Lista de ejercicios

1. Sea una variable aleatoria U uniforme sobre el intervalo $(-1, 1)$.
   - Calcula la media y la varianza de U.
   - Encuentra el CDF y el PDF de U^2. ¿ Es la distribución de U^2 uniforme en $(0, 1)$?.
2. Un palillo se divide en dos piezas, en un punto uniformemente aleatorio. Encuentra el CDF y el promedio de la longitud de la pieza más grande.
3. Sea $U \sim \text{Uniforme}(0, 1)$, y

$$X = \log\left(\frac{U}{1-U}\right)$$

   Entonces X tiene una distribución Logística.
   - Anota una integral dada de $\mathbb{E}(X^2)$.
   - Encuentra $\mathbb{E}(X)$ sin usar cálculo.
4. Sea X una variable aleatoria continua con una función de distribución $F(\cdot)$. Consideremos la variable aleatoria

$$Y = F(X) = \int_{-\infty}^{X} f(u)du.$$

   Muestra que la distribución Y es uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Esto es,

$$F_Y(y) = y, \qquad 0 < y < 1.$$

5. Sea $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$. Encuentra $\mathbb{E}(\Phi(Z))$. Donde Φ es el CDF de Z.
6. Usando el hecho que X sigue una distribución normal estándar, entonces

$$\mathbb{P}(X^2 \leq x) = (2/\pi)^{1/2} \int_0^x e^{-u^2/2}du,$$

   Concluye que,

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty x^{(1/2)-1}e^{-x}dx = \sqrt{\pi}.$$

7. Sea $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$ y $X = Z^2$. Entonces la distribución de X es llamada de `Chi Cuadrada con 1 grado de libertad`. Esta distribución aparece en varios métodos estadísticos.
   - Encuentra una buena aproximación para $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 4)$.

- Sea Φ y φ el CDF y el PDF de Z, respectivamente. Muestra que para algún $t > 0$, la función indicador satisface $I(Z > t) \leq (Z/t)I(Z > t)$. Usando este resultado, prueba que $\Phi(t) \geq 1 - \varphi(t)/t$.

8. Fred quiere vender su coche, después de regresar a Blissville (donde está feliz con el sistema de autobuses). El decide venderlo a la primera persona en ofrecer por lo menos 15.000 soles. Suponiendo que las ofertas son variables aleatorias exponenciales independientes con una media de 10.000 soles.

   - Encuentra el número esperado de ofertas que Fred tendrá.
   - Encuentra la cantidad esperada de dinero que Fred conseguirá por el auto.

9. Encuentra $\mathbb{E}(X^3)$ para $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$.

10. La distribución Gumbel es la distribución de $-\log X$ con $X \sim \text{Exponencial}(1)$.

    - Encuentra el CDF de la distribución Gumbel.
    - Sean $X_1, X_2, \ldots$ independientes e idénticamente distribuidas a Exponencial(1) y sea $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Muestra que el CDF de $M_n - \log$ converge al CDF Gumbel, cuando $n \to \infty$.

11. X es llamada una variable aleatoria lognormal, si $\log X = Y$ es una distribución normal.

    - Encuentra la funcióm densidad, esperanza y la varianza de X.
    - Si las variables aleatorias lognormales son independientes, su producto $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es también lognormal.