

TEORIA ORDONANȚĂRII

O **problema de ordonantare** consta în stabilirea unei ordini de efectuare a **operatiilor (activitatilor)** unui proiect, astfel ca **interdependentele** dintre ele sa fie respectate în cadrul **resurselor** disponibile si **durata totala de executie** a acestuia sa fie minima.

Prin **proiect** vom înțelege o actiune de mare amploare sau un proces complex destinat atingerii unui scop bine precizat. La un proiect deosebim urmatoarele **caracteristici**:

- un obiectiv, care poate fi un produs, o cantitate de informatii sau un rezultat de natura organizatorica;
- un ansamblu de activitati (subactiuni, subproces, operatii), corelate logic si tehnologic, a caror realizare permite atingerea scopului propus;
- un proces tehnologic prin care se precizeaza interconditionarilor între activitati, interesând în special ordinea de executie a acestora.

Proiectele pot fi clasificate dupa natura lor în:

- proiecte industriale si proiecte de investitii, prin care se obtine un produs material (de exemplu constructia unei cladiri, pod, tunel, etc);
- proiecte organizatorice al caror scop este de a obtine un rezultat de natura informationala sau organizatorica (de exemplu un proiect de cercetare stiintifica).

O **activitate** este o parte distincta dintr-un proiect, un subproces precis determinat, care consuma timp si resurse. Vom presupune în continuare ca activitatile au urmatoarele proprietati:

- fiecare activitate este indivizibila (nu se mai descompune în subactivitati);
- fiecare activitate are o **durata cunoscuta**;
- o activitate, odata începuta, nu mai poate fi întrerupta.

Dintre **interconditionarile (interdependentele)** dintre activitati, ne intereseaza, în special, cele temporale, numite **relatii de precedenta**, care pot fi de trei tipuri:

1. de tip "**terminare - început**". Acest tip este cel mai frecvent întâlnit si spunem ca o activitate A precede activitatea B printr-o interdependenta de tip "terminare - început" daca activitatea B nu poate începe decât dupa un interval de timp t_{AB} de la terminarea activitatii A. Acest interval poate fi egal si cu zero, caz în care spunem ca activitatea A **precede direct** activitatea B;
2. de tip "**început - început**". Acest tip este frecvent întâlnit si spunem ca o activitate A precede activitatea B printr-o interdependenta de tip "început - început" daca activitatea B nu poate începe decât dupa un interval de timp t_{AB} de la începerea activitatii A. Acest interval poate fi chiar mai mare decât durata activitatii A, caz în care avem de fapt o dependenta de tipul "terminare - început", putând chiar privi primul tip ca un caz particular al celui de-al doilea;

3. de tip "**terminare - terminare**". Spunem ca o activitate A precede activitatea B printr-o interdependenta de tip "terminare - terminare" daca activitatea B nu se poate termina decât dupa un interval de timp t_{AB} de la terminarea activitatii A sau ca activitatea A trebuie terminata cu cel puțin t_{AB} unitati de timp înainte terminarii activitatii B.

Prin **durata totala de executie** a unui proiect înțelegem intervalul de timp în care se efectueaza toate activitatile acestuia, respectând toate interdependentele dintre activitati.

A **programa un proiect înseamna a stabili termenele de începere pentru fiecare activitate în parte, tinând seama de restrictiile impuse de procesul tehnologic, duratele activitatilor si resursele disponibile**. Pentru un proiect dat, exista un numar enorm de programari admisibile. Un interes deosebit prezinta programul optim, adica acel program care, pe de o parte, satisface restrictiile impuse iar, pe de alta parte, optimizeaza un anumit criteriu de eficienta economica.

Criteriul de optimizare nu este acelasi pentru toate proiectele, el este stabilit pentru fiecare caz în parte si defineste obiectivele majore ale conducerii proiectului. În functie de aceste obiective, criteriul poate fi durata totala minima, costul total minim, folosirea cât mai uniforma a resurselor sau o sinteza a acestora. Deci, programul optim este acea desfasurare a proiectului, precizata prin termenele de începere ale activitatilor, care conduce la o eficienta maxima.

Deoarece, asa cum se vede si din cele spuse mai sus, situatiile din practica ce necesita rezolvarea unei probleme de ordonantare sunt foarte variate, s-au propus numeroase modele pentru rezolvarea lor. În continuare vor fi prezentate câteva dintre modelele cele mai frecvent utilizate în practica.

Modele de analiza a drumului critic (ADC)

Principiul analizei drumului critic consta în divizarea unui proiect (actiuni complexe) în parti componente, la un nivel care sa permita corelarea logica si tehnologica a acestora, adica sa faca posibila stabilirea interactiunilor între partile componente. Aceste parti componente sunt **activitatile** actiunii complexe.

La definirea listei de activitati specialistul sau specialistii care participa la aceasta operatie folosesc experienta lor pentru a raspunde pentru fiecare activitate la întrebările: "ce alte activitati succed sau preced în mod necesar aceasta activitate ?"; "care este durata activitatii ?". Ia nastere în acest fel un tabel care contine activitatile proiectului, interconditionarile între activitati si duratele acestora.

Un astfel de tabel trebuie sa contina cel puțin urmatoarele elemente:

- activitati: în aceasta coloana se enumera activitatile proiectului, fiind puse în evidenta printr-o denumire sau printr-un simbol (codul activitatii);
- conditionari: se precizeaza, pentru fiecare activitate, activitatile imediat precedente, prin simbolurile lor;
- durata: pentru fiecare activitate se precizeaza durata de executie, într-o anumita unitate de masura. Durata unei activitati este o constanta.

Observație:

În continuare se va lucra doar cu relații de precedenta de tip „terminare-inceput”

Exemplu 1: Activitatile realizate la construirea unei cladiri

Numar activitate	Denumire activitate	Durata(zile)	Activitati precedente
1	Amenajare cai acces	7	-
2	Sapare santuri fundatie	3	1
3	Construire structura de rezistenta	8	2
4	Montaj instalatii sanitare si electrice	2	3
5	Montaje usi si ferestre	3	3
6	Montare schela	1	3
7	Realizare fatada	3	6
8	Zugraveala interioara	2	4,5
9	Amenajari interioare	1	8
10	Demontare schela	1	7
11	Curatenie	2	9,10
12	Imprejurimi	3	1

Exista mai multe moduri de a reprezenta un proiect printr-un graf.

Vom prezenta varianta in care activitatile sunt reprezentate in noduri, iar arcele reprezinta relatiile de precedență dintre activități.

Se mai adauga grafului două noduri fictive:

- X: corespunzător unei unice activitati de început cu durata de execuție 0 si care precede toate activitatile reale fara activitati precedente.
- Y: corespunzător unei unice activitati de sfârșit cu durata de executie 0 si care urmeaza activitatilor fără activități succesoare reale.

Un nod al grafului are urmatoarea structura:

$t_m(v_i)$	v_i	$t_m^*(v_i)$
$t_M(v_i)$	$d(v_i)$	$t_M^*(v_i)$

- v_i este activitatea, $d(v_i)$ este durata de execuție a activității v_i
- $t_m(v_i)$ este timpul cel mai devreme la care activitatea v_i începe
- $t_m^*(v_i)$ este timpul cel mai devreme la care activitatea v_i se termină
- $t_M(v_i)$ este timpul cel mai târziu la care activitatea v_i începe
- $t_M^*(v_i)$ este timpul cel mai târziu la care activitatea v_i se termină

Analiza proiectului consta în **determinarea duratei minime a proiectului**, **determinarea intervalelor de timp** în care pot fi plasate activitatile, astfel încât sa se respecte toate conditionarile si sa obtinem timpul minim de executie al proiectului.

Graful asociat unui proiect este aciclic, deci se va sorta topologic.

Dacă există în proiect n activități reale atunci graful are $n+2$ noduri notate astfel:

- v_0 - activitatea fictivă de început
- v_{n+1} - activitatea fictivă de sfârșit
- v_1, \dots, v_n - sunt activitățile reale ale proiectului
- ordinea topologică: $v_0, v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$

Timpii cei mai devreme de început și de sfârșit ai activităților se calculează parcurgând ordinea topologică de la început spre sfârșit și folosind formulele:

$$t_m(v_0) = t_m^*(v_0)$$

pentru $i=1, \dots, n+1$ executa

$$t_m(v_i) = \max \{t_m^*(v_j) \mid v_j \text{ este predecesor al nodului } v_i\}$$

$$t_m^*(v_i) = t_m(v_i) + d(v_i)$$

sf_pentru

Apoi, prin parcurgerea ordinii topologice în sens invers se vor calcula **timpii cei mai târzii de început și de sfârșit** ai activităților aplicând formulele:

$$t_M^*(v_{n+1}) = t_M^*(v_{n+1})$$

$$t_M(v_i) = t_M^*(v_{n+1}) - d(v_{n+1})$$

pentru $i=n, \dots, 0$ executa

$$t_M^*(v_i) = \min \{t_M(v_j) \mid v_j \text{ este succesor al nodului } v_i\}$$

$$t_M(v_i) = t_M^*(v_i) - d(v_i)$$

sf_pentru

Pentru activitatea fictivă de sfârșit are loc:

$$t_M^*(v_{n+1}) = t_m^*(v_{n+1}) = t_M(v_{n+1}) = t_m(v_{n+1}),$$

valoare care reprezintă **timpul minim de execuție al proiectului**.

- **activitatea v este critică** dacă timpul cel mai devreme de început este egal cu timpul cel mai târziu de început al activității v : $t_m(v) = t_M(v)$, deci v trebuie să înceapă la un timp exact pentru a nu afecta execuția întregului proiect.
Evident are loc și egalitatea timpilor de sfârșit: $t_m^*(v) = t_M^*(v)$.
- Pentru o **activitate v care nu este critică** există un interval în care poate începe: $[t_m(v), t_M(v)]$, fără a afecta execuția întregului proiect.
- Cele două activități fictive de început și sfârșit sunt activități critice.
- Un drum critic este un drum de la nodul fictiv de început spre nodul fictiv de sfârșit și conține succesiunea tuturor activităților critice. Orice amânare a unei activități critice duce la lungirea duratei de execuție a proiectului.

Rezerva totala de timp (R_t) a unei activitati v este diferenta dintre timpul cel mai târziu de terminare si timpul cel mai devreme de terminare:

$$R_t(v) = t^*_M(v) - t^*_m(v)$$

si reprezinta timpul maxim cu care se poate amâna sau se poate mari durata activitatii, fara depasirea termenului final de executie al proiectului.

O activitate critica v are rezerva totala de timp 0: $R_t(v) = t^*_M(v) - t^*_m(v) = 0$

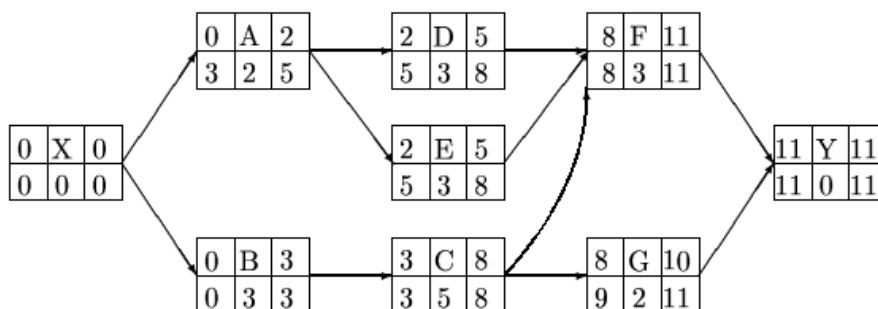
Drumul (drumurile) a carui lungime este egala cu durata minima de executie a proiectului se numeste **drum critic**. Este clar ca orice amânare a unei activitati a acestuia duce la lungirea duratei de executie a proiectului, deci nici una din aceste activitati nu dispune de rezerva de timp. Activitatile de pe drumul critic si prin extensie, orice activitate care nu dispune de rezerva de timp, se numeste **activitate critica**.

În primul rând intereseaza activitatile critice (cele situate de-a lungul drumului critic), ele trebuind sa fie realizate la datele calculate. Aceste activitati nu dispun de rezerva de timp, deci trebuie sa înceapa si sa se termine exact la termenele calculate, pentru a nu depasi termenul de finalizare al proiectului. Celelalte activitati pot fi amânate cu rezervele lor de timp, dar consumarea acestora face ca proiectul sa devina rigid.

Prezentăm în continuare un exemplu mai simplu de proiect:

Activitate	Durata executie	Activitati precedente
A	2	-
B	3	-
C	5	B
D	3	A
E	3	A
F	3	C,D,E
G	2	C

Graful asociat proiectului este următorul:



- X și Y sunt nodurile fictive de început și sfârșit ale proiectului.
- O ordine topologica a nodurilor grafului este: X,A,B,D,E,C,F,G,Y
- Calcularea **timpilor cei mai devreme de început: t_m și sfârșit: t_m^*** pentru activități
 - $t_m(X) = t_m^*(X) = 0$
 - $t_m(A) = \max\{t_m^*(X)\} = 0$ $t_m^*(A) = t_m(A) + 2 = 2$
 - $t_m(B) = \max\{t_m^*(X)\} = 0$ $t_m^*(B) = t_m(B) + 3 = 3$
 - $t_m(D) = \max\{t_m^*(A)\} = 2$ $t_m^*(D) = t_m(D) + 3 = 2 + 3 = 5$
 - $t_m(E) = \max\{t_m^*(A)\} = 2$ $t_m^*(E) = t_m(E) + 3 = 2 + 3 = 5$
 - $t_m(C) = \max\{t_m^*(B)\} = 3$ $t_m^*(C) = t_m(C) + 5 = 3 + 5 = 8$
 - $t_m(F) = \max\{t_m^*(D), t_m^*(E), t_m^*(C)\} = 8$ $t_m^*(F) = t_m(F) + 3 = 8 + 3 = 11$
 - $t_m(G) = \max\{t_m^*(C)\} = 8$ $t_m^*(G) = t_m(G) + 2 = 8 + 2 = 10$
 - $t_m(Y) = \max\{t_m^*(G), t_m^*(F)\} = \max\{11, 10\} = 11 = t_m^*(Y)$
- Calcularea **timpilor cei mai târzii de început: t_M și sfârșit: t_M^*** pentru activități:
 - $t_M(Y) = t_M^*(Y) = t_m(Y) = 11$
 - $t_M^*(G) = \min\{t_M(Y)\} = 11$ $t_M(G) = t_M^*(G) - 2 = 11 - 2 = 9$
 - $t_M^*(F) = \min\{t_M(Y)\} = 11$ $t_M(F) = t_M^*(F) - 3 = 11 - 3 = 8$
 - $t_M^*(C) = \min\{t_M(F), t_M(G)\} = 8$ $t_M(C) = t_M^*(C) - 5 = 8 - 5 = 3$
 - $t_M^*(E) = \min\{t_M(F)\} = 8$ $t_M(E) = t_M^*(E) - 3 = 8 - 3 = 5$
 - $t_M^*(D) = \min\{t_M(F)\} = 8$ $t_M(D) = t_M^*(D) - 3 = 8 - 3 = 5$
 - $t_M^*(B) = \min\{t_M(C)\} = 3$ $t_M(B) = t_M^*(B) - 3 = 3 - 3 = 0$
 - $t_M^*(A) = \min\{t_M(D), t_M(E)\} = 5$ $t_M(A) = t_M^*(A) - 2 = 5 - 2 = 3$
 - $t_M^*(X) = \min\{t_M(A), t_M(B)\} = 0 = t_m(X)$
- Activitățile critice încep la timpi bine stabiliți: X:0, B:0, C:3, F:8, Y:11.
- Drumul critic este: X, B, C, F, Y si furnizeaza succesiunea tuturor activitatilor critice.
- Timpul minim de executie este 11.
- Activitățile care nu sunt critice pot începe într-un interval de timp fără a afecta execuția intregului proiect:
 - activitatea A poate începe în intervalul [0,3]
 - activitatea D poate începe în intervalul [2,5] conditionata de terminarea lui A
 - activitatea E poate începe în intervalul [2,5] conditionata de terminarea lui A
 - activitatea G poate începe în intervalul [8,9] conditionata de terminarea lui C