Curso: Introducción a la Probabilidad y Estadística CM -274
Práctica dirigida 11
Distribuciones multivariadas(2), Momentos
Muestras de distribución normal, Ley de los grandes números

Lista de ejercicios

1. Sea X y Y dos variables aleatorias uniformes independientes sobre $(0,1)$. Muestra que las aleatorias $U = \cos(2\pi X)\sqrt{-2\ln Y}$ y $V = \sin(2\pi X)\sqrt{-2\ln Y}$ son variables aleatorias normales estándar independientes.

2. Sean X e Y variables aleatorias continuas independientes, con funciones de densidad de probabilidad f_1 y f_2 y funciones de distribución de probabilidad F_1 y F_2 respectivamente. Entonces g y G, las funciones de densidad y de distribución de $X+Y$, respectivamente, están dada por.

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx,$$

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)F_2(t-x)dx$$

3. Sean X e Y son variables aleatorias gamma independientes, estrictamente positiva, con parametros (r_1,λ) y (r_2,λ), respectivamente. Definimos $U = X+Y$ y $V = X/X+Y$.
   - Encuentra la función densidad de probabilidad conjunta de U y V.
   - Prueba que U y V son independientes.
   - Muestra que U es gamma y V es beta.

4. Sea F una función de distribución de probabilidad. Prueba que las funciones F^n y $1-(1-F)^n$ son también funciones de distribución de probabilidad.

5. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$, números aleatorios independientes de $(0,1)$ y $Y_n = n\min(X_1, X_2, \dots X_n)$. Prueba que:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n > x) = e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

6. Sea Z una variable aleatorial normal estándar.
   - Calcula la función generadora de momentos de Z.
   - Encuentra la función generadora de momentos de X, donde X es una variable aleatoria normal X, con media μ y σ^2.
   - Usa el ítem anterior, para calcular la media y la varianza.

7. Una variable aleatoria positiva X es llamada `lognormal` con parametros μ y σ^2 si $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. Sea X una variable aleatoria lognormal, con parámetros μ y σ^2.
   - Para un entero positivo r, calcula el r-ésimo momento de X.
   - Usa el r-ésimo momento de X, para encontrar la varianza de X.

- En 1977, un investigador británico demostró que si X es la pérdida de un gran incendio, entonces $\ln X$ es una variable aleatoria normal. Es decir, X es lognormal. Supongamos que la pérdida esperada debido a un incendio en los edificios de una determinada industria, en miles de dólares, es de 120 con desviación estándar 36. ¿ Cuál es la probabilidad de que la pérdida de un incendio en una industria como esta, sea inferior a \$100.000?.

8. Sea X una variable aleatoria con función generadora de momentos $M_X(t) = e^{2t^2}$. Encuentra $\mathbb{P}(0 < X < 1)$.

9. Sea $Z \sim N(0,1)$. Usa $M_Z(t) = e^{t^2/2}$, para calcular $\mathbb{E}(Z^n)$, donde n es un número entero positivo.

10. Sea $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $X_3 \sim N(\mu_3, \sigma_3^2)$, $\ldots X_n \sim N(\mu_2, \sigma_n^2)$ variables aleatorias independientes. Entonces:

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2).$$

11. Supongamos que la distribución de las calificaciones de los estudiantes en una prueba de probabilidad y estadística es normal, con media 72 y varianza 25.
    - ¿ Cuál es la probabilidad de que el promedio de calificaciones de esa clase de probabilidad y estadística con 25 estudiantes sea 75 o más?.
    - Si un profesor enseña dos secciones diferentes de este curso, cada una con 25 estudiantes. ¿ Cuál es la probabilidad de que el promedio de una clase sea por lo menos tres más que el promedio de la otra clase?.

12. Supongamos que, en promedio, una oficina de correos maneja 10.000 cartas al dia con una varianza de 2000. ¿Qué se puede decir acerca de la probabilidad de que esta oficina de correos maneje entre 8.000 y 12.000 cartas mañana?.

13. Un biólogo quiere estimar, la esperanza de vida de un cierto tipo de insecto. Para ello, toma una muestra de tamaño n y mide la vida útil desde el nacimiento hasta la muerte de cada insecto. Entonces encuentra el promedio de estos números. Si cree que las vidas de estos insectos son variables aleatorias independientes con una varianza de 1.5 dias. ¿ Cuán grande debe elegir una muestra para estar al menos al 98% seguro de que su promedio es precisa dentro de $\pm 0.2 (\pm 4.8)$ horas?.

14. Sea X una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad $f(x)$. Definamos:

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad X > n \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

    Prueba que Y_n converge a 0 en probabilidad.

15. Considera dos secuencias de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$ y $Y_1, Y_2, \ldots$, convergen en probabilidad a alguna constante. Sea c otra constante. Muestra que $cX_n, X_n + Y_n, \max\{0, X_n\}, |X_n|$ y $X_n Y_n$, convergen en probabilidad a un determinado límite.

16. Supongamos que un `mono inmortal` está escribiendo constantemente en un procesador de textos que no se rompe, que dura para siempre y tiene una memoria infinita. Supongamos que el teclado del procesador de palabras tiene $m-1$ tecla, una barra espaciadora para espacios en blanco y teclas separadas para diferentes símbolos. Si el mono presiona uno de los m símbolos (incluida la barra de espacio) al azar, y si al final de cada línea y al final de cada página, el procesador de palabras avanza a una nueva línea y una nueva página por si mismo, ¿ cuál es la probabilidad de que el mono finalmente escribirá la obras completas de Shakespeare en orden cronológico y sin errores?.

17. Sea $\{X_1, X_2, \ldots\}$, una secuencia de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas. En otras palabras, para todo n, sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria desde una distribución con media $\mu < \infty$. Sea $S_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n, \overline{X}_n = S_n/n$. Muestra el siguiente resultado:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\bigg(n(\mu - \epsilon) \leq S_n \leq n(\mu + \epsilon)) \bigg) = 1.$$

18. Sea $X_1, X_2, \ldots,$ es una variable aleatoria positiva independiente, idénticamente distribuida, de media 2. Sea $Y_1, Y_2, \ldots,$ es una variable aleatoria positiva independiente, idénticamente distribuida, de media 3. Muestra que:

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n} \to \frac{2}{3},$$

con probabilidad 1. ¿ Importa si los X_i son independientes del Y_j?.

19. Utiliza la ley fuerte de los grandes números, para encontrar un meétodo probabilistico de calcular $\int_0^1 f(x)dx$, para $f : [0,1] \to [0,1]$, una función continua.

20. Sea $\{X_1, X_2, \ldots\}$, una secuencia de variables aleatorias independientes, normales estándar.

    Sea $W_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$. Encuentra:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(W_n \leq n + \sqrt{2n}).$$