Лабораторная работа №2

Задача о погоне (18 вариант)

Никитаева Александра Семеновна

Содержание

List of Tables

List of Figures

1 Цель работы

Научиться решать задачу о погоне, строить графики траектории движения, выводить уравнение, описывающее движение.

2 Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 7,7 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 3,3 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Постановка задачи

1. Место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения: $t_0 = 0, x_0 = 0$. Место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки: $x_0 = 0$
2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_0(\theta = x_0 = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны (рис. 3.1)

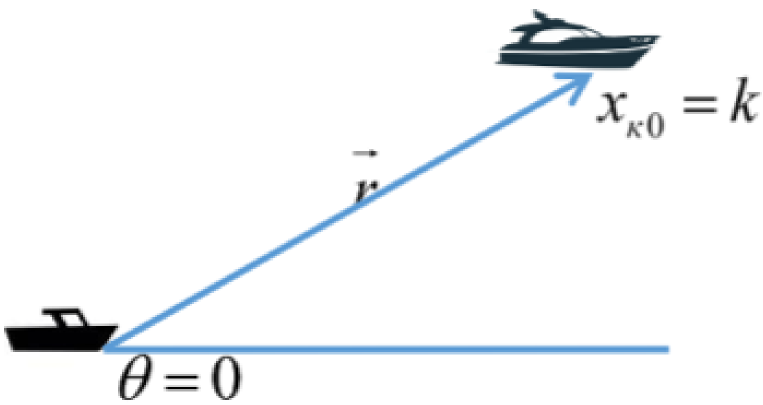

Figure 3.1: Положение катера и лодки в начальный момент времени

3. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса, только в этом случае траектория

катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

4. Чтобы найти расстояние X (расстояние, после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер — $k - x$ (или $k + x$ в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{k-x}{3.3v}$ (во втором случае $\frac{k+x}{3.3v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние x можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{3.3v}$$

или

$$\frac{x}{v} = \frac{k+x}{3.3v} \ .$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{10}{43}k$ и $x_2 = \frac{10}{23}k$, задачу будем решать для двух случаев.

5. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса, удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r — радиальная скорость и v_τ — тангенциальная скорость (рис. 2). Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$.

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ на радиус r, $v_\tau = r\frac{\partial\theta}{\partial t}$

Из рисунка (рис. 3.2) видно: $v_\tau = \sqrt{10.89^2 - v^2} = \sqrt{9.89}v$ (учитывая, что радиальная скорость равна v). Тогда получаем $r\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\sqrt{989}}{10}v$

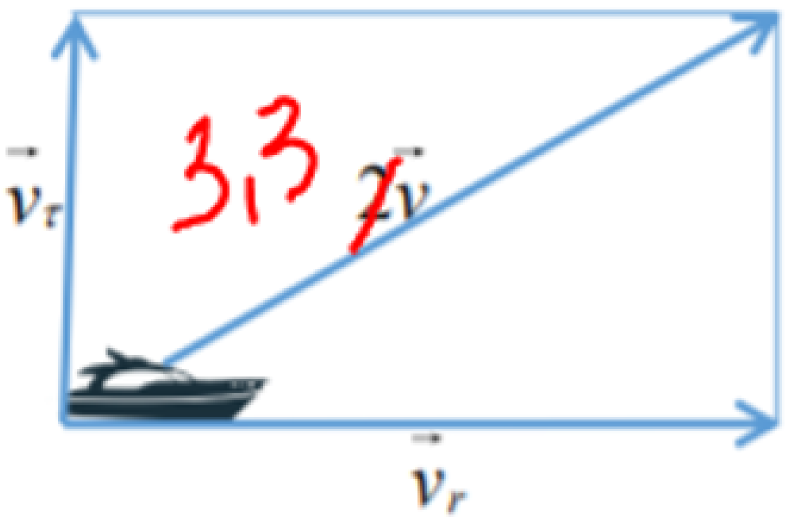

Figure 3.2: Скорости

6. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial t} = v \\ r\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\sqrt{989}}{10}v \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = x_2 \end{cases}$$

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{10r}{\sqrt{989}}.$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

3.2 Построение траектории движения и точки пересечения

Код для первого случая на python:

```
k = 7,7 км -- расстояние от катера, на котором обнаруживается лодка
Vк = 3,3Vл


k = 18.2
fi = 3*math.pi/4


Начальные условия:
1) te0 = 0, r0 = 10/43*k
2) te0 = -pi, r0 = 10/23*k


def dr(r, tetha): #функция, описывающая движение катера береговой охраны
    dr = 10*r/math.sqrt(989)
    return dr


r01 = 10/43*k #1 случай
r02 = 10/23*k #2 случай


te = np.arange(0, 2*math.pi, 0.01)
```

```
r1 = odeint(dr, r01, te)
r2 = odeint(dr, r02, te)

def xt(t): #функция, описывающая движение лодки браконьеров
    xt = math.tan(fi)*t
    return xt

t = np.arange(0, 20, 1)

#Перевод в полярные координаты
tete = (np.tan(xt(t)/t))**-1
rr = np.sqrt(t*t + xt(t)*xt(t))

# Графики
plt.polar(te, r1, 'g') #построение траектории движения катера в полярных
plt.polar(tete, rr, 'b') #построение траектории движения лодки в полярных

plt.polar(te, r2, 'g') #построение траектории движения катера в полярных
plt.polar(tete, rr, 'b') #построение траектории движения лодки в полярных
```

Графики движения и точки пересечения. Зелёным цветом — охрана, синим — браконьеры.

Случай первый (рис. 3.3)

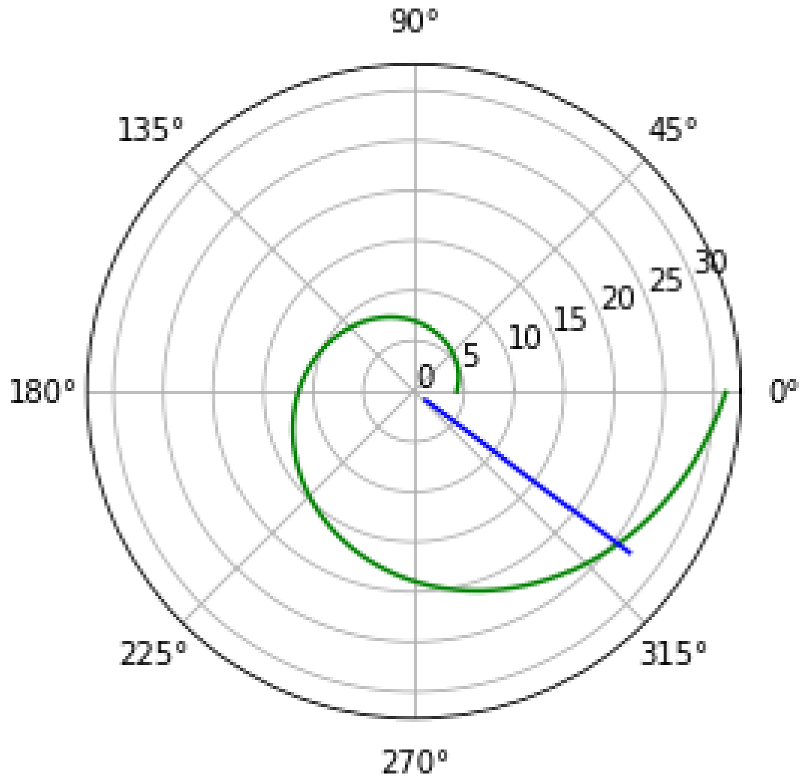

Figure 3.3: 1

Случай второй (рис. 3.4)

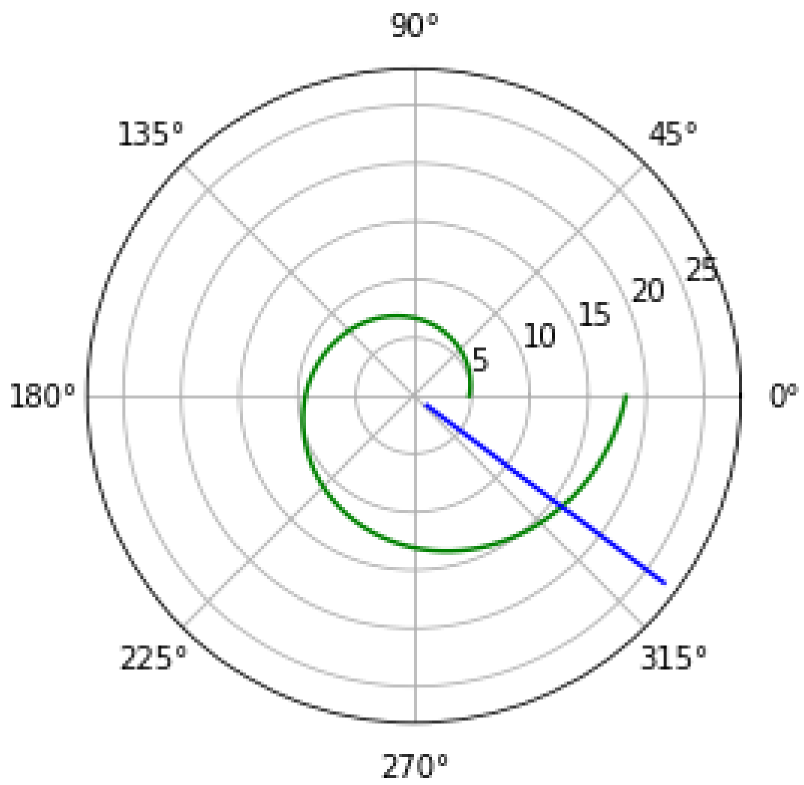

Figure 3.4: 2

4 Выводы

1. Записала уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Построила траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Нашла точку пересечения траектории катера и лодки
4. Научилась решать задачу о погоне, строить графики.