Lista de ejercicios

1. ¿Existen variables aleatorias discretas X e Y tales que $\mathbb{E}(X) > 100\mathbb{E}(Y)$ pero Y es mayor que X con probabilidad al menos 0.99?.

2. Una pareja decide seguir teniendo hijos hasta que tener al menos un niño y al menos una niña. Supongamos que nunca tienen gemelos, y que las pruebas son independientes con la probabilidad $1/2$ de un niño y que son lo suficientemente fértiles como para seguir produciendo hijos indefinidamente. ¿Cuál es el número esperado de niños?.

3. Sea $V = \min(X, Y)$ el menor de X e Y, y sea $W = \max(X, Y)$ el mayor de X e Y. Así que si X concretiza a x e Y concretiza a y, entonces V concretiza al $\min(x, y)$ y W concretiza al $\max(x, y)$. Halla $\mathbb{E}(V) + \mathbb{E}(W)$.

4. Calvin y Hobbes juegan un partido con una serie de juegos, donde Calvin tiene probabilidad p de ganar cada juego (independientemente). Ellos juegan con una regla llamada `ganar por dos`, donde el primer jugador que gana dos juegos más que su oponente gana el partido. Encuentra el número esperado de juegos participados.

5. Una distribución discreta tiene la propiedad A, si para variable aleatoria X con esa distribución, $\mathbb{P}(X \geq j + k | X \geq j) = \mathbb{P}(X \geq k)$ para todos los enteros no negativos j, k.

   - Si X tiene una distribución con la propiedad A, con CDF F y PMF $p_i = \mathbb{P}(X = i)$, encuentra una expresión para $P(X \geq j + k)$ en términos de $F(j)$, $F(k)$, p_j, p_k.
   - Nombre una distribución discreta que tiene la propiedad A. Justifica tu respuesta con una clara interpretación en palabras o con un cálculo.

6. Un grupo de 50 personas están comparando sus cumpleaños (como de costumbre, asumen que sus cumpleaños son independientes, no son el 29 de febrero, etc.). Encuentra el valor esperado de los pares de personas con el mismo cumpleaños y el valor esperado de días en el año en el que al menos dos de estas personas nacieron.

7. Sea $X \sim \text{Geometrica}(p)$ y t una constante. Encuentra $\mathbb{E}(e^{tX})$ como una función de t.

8. La circunferencia de un círculo se colorea con tinta roja y azul tal que $2/3$ de la circunferencia es roja y $1/3$ es azul. Demuestra que no importa cuán complicado sea el esquema de coloración, hay una manera de inscribir un cuadrado en el círculo de manera que al menos tres de las cuatro esquinas del cuadrado toquen tinta roja.

9. Se especifican diez puntos en el plano. Si se tiene diez monedas circulares (del mismo radio). Muestra que se puede colocar las monedas en el plano (sin apilarlas) para que los diez puntos estén cubiertos.

10. Cinco personas acaban de ganar un premio de 100 dólares, y están decidiendo cómo dividir ese dinero entre ellos. Suponga que se usan todos los dólares son usados, si centavos. Así por ejemplo, dar 50 dólares a la primera persona y 10 dólares a la segunda es diferente de viceversa.

    - ¿Cuántas maneras hay de dividir los 100 dólares, de modo que cada uno obtenga por lo menos 10 dólares?.
    - Suponga que los 100 dólares se dividen al azar, con todas las asignaciones posibles contadas en (a) igualmente probables. Encuentre la cantidad esperada de dinero que recibe la primera persona.
    - Sea A_j el evento en que la j ésima persona recibe más que la primera persona (para $2 \leq j \leq 5$), cuando los 100 dólares son asignados aleatoriamente como en el ítem anterior. ¿ Son A_2 y A_3 independientes?.

11. Sean X y Y variables aleatorias de Poisson y $T = X + Y$. Suponiendo que X e Y no son independientes y de hecho $X = Y$. ¿Es verdad que $T \sim \text{Poisson}(2\lambda)$?.

12. Para $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, encuentra $\mathbb{E}(X!)$.

13. Si el número de peces en un cierto lago es una variable aleatoria Poisson(λ). Preocupado por no haber ningún pez en absoluto, un estadístico agrega un pez al lago. Sea Y el número resultante de peces (por lo que Y es 1 más una variable aleatoria de Poisson(λ))

    - Encuentra $\mathbb{E}(Y^2)$ y $\mathbb{E}(1/Y)$.

14. Un grupo de n personas juegan `secreto1` de la siguiente manera: cada uno pone su nombre en un trozo de papel en un sombrero, escoge un nombre al azar del sombrero (sin reemplazo) y luego compra un regalo para esa persona. Por desgracia, pasan por alto la posibilidad de sacar su propio nombre, por lo que algunos tienen que comprar regalos para ellos mismos. Suponiendo que $n \geq 2$.

    - Encuentra el valor esperado del número X de personas que escogen sus propios nombres.
    - Encuentra el número esperado de pares de personas, A y B, de modo que A elija el nombre de B y B elija el nombre de A (donde $A \neq B$ y el orden no importa).
    - Sea X el número de personas que escogen sus propios nombres. ¿Cuál es la distribución aproximada de X si n es grande (especifique el valor o los valores del parámetro)? ¿ Cuál es el valor de $\mathbb{P}(X = 0)$ cuando $n \to \infty$.