ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELOS LINEALES Y DISEÑO DE EXPERIMENTOS

PRUEBA 01

Duración: 1.5 horas

PROBLEMAS

1. Sea X un vector aleatorio de ley normal de parámetros μ, Σ:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Demuestre que Σ es simétrica definida positiva.

b. Escriba la función de densidad de X.

c. Escriba la función característica de X.

d. ¿Cuál es la ley de $2X_1 - \frac{1}{2}X_2 - 3X_3$?

e. ¿Cuál es la ley del vector U?

$$U = \begin{pmatrix} X_1 - 2X_3 \\ -3X_2 - 2X_3 \end{pmatrix}$$

f. Encuentre la ley codicional de X_2 dado $(X_1, X_3) = (x_1, x_3)$

g. Encuentre la función de regresión lineal de X_2 en x_1, x_3, los coeficentes de regresión y la varianza parcial.

2. Sea X un vector aleatorio de ley normal de parámetros μ, Σ:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Son independientes las siguientes variables (o vectores) aleatorias?

a. X_1 y X_2. ¿Qué distribución sigue $X_1 + X_2$?

b. X_1 y (X_2, X_3).

c. $X_1 + X_2$ y X_3.

d. X_1 y $X_2 - \frac{1}{2}X_1 - X_3$.

3. Sean X un vector aleatorio de varianza Σ; $c, d \in \mathbf{R^n}$. Muestre que:

$$Cov(c^t X, d^t X) = c^t \Sigma d$$

¿Que puede concluir de $Var(c^t X)$?

4. Sean $X \rightsquigarrow N_n(\mu, \Sigma)$, A una matriz rxn, c un vector de r componentes, entonces:

$$AX + c \rightsquigarrow N_r(A\mu + c, A\Sigma A^t)$$

5. Sean X_1, X_2 dos variables aleatorias independientes de ley normal centrada y reducida. Muestre que el vector:

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_1^2(1-\rho^2)}X_1 + \sigma_1 \rho X_2 + \mu_1 \\ \sigma_2 X_2 + \mu_2 \end{pmatrix}$$

sigue una ley $N(\mu, \Sigma)$ de parámetros:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$