$

En efecto para una variable aleatoria Y no negativa, $\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y \geq t)dt$. Así, para algún $a > 0$,

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X_n^2 \geq t)dt = \int_0^a \mathbb{P}(X_n^2 \geq t)dt + \int_a^\infty \mathbb{P}(X_n^2 \geq t)dt \leq a + \int_a^\infty \mathbb{P}(X_n^2 \geq t)dt.$$

La ecuación (1) implica que $\mathbb{P}(X_n > \sqrt{t}) \leq c_1 e^{-c_2 n t}$. Así:

$$\mathbb{E}(X_n^2) \leq a + \int_a^\infty \mathbb{P}(X_n^2 \geq t)dt = a + \int_a^\infty \mathbb{P}(X_n \geq \sqrt{t})dt \leq a + c_1 \int_a^\infty e^{-c_2 n t}dt = a + \frac{c_1 e^{-c_2 n a}}{c_2 n}.$$

Si $a = \log(c_1)/(nc_2)$, se concluye que:

$$\mathbb{E}(X_n^2) \leq \frac{\log(c_1)}{nc_2} + \frac{1}{nc_2} = \frac{1 + \log(c_1)}{nc_2}.$$

Finalmente, tenemos:

$$\mathbb{E}(X_n) = \sqrt{\mathbb{E}(X_n^2)} \leq \sqrt{\frac{1 + \log(c_1)}{nc_2}}.$$

Ahora consideramos acotar el máximo de un conjunto de variables aleatorios

Teorema 1.8 Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias. Supongamos que existe un $\delta > 0$ tal que $\mathbb{E}(e^{tX_i}) \leq e^{t^2\delta^2/2}$ para todo $t > 0$. Entonces:

$$\mathbb{E}\Big(\max_{1 \leq i \leq n} X_i\Big) \leq \delta\sqrt{2 \log n}.$$

En efecto por la desigualdad de Jensen,

$$\exp\Big\{t\mathbb{E}\Big(\max_{1\le i\le n} X_i\Big)\Big\} \le \mathbb{E}\Big(\exp\Big\{t\max_{1\le i\le n} X_i\Big\}\Big)$$
$$= \mathbb{E}\Big(\max_{1\le i\le n}\exp\{tX_i\}\Big) \le \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\exp\{tX_i\}) \le ne^{t^2\sigma^2/2}.$$

Así,

$$\mathbb{E}\Big(\max_{1\le i\le n} X_i\Big) \le \frac{\log n}{t} + \frac{t\sigma^2}{2},$$

El resultado se sigue colocando $t = \sqrt{2\log n}/\sigma$.

La siguiente desigualdad es útil para cotas de probabilidad para variables aleatorias normales

Teorema 1.9 Sea $Z \sim N(0,1)$. Entonces:

$$\mathbb{P}(|Z| > t) \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-t^2/2}}{t}$$

1.7 Notación O_p y o_p

En estadística, probabilidades, algoritmos, se usa la notación o_P y O_P. Por ejemplo, $a_n = o(1)$ significa que $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. $a_n = o(b_n)$ significa $a_n/b_n = o(1)$.

$a_n = O(1)$ significa eventualmente acotado. Es decir que para un n una cantidad muy grande, $|a_n| \le C$ para algún $C > 0$. $a_n = O(b_n)$, significa que $a_n/b_n = O(1)$.

Escribimos $a_n \sim b_n$ si ambos a/b y b/a son eventualmente acotados. En ciencia de la computación esto se escribe $a_n = \Theta(b_n)$. Se prefiere usar $a_n \sim b_n$, ya que en estadística Θ denota un espacio de parámetros.

Veamos estas definiciones en el terreno de las probabilidades, es decir $Y_n = o_P(1)$ significa que para un $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|Y_n| > \epsilon) \to 0.$$

Decimos que $Y_n = o_P(a_n)$ si, $Y_n/a_n = o_P(1)$.

Decimos $Y_n = O_P(1)$ si, para cada $\epsilon > 0$, existe un $C > 0$ tal que:

$$\mathbb{P}(|Y_n| > C) \le \epsilon.$$

Se dice que $Y_n = O_P(a_n)$ si $Y_n/a_n = O_p(1)$.

Usamosla desigualdad Hoeffding, para mostrar que las proporciones muestrales son $O_p(1/\sqrt{n})$ alrededor de la media. Sea $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ lanzamientos de monedas, esto es $Y_i \in \{0,1\}$. Sea $p = \mathbb{P}(Y_i = 1)$. Sea:

$$\overline{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Mostremos que : $\overline{p}_n - p = o_P(1)$ y $\overline{p}_n - p = O_P(1/\sqrt{n})$.

En efecto tenemos que:

$$\mathbb{P}(|\overline{p}_n - p| > \epsilon) \leq 2e^{-2n\epsilon^2} \to 0$$

y así $\overline{p}_n - p = o_P(1)$. También:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\sqrt{n}(\overline{p}_n - p) > C) &= \mathbb{P}\Big(|\overline{p}_n - p| > \frac{C}{\sqrt{n}}\Big) \\ &\leq 2e^{-2C^2} < \epsilon.\end{aligned}$$

si escogemos un C grande. Así $\sqrt{n}(\overline{p}_n - p) = O_P(1)$, lo que resulta que:

$$\overline{p}_n - p = O_p\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

2 La ley de promedios

Si lanzamos un dado 5 millones de veces y se mantiene un registro de los datos. El promedio de los números los cuales fueron lanzados es 3.500867. Desde que la media de cada lanzamiento es $\frac{1}{6}(1+2+\cdots+6) = 3\frac{1}{2}$, este resultado muestra que para un x_i el i ésimo lanzamiento, el promedio

$$a_n = \frac{1}{n}(x_i + x_2 + \cdots + x_n)$$

se acerca a la media $3\frac{1}{2}$, cuando $n \to \infty$.

En general si tenemos una secuencia $X_1, X_2, \ldots$ de variables aleatorias identicamente distribuidas e independientes cada una teniendo una media μ, deberiamos probar que el promedio:

$$\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

converge cuando $n \to \infty$ a la media μ.

Definición 2.1 Decimos que la secuencia $x_1, x_2, \ldots$ de variables aleatorias `converge en media cuadrada a la variables x` si,

$$\mathbb{E}([X_n - x]^2) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

y se escribe $X_n \to x$ `en media cuadrada cuando` $n \to \infty$.

Ejemplo 2.1 Sea X_n una secuencia de variables aleatorias discretas con una función de masa de probabilidad:

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}(X_n = 2) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Entonces X_n converge a la variable aleatoria 2 en media cuadrada cuando $n \to \infty$, desde que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}([X_n - 2]^2) &= (1-2)\frac{1}{n} + (2-2)^2\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \\ &= \frac{1}{n} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.\end{aligned}$$

Teorema 2.1 (Ley de los grandes números(1)) Sea una secuencia $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia de variables independientes cada una con media μ y varianza σ^2. El promedio de los primeros n de las X_i satisfacen cuando $n \to \infty$.

$$\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \to \mu \quad \text{en media cuadrada.}$$

Sea $S_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$, la n-ésima suma parcial de los X_i. Entonces

$$\mathbb{E}\Big(\frac{1}{n}S_n\Big) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}n\mu = \mu.$$

y así:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\Big[\frac{1}{n}S_n - \mu\Big]^2\Big) &= \mathbb{V}\Big(\frac{1}{n}S_n\Big) \\ &= \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \\ &= \frac{1}{n^2}(\mathbb{V}X_1 + \cdots + \mathbb{V}X_n) \\ &= \frac{1}{n}n^2\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2 \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty\end{aligned}$$

y así, $n^{-1}S_n \to \mu$ en media cuadrática cuando $n \to \infty$.

Definición 2.2 Decimos que la secuencia de variables aleatoria $X_1, X_2, \ldots$ de variables aleatorias `converge en probabilidad` a X si,

$$\texttt{Para todo } \epsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \to \quad \text{cuando } n \to \infty$$

Si esto se cumple, escribimos $X_n \to X$ `en probabilidad cuando` $n \to \infty$

Teorema 2.2 Si $X_1, X_2, \ldots$ es una secuencia de variables aleatorias y $X_n \to X$ en media cuadrada cuando $n \to \infty$ entonces $X_n \to X$ en probabilidad.

Para hacer la prueba de este teorema, escribamos la `la desigualdad de Chebyshev` de la siguiente manera

Si Y es una variable aleatoria y $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$, entonces:

$$\mathbb{P}(|Y| \geq t) \leq \frac{1}{t^2}\mathbb{E}(Y^2) \quad \text{para} \quad t > 0$$

Luego aplicando la desigualdad de Chebyshev a la variable aleatoria $Y = X_n - X$ para encontrar que:

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}\mathbb{E}([X_n - X]^2) \quad \epsilon > 0.$$

Si $X_n \to X$ en media cuadrada cuando $n \to \infty$, el lado derecho de la desigualdad tiende a 0 cuando $n \to \infty$ y así tiende a 0 para todo $\epsilon > 0$, como es requerido. El caso contrario no se cumple.

Teorema 2.3 (Ley débil de los grandes números(2)) Sea $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia de variables aleatorias, cada una con media μ y varianza σ^2. El promedio de los primeros n de los X_i satisface, cuando $n \to \infty$,

$$\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \to \mu \quad \text{en probabilidad.}$$

Ejemplo 2.2 Sea X_n una secuencia de variables aleatorias que convergen en probabilidad, pero no en media cuadrada con una función de masa de probabilidad:

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}.$$

Entonces, para $\epsilon > 0$ y para un n dado, tenemos:

$$\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

dando que $X_n \to \infty$ en probabilidad. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}([X_n - 0]^2) = \mathbb{E}(X_n^2) &= 0\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + n^2\frac{1}{n} \\ &= n \to \infty \ \text{ cuando } \ n \to \infty.\end{aligned}$$

así X_n no converge a 0 en media cuadrada.

Ejemplo 2.3 Considere el lanzamiento de una moneda donde la probabilidad de obtener cara es p. Sea X_i el resultado de un lanzamiento $(0-1)$. Por lo tanto, $p = \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{E}(X_i)$. La fracción de caras después de n lanzamientos es $\overline{X}_n$. De acuerdo con la ley de los grandes números, $\overline{X}_n$ converge en probabilidad a p. Esto no quiere decir que $\overline{X}_n$ se numéricamente igual p. Esto significa que, cuando n es grande, la distribución de $\overline{X}_n$ está 'concentrado' alrededor p.

Supongamos que $p = 1/2$, encontremos el valor de n para que $\mathbb{P}(.4 \leq \overline{X}_n \leq .6) \geq .7$. Para ello tenemos que $\mathbb{P}(\overline{X}_n) = p = 1/2$ y $\mathbb{V}(\overline{X}_n) = \sigma^2/n = p(1-p)/n = 1/n$. Por la desigualdad de Chebyshev, se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(.4 \leq \overline{X}_n \leq .6) &= \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu) \leq .1) \\ &= 1 - \mathbb{P}(|\overline{X}_n - \mu| > .1) \\ &\geq 1 - \frac{1}{4n(.1)^2} = 1 - \frac{25}{n}\end{aligned}$$

Esta expresión es mayor que .7 si $n = 84$.

Teorema 2.4 (Teorema del límite central) Sea $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias identicamente distribuidas e independientes cada una con media μ y varianza distinta de cero σ^2. Por la ley de los grandes números, la suma $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ es casi tan grande que $n\mu$ para valores de n muy grandes. Un siguiente paso es determinar el orden de la diferencia $S_n - n\mu$, que resulta ser de orden $\sqrt{n}$.

Se define la versión estándar de S_n

$$Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}}$$

Esta es una función lineal $Z_n = a_n S_n + b_n$ de S_n, donde a_n y b_n tienen que ser elegida de manera que $E(Z_n) = 0$ y $var(Z_n) = 1$. Además:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \cdots + \mathbb{E}(X_n) \\ &= n\mu\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S_n) &= \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2) + \cdots + \mathbb{V}(X_n) \\ &= n\sigma^2\end{aligned}$$

y así,

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

Muchas de las propiedades de Z_n se pueden sintetizar en el teorema de límite central:

Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias identicamente distribuidas e independiente, cada una con media μ y varianza distinta de cero σ^2. La versión estándar:

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

de la suma $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, satisface cuando $n \to \infty$:

$$\mathbb{P}(Z_n \leq x) \to \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \Phi(x) \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}.$$

El lado derecho de la última de la ecuación es sólo la función de distribución de la distribución normal con media 0 y varianza 1, así que esta expresión se puede escribir como:

$$\mathbb{P}(Z_n \leq x) \to \mathbb{P}(Y \leq x) \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}.$$

donde Y es la variable aleatoria con esta distribución normal estándar. También podemos escribir el teorema de la siguiente forma:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq x) = \Phi(x) \ \text{ para cada } x.$$

El teorema del límite central, nos permite calcular probabilidades relacionadas a Z_n como si Z_n fuese normal. Desde que la normalidad es preservada bajo transformaciones lineales, esto es equivalente a tratar S_n como una distribución normal con media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$.

Sea $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ donde las X_i son variables aleatorias idénticamente distribuidas e independientes cada una con media μ y varianza distinta de cero σ^2. Si n es muy grande, la probabilidad $\mathbb{P}(S_n \leq c)$ puede ser aproximada considerando S_n como si fuese normal de acuerdo al siguiente procedimiento:

- Calculamos la media $n\mu$ y la varianza $n\sigma^2$ de S_n.
- Calculamos el valor normalizado $z = (c - n\mu)/\sigma\sqrt{n}$.
- Usamos la aproximación,

$$\mathbb{P}(S_n \leq c) \approx \Phi(z),$$

donde $\Phi(z)$ es disponible desde la tabla de función densidad acumulativa de la distribución estándar.

Ejemplo 2.4 Cargamos en un avión 100 paquetes cuyos pesos son variables aleatorias independientes que se distribuyen uniformemente entre 5 y 50 libras. ¿Cuál es la probabilidad de que el peso total es superior a 3000 libras?.

No es fácil calcular la función densidad acumulativa del peso total y la probabilidad deseada, pero una respuesta aproximada se puede obtener usando el teorema del límite central:

Calculemos $\mathbb{P}(S_{100} > 3000)$, donde S_{100} es la suma de los pesos de los 100 paquetes. En este caso la media y la varianza de los pesos de un único paquete es:

$$\mu = \frac{5+50}{2} = 27.5 \quad \sigma^2 = \frac{(50-5)^2}{12} = 168.75.$$

basados en la fórmulas para la media y la varianza de la función densidad de una distribución uniforme, calculemos el valor normalizado :

$$z = \frac{3000 - 100 \cdot 27.5}{\sqrt{168.75 - 100}} = \frac{250}{129.9} = 1.92$$

y usando las tablas normal estándar para obtener la aproximación tenemos:

$$\mathbb{P}(S_{100} \leq 3000) \approx \Phi(1.92) = 0.9726.$$

y así la probabilidad pedida es:

$$\mathbb{P}(S_{100} > 3000) = 1 - \mathbb{P}(S_{100} \leq 3000) \approx 1 - 0.97626 = 0.0274.$$

Para la prueba(parcial) de este teorema usaremos el método de las funciones generadoras de momentos.

Teorema 2.5 (Teorema de continuidad) Sea $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia de variables aleatorias con funciones generadores de momentos $M_1, M_2, \ldots$ y suponiendo que para $n \to \infty$

$$\mathbb{M}_n(t) \to e^{\frac{1}{2}t^2} \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}$$

Entonces:

$$\mathbb{P}(Z_n \leq x) \to \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}.$$

En otras palabras, la función distribución de Z_n converge a la función distribución de la distribución normal si la función generadora de momentos de Z_n converge a la función generadora de momentos de la distribución normal.

Usemos estas propiedades para probar el `teorema del límite central` en el caso que las X_i tienen una función generadora de momentos:

$$\mathbb{M}_X(t) = \mathbb{E}(\exp(tX_i)) \quad \text{para} \quad i = 1, 2 \ldots$$

haciendo hincapié en que el teorema del límite central es válido incluso cuando esta esperanza no existe, siempre que la media y la varianza de la X_i sean finitas.

Sea $U_i = X_i - \mu$. Entonces $U_1, U_2, \ldots$ son variables aleatorias idénticamente distribuidas e independientes con media y varianza dado por:

$$\mathbb{E}(U_i) = 0, \quad \mathbb{E}(U_i^2) = \mathbb{V}(U_i) = \sigma^2,$$

y una función generadora de momentos:

$$\mathbb{M}_U(t) = \mathbb{M}_X(t)e^{-\mu t}$$

Ahora, tenemos:

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} U_i$$

La función generadora de momentos de Z_n es:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_n(t) = \mathbb{E}(\exp(tZ_n)) &= \mathbb{E}\Big(\exp\Big(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} U_i\Big)\Big) \\ &= \Big[\mathbb{M}_U\Big(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\Big]^n \end{aligned}$$

Expandamos $\mathbb{M}_U(x)$ como una serie de potencia alrededor de $x = 0$, para conocer el comportamiento de $\mathbb{M}_U(t/(\sigma\sqrt{n})$ para $n \to \infty$,

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_U(x) &= 1 + x\mathbb{E}(U_1) + \frac{1}{2}x^2\mathbb{E}(U_1^2) + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Reemplazando este resultado con $x = t/(\sigma\sqrt{n}$ y t fijo.

$$\mathbb{M}_n(t) = \Big[1 + \frac{t^2}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big]^n \to e^{\frac{1}{2}t^2} \quad \text{cuando} \;\; n \to \infty.$$

y por el teorema de continuidad tenemos el resultado del teorema del límite central. La prueba requiere la existencia de $\mathbb{M}_X(t)$ para valores de t cerca de 0.

Ejemplo 2.5 (Muestreo estadístico) Una fracción p desconocida de la población son caballeros jedi. Se desea estimar p con un error no superior a 0.005 sobre una muestra de individuos (se supone que contestan con la verdad). ¿Qué tan grande es esa muestra?

Supongamos que se elige una muestra de N individuos. Sea X_i la función indicador del evento de que la i-ésima persona admite ser un caballero jedi, y suponiendo que las X_i son variables aleatorias independientes, de Bernoulli con parámetro p, escribimos entonces:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

Elegimos para estimar p con la media muestral $n^{-1}S_n$, al siguiente operador $\overline{p}$ según la notación estadística.

Deseamos elegir n suficientemente grande para que $|\overline{p} - p| \leq 0,005$. Esto no se puede hacer, ya que $|\overline{p} - p|$ es una variable aleatoria que puede (aunque con una pequeña probabilidad) tomar un valor mayor que 0.005 para un n dado. El enfoque aceptado es establecer un nivel máximo de la probabilidad en la que

se permite la ocurrencia de un error. Por convención, tomamos este como 0.05 que nos lleva al siguiente problema: encontrar un n tal que,

$$\mathbb{P}(|\overline{p} - p| \leq 0.005) \geq 0.95.$$

Como S_n es la suma de variables aleatorias idénticamente distribuidas con media p y varianza $p(1-p)$. La probabilidad de arriba puede ser escrita como:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - p\Big| \leq 0.005\Big) &= \mathbb{P}\Big(\frac{|S_n - np|}{\sqrt{np(1-p)}} \leq 0.005\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{|S_n - np|}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} \leq 0.005\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\Big)\end{aligned}$$

Por el teorema del límite central, $(S_n - \mathbb{E}(S_n))/\sqrt{\mathbb{V}(s_n)}$ converge a la distribución normal y así la probabilidad final puede ser aproximada por una integral de función densidad normal. Un inconveniente a este resultado es que el rango de esta integral depende del valor de p que es desconocido.

Desde que $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ para $p \in [0,1]$, se tiene:

$$\mathbb{P}\Big(\frac{|S_n - \mathbb{E}(S_n)|}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} \leq 0.005\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\Big) \geq \mathbb{P}\Big(\frac{|S_n - \mathbb{E}(S_n)|}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} \leq 0.005\sqrt{4n}\Big)$$

y el lado derecho es aproximadamente $\mathbb{P}(|N| \leq 0.005\sqrt{4n}$, donde N es normal con media 0 y varianza 1. Por tanto:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\hat{p} - p| \leq 0.005) &\gtrapprox \int_{-0.005\sqrt{4n}}^{0.005\sqrt{4n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\ &= 2\Phi(0.005\sqrt{4n}) - 1\end{aligned}$$

donde Φ es la función de distribución de N. Consultando a las tablas, encontramos que es mayor que 0.95 si $0.005\sqrt{4n} \geq 1.96$, es decir cuando $n \gtrapprox 40.000$.

En el caso multivariarado el teorema del límite central, se escribe de la siguiente manera: Para $X_1, \ldots X_n$ vectores aleatorios idénticamente distribuidos independientes, donde:

$$X_i = \begin{pmatrix} X_{1i} \\ X_{2i} \\ \vdots \\ Xki \end{pmatrix}$$

con media :

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_{1i}) \\ \mathbb{E}(X_{2i}) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_{ki}) \end{pmatrix}$$

y matriz varianza Σ. Sea :

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \vdots \\ \overline{X}_k \end{pmatrix}$$

donde $\overline{X}_j = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_{ji}$. Entonces:

$$\sqrt{n}(\overline{X} - \mu) \to N(0, \Sigma).$$

2.1 Distribuciones que no cumplen el teorema del límite central

No todas las distribuciones obedecen al teorema del límite central. Un ejemplo es la variable aleatoria de Cauchy, que tiene como función densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x)^2}.$$

La esperanza y todos los momentos superiores de una variable aleatoria de Cauchy no están definidos. En particular, no tiene una varianza finita y por lo tanto no satisface las condiciones del teorema del límite central.