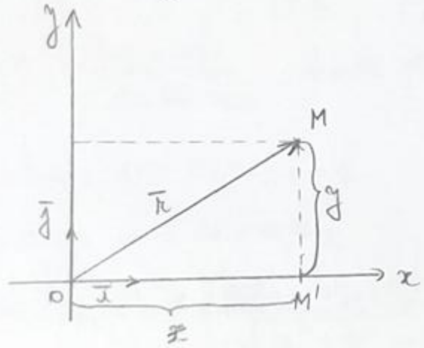
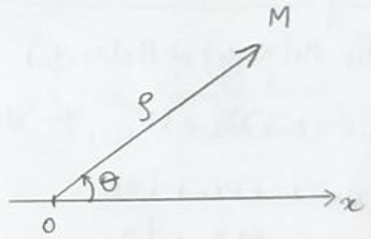
1.3. Geometrie analitică în plan: dreapta

Fixând dreptele perpendiculare Ox, Oy, fiecare punct $M \in E_2$ are coordonatele carteziene $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, unde $\bar{r}_M = \overrightarrow{OM} = x\bar{i} + y\bar{j}$.

$B = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ este baza canonică (ortonormală) din V_2, iar $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ este reperul cartezian din E_2.

Admitem spațiul E_2 raportat la un reper cartezian xOy a.î. orice punct $M \in E_2$ este unic determinat de coordonatele sale carteziene $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.





Poziția punctului $M \in E_2 \setminus \{O\}$ mai poate fi caracterizată și printr-o altă pereche de numere reale: $(\rho, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$, numite coordonate polare ale punctului. Astfel, fixăm o semidreaptă Ox în plan, numită axă polară și notăm prin ρ – distanța de la O la M, iar prin $\theta = \measuredangle(Ox; OM)$ unghiul orientat, cuprins în intervalul $[0, 2\pi)$.

Obs. Dacă suprapunem axa polară cu axa carteziană Ox în reperul cartezian xOy obținem legătura între coordonatele carteziene și polare ale punctului M, și anume:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\,\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Dreapta determinată de un punct și o direcție

Fie $M_0(x_0, y_0)$ și $\bar{v} = l\bar{i} + m\bar{j}$. Atunci:

(i) $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{v}$, $t \in \mathbb{R}$

(ii) $\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

(iii) $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$

Dreapta determinată de două puncte

Fie $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$. Atunci:

(i) $\bar{r} = (1-t)\bar{r}_1 + t\bar{r}_2$, $t \in \mathbb{R}$

(ii) $\begin{cases} x = (1-t)x_1 + tx_2 \\ y = (1-t)y_1 + ty_2 \end{cases}$

(iii) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

(iv) $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Alte ecuații ale dreptei

(i) $y - y_0 = m(x - x_0)$, $m = \operatorname{tg} \varphi$, $\varphi = \sphericalangle(Ox, d)$ (ec. dr. când se cunoaște panta m și trece prin $M(x_0, y_0)$)

(ii) $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$ (ec. dr. prin tăieturi)

(iii) $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 > 0$ (forma generală a dr.)

Obs. (i) $d_1 \cap d_2 = \{P\} \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

(ii) $d_1 \parallel d_2 \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

(iii) d_1, d_2 - confundate $\iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Proprietăți:

Fie $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$. Atunci avem:

(i) $dist(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

(ii) $\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda \Rightarrow x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$

(iii) $tg\,\varphi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$, unde $\varphi = \measuredangle(d_1, d_2)$, m_1 - panta lui d_1, m_2 - panta lui d_2

(iv) $d_1 \perp d_2 \iff m_1 m_2 = -1$

(v) $d_1 \parallel d_2 \iff m_1 = m_2$

(vi) $dist(M_0, d) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(vii) $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$.

Obs. O dreaptă împarte planul în două regiuni: semiplanele deschise:

$(S_1): ax + by + c > 0$; $(S_2): ax + by + c < 0$.

1.4. Geometrie analitică în plan: studiul conicelor

a) Cercul în plan

Fie $C_0(x_0, y_0)$ fixat, $R>0$ fixat

$\mathcal{C} = \{M \in E_2 \mid dist(M, C_0) = R\}$

$\mathcal{C} = \mathcal{C}(C_0, R)$

Propoziție: Ecuațiile cercului sunt:

(i) $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2}$ - ec. sub formă de pătrate sau ec. carteziană implicită

(ii) $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi)}$ - ec. parametrice

(iii) $\boxed{x^2+y^2+2ax+2by+c=0, \ a^2+b^2>c}$ - ec. carteziană generală.

(În acest caz, $C_0(-a,-b)$ și $R = \sqrt{a^2+b^2-c}$).

Obs. Fie cercul $\mathcal{C}: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$ cu centrul $C_0(x_0, y_0)$, iar $M_1(x_1, y_1) \in \mathcal{C}$ un punct fixat pe cercul $\mathcal{C}$.

Dedublarea ecuației cercului $\mathcal{C}$ în punctul $M_1(x_1, y_1)$, adică ecuația: $\boxed{(x_1-x_0)(x-x_0)+(y_1-y_0)(y-y_0) = R^2}$ sau

$$\boxed{x_1x + y_1y + a(x+x_1) + b(y+y_1) + c = 0}$$

reprezintă tangenta la cercul $\mathcal{C}$ în punctul M_1.

Exemplu: 1) Să se arate că ecuația $x^2+y^2-6x-4y+8=0$ reprezintă un cerc $\mathcal{C}$, punându-se în evidență centrul $C_0(x_0, y_0)$ și raza R.

2) Să se scrie ecuația carteziană a tangentei la cercul $\mathcal{C}$, în punctul $M(2,0)$.

Soluție:

1) $x^2+y^2-6x-4y+8=0$

$x^2-6x+9+y^2-4y+4-5=0$

$(x-3)^2+(y-2)^2=5$ – cercul de centru $C_0(3,2)$ și de rază $R=\sqrt{5}$

2) Ecuația carteziană a tangentei la $\mathcal{C}$ în punctul $M(2,0)$ se poate obține utilizând dedublarea ecuației lui $\mathcal{C}$:

$$(x_1-3)(x-3)+(y_1-2)(y-2)=5,$$

adică: $-(x-3)-2(y-2)=5$

$-x+3-2y+4=5$

$$\boxed{x+2y-2=0}$$

b) Conice pe ecuația redusă: elipsa, hiperbola, parabola

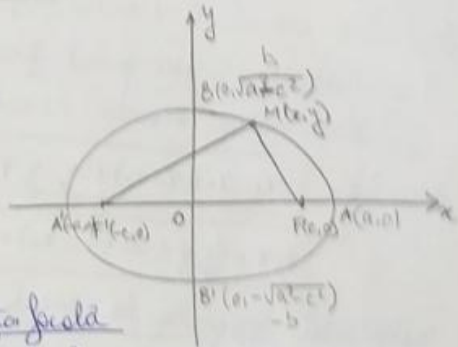
1. ELIPSA

Def. Fie c un nr. real pozitiv și F, F' două puncte fixate din plan a.î. $FF'=2c$.

Fie $a>c$. Mulțimea $\mathcal{E}$ a punctelor M cu proprietatea

$$\boxed{MF'+MF=\text{const.}=2a}$$

se numește elipsă.



Obs. 1°) Dacă $c=0$ atunci elipsa se reduce la cercul de rază a.

2°) F' și F s.n. focarele elipsei

3°) dr. $F'F$ s.n. axa focală

4°) Distanța $FF'=2c$ s.n. distanța focală

5°) Segmentele $[MF']$, $[MF]$ s.n. razele focale ale punctului M.

6°) Dreapta $F'F$ și mediatoarea $B'B$ a segmentului $[F'F]$ s.n. axe de simetrie pentru $\mathcal{E}$.

7°) $F'F \cap B'B' = \{O\}$, O s.n. centru de simetrie.

③

) Axele de simetrie și centrul de simetrie fixează reperul cartezian.

Fie $M(x,y) \in \mathcal{E}$.

$$MF' + MF = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad |^2$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2+(x-c)^2+y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 + \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$-4xc + 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad |:4$$

$$a^2 - xc = a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad |^2$$

$$a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$

$$a^4 - \cancel{2a^2xc} + x^2c^2 = a^2x^2 - \cancel{2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \quad |: a^2(a^2-c^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

Notând $a^2 - c^2 = b^2$ avem

$$(1) \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ → ec. canonică sau ec. carteziană implicită a elipsei

Ecuația (1) este echivalentă cu ecuațiile parametrice în $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi)}$$

Fie elipsa de ecuație:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \\ \text{sau} \\ y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \end{cases}, \ x \in [-a, a]$$ → ec. carteziene explicite

Obs. 1°) Axele de coordonate taie elipsa în punctele $A'(-a,0)$, $A(a,$
$B'(0,-b)$, $B(0,b)$ care s.n. vârfurile elipsei.

2°) $A'A = 2a$, $B'B = 2b$ s.n. axa mare și axa mică a elipsei

Propoziție:

Fie elipsa $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$.

Dedublarea ecuației elipsei $\mathcal{E}$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$, adică ecuația:

$$\boxed{\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1}$$

reprezintă tangenta la elipsa $\mathcal{E}$ în punctul M_0.

Obs. Perpendiculara pe tangentă în punctul M_0 s.n. normala elipsei $\mathcal{E}$ în punctul M_0.

Teoremă: Tangenta și normala la elipsă în punctul M_0 sunt bisectoarele unghiurilor determinate de suporturile razelor focale ale lui M_0.

Obs. Proprietatea geometrică menționată în teorema anterioară corespunde următorului fenomen din optică: razele de lumină ce pornesc dintr-o sursă fixată într-unul din focarele unei oglinzi eliptice sunt reflectate de oglindă în celălalt focar. De aceea, teorema este cunoscută sub numele de proprietatea optică a elipsei.

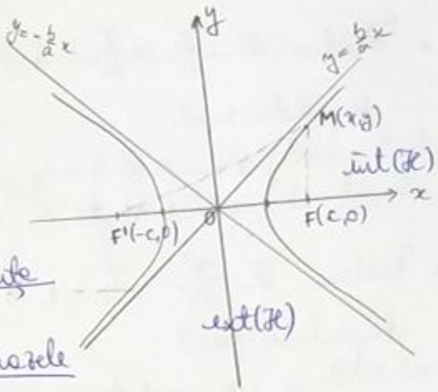
2. HIPERBOLA

Fie c un nr. real pozitiv și F', F două puncte fixate din plan a.î. $F'F = 2c$.

Def. Fie $a \in (0, c)$. Mulțimea $\mathcal{H}$ a punctelor M cu proprietatea

$$\boxed{|MF' - MF| = 2a}$$

s.u. hiperbolă.



Obs. 1°) Punctele F' și F s.u. focarele hiperbolei.

2°) Axa $F'F$ s.u. axa focală

3°) Distanța $F'F = 2c$ s.u. distanța focală.

4°) Segmentele $[MF']$, $[MF]$ s.u. razele focale ale punctului M.

Fie $M(x,y) \in \mathcal{H}$

$$|MF' - MF| = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a \quad |^2$$

$$(x+c)^2+y^2 = (x-c)^2+y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2$$

$$\cancel{x^2}+2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2} = \cancel{x^2}-2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}+4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$4xc-4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad |:4$$

$$xc-a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad |^2$$

$$x^2c^2-2xca^2+a^4 = a^2(x^2-2xc+c^2)+a^2y^2$$

$$x^2c^2-\cancel{2xca^2}+a^4 = a^2x^2-\cancel{2a^2xc}+a^2c^2+a^2y^2$$

$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2) \quad |:a^2(c^2-a^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$$

Notând $b^2=c^2-a^2$ avem:

$$(2) \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$ → ec. carteziană implicită a hiperbolei

• Pentru $\mathcal{H}'$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \leq -a$ ecuațiile parametrice ale hiperbolei sunt:

$$\begin{cases} x = -a\,ch\,t \\ y = b\,sh\,t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

• Pentru $\mathcal{H}''$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geq a$ ecuațiile parametrice ale hiperbolei sunt:

$$\begin{cases} x = a\,ch\,t \\ y = b\,sh\,t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Fie hiperbola de ecuație:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \\ \text{sau} \\ y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \end{cases}, x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$$

$\rightarrow$ ec. carteziene explicite

Obs 1°) Dreptele care trec prin origine și au pantele $\pm \frac{b}{a}$ s.n. asimptotele hiperbolei $\mathcal{H}$.

2°) Ecuația reuniunii asimptotelor este $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0}$.

3°) O hiperbolă are proprietatea că separă planul în două submulțimi disjuncte: interiorul lui $\mathcal{H}$, notat $int(\mathcal{H})$ și exteriorul lui $\mathcal{H}$, notat $ext(\mathcal{H})$.

4°) Orice dreaptă paralelă cu una dintre asimptotele hiperbolei este secantă hiperbolei.

Propoziție:

Fie hiperbola $\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ și $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$.

Dedublarea ecuației hiperbolei $\mathcal{H}$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$, adică ecuația

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

reprezintă tangenta la hiperbola $\mathcal{H}$ în punctul M_0.

Proprietatea optică a hiperbolei

Tangenta și normala la hiperbolă în punctul M_0 sunt bisectoarele unghiurilor determinate de suporturile razelor focale ale lui M_0.

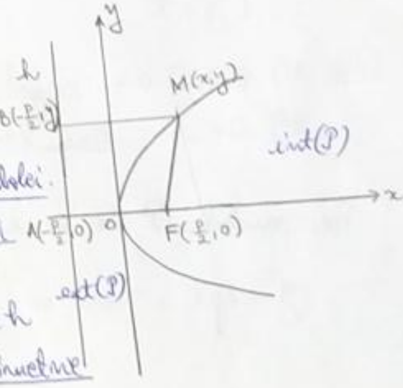
3. PARABOLA

Fie h o dreaptă din plan și F un punct care nu aparține lui h.

Def. Mulțimea $\mathcal{P}$ a punctelor M cu proprietatea

$$\boxed{d(M;h) = MF}$$

s.n. parabolă.



Obs. 1°) Punctul F s.n. focarul parabolei.

2°) Dreapta h s.n. directoarea parabolei.

3°) Segmentul $[MF]$ s.n. rază focală a punctului M.

4°) Dacă A este proiecția lui F pe h atunci dreapta AF s.n. axă de simetrie pentru parabola $\mathcal{P}$.

5°) Numărul $p = AF > 0$ s.n. parametrul parabolei.

6°) Notând cu O mijlocul segmentului $[AF]$ și alegând reperul cartezian xOy avem:

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right),\ h: x = -\frac{p}{2},\ A\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$$

$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(M,h) = MF \Leftrightarrow d^2(M,h) = MF^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - xp + \cancel{\frac{p^2}{4}} + y^2 = \cancel{x^2} + xp + \cancel{\frac{p^2}{4}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3)\ \boxed{y^2 = 2xp}$ → ec. carteziană implicită a parabolei

Ecuația (3) este echivalentă cu:

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$ → ec. parametrice ale parabolei

Obs. 1°) $O(0,0)$ s.n. vârful parabolei

2°) Ox s.n. axă transversă, iar Oy axă netransversă.

Fie parabola $\mathcal{P}$ de ecuație:

$$y^2 = 2px,\ x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{2px} \\ \text{sau} \\ y = -\sqrt{2px} \end{cases}, x \geq 0$$ → ec. carteziene explicite

Obs. Parabola $\mathcal{P}$ împarte planul în două submulțimi disjuncte: interiorul lui $\mathcal{P}$, notat $\mathrm{int}(\mathcal{P})$ și exteriorul lui $\mathcal{P}$, notat $\mathrm{ext}(\mathcal{P})$

Propoziție.

Fie parabola $\mathcal{P}$: $y^2 = 2px$ și $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$.

Dedublarea ecuației parabolei $\mathcal{P}$ în punctul $M_0(x_0,y_0)$, adică ecua

$$\boxed{yy_0 = p(x+x_0)}$$

reprezintă tangenta la parabola $\mathcal{P}$ în punctul M_0.