Lista de ejercicios

1. Sea $p_1, p_2, \ldots, p_N$ números no negativos tal que $p_1 + p_2 + \cdots p_N = 1$ y sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N\}$ y sea F el conjunto potencia de Ω. Muestra que la función $\mathbb{Q}$ dada por

$$\mathbb{Q}(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i \quad A \in F$$

es una probabilidad en (Ω, F). Si F no es el conjunto potencia, $\mathbb{Q}$ es una probabilidad.

2. Sean A y B dos eventos con probabilidades $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ y $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$. Muestra que $\frac{1}{12} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$. Encuentra una cota para $\mathbb{P}(A \cup B)$.

3. Una moneda es lanzada $2n$ veces. ¿ Cuál es la probabilidad de obtener n caras?. ¿Qué sucede cuando $n \to \infty$?.

4. Da un ejemplo concreto de una variable aleatorio que no es discreta ni continua.

5. Considera una variables aleatoria X con $f_X(x) = \exp(-x)$ para $x \geq 0$ y 0 en otros casos. Calcula el la función de densidad de $Y = g(X) = \log(X)$. Concluye que:

$$f_{g(X)}(r) \neq g \circ f_X(r) = g(f_X(r)).$$

6. Consideremos sobre (a, b) una variable X, tal que

$$F_X(x) = \begin{cases} (x-a)/(b-a) & x \in (a,b) \\ 0 & x \leq a \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

y

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & x \in (a,b) \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Calcula la esperanza y varianza de X.

7. Si X es una variable aleatoria discreta y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, prueba que

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x \in Im\ X} g(x)\mathbb{P}(X = x).$$

siempre que esta suma converga absolutamente.

8. Definimos el tamaño de soporte de una variable aleatoria discreta X como el número de valores que puede alcanzar con una probabilidad distinta de cero (el número puede ser infinito). ¿Cuál es la relación entre los tamaños de soporte de una variable aleatoria discreta X y de $g(X)$?.

9. Un dado es lanzado n veces. Muestra que la probabilidad de que haya un número par de `seis` $\frac{1}{2}[1 + (\frac{2}{3})^n]$. Para este caso 0 es un número par.

10. Sea $A_r, r \geq 1$, los eventos tal que $\mathbb{P}(A_r) = 1$ para todo r. Muestra que $\mathbb{P}(\cap_{r=1}^{\infty} A_r) = 1$.

11. Consideremos $\Omega = \{1, 2, \ldots, p\}$ donde p es primo. Sea F el conjunto de todos los subconjuntos de Ω y $\mathbb{P}(A) = |A|/p$ para todo $A \in F$. Muestra que, si A y B son eventos independientes, entonces al menos unos de los conjuntos A y B es $\emptyset$ o Ω.

12. Si m estudiantes nacidos en en 1991 están asistiendo a una conferencia, muestra que la probabilidad de que al menos dos de ellos tengan el mismo cumpleaños es $p = 1 - (365)!/(365-m)!365^m$. Muestra que $p > 1/2$ cuando $m = 23$.

13. Si $A_1, A_2, \ldots A_n$ es una partición de Ω, donde cada A_i tiene una probabilidad positiva, entonces

$$\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_j)\mathbb{P}(A_j)}{\sum_1^n \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

14. El evento A se dice que es `repelido` por el evento B si $\mathbb{P}(A|B) < \mathbb{P}(A)$ y es `atraido` por B si $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A)$. Muestra que si B atrae a A, entonces A atrae a B y B^c repele a A.

15. Para que valores de c y α es la función p definida por

$$p(k) = \begin{cases} ck^\alpha & \text{para } k = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

es una función de masa de probabilidad.

16. Si X tiene una distribución geométrica con parámetro p, muestra que

$$\mathbb{P}(X > m + n | X > m) = \mathbb{P}(X > n)$$

para $m, n = 0, 1, 2, \ldots$.

17. Sea X y Y una variable aleatoria discreta, cada teniendo una función de masa dado por

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = pq^k \text{ para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

donde $0 < p = 1 - q < 1$. Muestra que

$$\mathbb{P}(X = k | X + Y = n) = \frac{1}{n+1} \text{ para } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

18. Sea $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatoria independientes, identicamente distribuidas y sea $S_n = X_1 + X_2 + \cdots, +X_n$. Muestra que $\mathbb{E}(S_m/S_n) = m/n$ si $m \leq n$ y $\mathbb{E}(S_m/S_n) = 1 + (m-n)\mu\mathbb{E}(1/S_n)$ si $m > n$, donde $\mu = \mathbb{E}(X_1)$.

19. Sean F y G funciones de distribución y sea la `métrica de Levi`

$$d_L = \inf\{\epsilon > 0 : G(x - \epsilon) - \epsilon \leq F(X) \leq G(x + \epsilon) + \epsilon \text{ para todo } x\}$$

Muestra que d_L es efecto una métrica sobre el espacio de las funciones de distribución.

20. Sea $X_r, 1 \leq r \leq n$, variables aleatorias independientes, que son simétricas alrededor del 0; esto es, X_r y X_r tienen la misma distribución. Muestra que, para todo x, $\mathbb{P}(S_n \geq x) = \mathbb{P}(S_n \leq -x)$, donde $S_n = \sum_{r=1}^n X_r$.

21. Sea $G(V, E)$ un grafo finito. Para un conjunto de vértices y una arista $e \in E$, definimos la función indicador

$$I_W(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \text{ conecta } W \text{ y } W^c \end{cases}$$

Sea $N_W = \sum_{e \in E} I_W(e)$. Muestra que existe un $W \subseteq N$ tal que $N_W \geq \frac{1}{2}|E|$.

22. Sea X con una función generadora de probabilidad $G_X(s)$ y sea $u_n = \mathbb{P}(X > n)$. Muestra que la función generadora $U(s)$ de la secuencia $u_0, u_1, \ldots$ satisface

$$(1-s)U(s) = 1 - G_X(s)$$

siempre que la serie definida, de esa función generadora converge.

23. Sean X e Y variables aleatorias independientes, con una distribución de Poisson con parámetros μ y λ respectivamente. Prueba que $X+Y$ tiene una distribución de Poisson y que $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$. Encuentra la probabilidad condicional $\mathbb{P}(X = k|X+y = n)$ para $0 \leq k \leq n$ y así muestra que la esperanza condicional de X dado $X+Y = n$, esto es

$$\mathbb{E}(X|X+Y=n) = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k|X+Y=n).$$

es $n\lambda/(\lambda+\mu)$.

24. Una moneda muestra cara con probabilidad p. Sea X_n el número de de lanzamientos requeridos para obtener n caras consecutivas. Muestra que $\mathbb{E}(X_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} p^{-k}$.

25. Si $\mathbb{V}(X) = 0$, entonces, existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

26. Sean X, Y variables aleatorias independientes con una función de distribución común F y una función densidad f. Muestra que $V = \max\{X, Y\}$ tiene una función de distribución $\mathbb{P}(V \leq x) = F(x)^2$ y función densidad $f_V(x) = 2f(x)F(x), x \in \mathbb{R}$. Encuentra la función densidad de $U = \min\{X, Y\}$

27. Sea X una variable aleatoria con media μ y una función de distribución continua F. Muestra que

$$\int_{-\infty}^{a} F(x)dx = \int_{a}^{\infty} [1 - F(x)]dx$$

28. Muestra que para la densidad normal estándar $\phi(x)$, muestra que $\phi^{'}(x) + x\phi(x) = 0$.

29. Sea $\{X_r : r \geq 1\}$ variables aleatorias indepedientes, uniformemente distribuidas en $[0,1]$. Sea $0 < x < 1$ y definimos

$$N = \min\{n \geq 1 : X_1 + X_2 + \cdots + X_n > x\}$$

Muestra que $\mathbb{P}(N > n) = x^n/n!$ y así encuentra la media y la varianza de N.

30. Sea X una variable aleatoria con una distribución binomial con parámetros n y p, muestra que

$$\mathbb{E}\Big(\frac{1}{1+X}\Big) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$$

Encuentra el límite de esta expresión cuando $n \to \infty$ y $p \to \infty$.

31. La variable aleatoria X tiene una función densidad proporcional a $g(x)$, donde g es una función satisfaciendo

$$g(x) = \begin{cases} |x|^{-n} & \text{si} |x| \geq 1 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

y $n \geq 2$ es un entero. Encuentra la función de densidad de X y determina los valores de n para el cual la media y la varianza de X existe.

32. Si X es una variable aleatoria que toma los valores no negativos, muestra que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty [1 - F_X(x)]dx$$

siempre que la integral exista.

33. Es la función G, definida por

$$G(X,Y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x + y \leq 0, \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

una función de distribución conjunta de algún par de variables aleatorias.

34. Sea X y Y variables aleatorias independientes, X teniendo la distribución normal con media 0 y la varianza 1 y Y teniendo la distribución χ^2 con n grados de libertad. Muestra que

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

tiene una función densidad

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n+1))}{\Gamma(\frac{1}{2}n)} \Big(1 + \frac{t^2}{n}\Big)^{-\frac{1}{2}(n+1)} \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

35. Sea X una función generadora de momentos $M(t)$.

- Muestra que $M(t)M(-t)$ es la función generadora de momentos de $X - Y$, donde Y es independiente de X , pero que tiene la misma distribución.
- De manera similar, describe las variables aleatorias que tienen funciones generadoras de momentos

$$\frac{1}{2 - M(t)}, \qquad \int_0^\infty M(ut)e^{-u}du.$$

36. Considera una secuencia de lanzamientos infinitos. La probabilidad de un éxito en el i-ésimo lanzamiento es algún número positivo p_i. Sea N el evento que no hay éxitos y sea I el evento donde hay un número infinito de éxitos.

- Asumiendo que los lanzamientos son independientes y que $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \infty$. Muestra que $\mathbb{P}(N) = 0$ y $\mathbb{P}(I) = 1$.
- Asumimos que $\sum_{i=1}^{\infty} p_i < \infty$. Muestra que $\mathbb{P}(I) = 0$.

37. Supongamos que X e Y son variables aleatorias geométricas con parámetro p, independientes, identicamente distribuidas. Muestra que

$$\mathbb{P}(X = i | X + Y = n) = \frac{1}{n-1}, \;\; i = 1, \ldots, n-1.$$

38. Considera el siguiente `pdf`

$$f_X(x) = \begin{cases} p\lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ (1-p)\lambda e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donde λ y p son escalares con $\lambda > 0$ y $p \in [0,1]$. Encuentra la media y varianza de X de dos maneras:

- calculando la esperanza asociada.

- usando la estrategia divide y vencerás y la media y varianza de la variable aleatoria exponencial.

39. Sean X e Y variablea aleatorias normales estándar indepedientes. El par (X, Y) puede ser descrita en coordenadas polares de la siguiente forma

$$X = R\cos\Theta, \quad Y = R\sin\Theta$$

para $R \leq 0$ y $\Theta \in [0, 2\pi]$.

- Muestra que Θ es uniformemente distribuida en $[0, 2\pi]$, que R tiene un `pdf`

$$f_R(r) = re^{-r^2/2} \quad r \geq 0$$

y que R y Θ son independientes.

- Muestra que R^2 tiene una distribución exponencial con parámetro $1/2$.

40. Muestra que la media μ y mediana m y la varianza σ^2 de una variable aleatoria continua X satisface

$$(\mu - m)^2 \leq \sigma^2$$

41. Sea $\{X_r : r \geq 1\}$ observaciones las cuáles son independientes y idénticamente distribuidas con una función de distribución F desconocida. Describe y justifica el método para estimar $F(x)$.

42. Sea $\{X_r : r \geq 1\}$ variables aleatorias idénticamente distribuidas e independientes con una función de distribución F satisfaciendo $F(y) < 1$ para todo y y sea $Y(y) = \min\{k : X_k > y\}$. Muestra que

$$\lim_{y\to\infty} \mathbb{P}\big(Y(y) \leq \mathbb{E}Y(y)\big) = 1 - e^{-1}.$$

43. Sean X y Y variables aleatorias discretas con función de masa conjunta

$$f(x, y) = \frac{C}{(x+y-1)(x+y)(x+y+1)}, \quad x, y = 1, 2, 3, \ldots$$

Encuentra las funciones de masa marginal de X e Y, calcula C y la covarianza de X y Y.

44. Sea $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, con $\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \mathbb{P}(\omega_3) = \dfrac{1}{3}$. Definimos $X, Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\begin{gathered} X(\omega_1) = 1, X(\omega_2) = 2, X(\omega_3) = 3 \\ Y(\omega_1) = 2, Y(\omega_2) = 3, Y(\omega_3) = 1 \\ Z(\omega_1) = 2, Z(\omega_2) = 2, Z(\omega_3) = 1 \end{gathered}$$

Muestra que X e Y tienen la misma función de masa. Encuentra las funciones de masa de $X + Y, XY$ y X/Y. Encuentra la función de masa condicional $f_{Y|Z}$ y $f_{Z|Y}$.

45. Sean G_1 y G_2 funciones generadoras de probabilidad y $0 \leq \alpha \leq 1$.

Muestra que G_1G_2 y $\alpha G_1 + (1-\alpha)G_2$ son funciones generadoras de probabilidad. ¿ Es $G(\alpha s)/G(\alpha)$ es una función generadora de momentos?.

46. Sean X y Y variables aleatorias discretas con función de masa conjunta f.

(a) Muestra que $\mathbb{E}(\log f_X(X)) \geq \mathbb{E}(\log f_Y(X))$.

(b) Muestra que `(mutual information)`

$$I = \mathbb{E}\Big(\log\Big\{\frac{f(X, Y)}{f_X(X)f_Y(Y)}\Big\}\Big)$$

satisface $I \geq 0$. La igualdad se cumple si y sólo si X y Y son independientes.

47. Supongamos que una variable aleatoria X que satisface

$$\mathbb{E}(X) = 0, \mathbb{E}(X^2) = 1, \mathbb{E}(X^3) = 0, \mathbb{E}(X^4) = 3$$

y sea

$$Y = a + bX + cX^2$$

Encuentra el coeficiente de correlación $\rho(X, Y)$.

48. Supongamos que X e Y son variables aleatorias con la misma varianza. Muestra que $X - Y$ y $X + Y$ son no correlacionados.

49. Construye un ejemplo de dos variables aleatorias aleatorias X e Y tal que $\mathbb{E}(Y) = \infty$, tal que $\mathbb{E}(Y|X) < \infty$.

50. Sea U una variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$ y $0 < q < 1$. Muestra que

$$X = 1 + \lfloor \log U / \log q \rfloor$$

tiene una distribución geométrica.

51. Sean U_1 y U_2 variables aleatorias independientes y uniformemente distribuida sobre $[0, 1]$ y sea $T_i = 2U_i - 1$. Muestra que condicionado al evento $R = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} \leq 1$,

$$X = \frac{T_1}{R}\sqrt{-2\log R^2}, \quad Y = \frac{T_2}{R}\sqrt{-2\log R^2}$$

las variables aleatorias son normal estándar e independientes.

52. Un dado es lanzado 10 veces. Calcula la probabilidad de que la suma encontrada sea 27.

53. Sea $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes que son distribuidas de manera uniforme en $[-1, 1]$. Muestra que la secuencia $Y_1, Y_2, \ldots$ converge en probabilidad a algún límite, identifica el límite, para cada uno de los siguientes casos:

    (a) $Y_n = X_n/n$.
    (b) $Y_n = (X_n)^n$.
    (c) $Y_n = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$.
    (d) $Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

54. Sea X una variable aleatoria, que toma valores no negativos. Muestra que

$$\sum_{i=1}^{\infty}(i-1)I_{A_i} \leq X \leq \sum_{i=1}^{\infty} iI_{A_i},$$

donde $A_i = \{i - 1 \leq X < i\}$. Deduce que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq i) \leq \mathbb{E}(X) \leq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq i).$$

55. Considera dos secuencias de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$ y $Y_1, Y_2, \ldots$ que convergen en probabilidad a algunas constantes. Sea c otra constante. Muestra que $cX_n, X_n + Y_n, \max\{0, X_n\}, |X_n|$ y X_nY_n convergen en probabilidad a algún límite.

56. Una moneda es lanzada n veces, mostrando caras H_n veces y sellos T_n veces. Sea $S_n = H_n - T_n$. Muestra que

$$\mathbb{P}(S_n > an)^{1/n} \to \frac{1}{\sqrt{(1+a)^{1+a}(1-a)^{1-a}}} \quad \text{si} \quad 0 < a < 1.$$

¿ Qué ocurre si $a \geq 1$?.

57. Sea X una variable aleatoria que toma valores no negativos y está asociado con un momento

$$M_X(s) = c \cdot \frac{3 + 4e^{2s} + 2e^{3s}}{3 - e^s}$$

donde c es un escalar. Encuentra $\mathbb{E}(X)$, $p_X(1)$ y $\mathbb{E}(X|X \neq 0)$.

58. Problemas sobre la cota de Chernoff

(a) Muestra que la desigualdad

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-sa} M(s).$$

se cumple para cada a y cada $s \geq 0$, donde $M(s) = \mathbb{E}(e^{sX})$ es el momento asociado con la variable aleatoria X y es finita sobre un intervalo abierto conteniendo $s = 0$.

(b) Muestra que la desigualdad

$$\mathbb{P}(X \leq a) \leq e^{-sa} M(s)$$

se cumple para cada a y cada $s \geq 0$.

(c) Muestra que la desigualdad

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-\phi(a)}.$$

se cumple para cada a, donde

$$\phi(a) = \max_{s \geq 0} \big(sa - \ln M(s)\big).$$

(d) Muestra que si $a > \mathbb{E}(X)$, entonces $\phi(a) > 0$.

59. Sean $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ variables aleatorias, uniformemente distribuido en el intervalo unitario $[0,1]$ y sea

$$W = \frac{(X_1 + \cdots X_{16}) - (Y_1 + \cdots + Y_{16})}{16}$$

Encuentra una aproximación numérica de la cantidad

$$\mathbb{P}\big(|W - \mathbb{E}(W)|) < 0.001\big)$$

60. Una fábrica produce X_n dispositivos eléctricos en el dia n, donde X_n son variables aleatorias idénticamente distribuidas e independientes con media 5 y varianza 9.

(a) Encuentra una aproximación a la probabilidad de que el número de dispositivos eléctricos producidos en 100 dias es menor que 400.

(b) Encuentra el mayor valor n tal que

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \geq 200 + 5n) \leq 0.05$$

(c) Sea N el primer dia en que el número de dispositivos eléctricos excede los 1000. Calcula una aproximación a la probabilidad que $N \geq 220$.

61. **Monte Carlo** Sean X y Y variables aleatorias independientes con función densidad común $f(x) = 1$ si $0 < x < 1$, $f(x) = 0$ en otros casos.

Sea $U = I_{\{Y \leq g(X)\}}$, la función indicador del evento que $Y \leq g(X)$ y sea $V = g(X)$, $W(X) = \frac{1}{2}\{g(X) + g(1-X)\}$.

Muestra que $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(W) = J$ y que $\mathbb{V}(W) \leq \mathbb{V}(V) \leq \mathbb{V}(U)$. Prueba que W es el estimador más eficiente de J.