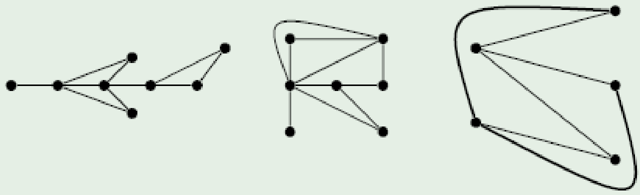
Grafuri planare. Colorarea grafelor.

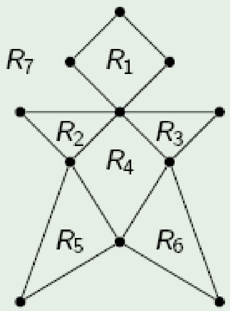
Un graf G este planar dacă poate fi desenat în plan astfel încât muchiile să nu se intersecteze decât în nodurile grafului. O astfel de desenare se numește reprezentare planară a lui G.

Exemplu (Grafuri planare)



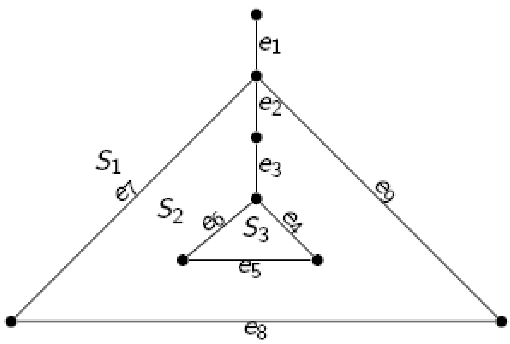
Regiune a unei reprezentări planare a grafului G: porțiune din plan în care orice 2 puncte pot fi unite cu o curbă care nu intersectează G

Exemplu



determină 7 regiuni
R_7 este regiunea exterioară

- Orice regiune este delimitată de muchii.
- Orice muchie este în contact cu una sau două regiuni.
- O muchie mărginește o regiune R dacă este în contact cu R și cu altă regiune.



e_1 este în contact doar cu S_1
e_2 și e_3 sunt în contact doar cu S_2

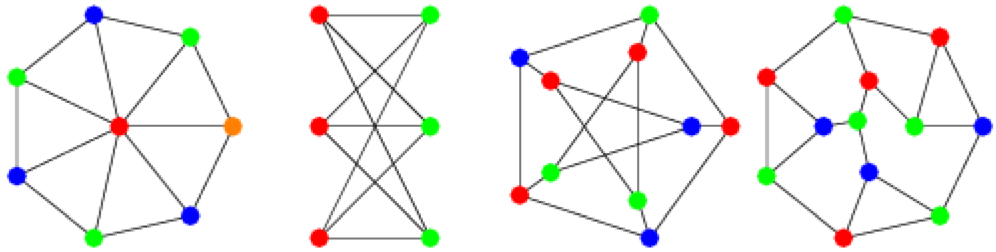
S_1 este mărginită de e_7, e_8, e_9
S_3 este mărginită de e_4, e_5, e_6
S_2 este mărginită de $e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9$

Gradul de mărginire $b(S)$ al unei regiuni S este numărul de muchii care mărginesc S.

$$b(S_1) = 3, \quad b(S_2) = 6, \quad b(S_3) = 3$$

Definiție (colorare de noduri, număr cromatic)

O *k-colorare* a nodurilor unui graf $G = (V, E)$ este o funcție $K : V \rightarrow \{1, \ldots, k\}$ astfel încât $K(u) \neq K(v)$ dacă $(u, v) \in E$.
Numărul cromatic $\chi(G)$ al unui graf G este valoarea minimă a lui $k \in \mathbb{N}$ pt. care există o k-colorare a lui G.



Problema

Adi, Barbu, Călin, Dan, Eugen, Florin, Gelu și Ion sunt senatori ai unui stat, și fac parte din 7 comitete:

$C_1 = \{$Adi, Barbu, Călin$\}$, $C_2 = \{$Călin, Dan, Eugen$\}$,
$C_3 = \{$Dan,Florin$\}$, $C_4 = \{$Adam, Gelu$\}$, $C_5 = \{$Eugen, Ion$\}$,
$C_6 = \{$Eugen,Barbu,Gelu$\}$, $C_7 = \{$Ion, Călin, Florin$\}$.

Fiecare comitet trebuie să fixeze o dată la care să se întâlnească toți membrii săi.

Întrebare: Care este numărul minim de date ce trebuiesc fixate pentru întâlniri, dacă se știe că nici un membru nu poate participa simultan la două întâlniri fixate la aceeași dată?

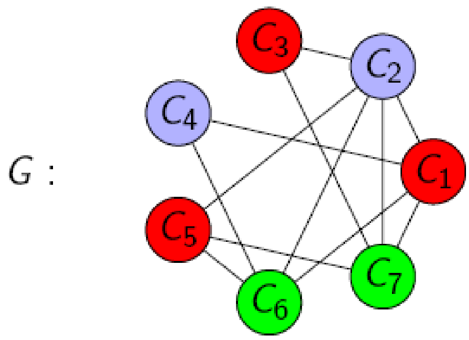
Observaţii:

- Două comitete C_i şi C_j nu se pot intâlni la aceeaşi dată dacă şi numai dacă au un membru comun $C_i \cap C_j \neq \emptyset$.
- Putem considera graful neorientat G cu
  - noduri: comitetele C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7
  - muchii: (C_i, C_j) daca C_i, C_j au un membru comun $(C_i \cap C_j \neq \emptyset)$

Coloram fiecare nod C_i cu o culoare care reprezinta data la care are loc intalnirea comitetului C_i

⇨ problema se poate reformula astfel: care este numarul minim de culori pentru nodurile grafului G astfel încât nicio muchie sa nu aibă capetele colorate la fel?

<u>Rezolvare problema precedenta:</u> este nevoie de minim 3 culori



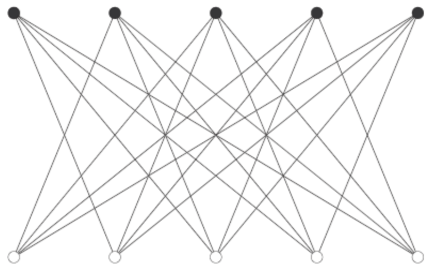
$K(C_1) = K(C_3) = K(C_5) = 1$

$K(C_2) = K(C_4) = 2$

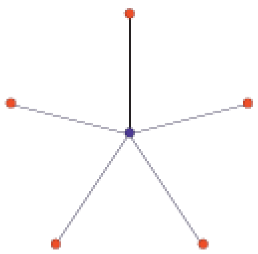
$K(C_6) = K(C_7) = 3$

$\Rightarrow$ nr. minim de date este 3.
(sunt necesare 3 culori)

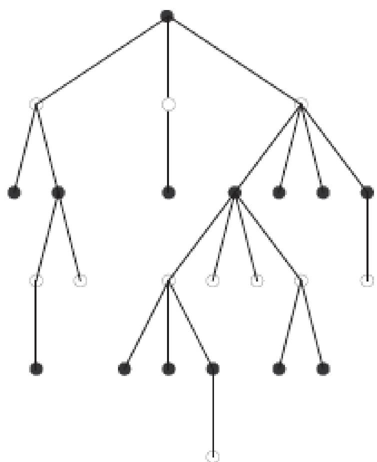
1. Colorarea **grafelor complete** cu n varfuri necesita n culori.
2. Un **graf planar** poate fi colorat (varfurile) cu **2 culori** daca nu are cicluri de lungime impara.
3. **Un graf bipartit** se poate colora cu 2 culori.



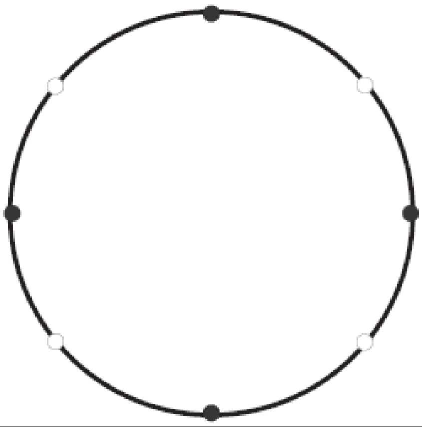
- **Graful stea** este bipartit, deci se poate colora cu 2 culori.



- **Arborii sunt grafe** bipartite, deci se pot colora cu 2 culori.



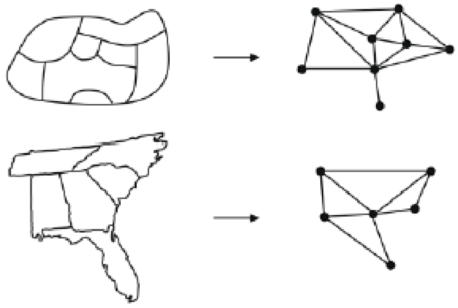
- **Un graf ciclu cu numar par de varfuri este bipartit**, deci se pot colora cu 2 culori.



Hărti

- Fiecare țară a unei hărți se reprezintă ca nod al unui graf
- Două noduri se conectează dacă și numai dacă țările respective au o graniță nebanală (mai mult decât un punct)

$\Rightarrow$ graf neorientat G_H corespunzător unei hărți H. De exemplu:



OBSERVAȚIE: **H este hartă dacă și numai dacă G_H este graf planar.**

Țările unei hărți H pot fi colorate cu 4 culori, astfel încât să nu existe țări învecinate colorate la fel.

Observații

1. Una dintre cele mai faimoase teoreme din Teoria Grafurilor
   - Demonstrație extrem de lungă și complexă
   - Problemă propusă in 1858, rezolvată de-abia în 1976 (Appel & Haken)
   - Echivalentă cu faptul că graful planar G_H este 4-colorabil.
2. Teorema este echivalentă cu afirmația:

$$\chi(G) \leq 4 \text{ pentru orice graf planar } G.$$

Problema celor patru culori are toate valenţele unei probleme de mare "carieră":

- în primul rând formularea ei este extrem de simplă, nu presupune cunoştinţe matematice;

- în al doilea rând, ea a rămas nerezolvată timp de peste un secol, fiind surprinzător de grea şi a suscitat preocuparea multor matematicieni de prestigiu.

Istoric

1. În 1852 un geograf din Edinburgh (istoria nu i-a reţinut numele) l-a informat pe prietenul său, student în matematici, că foloseşte cel mult patru culori pentru o hartă împărţită în regiuni, fără ca două regiuni vecine să aibă aceeaşi culoare (precizăm că este vorba despre hărţi plane, cu regiuni închise, iar "vecine" sunt regiunile cu o linie de frontieră comună; două regiuni care se întâlnesc într-un număr finit de puncte nu sunt considerate vecine).
2. Tânărului matematician, pe nume *Francis Guthrie*, i-au plăcut cele aflate şi şi-a propus să demonstreze acest fapt dar nu a reuşit.
3. În câţiva ani, problema a ajuns "la modă" printre matematicieni, astfel *A. Cayley* nefiind nici el capabil să o demonstreze, a propus-o Societăţii Matematice din Londra.
4. *De Morgan* a demonstrat că nu există hartă formată din 5 regiuni astfel încât să fie două câte două vecine, deci aceasta poate fi colorată cu patru culori. *A. B. Kempe*, în 1879 a redus problema la hărţi normale, adică hărţi în care nu există ţări închise complet în alte ţări şi nici puncte în care se întâlnesc mai mult de trei regiuni.

Cea mai eficientă metodă de producere a configuraţiilor s-a dovedit a fi un *algoritm implementat pe calculator* de *W. Haken* şi *K. Appel* , Universitatea Illinois, SUA, care au lucrat aproape ***1200*** ore şi, în fine, demonstraţia a fost încheiată .

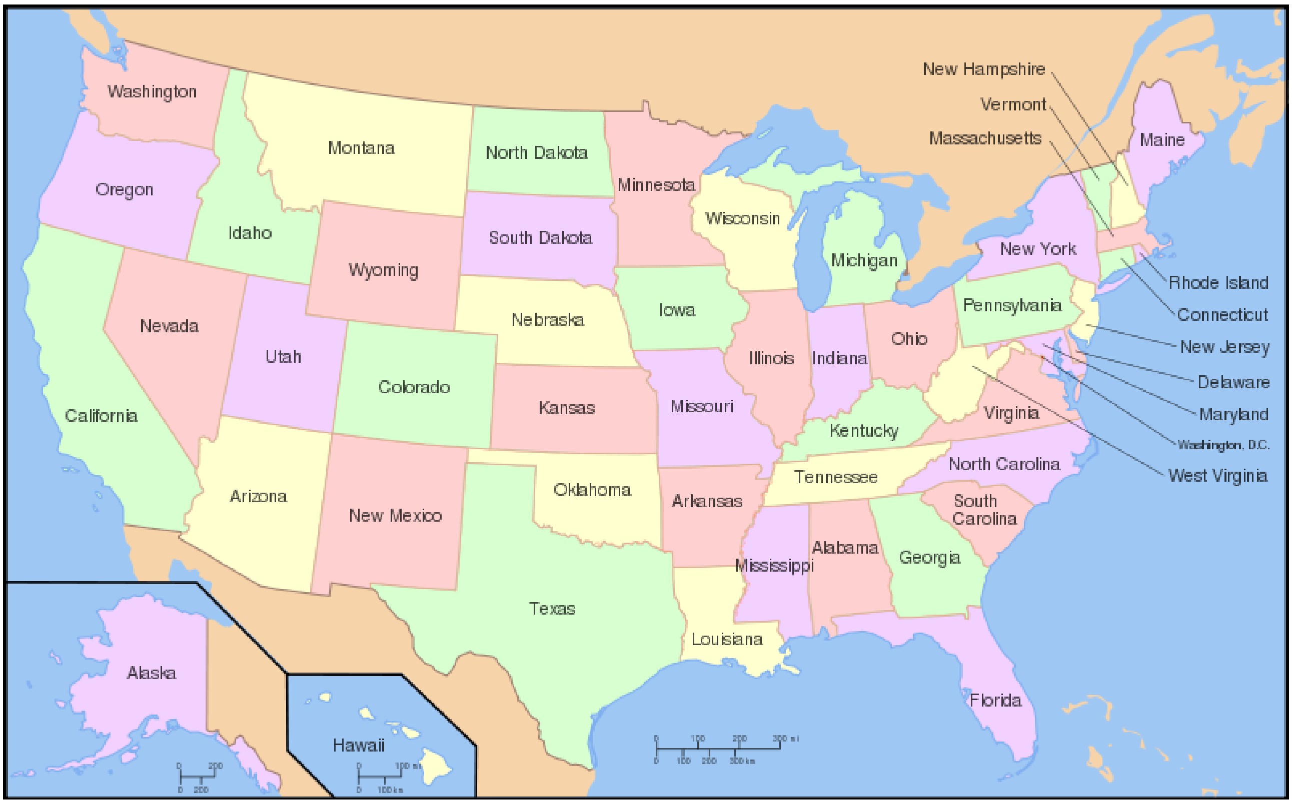
Un an mai târziu, folosind o altă procedură de reducere a configuraţiilor inevitabile, *F. Allaise* de la Universitatea Waterloo, Ontario, CA, a reuşit să obţină demonstraţia teoremei în numai ***50*** de ore de dialog om-calculator.

Entuziasmul firesc stârnit în lumea matematicienilor de acestă reuşită neobişnuită până atunci a fost "temperat" de voci sceptice care susţineau că aceasta nu e o teorema de matematică în sensul clasic.

Sarcina calculatorului a fost copleşitoare prin dimensiuni, sarcină pe care omul ştia cum să o abordeze, dar n-ar fi putut-o termina niciodată.

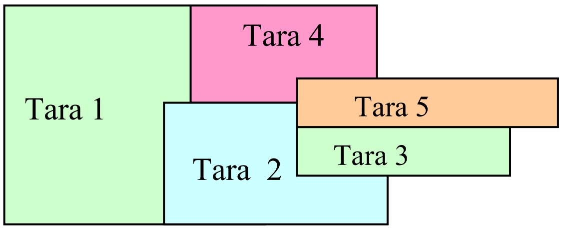
A fost prima situaţie memorabilă în urma căreia lumea matematicienilor a trebuit să admită estistenţa unor demonstraţii parţial accesibile omului, cât şi dreptul calculatorului de a ne sprijini în stabilirea adevărurilor matematice.

Pentru a exemplifica o hartă din lumea reală considerăm harta SUA (fără apă şi ţări vecine).



Rezolvare:

Pentru exemplificare, vom considera următoarea hartă unde ţările sunt numerotate cu cifre cuprinse între 1 şi 5:



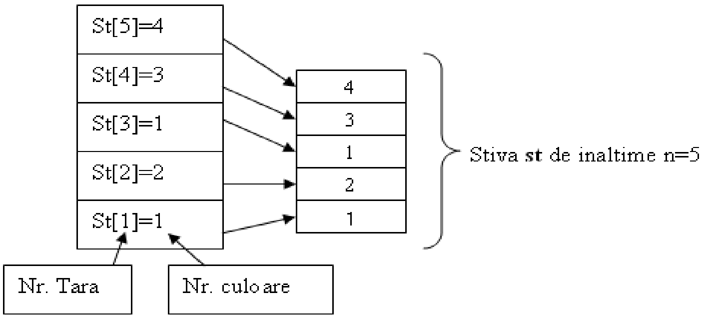
O soluţie a acestei probleme este următoarea:

- ţara 1 – culoarea 1
- ţara 2 – culoarea 2
- ţara 3 – culoarea 1;
- ţara 4 – culoarea 3;
- ţara 5 – culoarea 4;

Harta este furnizată programului cu ajutorul matricei $A_{n,n}$ a.î. $A(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{dacă ţara i e vecină cu j;} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

$$\text{Astfel } A= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matricea A este simetrică. Pentru rezolvarea problemei se utilizează stiva st, unde nivelul k al stivei simbolizează ţara k, iar st[k] culoarea ataşată ţării k. Stiva are înălţimea n şi pe fiecare nivel ia valori între 1 şi 4.



Metoda folosită este metoda Backtracking.

Elementele vectorului st, primesc pe rând valori în ordinea crescătoare a indicilor, *st[k]* va primi o valoare numai dacă au fost atribuite valori elementelor *st[1]...st[k-1]*. La atribuirea valorii lui *st[k]* se verifică îndeplinirea unor condiţii de continuare referitoare la *st[1]…st[k-1]*.

In cazul nostru se alege culoarea ţării k, din lista de culori disponibile astfel încât aceasta să difere de cele ale ţărilor sale vecine deja introduse in stivă, *1...k-1* . Dacă aceste condiţii nu sunt îndeplinite, la pasul k, acest lucru înseamnă că orice valori i-am atribui lui *st[k+1], st[k+2], .. st[n]* nu se va ajunge la o soluţie rezultat.

Metoda backtracking construieşte un vector soluţie în mod progresiv începând cu prima componentă a vectorului şi mergând spre ultima cu eventuale reveniri asupra atribuirilor anterioare.

Observaţii: Petru exemplul cu cele 5 ţări prezentat anterior, algoritmul de mai sus ne va oferi 96 de posibilitaţi de colorare a hărţii. Astfel se observă ca avem

- soluţii cu 4 culori (de exemplu pentru ţara 1, ţara 2, ţara 3, ţara 4 si ţara 5: putem avea urmatoarele culori:
  - 1, 2, 1, 3, 4, sau
  - 1, 2, 1, 4, 3 sau
  - 2, 4, 3, 3, 1 sau
  - 3, 1, 2, 2, 4 sau
  - 4, 1, 2, 3, 4, etc.)
- dar şi soluţii cu 3 culori
  - 2, 4, 3, 3, 2 sau
  - 3, 1, 4, 4, 3 sau
  - 3, 2, 1, 1, 3 sau
  - 3, 2, 4, 4, 3 etc.)