Preguntas de Introducción a los Procesos Estocásticos

Lista de Problemas

1. Analiza los siguientes procesos estocásticos

   a) Para $n \geq 1$, sea $X_n = 1$ si el n-enésima pez atrapado en un lago por un pescador es una trucha, y sea $X_n = 0$ en caso contrario. Estudia el proceso $\{X_n : n = 1, 2, \dots\}$.

   b) Supongamos que hay tres máquinas en una fábrica, cada una trabajando por un tiempo aleatorio que se distribuye de manera exponencial. Cuando una máquina falla, el tiempo de reparación es también una variable aleatoria exponencial. Sea $X(t)$ el número de máquinas en funcionamiento en la fábrica en el momento t. Analiza el proceso $\{X(t) : t \geq 0\}$.

   c) Una partícula cósmica que entra en la atmósfera de la Tierra choca con las partículas de aire al azar y transfiere energía cinética a estas. Estas a su vez colisionan con otras partículas aleatoriamente transfiriendo energía entre ellas y así sucesivamente.
   Sea $X(t)$ el número de partículas en una unidad t de tiempo después de que la partícula cósmica entra en la atmósfera de la Tierra. Analiza el proceso $\{X(t) : t \geq 0\}$.

2. Sea un proceso de Bernoulli con probabilidad de éxito en un experimento de p.

   a) Relaciona el número de fracasos antes del r-ésimo éxito a una variable aleatoria binomial negativa y calcula el `pmf`.

   b) Encuentra el valor esperado y la varianza del número de fracasos antes del r-ésimo éxito.

   c) Obtiene una expresión para la probabilidad de que el i-ésimo fracaso ocurre antes del r-ésimo éxito.

3. Sea $N(t)$ un proceso de Poisson con paramétro λ. Supongamos que para un $t > 0$ fijo, $N(t) = n$. Es decir, se nos da que n eventos han ocurrido en el tiempo t. Entonces para un $u, 0 < u < t$, el número de eventos que han ocurrido durante o antes a u, es binomial con paramétros n y u/t.

4. Para un proceso de Poisson con paramétro λ, muestra que, para todo $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{N(t)}{t} - \lambda\Big| \geq 0\Big) \to 0,$$

   cuando $t \to \infty$. Muestra que para un $N(t)/t$ es un buen estimador de λ.

5. El número de accidentes en una intersección es un proceso de Poisson $\{N(t) : t \geq 0\}$ con una tasa de 2,3 por semana. Sea X_i el número de lesiones en el accidente i. Supongamos que X_i es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media 1,2 y desviación estándar 0,7. Además, supongamos que el número de lesiones en cada accidente es independiente del número de accidentes que se producen en la intersección.

   Sea $Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$; entonces $Y(t)$, el número total de lesiones de los accidentes en esa intersección, antes o durante 1 valor de t, se dice que es un proceso de **Poisson compuesto**. Encuentre el valor esperado y la desviación estándar de $Y(52)$, el número total de lesiones en un año.

6. Cuando Erika camina de casa al trabajo, ella tiene que cruzar la calle en una cierto lugar y momento. Erika necesita un intervalo de 15 segundos en el tráfico para cruzar la calle en ese momento. Supongamos que el flujo de tráfico es un proceso de Poisson, y el tiempo medio entre dos coches consecutivos pasando visto por Erika es de 7 segundos. Encuentre el valor esperado de las veces que Erika tiene que esperar antes de que pueda cruzar la calle.

7. Sea $\{N(t) : t \geq 0\}$ un proceso de Poisson. Para $k \geq 1$, sea S_k el tiempo en que el k-ésimo evento ocurre. Muestra que

$$\mathbb{E}[S_k|N(t) = n] = \frac{kt}{n+1}$$

8. Hay k tipos de choques identificados que se producen, de forma independiente, en un sistema. Para $1 \leq i \leq k$, supongamos que los choques de tipo i se producen en el sistema a una razón de Poisson λ_i. Encuentra la probabilidad de que el n-ésimo choque que se produzca en el sistema es de tipo i, $1 \leq i \leq n$.

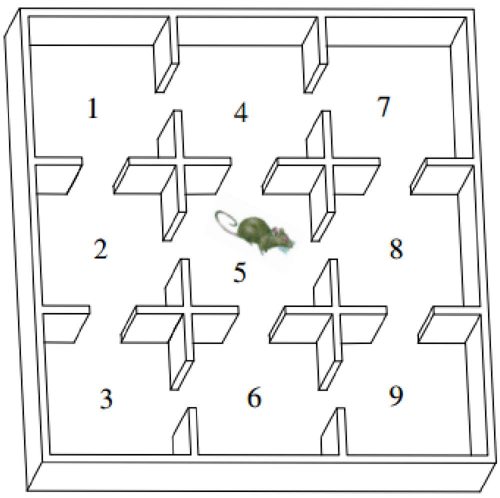
9. Muestra que una secuencia de variables aleatorias independientes, que toman valores en un conjunto contable S es una cadena de Markov.

10. Sean X e Y una cadena de Markov sobre el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$. Es la secuencia $Z_n = X_n + Y_n$ una secuencia de Markov.

11. Sea X una cadena de Markov. Muestra que, para un $1 < r < n$,

$$\mathbb{P}(X_r = k|X_i = x_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n)$$
$$= \mathbb{P}(X_r = k|X_{r-1} = x_{r-1}, X_{r+1} = x_{r+1})$$

12. Supongamos que un ratón se mueve en el interior del laberinto (como se muestra en la figura)



a partir de una celda a otra, en busca de alimento. Cuando está en una celda, el ratón se moverá a una de las celdas contiguas al azar. Para $n \geq 0$, sea X_n el número de celdas que el ratón visitará después de haber cambiado de celdas n veces.

Prueba que $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$ es una cadena de Markov con espacio de estado $\{1, 2, \ldots, 9\}$ y que la matriz de probabilidad de transición

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\
0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\
0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0
\end{pmatrix}
$$

13. Los computadores del laboratorio de un colegio son inspeccionados al final de cada semestre. Si un equipo necesita reparaciones menores, será anotado. Si el equipo no funciona , será reemplazado por uno nuevo.

    Para $k \geq 0$, sea $p_k > 0$ la probabilidad de que un nuevo equipo necesita ser reemplazado después de k semestres. Para un equipo en uso al final del semestre enésima, sea X_n el número de semestres adicionales que seguirá siendo funcional. Sea Y el tiempo de vida, en los semestres, de un nuevo equipo instalado en el laboratorio. Sea

$$
X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 & \text{si } X_n \geq 1 \\ Y - 1 & \text{si } X_n = 0 \end{cases}
$$

    Muestra que $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ es una cadena de Markov.

14. Para una cadena de Markov $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ con un espacio de estado $\{0, 1, 2, \dots\}$ y una matriz probabilidad de transición $\mathbb{P} = (p_{ij})$, sea p la función de masa de probabilidad de X_0; esto es

$$
p(i) = \mathbb{P}(X_0 = i), \quad i = 0, 1, 2, \dots
$$

    Encuentra la función de masa de probabilidad de X_n.

15. Sea $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ una cadena de Markov con un espacio de estado $\{0, 1, 2\}$ y una matriz probabilidad de transición

$$
\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

    Empezando desde 0, Â¿ cúal es la probabilidad que el proceso nunca ingrese 1?.

[1]

[1] Hecho en LaTeX