Drumuri minime

Ca și în laboratorul trecut, fișierul `grafpond.in` **are următoarea structură: numărul de vârfuri n, numărul de muchii/arce m şi lista muchiilor/arcelor cu costul lor (o muchie fiind dată prin extremităţile sale şi cost).**

grafpond.in
5 7
1 4 1
1 3 5
1 2 10
2 3 2
4 2 6
4 5 12
5 2 11

Justificaţi complexitatea+corectitudinea algoritmilor propuşi.

1. **(2p) Drum critic (Critical Path Method).** Se citesc din fișierul `activitati.in` următoarele informații despre activitățile care trebuie să se desfășoare în cadrul unui proiect:
   - n – numărul de activități (activitățile sunt numerotate 1,…, n)
   - d_1, d_2, …., d_n durata fiecărei activități
   - m – număr natural
   - m perechi (i, j) cu semnificația: activitatea i trebuie să se încheie înainte să înceapă j

   Activitățile se pot desfășura și în paralel.

   Să se determine timpul minim de finalizare a proiectului, știind că acesta începe la ora 0 (echivalent – să se determine durata proiectului) și o succesiune (critică) de activități care determină durata proiectului (un drum critic – v. curs) **O(m + n).**

   Să se afișeze pentru fiecare activitate un interval posibil de desfășurare (!știind că activitățile se pot desfășura în paralel) **O(m + n).**

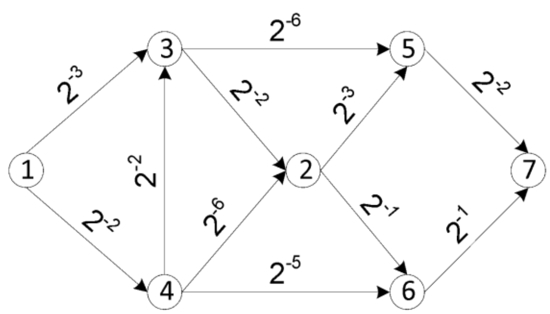
activitati.in	**iesire**
6	Timp minim 47
7 4 30 12 2 5	Activitati critice: 4 3 6
6	1: 0 7
1 2	2: 7 11
2 3	3: 12 42
3 6	4: 0 12
4 3	5: 42 44
2 6	6: 42 47
3 5	

Robert Sedgewick and Kevin Wayne, Algorithms, 4th Edition, Addison-Wesley, 2011.

2. **(1p)** Se citesc din fişierul `grafpond.in` informații despre un graf **neorientat** ponderat, un număr k, o listă de k puncte de control ale grafului şi un vârf s. Determinați cel mai apropiat punct de control de vârful s şi afișați un lanț minim până la acesta, folosind algoritmul lui **Dijkstra** (problema B.2. din laboratorul 1 pentru cazul ponderat) - **O(m log(n)).**

grafpond.in	grafpond.out
7 9	5
1 2 8	1 3 5 (poate fi si 1 4 5)
1 3 1	
1 4 2	
3 2 4	
2 6 3	
3 5 6	
4 5 5	
6 5 2	
5 7 6	
3	
5 6 7	
1	

3. **(2p)** (**v. Seminar** – **Aplicație Dijkstra**) Pentru fiecare arc al unei reţele de comunicaţie acestui graf se cunoaşte o pondere pozitivă subunitară reprezentând probabilitatea ca legătura corespunzătoare să nu se defecteze (de forma $1/2^p = 2^{-p}$). Aceste probabilităţi sunt independente, deci **siguranţa unui drum** este egală cu produsul probabilităţilor asociate arcelor care îl compun. Arătaţi că problema determinării unui drum de siguranţă maximă de la un vârf de start s la un vârf destinaţie t (accesibil din s) se poate reduce la o problemă de determinare a unui drum minim între s şi t (pentru un graf cu ponderile modificate). Pornind de la acest fapt, implementaţi un algoritm bazat pe algoritmul lui **Dijkstra** pentru determinarea unui drum de siguranţă maximă între două vârfuri s şi t citite de la tastatură pentru o reţea orientată dată în fişierul retea.in prin următoarele informații:
   - n, m – numărul de vârfuri, respectiv arce
   - m linii conţinând triplete de numere naturale i j p cu semnificaţia: (i,j) este arc în reţea cu probabilitatea să nu se defecteze egală cu 2^{-p} **O(m log(n)).**



Drumul de de siguranță maximă de la 1 la 7 este 1 3 2 6 7. Siguranța acestui drum este 2^{-7}

4. **(1p) Drumuri minime din surse multiple** http://www.infoarena.ro/problema/catun **O(m log(n))**

5. **(2p) Bellman Ford** Se dă un graf orientat ponderat (în fișierul `grafpond.in`) și un vârf s. Dacă graful nu conține circuite negative accesibile din s afișați câte un drum minim de la s la fiecare dintre celelalte vârfuri accesibile din s, altfel afișați un astfel de circuit (folosind algoritmul Bellman Ford) **O(nm)**

grafpond.in	grafpond.out
4 4 1 2 1 4 2 -7 2 3 2 3 4 3 2	Circuit de cost negativ: 2 3 4

grafpond.in	grafpond.out
4 5 1 2 2 4 2 7 2 3 2 3 4 3 1 3 1 1	Drum: 1 2 Cost: 2 Drum: 1 3 Cost: 1 Drum: 1 3 4 Cost: 4

6. **(2p) Floyd-Warhsall**

a) Dat un graf orientat ponderat (în fisierul `grafpond.in`), afișați matricea distanțelor dacă graful nu conține circuite de cost negativ și un circuit cu cost negativ în caz contrar. **O(n**^{3})

grafpond.in	grafpond.out
4 4 1 2 1 4 2 -7 2 3 2 3 4 3	Circuit de cost negativ: 2 3 4

grafpond.in	grafpond.out
4 4 1 2 1 4 2 7 2 3 2 3 4 3	0 1 3 6 0 0 2 5 0 0 0 3 0 7 9 0

b) Fie G un graf neorientat ponderat. Pentru două vârfuri u şi v ale lui G, notăm cu d(u, v) **distanța** de la vârful u la vârful v.
Pentru un vârf v, **excentricitatea** lui v este cea mai mare distanță de la acest vârf la celelalte vârfuri:

$$e(v) = \max\{d(v, u) | \; u \quad V \}$$

Excentricitatea minimă a vârfurilor se numește **raza** grafului:

$$r(G) = \min\{e(v) | \; v \quad V \}$$

Mulțimea vârfurilor cu excentricitatea minimă (egală cu r(G)) se numeşte **centrul** grafului:

$$c(G) = \{ v \quad V \; | \; e(v) = r(G)\}$$

Excentricitatea maximă a vârfurilor se numeşte **diametrul** grafului; altfel spus, diametrul este cea mai mare distanță dintre două vârfuri:

$$diam(G) = \max\{e(v) | \; v \quad V \} = \max\{d(u, v) | \; v, u \quad V \}$$

Se citesc din fișierul `grafpond.in` informații despre un graf **neorientat** ponderat G. Să se determine, folosind algoritmul **Floyd-Warhsall**, raza, diametrul, centrul grafului și un lanț diametral (un lanț minim P între două vârfuri u și v cu ponderea w(P)=d(u,v)=diam(G)). **O(n**^{3})

grafpond.in	**grafpond.out**
7 9	Raza: 7
1 2 8	Centrul: 5
1 3 1	Diametrul: 13
1 4 2	Lant diametral: 1 4 5 7
3 2 4	
2 6 3	
3 5 6	
4 5 5	
6 5 2	
5 7 6	