Lista de ejercicios

1. Sea X una variable aleatoria, cuyos valores posibles son $0, 1, 2, \dots$, con $CDFF$. En algunos países, en lugar de utilizar un CDF, la convención es utilizar la función G definida por $G(x) = \mathbb{P}(X < x)$ para especificar una distribución. Encuentra una manera de convertir F a G, es decir, si F es una función conocida, muestra cómo obtener $G(x)$ para todo x real.

2. Sea $X \sim \text{Binomial}(n, p)$ y $Y \sim \text{Binomial}(m, p)$ independiente de X. Muestra que $X - Y$ no es Binomial.

3. La ley de Benford establece que en una gran variedad de conjuntos de datos de la vida real, el primer dígito sigue aproximadamente una distribución particular con un 30% de probabilidad de un 1, 18% de probabilidad de un 2 y en general

$$\mathbb{P}(D = j) = \log_{10}\left(\frac{j+1}{j}\right), \text{ para } j \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}.$$

donde D es el primer dígito de un elemento escogido aleatoriamente. Verifica que es es un PMF válido.

4. Sea $p(x) = 3/4(1/4)^x,\ x = 0, 1, 2, \dots,$ es el PMF de una variable aleatoria X. Encuentra F, la función de distribución de X y realiza su gráfico correspondiente.

5.
   - En la Serie Mundial de béisbol, dos equipos (los llamamos A y B), juegan una secuencia de juegos uno contra el otro y el primer equipo en ganar cuatro juegos gana la serie. Sea p la probabilidad de que A gane un juego individual, asumiendo que los juegos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo A gane la serie?.
   - Proporcione una explicaci´on clara e intuitiva de si la respuesta a (a) depende de si los equipos juegan siempre 7 juegos (y quien gana la mayoría gana la serie), o los equipos dejan de jugar más juegos tan pronto como un equipo haya ganado 4 juegos (como es realmente el caso en la práctica: una vez que el partido se decide, los dos equipos no siguen jugando más partidos).

6. Se realiza una secuencia de n experimentos independientes. Cada experimento es un éxito con probabilidad p y un fracaso con probabilidad $q = 1 - p$. Demuestra que condicional al número de éxitos, todas las posibilidades válidas para la lista de resultados del experimento son igualmente probables.

7. Se está probando un nuevo tratamiento para una enfermedad, para ver si es mejor que el tratamiento estándar. El tratamiento existente es eficaz en el 50% de los pacientes. Se cree inicialmente que hay un 2/3 de probabilidad de que el nuevo tratamiento sea efectivo en el 60% de los pacientes y una probabilidad de 1/3 de que el nuevo tratamiento sea efectivo en el 50% de los pacientes. En un estudio piloto, el nuevo tratamiento se da a 20 pacientes al azar y es eficaz para 15 de ellos.
   - Dada esta información, ¿cuál es la probabilidad de que el nuevo tratamiento sea mejor que el tratamiento estándar?.
   - Un segundo estudio se hace más tarde, dando el nuevo tratamiento a 20 nuevos pacientes al azar. Dados los resultados del primer estudio, ¿cuál es el PMF para cuántos de los nuevos pacientes, el nuevo tratamiento es eficaz? (Dejando p a la respuesta a (a), tu respuesta se puede dejar en términos de p.)

8. Los jugadores A y B se turnan para responder preguntas de trivia, comenzando con el jugador A respondiendo a la primera pregunta. Cada vez que A responde a una pregunta, tiene probabilidad p_1 de hacerlo bien. Cada vez que B juega, tiene probabilidad p_2 de hacerlo bien.

- Si A responde m preguntas, ¿cuál es el PMF del número de preguntas que obtiene correctamente?.
- Si A responde m veces y B responde n veces, ¿cuál es el PMF del número total de preguntas que obtienen correctamente (puede dejar tu respuesta como una suma)? Describe exactamente cuando/si se trata de una distribución binomial.
- Supongamos que el primer jugador a responder correctamente gana el juego (sin un número máximo predeterminado de preguntas que se pueden hacer). Encuentra la probabilidad de que A gane el juego.

9. A una clase de ingeniería que tiene 23 estudiantes varones y tres mujeres, hay 13 puestos de trabajo disponibles. Para asignar cada puesto de trabajo a dos estudiantes, el profesor forma 13 equipos uno a la vez, cada uno compuesto por dos estudiantes seleccionados al azar. En este proceso, sea X el número total de estudiantes seleccionados cuando aparece el primer equipo formado por un hombre y una mujer. Encuentra la función de masa de probabilidad de X.