Отчёт по лабораторной работе 8

дисциплина: Математическое моделирование

Никитаева А. С., НПИбд-02-18

Содержание

# Цель работы

Построить модель конкуренции двух фирм с помощью Python.

# Задание

**Вариант 18**

**Случай 1.** Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом). Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

где

Также введена нормировка .

**Случай 2.** Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

**Замечание:** Значения указаны в тысячах единиц, а значения указаны в млн единиц.

**Обозначения:**

– число потребителей производимого продукта;

– длительность производственного цикла;

– рыночная цена товара;

– себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции;

– максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени;

– безразмерное время.

1. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 1.
2. Постройте графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 2.
3. Найдите стационарное состояние системы для первого случая.

# Теоретическое введение

Для построения модели конкуренции хотя бы двух фирм необходимо рассмотреть модель одной фирмы. Вначале рассмотрим модель фирмы, производящей продукт долговременного пользования, когда цена его определяется балансом спроса и предложения. Примем, что этот продукт занимает определенную нишу рынка и конкуренты в ней отсутствуют.

Обозначим:

– число потребителей производимого продукта.

– доходы потребителей данного продукта. Считаем, что доходы всех потребителей одинаковы. Это предположение справедливо, если речь идет об одной рыночной нише, т.е. производимый продукт ориентирован на определенный слой населения.

– оборотные средства предприятия.

– длительность производственного цикла.

– рыночная цена товара.

– себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.

– доля оборотных средств, идущая на покрытие переменных издержек.

– постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции.

– функция спроса, зависящая от отношения дохода S к цене p. Она равна количеству продукта, потребляемого одним потребителем в единицу времени.

Функцию спроса товаров долговременного использования часто представляют в простейшей форме:

$$ \tag{1} Q = q - k \frac{P}{S} = q(1 - \frac{p}{p\_{cr}}), $$

где – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены и при (критическая стоимость продукта)потребители отказываются от приобретения товара. Величина . Параметр – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (1) является пороговой (то есть при ) и обладает свойствами насыщения.

Уравнения динамики оборотных средств можно записать в виде

$$ \tag{2} \frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{M \delta}{\tau} + NQp - \kappa = -\frac{M \delta}{\tau} + NQ(1 - \frac{p}{p\_{cr}})p - \kappa$$

Уравнение для рыночной цены p представим в виде

$$ \tag{3} \frac{\partial p}{\partial t} = \gamma (-\frac{M \delta}{\tau \tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p\_{cr}}) $$

Первый член соответствует количеству поставляемого на рынок товара (то есть предложению), а второй член – спросу.

Параметр зависит от скорости оборота товаров на рынке. Как правило, время торгового оборота существенно меньше времени производственного цикла . При заданном уравнение (3) описывает быстрое стремление цены к равновесному значению цены, которое устойчиво.

В этом случае уравнение (3) можно заменить алгебраическим соотношением

$$ \tag{4} -\frac{M \delta}{\tau \tilde{p}} + NQ(1 - \frac{p}{p\_{cr}}) = 0 $$

Из (4) следует, что равновесное значение цены p равно

$$ \tag{5} p = p\_{cr}(1 - \frac{M \delta}{\tau \tilde{p} Nq}) $$

Уравнение (2) с учетом (5) приобретает вид

$$ \tag{6} \frac{\partial M}{\partial t} = M \frac{\delta}{\tau}(\frac{p\_{cr}}{\tilde{p}} - 1) - M^2 (\frac{\delta}{\tau \delta{p}})^2 \frac{p\_{cr}}{Nq}
- \kappa $$

Уравнение (6) имеет два стационарных решения, соответствующих условию = 0

$$ \tag{7} \tilde{M}\_{1,2} = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

где

$$ \tag{8} a = Nq(1 - \frac{\tilde{p}}{p\_{cr}}) \tilde{p} \frac{\tau}{\delta}, b = \kappa Nq \frac{(\tau \tilde{p})^2}{p\_{cr} \delta^2} $$

Из (7) следует, что при больших постоянных издержках (в случае ) стационарных состояний нет. Это означает, что в этих условиях фирма не может функционировать стабильно, то есть, терпит банкротство. Однако как правило, постоянные затраты малы по сравнению с переменными (то есть, ) и играют роль только в случае, когда оборотные средства малы. При стационарные значения M равны

$$ \tag{9} \tilde{M}\_+ = Nq \frac{\tau}{\delta}(1 - \frac{\tilde{p}}{p\_{cr}}) \tilde{p}, \tilde{M}\_- = \kappa \tilde{p} \frac{\tau}{\delta(p\_{cr}
- \tilde{p})}$$

Первое состояние устойчиво и соответствует стабильному функционированию предприятия. Второе состояние неустойчиво, так что при оборотные средства падают (), то есть, фирма идет к банкротству. По смыслу соответствует начальному капиталу, необходимому для входа в рынок.

В обсуждаемой модели параметр всюду входит в сочетании с . Это значит, что уменьшение доли оборотных средств, вкладываемых в производство, эквивалентно удлинению производственного цикла. Поэтому мы в дальнейшем положим: = 1, а параметр будем считать временем цикла с учётом сказанного.

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Последнее означает, что у потребителей в этой нише нет априорных предпочтений, и они приобретут тот или иной товар, не обращая внимания на знак фирмы.

В этом случае, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иными словами, в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей какимлибо иным способом).

Уравнения динамики оборотных средств запишем по аналогии с (2) в виде

$$ \tag{10} \begin{cases} \frac{\partial M\_1}{\partial t} = - \frac{M\_1}{\tau\_1} + N\_1q(1 - \frac{p}{p\_{cr}})p - \kappa\_1 \\ \frac{\partial M\_2}{\partial t}
= - \frac{M\_2}{\tau\_2} + N\_2q(1 - \frac{p}{p\_{cr}})p - \kappa\_2 \end{cases} $$

где использованы те же обозначения, а индексы 1 и 2 относятся к первой и второй фирме соответственно. Величины и – числа потребителей, приобревших товар первой и второй фирмы.

Учтем, что товарный баланс устанавливается быстро, то есть, произведенный каждой фирмой товар не накапливается, а реализуется по цене . Тогда

$$ \tag{11} \begin{cases} \frac{M\_1}{\tau\_1 \tilde{p}\_1} = - N\_1q(1 - \frac{p}{p\_{cr}}) \\ \frac{M\_2}{\tau\_2 \tilde{p}\_2} = - N\_2q(1 - \frac{p}{p\_{cr}})
\end{cases} $$

где и – себестоимости товаров в первой и второй фирме.

С учетом (10) представим (11) в виде

$$ \tag{12} \begin{cases} \frac{\partial M\_1}{\partial t} = - \frac{M\_1}{\tau\_1}(1 - \frac{p}{\tilde{p}\_1}) - \kappa\_1 \\ \frac{\partial M\_2}{\partial t}
= - \frac{M\_2}{\tau\_2}(1 - \frac{p}{\tilde{p}\_2}) - \kappa\_2 \end{cases} $$

Уравнение для цены по аналогии с (3)

$$ \tag{13} \frac{\partial p}{\partial t} = - \gamma (\frac{M\_1}{\tau\_1 \tilde{p}\_1} + \frac{M\_2}{\tau\_2 \tilde{p}\_2} - Nq (1 - \frac{p}{p\_{cr}}) $$

Считая, как и выше, что ценовое равновесие устанавливается быстро, получим:

$$ \tag{14} p = p\_{cr} (1 - \frac{1}{Nq} (\frac{M\_1}{\tau\_1 \tilde{p}\_1} + \frac{M\_2}{\tau\_2 \tilde{p}\_2})) $$

Подставив (14) в (12) имеем:

$$ \tag{15} \begin{cases} \frac{\partial M\_1}{\partial t} = c\_1 M\_1 - b M\_1 M\_2 - a\_1 M\_1^2 - \kappa\_1 \\ \frac{\partial M\_2}{\partial t} = c\_2 M\_2
- b M\_1 M\_2 - a\_2 M\_2^2 - \kappa\_2 \end{cases} $$

где

$$ \tag{16} a\_1 = \frac{p\_{cr}}{\tau\_1^2 \tilde{p}\_1^2 Nq}, a\_2 = \frac{p\_{cr}}{\tau\_2^2 \tilde{p}\_2^2 Nq}, b = \frac{p\_{cr}}{\tau\_1^2 \tilde{p}\_1^2
\tau\_2^2 \tilde{p}\_2^2 Nq}, c\_1 = \frac{p\_{cr} - \tilde{p}\_1}{\tau\_1^2 \tilde{p}\_1^2}, c\_2 = \frac{p\_{cr} - \tilde{p}\_2}{\tau\_2^2 \tilde{p}\_2^2} $$

Исследуем систему (15) в случае, когда постоянные издержки () пренебрежимо малы. И введем нормировку . Получим следующую систему:

$$ \tag{17} \begin{cases} \frac{\partial M\_1}{\partial \theta} = M\_1 - \frac{b}{c\_1} M\_1 M\_2 - \frac{a\_1}{c\_1} M\_1^2 \\ \frac{\partial M\_2}{\partial \theta}
= \frac{c\_2}{c\_1} M\_2 -\frac{b}{c\_1} M\_1 M\_2 - \frac{a\_2}{c\_1} M\_2^2 \end{cases} $$

# Выполнение лабораторной работы

1. Изучила начальные условия. Начальные значения объема оборотных средств первой и второй фирмы соответственно 4,2 и 3,8 млн единиц. Критическая стоимость продукта 11,4 тыс. единиц. 26 тыс. потребителей производимого продукта. Максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени равна 1. Длительность производственного цикла первой фирмы равна 14, а второй – 22. Себестоимость продукта первой фирмы составляет 6,6, а второй – 4,5.
2. Оформила начальные условия в код на Python:

M10 = 4.2  
M20 = 3.8  
x0=[M10, M20]  
  
pcr = 11.4  
N = 26  
q = 1  
  
tau1 = 14  
tau2 = 22  
  
p1 = 6.6  
p2 = 4.5

1. Задала условия для времени: – начальный момент времени, – предельный момент времени, – шаг изменения времени.
2. Добавила в программу условия, описывающие время:

t0 = 0  
tmax = 30  
dt = 0.01  
t = np.arange(t0, tmax, dt)

1. Запрограммировала вычисление коэффициентов для последующего использования в уравнениях:

a1 = pcr/(tau1\*tau1\*p1\*p1\*N\*q)  
a2 = pcr/(tau2\*tau2\*p2\*p2\*N\*q)  
b = pcr/(tau1\*tau1\*tau2\*tau2\*p1\*p1\*p2\*p2\*N\*q)  
c1 = (pcr-p1)/(tau1\*p1)  
c2 = (pcr-p2)/(tau2\*p2)

1. Запрограммировала функцию, описывающую систему уравнений для 1-ого случая:

def S1(x, t):  
 dx1 = (c1/c1)\*x[0] - (a1/c1)\*x[0]\*x[0] - (b/c1)\*x[0]\*x[1]  
 dx2 = (c2/c1)\*x[1] - (a2/c1)\*x[1]\*x[1] - (b/c1)\*x[0]\*x[1]  
 return dx1, dx2

1. Запрограммировала функцию, описывающую систему уравнений для 2-ого случая:

def S2(x, t):  
 dx1 = x[0] - (b/c1 + 0.0009)\*x[0]\*x[1] - (a1/c1)\*x[0]\*x[0]  
 dx2 = (c2/c1)\*x[1] - (b/c1)\*x[0]\*x[1] - (a2/c1)\*x[1]\*x[1]  
 return dx1, dx2

1. Запрограммировала решение всех систем уравнений:

y1 = odeint(S1, x0, t)  
y2 = odeint(S2, x0, t)

1. Для 1-ого случая нашла стационарное состояние системы.

9.1. Приравняла каждое уравнение системы к 0 и получила следующие корни:

9.2. Отбросила корни , т. к. стационарное состояние не может быть равно 0.

9.3. Получила следующее решение:

9.4. Запрограммировала подсчет стационарного состояния:

M1 = (a2\*c1-b\*c2)/(a1\*a2-b\*b)  
M2 = (a1\*c2-b\*c1)/(a1\*a2-b\*b)  
print(M1, "; ", M2)

1. Описала построение графиков и отметку стационарного состояния для 1-ого случая:

plt.plot(t, y1[:,0], label='Фирма 1')  
plt.plot(t, y1[:,1], label='Фирма 2')  
plt.hlines(M1, t0, tmax, colors="darkgrey", linestyles='dashed', label='M1')  
plt.hlines(M2, t0, tmax, colors="dimgrey", linestyles='dashed', label='M2')  
plt.legend(loc=4)  
plt.grid()

1. Описала построение графиков для 2-ого случая:

plt.plot(t, y2[:,0], label='Фирма 1')  
plt.plot(t, y2[:,1], label='Фирма 2')  
plt.legend()  
plt.grid()

1. Собрала код программы воедино и получила следующее:

import math  
import numpy as np  
from scipy.integrate import odeint  
import matplotlib.pyplot as plt  
  
M10 = 4.2  
M20 = 3.8  
x0=[M10, M20]  
  
pcr = 11.4  
N = 26  
q = 1  
  
tau1 = 14  
tau2 = 22  
  
p1 = 6.6  
p2 = 4.5  
  
t0 = 0  
tmax = 30  
dt = 0.01  
t = np.arange(t0, tmax, dt)  
  
a1 = pcr/(tau1\*tau1\*p1\*p1\*N\*q)  
a2 = pcr/(tau2\*tau2\*p2\*p2\*N\*q)  
b = pcr/(tau1\*tau1\*tau2\*tau2\*p1\*p1\*p2\*p2\*N\*q)  
c1 = (pcr-p1)/(tau1\*p1)  
c2 = (pcr-p2)/(tau2\*p2)  
  
def S1(x, t):  
 dx1 = (c1/c1)\*x[0] - (a1/c1)\*x[0]\*x[0] - (b/c1)\*x[0]\*x[1]  
 dx2 = (c2/c1)\*x[1] - (a2/c1)\*x[1]\*x[1] - (b/c1)\*x[0]\*x[1]  
 return dx1, dx2  
  
def S2(x, t):  
 dx1 = x[0] - (b/c1 + 0.00021)\*x[0]\*x[1] - (a1/c1)\*x[0]\*x[0]  
 dx2 = (c2/c1)\*x[1] - (b/c1)\*x[0]\*x[1] - (a2/c1)\*x[1]\*x[1]  
 return dx1, dx2  
  
y1 = odeint(S1, x0, t)  
y2 = odeint(S2, x0, t)  
  
M1 = (a2\*c1-b\*c2)/(a1\*a2-b\*b)  
M2 = (a1\*c2-b\*c1)/(a1\*a2-b\*b)  
print(M1, "; ", M2)  
  
plt.plot(t, y1[:,0], label='Фирма 1')  
plt.plot(t, y1[:,1], label='Фирма 2')  
plt.hlines(M1, t0, tmax, colors="darkgrey", linestyles='dashed', label='M1')  
plt.hlines(M2, t0, tmax, colors="dimgrey", linestyles='dashed', label='M2')  
plt.legend(loc=4)  
plt.grid()  
  
plt.plot(t, y2[:,0], label='Фирма 1')  
plt.plot(t, y2[:,1], label='Фирма 2')  
plt.legend()  
plt.grid()

1. Получила следующее значение стационарного состояния для 1-ого случая:
2. Получила следующие графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 для 1-ого случая (см. рис. 1):

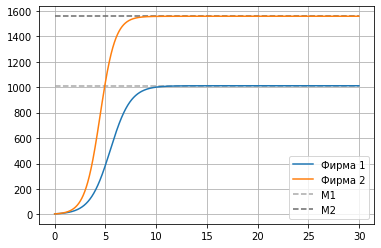


Figure 1: Изменение оборотных средств. 1-ый случай

1. Получила следующие графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 для 2-ого случая (см. рис. 2):

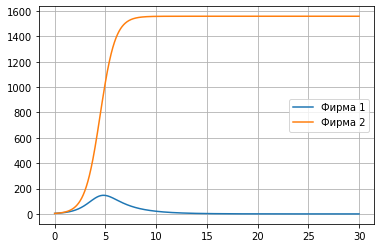


Figure 2: Изменение оборотных средств. 2-ой случай

# Выводы

Построила модель конкуренции двух фирм с помощью Python.

Нашла стационарное состояние системы для 1-ого случая.

В 1-ом случае фирма 2 будет иметь по итогу больше оборотных средств, чем фирма 1.

Во 2-ом случае фирма 2 достигнет успеха, а фирма 1 окажется в проигрыше: фирма 2 будет иметь по итогу больше оборотных средств, чем фирма 1.