УНИТЕХ 2014 ГАБРОВО
МЕЖДУНАРОДНА НАУЧНА КОНФЕРЕНЦИЯ
21 – 22 Ноември 2014, ГАБРОВО

ПРИЛОЖЕНИЕ НА СКАЛАРНО И КРЪСТОСАНО ПРОИЗВЕДЕНИЕ НА ВЕКТОРИ В ИЗЧИСЛИТЕЛНАТА ГЕОМЕТРИЯ В РАВНИНАТА

APPLICATION OF CROSS AND DOT PRODUCT IN COMPUTATIONAL GEOMETRY IN THE PLANE

Младен Манев
Технически университет – Габрово

Abstract
A didactical system of problems for introducing the topic "Computational geometry in the plane" in a course on Advance algorithms is proposed.

Keywords: computational geometry; cross product; dot product.

ВЪВЕДЕНИЕ

„Изчислителната геометрия е област от информатиката, която изучава алгоритми за решаване на геометрични задачи. Входните данни в такива задачи могат да бъдат множество от точки, набор от отсечки, многоъгълници и други. Резултатът може да бъде или отговор на някакъв въпрос (от типа на „пресичат ли се тези прави“), или намирането на някой геометричен обект (например най-малкият изпъкнал многоъгълник, съдържащ дадените точки)“ [1].

Обикновено геометричните знания, получени в училище и в университета, се оказват не особено приложими, когато трябва да се пишат програми, свързани с различни геометрични обекти. В тази работа ще споделим своя опит, свързан с въвеждането в темата „Изчислителна геометрия“ на студенти и ученици, които се занимават с програмиране.

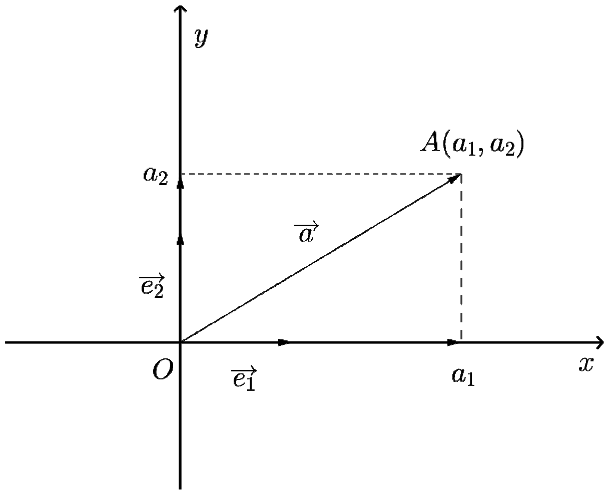
ВЕКТОРИ И КООРДИНАТИ

Основните геометрични обекти, които се използват в изчислителната геометрия в равнината, са точки и вектори. Ще считаме, че в равнината е зададена декартова координатна система. Така всяка точка в равнината може да опишем с нейните координати. С помощта на точки може да опишем много геометрични обекти. За да зададем отсечка, е достатъчно да знаем координатите на краищата ѝ. Права може да зададем чрез две точки от нея. Триъгълник може да се опише чрез координатите на върховете му, квадрат – чрез координатите на два диагонално срещуположни върха и т. н. Много често в условията на задачите дадените геометрични обекти са описани с точки. За проверка на различни условия в програмите обаче работата само с координати на точки не е достатъчна. Голяма част от възникващите проблеми могат доста лесно да се разрешат чрез използване на вектори.

Ще припомним някои дефиниции и твърдения за вектори, които ще са ни необходими и които се изучават в класическия курс по Аналитична геометрия.

Отсечката AB, за която точка A се счита за начало, а точка B – за край, се нарича вектор AB и се означава с $\overrightarrow{AB}$. За означаване на вектори могат да се използват и малки букви (например $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$). С $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ означаваме дължината на вектора $\overrightarrow{AB}$. Два вектора са равни, ако единият може да се получи от другия чрез успоредно пренасяне.

Нека $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ са единични вектори, еднопосочни съответно с абсцисната и ординатната ос. За всеки вектор $\vec{a}$ съществуват единствени числа a_1 и a_2 такива, че $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$. Тези числа се наричат координати на вектора $\vec{a}$ (записваме $\vec{a}(a_1, a_2)$).



Нека точките A и B да имат координати $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$. Тогава векторът $\overrightarrow{AB}$ има координати $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$. От тук лесно се вижда, че ако знаем координатите на един вектор и координатите на единия му край, лесно могат да се определят координатите на другия му край.

За всеки два вектора $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$:

- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1$ и $a_2 = b_2$;
- $\vec{a} + \vec{b}(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$;
- $\vec{a} - \vec{b}(a_1 - b_1, a_2 - b_2)$;
- $\alpha\vec{a}(\alpha a_1, \alpha a_2)$, $\alpha \in R$.

Описаният теоретичен материал може да бъде упражнен със следните задачи:

Задача 1. За успоредника $ABCD$ са известни координатите на върховете A, B и C. Да се намерят координатите на четвъртия връх на успоредника, ако:

а) $A(1,2)$, $B(3,5)$ и $C(7,6)$;

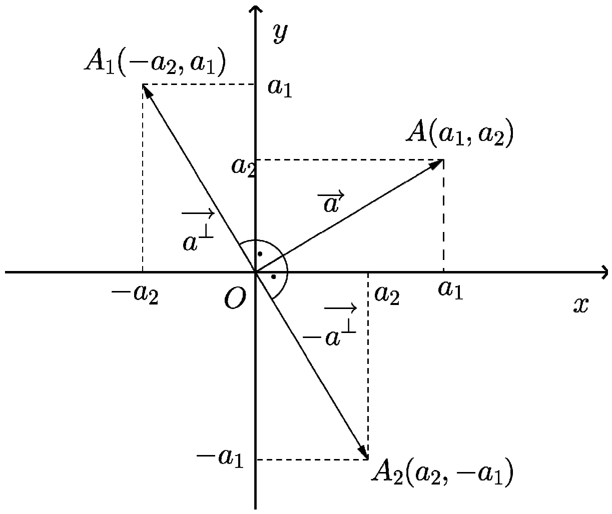
б) $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ и $C(x_C, y_C)$.

Задача 2. Да се намерят координатите на средата на отсечката AB, ако $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$.

Задача 3. Да се намерят координатите на средата на отсечката AB, ако $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$.

Задача 4. Известни са координатите на средата M и на единия край на отсечката AB. Да се намерят координатите на другия край на отсечката.

В много задачи се налага да се работи с вектор, който е перпендикулярен на даден вектор. Ще припомним как се определят неговите координати. Ако означим с $\overrightarrow{a^\perp}$ векторът, който се получава от вектора $\vec{a}(a_1, a_2)$ чрез завъртането му на $+90°$, то неговите координати са $\overrightarrow{a^\perp}(-a_2, a_1)$. Ако завъртането е в отрицателна посока, т.е. въртим на $-90°$, ще получим вектора $-\overrightarrow{a^\perp}(a_2, -a_1)$.



Сега е полезно да бъдат разгледани следните задачи:

Задача 5. За квадрата $ABCD$ са известни координатите на върха $A(x_A, y_A)$ и на пресечната точка на диагоналите му $O(x_O, y_O)$. Да се намерят координатите на върховете B, C и D.

Задача 6. За квадрата $ABCD$ са известни координатите на върховете $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$. Да се намерят координатите на върховете C и D.

Задача 7. Известни са координатите на точките A, B, C и D. Да се намери достатъчно условие четириъгълникът $ABCD$ да е квадрат.

Упътване: Достатъчно е да са изпълнени следните две условия:

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;
- $\overrightarrow{AC^{\perp}} = \overrightarrow{BD}$ или $\overrightarrow{AC^{\perp}} = \overrightarrow{DB}$ (съответстващи на обхождане на върховете на квадрата в положителна или отрицателна посока).

СКАЛАРНО ПРОИЗВЕДЕНИЕ НА ВЕКТОРИ

Дефиницията за скаларното произведение на два вектора е познатата класическа дефиниция:

Нека са дадени ненулевите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и ъгълът между тях е φ. Да означим с a и b осите, определени съответно от двата вектора. Скаларно произведение на ненулевите вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ наричаме числото $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = |\vec{a}|np_a\vec{b} = |\vec{b}|np_b\vec{a}.$ Ако поне един от двата вектора е нулев, то тяхното скаларно произведение е 0.

За всеки два вектора $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$ е вярно, че

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

С помощта на скаларно произведение на вектори лесно се пресмята дължина вектор и на отсечка. Ако $\vec{a}(a_1, a_2)$, $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \text{ и}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Чрез скаларно произведение на вектори може да се определи и ъгъла между двата вектора, но на практика в програмирането е по-полезно използването на функцията atan2, реализирана в повечето езици за програмиране, която ще коментираме понататък в работата. Чрез скаларно произведение на вектори обаче много лесно може да се определи дали два вектора сключват остър, прав или тъп ъгъл. Достатъчно е да се провери знака на скаларното им произведение – ако то е положително, ъгълът е остър, ако е отрицателно – тъп, а ако е 0, двата вектора са перпендикулярни. Този факт самостоятелно или в комбинация с други твърдения позволява лесно да се напишат условия, с които в програмите лесно да се отговаря на различни геометрични въпроси. Пример за това е следващата задача.

Задача 8. Известни са координатите на върховете на триъгълника ABC. Да се намери условие, от което да се определи вида на триъгълника (остроъгълен, правоъгълен, тъпоъгълен).

Упътване: Какви ще бъдат по знак следните скаларни произведения $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ за остроъгълен, правоъгълен и тъпоъгълен триъгълник.

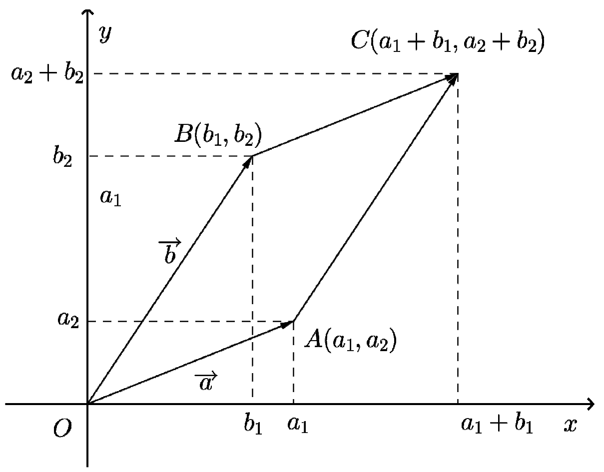
КРЪСТОСАНО ПРОИЗВЕДЕНИЕ НА ВЕКТОРИ

Понятието кръстосано произведение може да се въведе по различен начин в зависимост от обучаемите, с които се разглежда темата. Ще посочим няколко възможни начина за това.

Един начин за въвеждане на кръстосано произведения е следният: Кръстосаното произведение на векторите $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$ е третата координата на векторното произведение на тримерните вектори $\vec{a}'(a_1, a_2, 0)$ и $\vec{b}'(b_1, b_2, 0)$.

Този начин е подходящ за студенти, които вече са се изучавали в курса по Аналитична геометрия векторно произведение и познават свойствата му. Той позволява сравнително лесно да се докажат свойствата на кръстосаното произведение. В този случай е добре да се обърне внимание на обучаемите, че за разлика от векторното произведение, което е вектор, кръстосаното произведение е число.

Друг подход за въвеждането на кръстосано произведение е дефинирането му като ориентирано лице на успоредник. Нека $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$ са два вектора, като неориентираният ъгъл, който те сключват е с големина φ. Казваме, че ъгълът между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е положителен, ако векторът $\vec{a}$ трябва да се завърти на ъгъл φ в положителна посока, за да стане еднопосочен с вектора $\vec{b}$, и отрицателен, ако векторът $\vec{a}$ трябва да се завърти на ъгъл φ в отрицателна посока, за да стане еднопосочен с вектора $\vec{b}$. Кръстосаното произведение на векторите $\vec{a}(a_1,a_2)$ и $\vec{b}(b_1,b_2)$ е лицето на успоредника, образуван от точките с координати $(0,0)$, (a_1,a_2), (a_1+b_1,a_2+b_2) и (b_1,b_2), взето с положителен или отрицателен знак в зависимост от знака на ъгъла между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Този начин за въвеждане на кръстосано произведение се базира на неговия геометричен смисъл. Поради тази причина някои автори наричат кръстосаното произведение лицево произведение. Този подход дава по-добра нагледност и позволява лесно да се доказват различни твърдения, свързани с кръстосаното произведение дори и от хора, които не са запознати с векторно произведение.

Третият начин за въвеждане на кръстосано произведение е чрез формула, която директно позволява неговото пресмятане. А именно: Кръстосаното произведение на векторите $\vec{a}(a_1,a_2)$ и $\vec{b}(b_1,b_2)$ е числото $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$. Задаването чрез детерминанта може да бъде пропуснато, макар че е малко по-нагледно и позволява по-лесно да бъде запомнена формулата. Основното предимство сега е, че имаме в явен вид лесен начин за пресмятане на кръстосаното произведение. В този случай малко по-трудно се обяснява защо с него може да се пресмята ориентирано лице.

В следващите разглеждания кръстосаното произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ще означаваме с $\vec{a}\times\vec{b}$.

Независимо от избрания подход за въвеждане на кръстосано произведение обучаемите трябва да са наясно с начина за неговото пресмятане и с геометричния му смисъл.

С помощта на кръстосано произведение лесно може да се пресметне лицето на прост затворен многоъгълник $A_1A_2...A_n$, за който са известни координатите на върховете му. Ако $O(0,0)$ е началото на координатната система, то за ориентираното лице $\overline{S}$ на многоъгълника е вярно, че

$$\overline{S} = \overline{S}_{OA_1A_2} + \overline{S}_{OA_2A_3} + \ldots + \overline{S}_{OA_{n-1}A_n} + \overline{S}_{OA_nA_1} =$$
$$\frac{1}{2}\Big(\overrightarrow{OA_1}\times\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_2}\times\overrightarrow{OA_3} + \ldots +$$
$$\overrightarrow{OA_{n-1}}\times\overrightarrow{OA_n} + \overrightarrow{OA_n}\times\overrightarrow{OA_1}\Big).$$

За намиране на ориентирания ъгъл между два вектора може да се използва двуаргументната функция $\operatorname{atan2}(y,x)$, реализирана в много езици за програмиране, която се дефинира по следния начин:

$$\operatorname{atan2}(y,x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & x>0 \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi & y\ge 0,\ x<0 \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\pi & y<0,\ x<0 \\ \dfrac{\pi}{2} & y>0,\ x=0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & y<0,\ x=0 \\ \text{не е дефинирана} & y=0,\ x=0 \end{cases}$$

Ориентираният ъгъл между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е равен на $\operatorname{atan2}\left(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{a}.\vec{b}\right)$.

ВЗАИМНИ ПОЛОЖЕНИЯ НА ТОЧКИ И ФИГУРИ

Скаларното и кръстосаното произведение поотделно или заедно дават много добри възможности за изследване на взаимното положение на различни геометрични обекти и съставяне на достатъчни условия, които лесно се програмират. Ще разгледаме някои от тях. Описаните условия се конструират и доказват лесно като се използва геометричния смисъл на двете произведения и техните свойства.

1. Точката C лежи на правата AB тогава и само тогава, когато $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=0.$

2. Точката C лежи на лъча $\overrightarrow{AB}$ тогава и само тогава, когато $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=0$ и $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\ge 0.$

3. Точката C лежи на отсечката AB тогава и само тогава, когато $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=0,$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\ge 0$ и $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\ge 0.$

4. Разстоянието d от точка C до правата AB може да се пресметне по формулата $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{\sqrt{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}}}.$

5. Точките C и D са в една и съща полуравнина спрямо правата AB тогава и само тогава, когато

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)>0.$$

6. Правата AB пресича отсечката CD във вътрешна за отсечката точка тогава и само тогава, когато

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)<0.$$

7. Отсечката CD има обща точка с правата AB тогава и само тогава, когато $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)\le 0.$

8. Правите AB и CD се пресичат тогава и само тогава, когато $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}\ne 0.$ Тук ще отбележим, че ако двете прави се пресичат в точка $M,$ нейните координати лесно могат да се намерят от равенството $\overrightarrow{CM}=\alpha\overrightarrow{CD},$ където $\alpha=\dfrac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{DC}}.$

9. Правите AB и CD са успоредни тогава и само тогава, когато $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=0$ и $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\ne 0.$

10. Правите AB и CD съвпадат тогава и само тогава, когато $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}=0$ и $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=0.$

11. Отсечките AB и CD, които не лежат на една права се пресичат във вътрешна точка за двете отсечки тогава и само тогава, когато

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)<0 \text{ и}$$

$$\left(\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DA}\right)\left(\overrightarrow{DC}\times\overrightarrow{DB}\right)<0.$$

12. Точка M лежи във вътрешността на триъгълника ABC тогава и само тогава, когато кръстосаните произведения $\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{AB},$ $\overrightarrow{BM}\times\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CM}\times\overrightarrow{CA}$ са с еднакви знаци.

Това твърдение може да се обобщи и за изпъкнал многоъгълник. Точка M лежи във вътрешността на изпъкналия многоъгълник $A_1A_2...A_n$ тогава и само тогава, когато кръстосаните произведения $\overrightarrow{A_1M}\times\overrightarrow{A_1A_2},$ $\overrightarrow{A_2M}\times\overrightarrow{A_2A_3},$ ..., $\overrightarrow{A_nM}\times\overrightarrow{A_nA_1}$ са с еднакви знаци.

ПРИЛАГАНЕ НА ТЕОРИЯТА В ЗАДАЧИ

В заключение ще формулираме няколко задачи за съставяне на програми, с помощта на които може да се упражни и затвърди описания теоретичен материал.

Задача 9. Дадени са координатите на три неколинеарни точки A, B и C в равнината: x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C. Да се напише програма, която намира координатите на точка D от отсечката AB, която е най-близо до точката C. Програмата трябва да въвежда от стандартния вход дадените координати в посочения ред и да извежда на стандартния изход цялата част на търсените координати, като ги разделя с един интервал. Координатите на точките A, B и C са цели числа в интервала $\left(-10^6;10^6\right)$.

Пример

Вход

```
1 2 10 3 6 7
```

Изход

```
6 2
```

Задача 10. Нека N, W и E са цели числа ($1\le N\le 100,$ $0\le W,$ $E\le 100N$). Разглеждаме права линия, която минава през точките с координатите $(0,W)$ и $(100N,E)$. Дадени са N^2 квадрата $S_{i,j}$ $(i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ N)$. със страни, успоредни на координатните оси.

Квадратът $S_{i,j}$ има координати на два от върховете си съответно равни на $(100i,\ 100j)$ и $(100i-100, 100j-100)$, $i, j = 1, 2, ..., N$. Да се напише програма, която намира колко от дадените квадрати имат поне една обща точка с разглежданата права. Числата N, W и E се задават на стандартния вход. Програмата трябва да извежда на стандартния изход търсения брой.

Пример

Вход

```
3 150 50
```

Изход

```
4
```

Задача 11. Единият от върховете на правоъгълник съвпада с началото на координатната система, а други два от върховете му са точки с целочислени координати (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Да се напише програма, която намира колко от зададени N на брой различни точки лежат във вътрешността или върху някоя от страните на правоъгълника. На първия ред на стандартния вход са дадени 5 числа – координатите x_1, y_1, x_2 и y_2 на два от върховете на правоъгълника и броя N на зададените точки ($0 < N < 1000$). На следващите N реда са описани координатите на тези точки. Всички зададени координати са цели числа, които по абсолютна стойност не надминават 1000. На един ред на стандартния изход програмата трябва да изведе колко от зададените точки лежат във вътрешността или върху някоя от страните на правоъгълника.

Пример

Вход

```
3 11 5 1 5
0 0
1 3
5 0
0 11
-2 11
```

Изход

```
2
```

Задача 12. В равнината са дадени триъгълниците ABC, $P_1Q_1R_1$, $P_2Q_2R_2$, $P_3Q_3R_3$ и $P_4Q_4R_4$. Обща точка за два триъгълника ще наричаме точка, която лежи във вътрешността или по контура на единия триъгълник и във вътрешността или по контура на другия триъгълник. Да се напише програма, която определя дали триъгълникът ABC има поне една обща точка с всеки от останалите четири триъгълника. На пет реда от стандартния вход са описани координатите на върховете на петте триъгълника – на първия ред – на A, B и C; на втория ред – на P_1, Q_1 и R_1; на третия ред – на P_2, Q_2 и R_2; на четвъртия ред – на P_3, Q_3 и R_3; на петия ред – на P_4, Q_4 и R_4. Всички координати са цели числа, по-големи от 0 и по-малки от 100. На един ред на стандартния изход за всяка от двойките триъгълници ABC и $P_1Q_1R_1$, ABC и $P_2Q_2R_2$, ABC и $P_3Q_3R_3$, ABC и $P_4Q_4R_4$, програмата трябва да изведе 0, ако двата триъгълника нямат обща точка и 1, ако двата триъгълника имат обща точка. Между числата не трябва да има интервали.

Пример

Вход

```
4 1 13 4 7 7
9 6 14 7 11 9
10 3 16 5 15 1
4 3 5 7 7 4
10 5 8 4 10 4
```

Изход

```
1111
```

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cormen, Thomas H.; Leiserson, Charles E.; Rivest, Ronald L.; Stein, Clifford (2009). *Introduction to Algorithms* (third ed.). MIT Press.

[2] Андреева, Е. В.; Егоров Ю. Е.; Вычислительная геометрия на плоскости, журнал „Информатика“ № 39, 40, 43, 44/2002. Изд. дом „Первое сентября“.