Lista de ejercicios

1. Dos dados son lanzados y el valor absoluto de la diferencia de los resultados se denota por X.

   ¿ Cuáles son los valores posibles de X y las probabilidades asociadas con esos valores?.

2. De una urna que contiene 5 chips rojos, 5 blancos y 5 azules, sacamos dos chips al azar. Por cada chip azul ganamos 1 sol , por cada chip blanco ganamos 2 soles, pero por cada chip rojo perdemos 3 soles. Si X representa la cantidad que ganamos o perdemos. ¿Cuáles son los posibles valores de X y las probabilidades asociadas a eso valores?.

3. En una sociedad de población N, la probabilidad es p que una persona tenga cierta enfermedad independientemente de otras. Sea X el número de personas que deben ser examinadas hasta que se encuentre una persona con la enfermedad, $X = 0$ si no se encuentra a nadie con la enfermedad.

   ¿ Cuáles son los posibles valores de X?. Determina las probabilidades asociadas con estos valores.

4. La función F es la función de distribución de una variable aleatoria X, es dada por:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ (1/4)t + 1/4 & -1 \leq t < 0 \\ 1/2 & 0 \leq t < 1 \\ (1/12)t + 7/12 & 1 \leq t < 2 \\ 1 & t \geq 2. \end{cases}$$

   (a) Dibuje el gráfico de F.

   (b) Calcula la siguientes cantidades: $\mathbb{P}(X < 1), \mathbb{P}(X = 1), \mathbb{P}(1 \leq X < 2), \mathbb{P}(X > 1/2), \mathbb{P}(X = 3/2)$ y $\mathbb{P}(1 < X \leq 6)$.

5. Sea X una variable aleatoria con una función de distribución F. Para $p(0 < p < 1)$, Q_p se dice que es un cuantil de orden p si:

$$F(Q_{p^-}) \leq p \leq F(Q_p).$$

   En un determinado país, la tasa a la que el precio del petróleo por galón cambia de un año a otro tiene la siguiente función de distribución:

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

   Encuentra $Q_{0.50}$ llamada `mediana` de F; $Q_{0.25}$ es llamado el primer cuartil de F y $Q_{0.75}$ llamado el tercer cuartil de F. Interpreta esas cantidades.

6. Una variable aleatoria es llamada simétrica alrededor de 0 si para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}(X \leq -x).$$

   Prueba que si X es simétrica alrededor de 0, entonces para todo $t > 0$, la función de distribución F satisface las siguientes relaciones:

   (a) $\mathbb{P}(|X| \leq t) = 2F(t) - 1$.

   (b) $\mathbb{P}(|X| > t) = 2(1 - F(t))$.

   (c) $\mathbb{P}(X = t) = F(t) + F(-t) - 1$.

7. La aerolínea A tiene vuelos cada 45 minutos desde el aeropuerto de Lima hasta Arequipa. Un pasajero que quiere tomar uno de estos vuelos llega al aeropuerto en un momento al azar. Supongamos que X es el tiempo de espera para este pasajero. Encuentra la función de distribución de X. Se debe asumir que los asientos están siempre disponibles para estos vuelos.

8. Una calculadora científica puede generar números aleatorios de dos dígitos. Es decir, podemos elegir un número al azar del conjunto $\{00, 01, 02, \ldots, 99\}$. Para obtener un número aleatorio del conjunto $\{4, 5, \ldots, 18\}$, muestra que tenemos que seguir generando números aleatorios de dos dígitos hasta obtener uno entre 4 y 18.

9. En una ciudad hay 40 taxis, numerados del 1 al 40. Tres taxis llegan al azar a una estación para recoger pasajeros. ¿ Cuál es la probabilidad de que el número de al menos uno de los taxis sea menor de 5?.

10. Sea X un punto seleccionado aleatoriamente del intervalo $(0, 3)$. ¿ Cuál es la probabilidad de que $X^2 - 5x + 6 > 0$?.

11. Sea X un punto aleatorio seleccionado del intervalo $(0, 1)$. Calcula F, la función de distribución de $Y = X/(1 + X)$ y dibuje su gráfica.

12. En el experimento de lanzar un dado dos veces, sea X el máximo de los dos números obtenidos. Determine y dibuja la función de masa de probabilidad y la función de distribución de X.

13. Sea X el número de nacimientos en un hospital hasta que nazca la primera niña. Determina la función de masa de probabilidad y la función de distribución de X. Asume que la probabilidad es $1/2$ que un bebe nacido es una niña.

14. Sea X el número de números aleatorios seleccionados de $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ independientemente hasta que se elija 0. Encuentre las funciones de masa de probabilidad de X e $Y = 2X + 1$.

15. Un valor i se dice ser el modo de una variable aleatoria discreta si este maximiza la función de masa de probabilidad $p(x)$ de X. Encuentra los modos de las variables aleatorias X y Y con funciones de masa de probabilidad:

$$p(x) = \left(\frac{1}{2}\right), \quad x = 1, 2, 3, \ldots,$$

y

$$q(y) = \frac{4!}{y!(4-y)!}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^{4-y}, \quad y = 0, 1, 2, 3, 4.$$

respectivamente.

16. Sea $p(x) = 3/4(1/4)^x, x = 0, 1, 2, 3, \ldots,$ la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria X. Encuentra F, la función de distribución de X y realiza un bosquejo de su gráfico.

17. En lanzamientos sucesivos de un dado justo, sea X el número de lanzamientos hasta que aparezca el primer 6. Determine la función de masa de probabilidad y la función de distribución de X.

18. Un dígito binario o `bit` es un cero o uno. El lenguaje ensamblador de una computadora puede generar bits aleatorios independientes. Sea X el número de bits aleatorios independientes que se generarán hasta que se obtengan tanto 0 como 1. Encuentre la función de masa de probabilidad de X.

19. Todos los domingos, Marlene llama a Liz para ver si jugará tenis con ella ese dia. Si Liz no ha jugado tenis con ella desde i domingos atrás, la probabilidad de que le diga que si es $i/k, k \geq 2, i = 1, 2, \ldots, k$. Por lo tanto, si, Liz no juega al tenis con Marlene por $k - 1$ domingos consecutivos, entonces jugará con ella el próximo domingo con probabilidad 1. Sea Z el número de semanas que Liz tarda en jugar de nuevo con Marlene, desde la última vez que jugaron. Encuentra la función de masa de probabilidad de Z.

20. Un dado se lanza sucesivamente. Sea X el número de lanzamientos hasta que cada uno de los seis posibles resultados ocurran al menos una vez. Encuentra la función de masa de probabilidad de X.