Curso: Introducción a la Probabilidad y Estadística CM -274
Práctica dirigida 1 Espacio muestrales, eventos
Probabilidad, propiedades de la función probabilidad

Lista de ejercicios

---

1. Define un espacio muestral para el experimento de elegir un número del intervalo $(0, 20)$. Describe el evento de que dicho número es un entero.

2. Se lanzan dos dados. Sea E el evento en que la suma de las salidad es impar y F el evento de que al menos salga un 1. Interpretar los eventos $E \cap F$, $E^c \cap F$ y $E^c F^c$.

3. Sea P el conjunto de todos los subconjuntos de $A = \{1, 2\}$. Elegimos dos conjuntos distintos de forma aleatoria de P. Define un espacio muestral para este experimento y describe los siguientes eventos

   (a) La intersección de los conjuntos elegidos al azar es vacía.

   (b) Los conjuntos son complementarios entre si.

   (c) Uno de los conjuntos contiene más elementos que el otro.

4. La experiencia pasada muestra que cada nuevo libro de un determinado editor consigue al azar entre 4 y 12% del mercado. ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo libro de este editor capture a lo más el $6,35\%$ del mercado?.

5. Prueba que el evento B es imposible si y sólo si para cada evento A,
$$A = (B \cap A^c) \cup (B^c \cap A).$$

6. Defina un espacio muestral para el experimento de poner enorden aleatorio siete libros diferentes en un estante. Si tres de estos siete libros son un diccionario de tres volúmenes, describe el hecho de que estos volúmenes estén en orden ascendente lado a lado (es decir, el volumen I precede al volumen II y el volumen II precede al volumen III).

7. Sea $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ una secuencia de eventos. Encuentra una expresión para el evento que infinitamente muchos de los A_i se producen.

8. Sea $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ una secuencia de eventos de un espacio muestral S. Encuentra una secuencia $\{B_1, B_2, B_3, \dots\}$ de eventos mutualmente exclusivos tal que para todo $n \geq 1$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

9. ¿ Cuál de las siguientes aseveraciones son ciertas?. Si la aseveración es cierta, realiza una prueba. Si es falsa escribe un contraejemplo.

   (a) Si A es un evento con probabilidad 1, entonces A es un espacio muestral.

   (b) Si B es un evento con probabilidad 0, entonces $B = \emptyset$.

10. Sean A y B dos eventos. Muestra que si $\mathbb{P}(A) = 1$ y $\mathbb{P}(B) = 1$, entonces $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$. En general si $A_1, A_2, \dots, A_n$ son n eventos. Muestra que si
$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \cdots = \mathbb{P}(A_n) = 1,$$
entonces $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cdots A_n) = 1$.

11. (a) Para una secuencia creciente o decreciente de eventos $\{E_n, n \geq 1\}$, se cumple que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} E_n).$$

(b) Supongamos que algunos individuos de una población producen descendientes del mismo tipo. Los descendientes de la población inicial son llamados de segunda generación, los descendientes de la segunda generación son llamados de tercera generación y así sucesivamente. Si con probabilidad $\exp[-(2n^2+7)/(6n^2)]$ toda la población muere completamente por la n-ésima generación antes de producir cualquier descendencia ¿cuál es la probabilidad de que tal poblaci?n sobreviva para siempre?.

12. Un punto es seleccionado al azar desde un intervalo $(0, 2000)$.¿ Cuál es la probabilidad que este punto sea entero?.

13. Se selecciona aleatoriamente un punto del intervalo $(0, 1)$. ¿Cuál es la probabilidad de que el punto sea racional? ¿ Cuál es la probabilidad de que el punto sea irracional?.

14. Se elige aleatoriamente un número del conjunto de enteros $\{1, 2, \ldots, 1000\}$.¿Cuál es la probabilidad de que sea divisible por 3 o 5 (es decir, 3 o 5 o ambos)?.

15. (Lema de Borel-Cantelli) Sea $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ una secuencia de eventos. Prueba que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ converge, entonces $\mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty}\right) = 0$.

16. El coeficiente de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$se determina lanzando un dado tres veces (el primer resultado es a, el segundo b y el tercero c). Encuentra la probabilidad de que la ecuación no tenga raíces reales.

17. Extracto del programa de televisión The Rockford Files:

```
Rockford: Solo hay dos medicos en la ciudad. Las posibilidades
          de ambas  autopsias realizadas  por el mismo medico son 50-50.
Reportero: No, eso es solo para una autopsia. Para dos autopsias
           las posibilidades  son 25-75
Rockford: Tienes razon.
```

¿Rockford estaba de acuerdo con el reportero? ¿Explica por qué o por qué no?.

18. Una moneda se lanza $2n$ veces. ¿Cuál es la probabilidad de sacar exactamente n caras? ¿ Cómo se comporta su respuesta cuando $n \to \infty$?.

19. Supongamos que en una ciudad determinada el número de personas con el tipo sanguíneo **O** y del tipo sanguíneo **A** es aproximadamente el mismo. El número de personas con el tipo sanguíneo **B** es de $1/10$ de las que tienen el tipo sanguíneo **A** y el doble de las que tienen el tipo sanguíneo **AB**. Encuentra la probabilidad de que el siguiente bebé nacido en la ciudad tenga sangre de tipo **AB**.

20. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? Si una afirmación es verdadera, realiza una prueba y si es falsa, escribe un contraejemplo.

    (a) Si $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$, entonces los eventos A, B y C son mutualmente exlusivos.

    (b) Si $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1$, entonces A, B y C son eventos mutualmente exlusivos.

21. Se lanza una bola en un cuadrado que se divide en n cuadrados idénticos. La probabilidad de que la bola golpee el cuadrado de la i-ésima columna y la j-ésima fila es p_{ij}, donde $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. En términos de p_{ij}, encuentre la probabilidad de que la bola golpee la j-ésima línea horizontal.

22. (a) (Desigualdad de Boole) Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots$ una secuencia de eventos de un espacio muestral. Prueba que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

(b) Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots$ una secuencia de eventos de un experimento. Prueba que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^c).$$

23. En un determinado país, la probabilidad es $49/50$ de que un avión de combate seleccionado al azar regresa de una misión sin percances. Mia argumenta que esto significa que hay una misión con un percance en cada 50 vuelos consecutivos. Ella concluye que si un piloto de caza regresa con seguridad de 49 misiones consecutivas, debe regresar a casa antes de su quincuagésima misión. ¿Está en lo correcto Mia? Explica por qué si o por qué no.

24. Sea $\mathbb{P}$ una probabilidad definida en un espacio muestral S. Para eventos de A de S se define $\mathbb{Q}(A) = [\mathbb{P}(A)]^2$ y $\mathbb{R}(A) = \mathbb{P}(A)/2$. ¿ Es $\mathbb{R}$ una probabilidad en S? ¿ Por qué si o por qué no?.

25. (El problema del sombrero) Un juego comienza con un equipo de tres jugadores que entran en una habitación uno a la vez. Para cada jugador, se lanza una moneda. Si el resultado es cara, se coloca un sombrero rojo en la cabeza del jugador y si es sello, se coloca un sombrero azul en la cabeza del jugador. A los jugadores se les permite comunicarse antes de que el juego comience para decidir una estrategia.

    Sin embargo, no se permite la comunicación después del inicio del juego. Los jugadores no pueden ver sus propios sombreros. Pero cada jugador puede ver los otros sombreros de los otros jugadores. Cada jugador tiene la opción de adivinar el color de su sombrero o pasar.

    El juego termina cuando los tres jugadores toman sus decisiones simultáneamente. El equipo gana si la suposición de ningún jugador es incorrecta y por lo menos una estimación de un jugador es correcta. Obviamente el objetivo del equipo es desarrollar una estrategia que maximice la probabilidad de ganar. Una estrategia trivial para el equipo sería que dos de sus jugadores pasen y el tercer jugador adivine rojo o azul como él o ella desea. Esto le da al equipo un 50% de posibilidades de ganar. ¿Puedes pensar en una estrategia que mejore las posibilidades de ganar del equipo?.