

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ»**

Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

«Допустить к защите»
Заведующий кафедрой
прикладной информатики
и теории вероятностей
д.т.н., профессор
_____ К.Е. Самуйлов

« ____ » _____ 20 __ г.

**Выпускная квалификационная работа
бакалавра**

Направление 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

ТЕМА «Математические методы оценивания производных финансовых
инструментов»

Выполнил студент Романова Александра Михайловна
(Фамилия, имя, отчество)

Группа НПМбд-02-16

Студ. билет № 1032162884

Руководитель выпускной
квалификационной работы

Матюшенко С.И., к.ф.-м.н., доцент
кафедры прикладной информатики и
теории вероятностей
(Ф.И.О., степень, звание, должность)

(Подпись)

Автор _____
(Подпись)

г. Москва
2020 г.

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Российский университет дружбы народов»**

АННОТАЦИЯ
выпускной квалификационной работы

Романова Александра Михайловна
(фамилия, имя, отчество)

на тему: Математические методы оценивания производных финансовых инструментов

Объектом исследования при написании работы послужил российский рынок производных финансовых инструментов. Предметом исследования работы стали опционы и фьючерсы, торгуемые на Московской бирже. В процессе написания выпускной квалификационной работы мною исследованы математические модели оценки стоимости опционов, используемые в настоящее время всеми финансовыми аналитиками. С помощью исследуемых методов произведены расчеты стоимостей опционов и даны соответствующие прогнозы на будущее. Сделаны основные выводы, подведен итог результатов.

Автор ВКР

(Подпись)

(ФИО)

Оглавление	
Введение	4
Глава 1. Основные виды производных финансовых инструментов и их особенности.....	6
1.1. Определение и основные характеристики производных финансовых инструментов	6
1.2. Форварды.....	7
1.3. Фьючерсы	8
1.4. Опционы	10
1.5. Свопы	13
Глава 2. Модели оценки стоимости опционов	16
2.1. Модель Башелье.....	16
2.2. Формулы Спренкла, Бонесса и Самуэльсона	17
2.3. Модель Блэка-Шоулза	19
2.4. Модель Кокса-Росса-Рубинштейна	20
Глава 3. Примеры расчета стоимости опционов.....	24
3.1. Расчет стоимости опциона колл на покупку акций ПАО «Сбербанк» с помощью модели Блэка-Шоулза	24
3.2. Расчет стоимости опционов пут и колл в соответствии с формулой Блэка-Шоулза на примере акций ПАО «Нижнекамскнефтехим».....	26
3.3. Оценка стоимости опциона колл на покупку акций ПАО «Нижнекамскнефтехим» в соответствии с одношаговой моделью Кокса-Росса-Рубинштейна	29
Заключение.....	30
Список литературы	31
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Годовая отчетность по акциям ПАО «СБЕРБАНК»	32
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Годовая отчетность по акциям НКНСП ПАО «Нижнекамскнефтехим».....	34
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Расчет волатильности акций НКНСП	36

Введение

Объектом исследования данной работы является российский рынок производных финансовых инструментов, а **предметом исследования** – опционы и фьючерсы, торгуемые на Московской бирже.

Актуальность исследования связана с тем, что рынок производных финансовых инструментов представляет собой самый быстроразвивающийся сегмент мирового финансового рынка. При этом российская часть этого сегмента развита недостаточно и имеет серьезные перспективы роста. В свою очередь, развитие финансового рынка оказывает благотворное влияние на экономику, т.к. этот процесс влечет рост инвестиций.

В настоящее время лишь небольшой процент населения России обладает знаниями, необходимыми для того, чтобы стать участниками финансового рынка. При этом, несмотря на то, что вопросам анализа рынка производных финансовых инструментов посвящено большое количество работ, ощущается дефицит материалов, в которых данная проблема излагается простым языком, понятным для аудитории, не имеющей серьезной финансовой и математической подготовки. В связи с этим передо мною была поставлена **цель** – изложить имеющийся материал по данной теме системно и доступно.

Для достижения поставленной цели были рассмотрены следующие задачи:

- исследовать сущность и характеристики основных видов производных финансовых инструментов;
- изучить методы математического моделирования процессов ценообразования на рынке деривативов;
- изложить материал по теме работы в доступной форме с большим количеством примеров, схем, графиков;

- проиллюстрировать применение теории на актуальных примерах расчета стоимостей деривативов, торгуемых на Московской бирже.

Работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения.

В первой главе рассмотрены основные виды производных финансовых инструментов: форварды, фьючерсы, опционы, свопы. Приведены примеры и разработаны схемы, отражающие взаимодействие участников рынка.

Во второй главе исследованы математические модели оценки стоимости опционов. Основное внимание уделено моделями Блэка-Шоулза и Кокса-Росса-Рубинштейна, активно используемым в настоящее время всеми финансовыми аналитиками.

В третьей главе с помощью моделей Блэка-Шоулза и Кокса-Росса-Рубинштейна произведены расчеты стоимостей опционов на покупку и продажу акции ПАО «Сбербанк» и «Нижекамскнефтехим» и даны соответствующие прогнозы на будущее. Для расчетов использованы актуальные данные информационно-аналитического портала БКС-экспресс. Статистическая информация и результаты вычислений приведены в Приложении.

Глава 1. Основные виды производных финансовых инструментов и их особенности

1.1. Определение и основные характеристики производных финансовых инструментов

В настоящее время на мировом финансовом рынке представлен такой огромный набор производных финансовых инструментов (ПФИ), что дать четкое определение, охватывающее все это многообразие, не представляется возможным. Поэтому сначала постараемся определить общие черты и описать основные признаки ПФИ.

Слово «производные» в названии рассматриваемых нами инструментов означает, что они создаются на основе других финансовых инструментов, т.е. являются производными от них. Часто их так и называют – деривативы от английского *derivatives* (производные).

Первоначально деривативы возникли как договора, страхующие торговцев от непредсказуемого роста цен на товары. По этим договорам торговцы заключали сделку на покупку какого-либо товара через определенное время по предварительно зафиксированной цене. Затем эти договора превратились в ценные бумаги, которые сами стали объектом торга посредников между продавцом и покупателем базового товара.

В качестве базового товара могут выступать как реальные товары: нефть, газ, золото, продукты сельского хозяйства и т.д., так различные финансовые активы: акции, облигации, валюта, а также то, что в обычном понимании не является товаром: биржевые индексы, сводки, прогнозы и т.д. При этом сами ПФИ не дают их владельцам основания для владения базовым товаром. Чаще всего им этот товар и не нужен. Для них дериватив важен как право на приобретение, превращающееся в объект спекуляции.

Очевидно, что цена на ПФИ связана с ценой актива, лежащего в его основе. При росте цены на актив, цена дериватива также растет и наоборот.

Причем на цену дериватива влияет не только реальная цена актива, но и предположения участников рынка о том, что цена будет меняться в ту или иную сторону.

Деривативы являются срочными финансовыми инструментами, т.к. в них всегда оговаривается срок, в течение которого сделка по базовому активу должна быть совершена.

Еще одной особенностью ПФИ является то, что они позволяют получить прибыль при минимальном вложении средств. Дело в том, что для их покупки нет необходимости владеть средствами, необходимыми для покупки базовых активов, фигурирующих в договоре. Ведь, как уже было замечено, покупаются не сами активы, а лишь право на их приобретение в будущем. Таким образом, для покупки ПФИ достаточно заплатить премию за дериватив.

Мы перечислили основные признаки ПФИ. Теперь рассмотрим их основные виды.

1.2. Форварды

Форвард - контракт, по которому покупатель в указанный в контракте день обязан купить, а продавец – продать базовый актив по фиксированной цене. Форвард, как правило, является сделкой между продавцом и покупателем с целью приобретения определенного вида товаров. При этом участие посредников не предполагается, и поэтому форвардные контракты и не являются инструментом спекуляций.

На рисунке 1.1 изображена схема форвардного контракта, по которому фермер Вася, выращивающий овес, в апреле заключает договор с конезаводчиком Петей на поставку будущего урожая в сентябре. Интерес обоих участников связан с двумя моментами. Во-первых, они фиксируют цену на овес на приемлемом для обоих уровне. Во-вторых, Васе не надо будет беспокоиться в сентябре по поводу сбыта урожая, а Пете - по поводу поиска поставщика овса.

Форвард: продаем сами

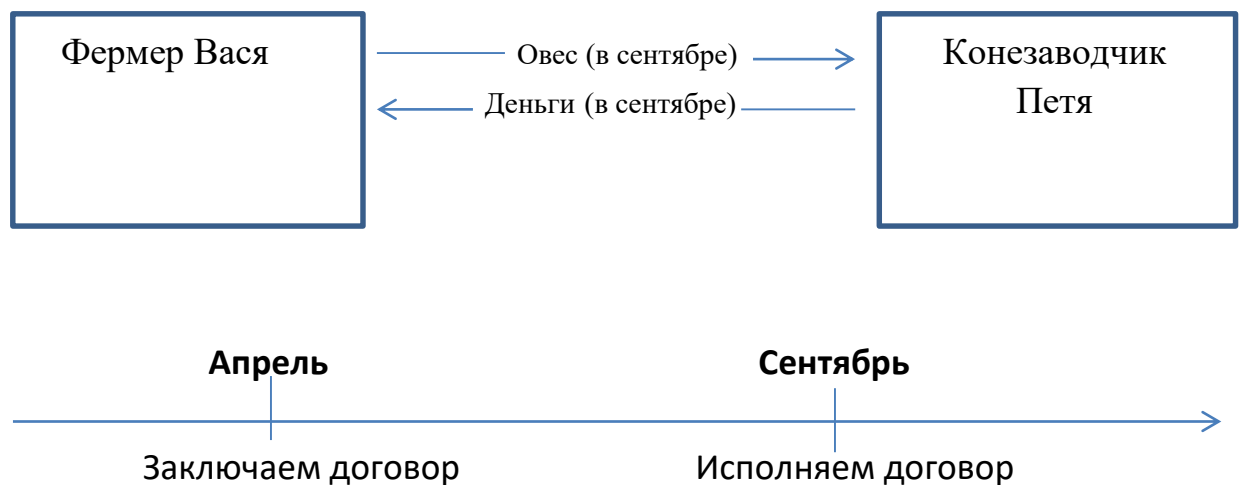


Рис.1.1. Схема форварда

Гарантами сделки выступают сами ее участники, поэтому форвард считается финансовым инструментом с высоким уровнем риска. Часто стороны в такого рода сделках соглашаются заплатить некую сумму для того, чтобы получить гарантию третьей стороны. И когда третьей стороной является биржа, форвард превращается в фьючерс.

1.3. Фьючерсы

Фьючерс - биржевой срочный инструмент, покупатель которого в день исполнения обязан купить, а продавец – продать базовый актив по цене, зафиксированной в договоре.

Таким образом, главное отличие фьючерса от форварда состоит в том, что этот инструмент создается конкретной биржей. При этом, как правило, параметры фьючерса унифицированы по свойствам и количеству товара, условиям досрочного исполнения, штрафным санкциям за нарушение условий и т.д. При этом биржа выступает гарантом выполнения договора и за свои услуги получает определенную плату.

На рисунке 1.2. изображена схема фьючерсного контракта,

Фьючерс: продаем на бирже

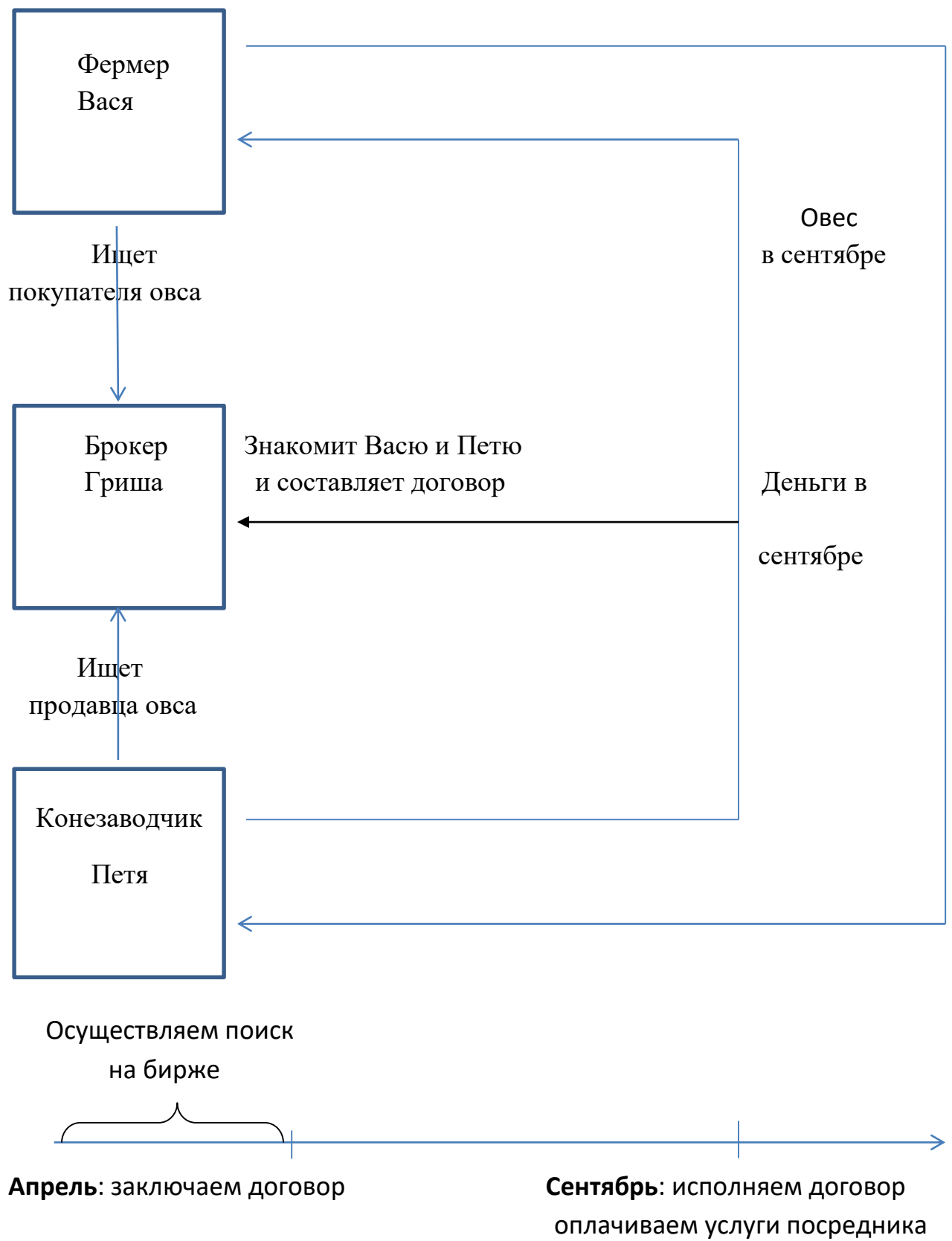


Рис.1.2. Схема фьючерса

основное отличие которой от предыдущей схемы, в появлении нового участника – брокера Гриши, который за определенное вознаграждение составляет договор между нашими прежними участниками в соответствии с правилами биржи и выступает от лица биржи его гарантом. При этом сам, договор, оформленный по всем правилам, может стать предметом торга.

1.4. Опционы

Опцион – договор, по которому покупатель за определенную сумму (цену опциона) покупает право на покупку (опцион колл) либо продажу (опцион пут) в определенный срок и по определенной цене базового актива. При этом, другая сторона договора обязуется продать (в случае опциона колл) либо купить (в случае опциона пут) указанный в договоре актив на зафиксированных в договоре условиях. Принципиальное отличие опциона от фьючерса состоит в том, что наличие права на покупку (продажу) актива не означает, что покупатель опциона обязан эту сделку совершить. Если ситуация на рынке сложится таким образом, что владельцу опциона будет не выгодно совершать сделку по цене, зафиксированной в договоре, то он может отказаться от покупки, потеряв при этом сумму, уплаченную за опцион.

Для того, чтобы разобраться в сути этого финансового инструмента, рассмотрим схемы опциона пут на продажу овса, изображенные на рисунках 1.3 и 1.4.

Итак, наш знакомый фермер Вася покупает опцион на продажу овса Пете либо у самого Пети, либо на бирже, если такой опцион стал предметом биржевой торговли. Согласно этому договору Вася приобретает право продать Пете в августе овес по фиксированной цене. Предположим, что речь идет о 100 тоннах овса по цене 12 рублей за килограмм. При этом, за само это право, т.е. за опцион Вася платит 100 тысяч рублей. Далее предположим, что цена на овес в сентябре оказалась на 2 рубля ниже, чем предполагали участники сделки. В этом случае (рис. 1.3) Васе логичнее воспользоваться

Опцион: продаем или не продаем

1. Продаем

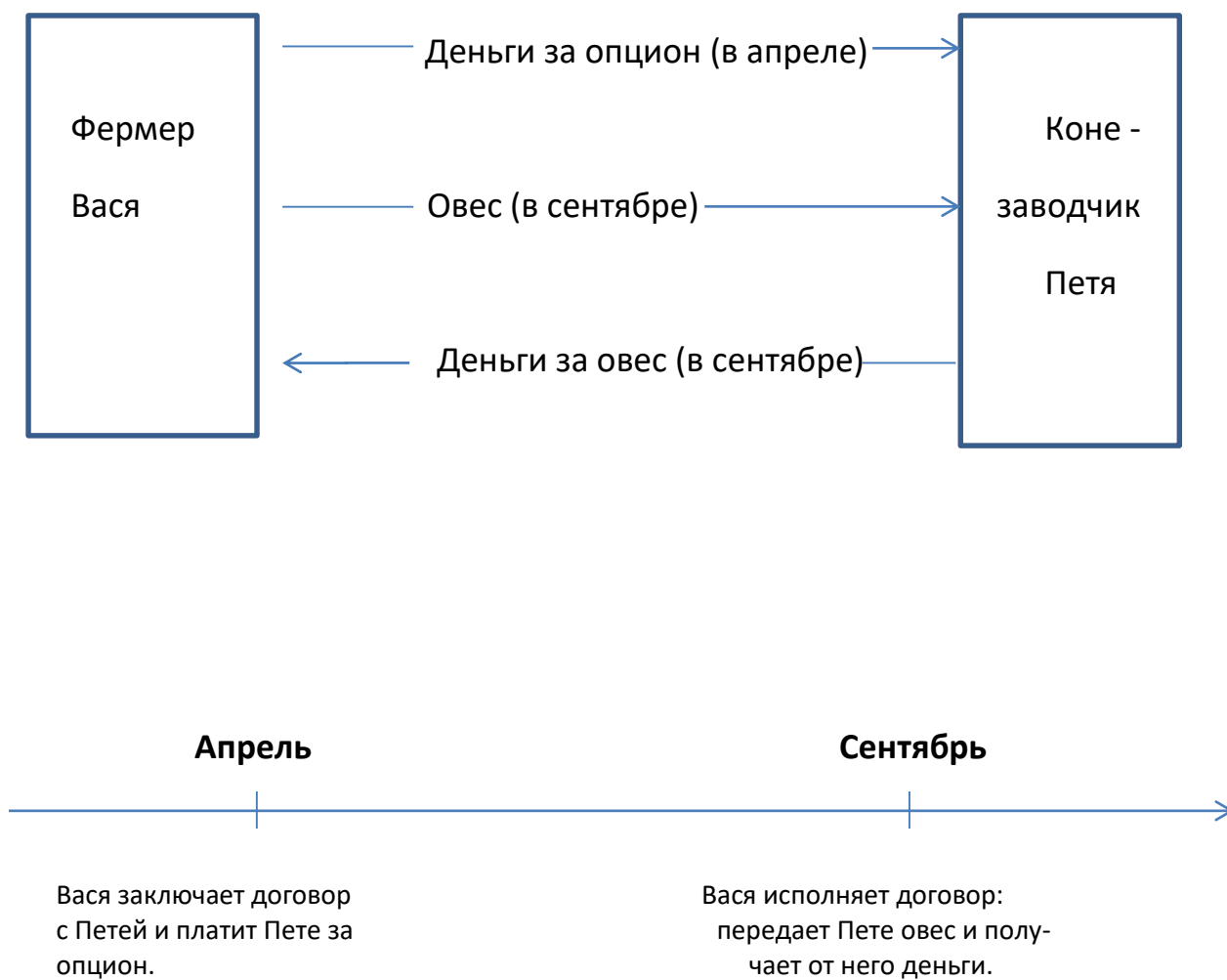


Рис. 1.3. Схема опциона по варианту «ПРОДАЕМ»

Опцион: продаем или не продаем

2. Не продаем

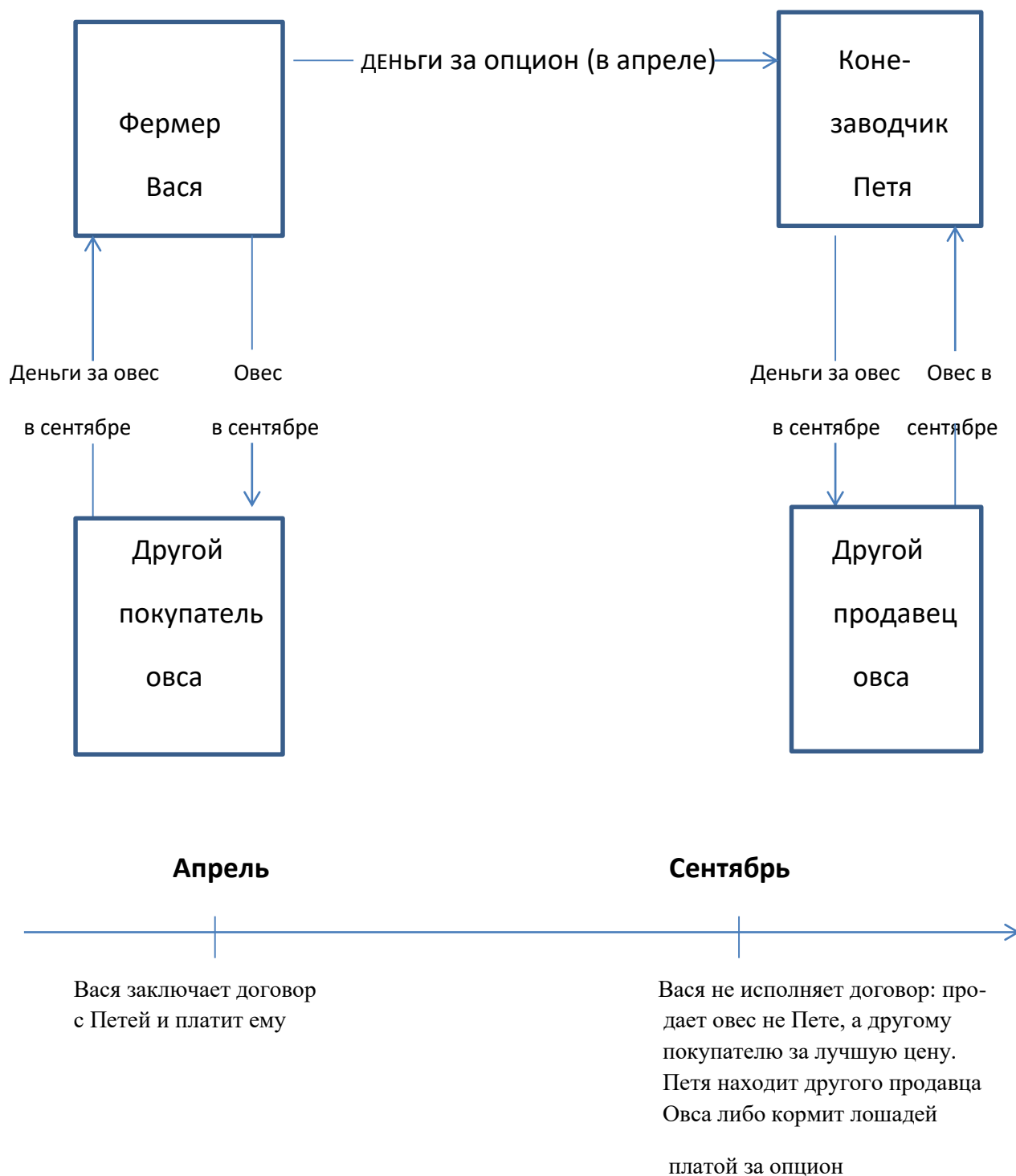


Рис.1.4. Схема опциона по варианту «НЕ ПРОДАЕМ»

своим правом на продажу, т.к. продавая овес Пете по цене 12 рублей за килограмм, Вася выручит 1200 тысяч рублей, что на 200 тысяч больше, чем сумма, которую он получил бы, продавая овес кому-либо еще по цене 10 рублей за килограмм. Правда «чистый» доход Васи от такого варианта составит только 100 тысяч, т.к. другие 100 тысяч он заплатил за опцион. Петя при таком варианте развития событий окажется в убытке из-за необходимости покупать овес на 2 рубля дороже, чем цена на рынке. Но 100 тысяч рублей за опцион подсластят «горькую пилюлю», и реальная потеря Пети составит только 100 тысяч рублей. То есть налицо принцип арбитража: доход Васи равен убытку Пети.

Теперь рассмотрим другой вариант развития событий. Предположим, что цена овса оказалась на 2 рубля выше, чем предполагали Вася и Петя. В этом случае Васе логичнее отказаться от продажи овса Пете, а продать его кому-нибудь еще по 14 рублей за килограмм (рис. 1.4). При таком развитии событий Вася теряет только 100 тысяч, уплаченных при покупке опциона. Соответственно выигрыш Пети составляет эти 100 тысяч. А овес он может купить у кого-либо еще или же у Васи, но по цене рынка 14 рублей за килограмм.

1.5. Свопы

Своп означает соглашение между участниками сделки, позволяющее совершать обмен активами или обязательствами и включающее два этапа: обмен ценностями и их возврат. При этом, в зависимости от вида активов свопы делятся на валютные, акционные, товарные. На рисунке 1.5. изображена схема товарного свопа.

Предположим, что наш знакомый фермер Вася, уставший от непостоянства доходов от продажи овса, заключил договор с банком в лице банкира Фимы на обмен своих непостоянных доходов на постоянные выплаты, заплатив за этот договор определенную премию. Часть денег, полученных от банкира Фимы, он потратил на приобретение либо ремонт

Своп: стабильный доход

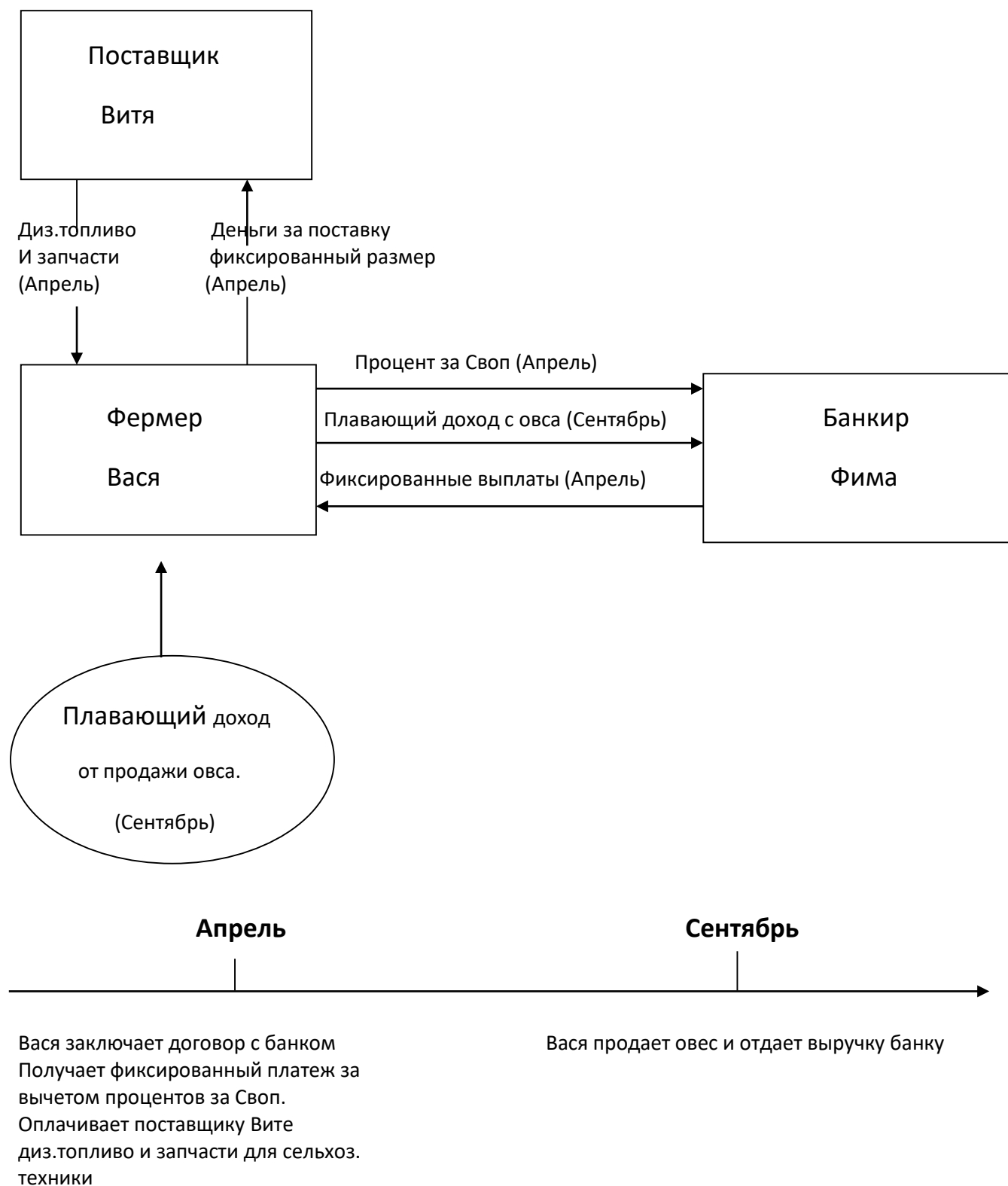


Рис. 1.5. Схема товарного свопа

сельскохозяйственной техники, закупку дизельного топлива, удобрения, семян и т.д. Оставшаяся часть (если такая оказалась) является «чистой прибылью» нашего фермера. Однако все, что в последствие получит Вася от продажи овса, станет собственностью банкира Фимы. Много или мало – никто пока не знает, но, видимо, Фима полагает, что не мало. Иначе он не стал бы рисковать, а просто выдал бы Васе кредит за вполне определенные проценты.

Из рассмотренных нами финансовых инструментов предметами торговли на российской бирже являются фьючерсы и опционы. Как мы уже выяснили, фьючерсы можно рассматривать как частный случай опционов, для которых исполнение контракта владельцем опциона является обязательным. Поэтому далее объектом нашего исследования будут опционы. При этом заметим, что опционы подразделяются на американские и европейские. Различие в том, что американские опционы могут быть исполнены в любой день до даты его закрытия, а европейские – строго в момент закрытия. Ниже мы рассмотрим методы оценки стоимости европейских опционов.

Глава 2. Модели оценки стоимости опционов

2.1. Модель Башелье

Основы теории оценки стоимости опционов были разработаны французским математиком Луи Жан Батистом Башелье (1870-1946) в его диссертации, представленной к защите в 1900 году. Это была уникальная работа, в которой впервые была предложена идея моделирования изменения стоимости ценных бумаг с помощью случайного процесса. Ученый рассматривал изменение цены акции за время t как случайную величину с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, пропорциональной времени t . При этом предполагалось, что изменение цены происходит в дискретные моменты времени kh , $k=1,2,\dots,n$. В каждый из этих моментов цена с вероятностью 0.5 либо возрастает, либо убывает на величину $\sigma\sqrt{h}$. Таким образом, стоимость акции в момент времени t определяется выражением [2]:

$$S_t = S + \sum_{j=1}^n \sigma \sqrt{h} \xi_j \quad (2.1)$$

где S – начальная цена акции, ξ_j – случайная величина, принимающая значения -1 и 1 с вероятностями 0.5 .

Переходя к пределу в (2.1) при $h \rightarrow 0$, получаем:

$$S_t = S + \sigma W_t \quad (2.2)$$

где W_t – броуновское движение или винеровский процесс.

Напомним, что процесс W_t называется винеровским, если:

1. $W_0 = 0$

2. W_t – процесс с независимыми приращениями

3. W_t имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной t .

Далее предположим, что у нас имеется опцион на покупку одной акции, цена которой в момент времени t равна S_t , со сроком исполнения T и ценой исполнения K . Очевидно, что цена опциона в момент времени t равна:

$$C(t) = \max\{0; S_t - K\}$$

Или с учетом (2.2) получаем:

$$C(t) = \max\{0; S + \sigma W_t - K\}$$

Определим стоимость опциона на момент исполнения как математическое ожидание с.в. $C(t)$ на момент времени T , учитывая, что W_t имеет нормальное распределение с параметрами 0 и \sqrt{t} :

$$C(T) = \int \max\{0; S + \sigma\sqrt{t} x - K\} \varphi(x) dx,$$

где $\varphi(x)$ – плотность стандартного нормального закона.

Вычисляя интеграл, окончательно получаем:

$$C(T) = (S - K) \Phi((S - K)/(\sigma\sqrt{T})) - \sigma\sqrt{T} \varphi((S - K)/(\sigma\sqrt{T})),$$

где $\Phi(x)$ – функция распределения стандартного нормального закона.

Однако, несмотря на всю гениальность модели, формула Башелье имела свои недостатки. Во-первых, в ней не дисконтируется стоимость исполнения K , т.е. предполагается, что ставка наращения равна нулю на протяжении всего срока исполнения опциона. Во-вторых, предположение о нормальном распределении цены акции означает, что эта цена может принимать, в том числе, и отрицательные значения, чего в действительности быть не может.

2.2. Формулы Спренкла, Бонесса и Самуэльсона

К модели Башелье вернулись спустя 60 лет. В 1961 году американский экономист Кейс М. Спренкл заметил, что блуждание цен акций более

адекватно описывает не нормальное, а логнормальное распределение, т.е. нормальному распределению подчиняется изменение не самой цены акции, а ее логарифма. Кроме этого, было замечено, что более точно блуждание цен моделирует не арифметическое, а геометрическое броуновское движение, при котором цена изменяется не путем прибавления, а путем умножения предыдущей цены на некий коэффициент, который был определен как темп роста курса акции. В результате была выведена следующая формула для определения оценки стоимости опциона колл [3]:

$$C(T) = e^{\dot{p}T} S\Phi(d_1) - (1-a) K\Phi(d_2), \quad (2.3)$$

где \dot{p} - темп роста курса акции, a – коэффициент неприятия риска, а d_1 и d_2 определялись по формулам:

$$d_1 = (\ln(S/K) + (\dot{p} + \sigma^2/2)T)/(\sigma\sqrt{T}) \quad (2.4)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (2.5)$$

Не совсем понятным в формуле (2.3) был коэффициент неприятия риска a . Интуитивно его смысл ясен, но к единой методике его определения специалисты не пришли. В последствие в расчетах им стали пренебрегать, полагая равным нулю.

Следующей модификации формула стоимости опциона колл подверглась в 1964 году в работе Бонесса [4]. Он учел зависимость стоимости денег от времени и дисконтировал стоимость опциона колл по ставке непрерывного наращения, равной темпу роста курса акций \dot{p} , т.е фактически умножил левую и правую часть формулы (2.3) на $e^{-\dot{p}T}$. В итоге дисконтированная стоимость опциона стала вычисляться по формуле:

$$C(T) = S\Phi(d_1) - e^{-\dot{p}T} K\Phi(d_2) \quad (2.6)$$

В 1965 году американский ученый Пол Самуэльсон, ставший в последствии Нобелевским лауреатом по экономике, учел возможное различие

в темпе роста стоимости акции \dot{r} и темпе роста стоимости опциона, который мы обозначим через β . В итоге формула (2.6) была преобразована в формулу [5]:

$$C(T) = e^{(\dot{r}-\beta)T} S\Phi(d_1) - e^{-\beta T} K\Phi(d_2) \quad (2.7)$$

Сложность практического применения формулы (2.7) состоит в том, что ни параметр \dot{r} ни параметр β не наблюдается на рынке, а методики их определения носят субъективный характер. Но данная формула стала основой для дальнейшего движения вперед.

2.3. Модель Блэка-Шоулза

В 1973 году американскими учеными Блэком Фишером и Шоулзом Майроном была опубликована статья, в которой они предложили принципиально иной подход к оценке стоимости опциона. Суть их идеи состояла в том, чтобы стоимость опциона рассчитывать, как стоимость портфеля, приносящего такой же доход, и составленного из акций, являющихся предметом опциона, и безрисковых ценных бумаг. В итоге была получена формула [6]:

$$C(T) = S\Phi(d_1) - e^{-\delta T} K\Phi(d_2), \quad (2.8)$$

где δ - ставка непрерывного наращения (сила роста) безрискового актива, а d_1 и d_2 определяются по формулам:

$$d_1 = (\ln(S/K) + (\delta + \sigma^2/2)T)/(\sigma\sqrt{T}) \quad (2.9)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (2.10)$$

Заметим, что формулы (2.9) - (2.10) совпадают с (2.4) - (2.5), с точностью до замены темпа роста акции \dot{r} на силу роста безрискового актива δ .

Наряду с формулой стоимости опциона колл была получена формула для стоимости опциона пут:

$$P = e^{-\delta T} K \Phi(-d_2) - S \Phi(-d_1), \quad (2.11)$$

Между стоимостями опционов колл и пут существует очевидная связь:

$$P = e^{-\delta T} K - S + C \quad (2.12)$$

Преимущество формулы Блэка–Шоулза, по сравнению с рассмотренными моделями состоит в том, что стоимость опциона не связана со степенью неприятия риска, а зависит лишь от параметра σ , характеризующего волатильность акции в предшествующий период времени. Этот параметр нетрудно определить, имея историю торгов.

Однако в методе Блэка–Шоулза есть один существенный недостаток. Дело в том, что основные результаты определяются путем решения дифференциальных уравнений. Не для всех производных финансовых инструментов решения этих уравнений имеет явный вид, как в случае со стоимостью опционов. Часто при решении дифференциальных уравнений приходится ограничиваться численными методами. Поэтому через несколько лет после того, как Блэк и Шоулз опубликовали свои результаты, Кокс и Росс предложили новый метод оценки стоимости опционов, основанный на дискретной модели ценообразования, который фактически позволил дифференциальные уравнения заменить на разностные.

2.4. Модель Кокса-Росса-Рубинштейна

Модель Кокса-Росса-Рубинштейна также имеет название CRR-модели по первым буквам фамилий ее авторов. Для краткости мы тоже будем использовать это название. Итак, CRR-модель построена на двух предположениях:

1) изменение цены акции происходит в дискретные моменты времени и при этом цена либо увеличивается в $u=e^{\omega}$ раз, либо уменьшается в $d=e^{-\omega}$ раз, причем первое событие происходит с вероятностью p , а второе – с вероятностью $1-p$.

2) доходность финансовых активов и ставка дисконтирования приравниваются к ставке непрерывного наращения δ .

Другими словами, цена акции блуждает по биномиальному дереву (рис. 2.1). При этом ее курс на каждом шаге переходит в одно из двух возможных состояний. Данное предположение позволяет рассчитать стоимость акции через любое конечное число шагов.

Предположим, что мы имеем опцион колл на покупку одной акций со сроком исполнения T и ценой исполнения K .

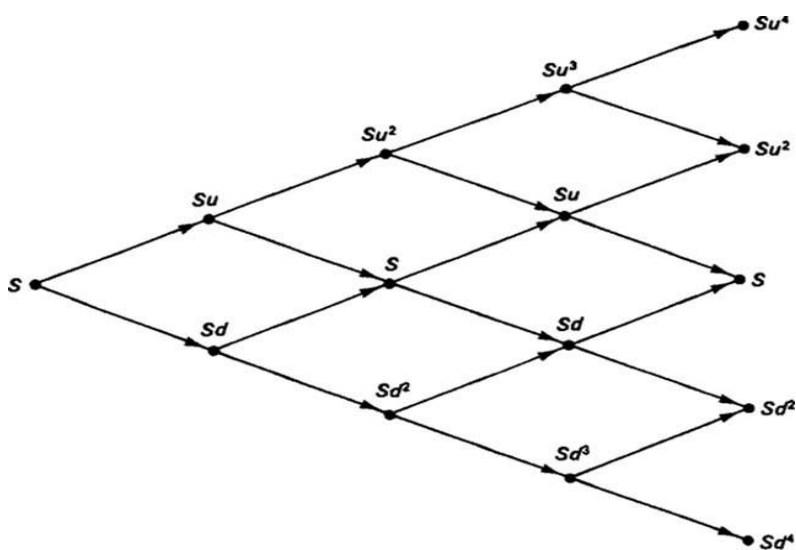


Рис.2.1. Траектория блуждания цены актива

Введем следующие обозначения:

S – стоимость акции в начальный момент времени;

$C(0)$ – стоимость опциона в момент заключения договора;

$C(T)$ – стоимость опциона в момент исполнения

Предположим, что между моментом заключения договора и сроком его исполнения изменение цены акции происходит один раз. В этом случае приращение ее стоимости определится выражением:

$$Se^{\delta T} - S = p(Su - S) + (1-p)(Sd - S) \quad (2.13)$$

Из (2.13) получаем:

$$p = (e^{\delta T} - d)/(u - d) \quad (2.14)$$

Заметим, что стоимость акции $S(T)$ можно рассматривать как случайную величину (с.в.), принимающую значения Su и Sd с вероятностями p и $(1-p)$ соответственно. Математическое ожидание этой случайной величины фактически и есть стоимость опциона в момент времени T :

$$C(T) = pSu + (1-p)Sd \quad (2.15)$$

С другой стороны, продавая акцию в момент времени T по цене исполнения K , мы получаем доход:

$$C(0) = C(T) - K \quad (2.16)$$

или с учетом (2.15):

$$C(0) = pSu + (1-p)Sd - K \quad (2.17)$$

Для того, чтобы воспользоваться формулой (2.17), нам следует найти оценки параметров u и d . Причем,

$$u = e^{\omega}, \quad (2.18)$$

а

$$d = e^{-\omega} \quad (2.19)$$

Следовательно, нам нужна оценка параметра ω . Ясно, что эта величина может быть оценена статистически по результатам наблюдения за курсом акции в предшествующий период. Предположим, что мы вычислили

волатильность акции. В таком случае нам известна оценка дисперсии с.в. $S(T)$. Выписав выражение для дисперсии этой с.в., мы получим уравнение для определения оценки параметра ω , т.к. этот параметр является единственным неизвестным в нашем равенстве. Опуская длинные, но несложные выкладки, приведем окончательный результат:

$$\omega = \sigma\sqrt{T} \quad (2.20)$$

Таким образом, стоимость опциона колл может быть определена по формуле:

$$C(0) = pSe^{\sigma\sqrt{T}} + (1-p)Se^{-\sigma\sqrt{T}} - K, \quad (2.21)$$

где

$$p = (e^{-\delta T} - e^{-\sigma\sqrt{T}}) / (e^{\sigma\sqrt{T}} - e^{-\sigma\sqrt{T}}) \quad (2.22)$$

Однако заметим, что формула (2.21) может служить лишь для грубой оценки стоимости опциона, т.к. она получена в предположении, что за время T произошло только одно изменение стоимости акции. Эта формула является отправной точкой для расчета, который может учитывать любое количество изменений стоимости на интервале $[0, T]$. Используя метод обратной индукции, отражающий пошаговое движение от кроны биномиального дерева к его корню, авторы CRR-модели получили следующий результат:

$$C(0) = (\sum_{j=0}^n C_n^j p^j (1-p)^{n-j} \max\{0, u^j d^{n-j} S - K\}) e^{-\delta n}, \quad (2.23)$$

где C_n^j - число сочетаний из n по j , а все остальные величины имеют прежний смысл.

Глава 3. Примеры расчета стоимости опционов

3.1. Расчет стоимости опциона колл на покупку акций ПАО «Сбербанк» с помощью модели Блэка-Шоулза

Приведем примеры расчета стоимости опционов колл и пут на примерах покупки акций ведущих российских компаний, используя данные информационно-аналитического портала БКС-экспресс [10]. Для начала рассчитаем стоимость опциона колл на покупку акций ПАО «Сбербанк» (рис.3.1.).

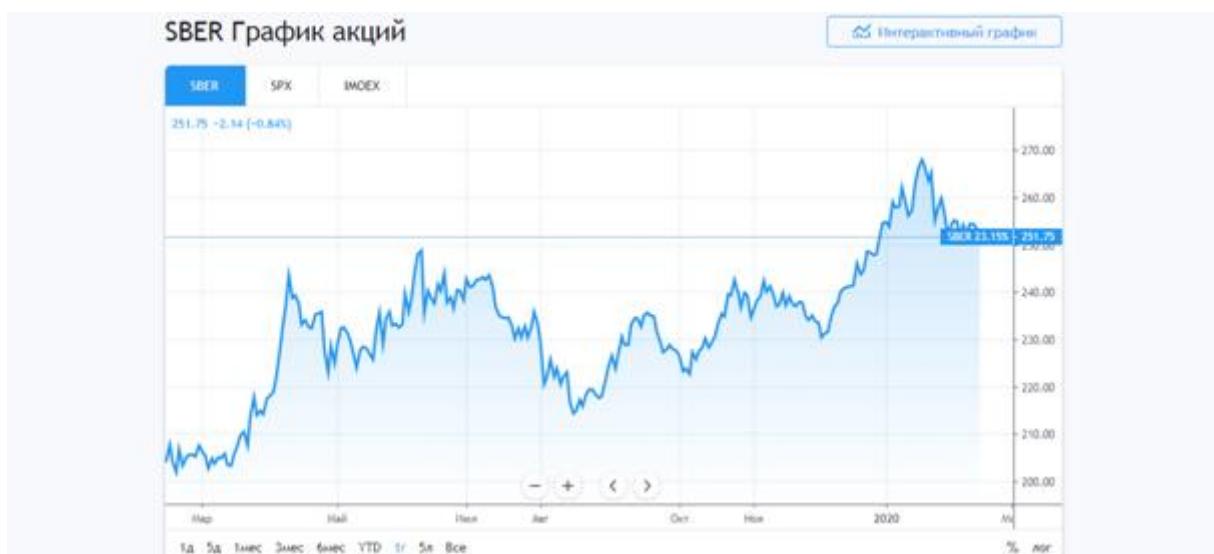


Рис. 3.1. График динамики цен на акции ПАО «Сбербанк» во второй половине 2019 года

Предположим, что топ-менеджер Сбербанка некто господин Иванов И.И. получил в качестве премии от руководства компании опцион на покупку через 5 лет 10000 акций Сбербанка по цене 280 рублей за акцию. Сегодня акции Сбербанка продаются по цене 252 рубля, а их волатильность на рынке в 2019 году составила 2,4 % в день (данные [10] на 15.02.2020). В действительности это достаточно типичная ситуация, т.к. такой «подарок» стимулирует топ-менеджера к хорошей работе. Ведь если через 5 лет цена акций, к примеру, удвоится и окажется равной 500 рублей за акцию, а Иванов И.И. купит их по цене 280 рублей, то его прибыль с 10000 акций составит 2 млн. 200 тысяч

рублей. Однако Иванов И.И. не захотел ждать 5 лет и решил продать этот опцион некому господину Петрову П. П. Возникает естественный вопрос: какова цена этого опциона?

Постараемся ответить на поставленный вопрос, используя формулу Блэка-Шоулза (2.8). Для этого у нас имеются следующие данные:

- количество акций $n=10000$ шт.;
- временной период $T=5$ лет;
- цена базового актива $S=252$ рубля;
- цена исполнения (страйк-цена) $K=280$ рублей;
- волатильность акций Сбербанка в 2019 году $\sigma=0.38$;
- сила роста $\delta=0,061$ или 6,1%.

По-поводу последних двух параметров требуется небольшое пояснение.

Как уже было сказано выше, дневная волатильность составила 2,4%. В году 252 биржевых дня. Следовательно, годовую волатильность σ можно приблизительно определить по формуле:

$$\sigma = \sqrt{252} * 0,024 = 0,38.$$

Поскольку расчет мы производим сегодня, а предполагаемая цена исполнения имеет отношение к будущему, мы должны дисконтировать эту цену на сегодняшний день, т.е. «подтянуть» ее на 5 лет назад. При этом заметим, что формула Блэка-Шоулза предполагает дисконтирование в непрерывном времени. Другими словами, нам нужна ставка непрерывного наращения, т.е. сила роста. В качестве отправной точки для вычисления силы роста обычно рассматривают годовую ставку наращения по безрисковым активам. В качестве таких активов, как правило, берут облигации федерального займа (ОФЗ). На сегодняшний день годовая ставка наращения

по ОФЗ равна 6,3 % (можно поступить ещё проще – взять ставку рефинансирования 6,0 %). Но мы рассмотрим первый вариант, т.е. возьмем ставку наращивания $i=0,063$ и, используя уравнение эквивалентности:

$$1+i = \exp\{\delta\}$$

найдем силу роста δ :

$$\delta = \ln(1+i) = \ln(1,063) = 0,061.$$

Теперь мы полностью готовы к применению формулы Блэка-Шоулза. В соответствии с (2.9) и (2.10) вычисляем:

$$d_1 = (\ln(252/280) + (0,061 + (0,38^2)/2)*5)/(0,38 * 5^{0.5}) = 0,32$$

$$d_2 = 0,32 - 0,38 * \sqrt{5} = -0,53$$

По таблице значений функции распределения $\Phi(t)$ стандартного нормального распределения находим:

$$\Phi(d_1) = 0,6255$$

$$\Phi(d_2) = 0,2981$$

И, наконец, в соответствии с (2.8) определяем стоимость опциона колл для одной акции:

$$C = 252*0,6255 - 280* \exp\{-0,061*5\}*0,2981 = 96,11 \text{ руб.}$$

Соответственно для пакета из 10000 акций стоимость опциона равна 961 тысяча 100 рублей.

3.2. Расчет стоимости опционов пут и колл в соответствии с формулой Блэка-Шоулза на примере акций ПАО «Нижнекамскнефтехим»

Согласно данным портала БКС-экспресс [10], наиболее доходными в 2019 году стали акции ПАО «Нижнекамскнефтехим». Рост котировок составил

110,07%. При этом волатильность акций в 2019 году оказалась равной 15,82% (расчет волатильности в Приложении 3). Сегодня акции ПАО «Нижнекамскнефтехим» продаются по цене 110 рублей 45 копеек (рис. 3.2). По мнению аналитиков, цена акций достигла максимума и в дальнейшем предполагается ее падение. Другими словами, имеются предпосылки для покупки опциона на продажу (опциона пут). Рассчитаем стоимость опциона со сроком исполнения 5 лет и ценой исполнения 120 рублей за акцию.

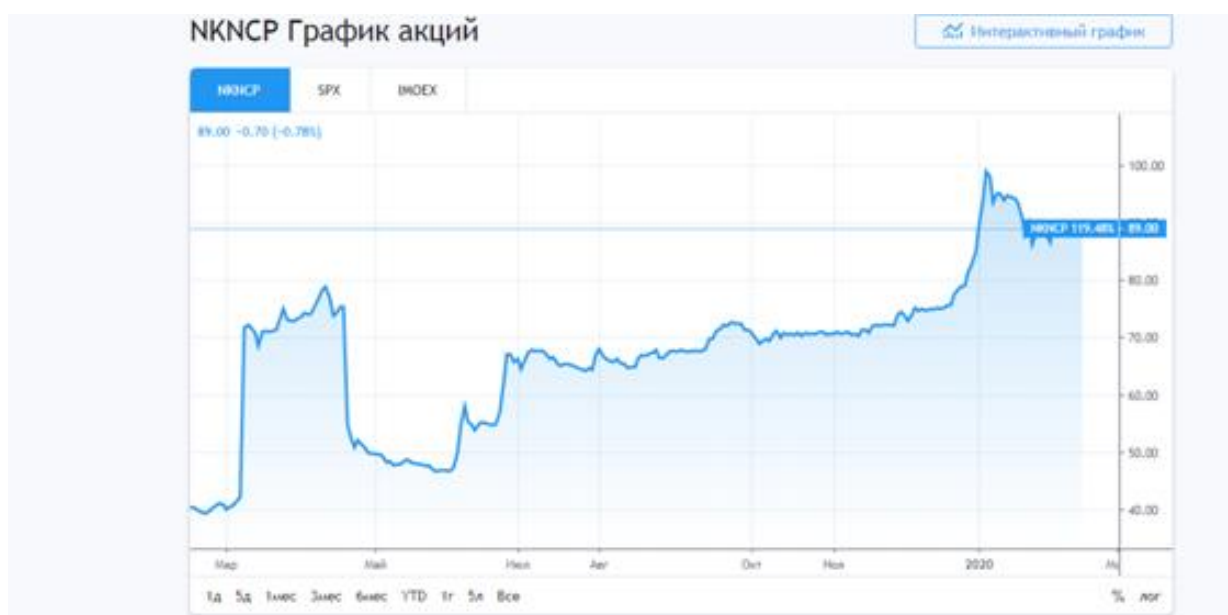


Рис. 3.2. График динамики цен на акции ПАО «Нижнекамскнефтехим» во второй половине 2019 года

Исходные данные для расчета:

- количество акций $n=10000$ шт.;
- временной период $T=5$ лет;
- цена базового актива $S=110,45$ рубля;
- цена исполнения (страйк-цена) $K=120$ рублей;
- волатильность акций σ в 2019 году равна 0,1582 (в расчетах возьмем округленное значение $\sigma=0,16$);

- сила роста $\delta=0,061$ или 6,1%.

В соответствии с формулами (2.9) и (2.10) вычисляем:

$$d_1 = (\ln(110,45/120) + (0,061 + (0,16^2)/2)*5)/(0,16 * 5^{0.5}) = 0,801$$

$$d_2 = 0,801 - 0,16 * \sqrt{5} = 0,444$$

По таблице значений функции распределения $\Phi(t)$ стандартного нормального распределения находим:

$$\Phi(d_1) = 0,7910; \Phi(-d_1) = 0,2090$$

$$\Phi(d_2) = 0,6700; \Phi(-d_2) = 0,3300$$

И, наконец, в соответствии с (2.11) определяем стоимость опциона пут для одной акции:

$$P = 120 * \exp\{-0,061*5\} * 0,3300 - 110,45 * 0,2090 = 6,18$$

Чтобы проверить наши расчеты, вычислим стоимость опциона пут через стоимость опциона колл. Согласно формуле (2.8), получаем:

$$C = 0,7910 * 110,45 - 0,6700 * 120 * \exp\{-0,061*5\} = 28,11$$

Далее, используя формулу связи (2.12) между стоимостями опционов пут и колл, получаем:

$$P = 120 * \exp\{-0,061*5\} - 110,45 + 28,11 = 6,18$$

Соответственно для пакета из 10000 акций стоимость опциона пут равна 61 тысяча 180 рублей, а опциона колл - 281 тысяча 100 рублей.

Если предположить, что стоимость акций за пять лет будет только снижаться в среднем на 16 % в год, то концу срока средняя цена акции опустится до $110,45 * 0,84^5 = 46,19$ руб. за акцию. Следовательно, при продаже 10000 акций по цене 120 рублей «грязный» доход составит $10000 * (120 - 46,19) = 738$ тысяч 100 рублей. Вычитая стоимость опциона пут, получим «чистый»

доход: $738100 - 61180 = 676$ тысяч 920 рублей. Понятно, что стоимость акции не может только лишь снижаться. Однако, есть повод задуматься о том, стоит ли торопиться с продажей опциона.

3.3. Оценка стоимости опциона колл на покупку акций ПАО «Нижнекамскнефтехим» в соответствии с одношаговой моделью Кокса-Росса-Рубинштейна

Оценим стоимость опциона колл на покупку акций ПАО «Нижнекамскнефтехим», рассмотренного в предыдущем разделе, с помощью одношаговой модели Кокса-Росса-Рубинштейна. Согласно формулам (2.18) – (2.20), определяем величины возможного прироста и падения акции:

$$u = \exp\{0.16 \cdot \sqrt{5}\} = 1,431;$$

$$d = \exp\{-0.16 \cdot \sqrt{5}\} = 0,699;$$

Далее, в соответствии с (2.22) находим вероятность изменения курса акции:

$$p = (\exp\{0,061 \cdot 5\} - 0,699) / (1,431 - 0,699) = 0,897$$

По формуле (2.21) вычисляем ожидаемую стоимость опциона колл:

$$C(0) = 110,45 \cdot (0,897 \cdot 1,431 + (1 - 0,897) \cdot 0,699) - 120 = 29,54$$

Заметим, что эта величина, является лишь предварительной оценкой стоимости опциона. С ростом числа шагов в модели Кокса-Росса-Рубинштейна эта оценка должна приблизиться к стоимости опциона 28,11, рассчитанной по формуле Блэка-Шоулза. Однако реализация многошаговой CCR-модели будет предметом нашего дальнейшего исследования.

Заключение

Проблеме математического анализа рынка производных финансовых инструментов посвящено большое количество работ. Одновременно с этим ощущается дефицит материалов, в которых столь сложная, но интересная проблема излагается простым языком, понятным для аудитории, не имеющей серьезной подготовки ни в области финансов, ни в области теории случайных процессов. В связи с этим передо мною была поставлена задача – изложить имеющийся материал по данной теме системно и доступно. Несмотря на то, что основная часть этой работы носила реферативный характер, материал потребовал глубокого осмысления и серьезной переработки. В итоге я постаралась достаточно сложные вопросы изложить в доступной форме на простых примерах.

В первой главе были рассмотрены основные производные финансовые инструменты, даны их определения, описаны характерные черты, приведены примеры, разработаны структурно-временные схемы, отображающие поведение участников рынка.

Во второй главе были исследованы математические модели оценки стоимости опционов в соответствии с историей их развития, начиная с работы Башелье, в которой впервые было предложено моделировать изменение цен на финансовые активы с помощью броуновского движения, и заканчивая моделями Блэка-Шоулза и Кокса-Росса-Рубинштейна, которые до сих пор активно используются финансовыми аналитиками всего мира.

В третьей главе с помощью моделей Блэка-Шоулза и Кокса-Росса-Рубинштейна были произведены расчеты стоимостей опционов на покупку и продажу акции ПАО «Сбербанк» и «Нижнекамскнефтехим» и даны соответствующие прогнозы на будущее. Расчеты производились на основе актуальных данных информационно-аналитического портала БКС-экспресс.

Список литературы

1. Мельников, А.В. Математические методы финансового анализа / А.В. Мельников, Н.В. Попова, В.С. Скорнякова. – М.: Анкил, 2006. – 440 с. Risk-Neutral Approach to Options Assessment and Possibilities.
2. Bachelier, L. Theory of Speculation in Cootner (ed.) / L. Bachelier // The Random Character of Stock Prices. – Cambridge: MIT, 1964. – P. 71–78.
3. Sprenkle, C.M. Warrant Prices as indicators of expectations and preferences / C.M. Sprenkle // in Cootner (ed.) The Random Character of Stock Prices. – Cambridge: MIT, 1964. – P. 412–474.
4. Boness, A.J. Elements of a theory of stock-option value / A.J. Boness // Journal of Political Economy. – 1984. – № 72. – P. 163–175
5. Samuelson, P.A. Rational theory of warrant prices / P.A. Samuelson // Industrial Management Review. – 1965. – Vol. 6. – № 6. – P. 13–31.
6. Black, F. Scholes, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities / F. Black, M. Scholes // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81. – P. 637–654.
7. Cox J.C., Ross R.A., Rubinstein M. Option pricing a simplified approach. // Journal of Financial Economics. 1976. V.7 (September). P.229-263.
8. Merton, R. Theory of Rational Option Pricing / R. Merton // Bell Journal of Economics and Management Science. – 1973. – Vol. 4. – P. 141–183.
9. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1,2. // М.: ФАЗИС, 1998.
10. www.bcs-express.ru – информационно-аналитический портал БКС-экспресс.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Годовая отчетность по акциям ПАО «СБЕРБАНК»

Оценка стоимости

Рыночная капитализация **5655.69B**
Стоимость компании (MRQ) **4603.24B**
Стоимость компании/EBITDA (TTM)—
Всего акций в обращении (MRQ) **22.466B**
Количество сотрудников **293.752K**
Количество акционеров—
Цена/Прибыль (TTM) **6.4552**
Цена/Выручка (TTM) **1.7278**
Цена/Баланс. стоимость (FY) **1.4807**
Цена/Объем продаж (FY) **1.7939**

Балансовый отчет

Коэфф. быстрой ликвидности (MRQ)—
Коэфф. текущей ликвидности (MRQ) **0.4407**
Задолженность/Акционерный капитал (MRQ) **0.5561**
Чистая задолженность (MRQ) **-513.9B**
Итого задолженность (MRQ) **2365.8B**
Итого активы (MRQ) **30254.2B**

Операционные показатели

Прибыль на общ. сумму активов (TTM) **0.0297**
Доход на капитал (TTM) **0.2237**
Прибыль на инвестиции (TTM) **0.1781**
Выручка на одного работника (TTM) **10.824M**

Динамика цен

Средний объем (10 дн.) **29.386M**
Бета — 1 год **0.7394**
Максимум за 52 недели **270.8000**
Минимум за 52 недели **201.1000**

Дивиденды

Выплачено дивидендов (FY) **-268.5B**
Дивидендный доход (FY) **6.3555**
Дивиденды на акцию (FY) **16**

Рентабельность

Чистая рентабельность (TTM) **0.2680**
Валовая рентабельность (TTM)—
Операционная рентабельность (TTM) **33.5757**
Доналоговая рентабельность (TTM) **0.3358**

Отчет о доходах

Баз. прибыль на акцию (FY)**36.5537**
Баз. прибыль на акцию (TTM)**39.3312**
Разводн. приб./акцию (FY)**36.5537**
Чистый доход (FY)**832.9B**
EBITDA (TTM)—
Валовая прибыль (MRQ)—
Валовая прибыль (FY)—
Выручка за посл. год (FY)**3179.5B**
Общая выручка (FY)**3179.5B**

Движение своб. денежных средств (TTM)

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Годовая отчетность по акциям NCNCP ПАО

«Нижекамскнефтехим»

Оценка стоимости

Рыночная капитализация **162.892B**
Стоимость компании (MRQ) **44.308B**
Стоимость компании/EBITDA (TTM) **1.7426**
Всего акций в обращении (MRQ) **1.83B**
Количество сотрудников —
Количество акционеров **8.391K**
Цена/Прибыль (TTM) **5.8839**
Цена/Выручка (TTM) **0.8339**
Цена/Баланс. стоимость (FY) **1.0393**
Цена/Объём продаж (FY) **0.8469**

Балансовый отчет

Коэфф. быстрой ликвидности (MRQ) **0.8495**
Коэфф. текущей ликвидности (MRQ) **5.0415**
Задолженность/Акционерный капитал (MRQ) **0.2801**
Чистая задолженность (MRQ) **10.69B**
Итого задолженность (MRQ) **38.298B**
Итого активы (MRQ) **192.67B**

Операционные показатели

Прибыль на общ. сумму активов (TTM) **0.1543**
Доход на капитал (TTM) **0.1988**
Прибыль на инвестиции (TTM) **0.1755**
Выручка на одного работника (TTM) —

Динамика цен

Средний объём (10 дн.) **17.36K**
Бета — 1 год **1.0552**
Максимум за 52 недели **103.7600**
Минимум за 52 недели **39.2000**

Дивиденды

Выплачено дивидендов (FY) **-25M**
Дивидендный доход (FY) **22.4045**
Дивиденды на акцию (FY) **19.9400**

Рентабельность

Чистая рентабельность (TTM) **0.1417**
Валовая рентабельность (TTM) **0.2485**
Операционная рентабельность (TTM) **17.3356**
Доналоговая рентабельность (TTM) **0.1799**

Отчет о доходах

Баз. прибыль на акцию (FY)**13.4895**

Баз. прибыль на акцию (TTM)**15.2450**

Разводн. приб./акцию (FY)**13.4895**

Чистый доход (FY)**24.689B**

EBITDA (TTM)**39.927B**

Валовая прибыль (MRQ)**7.633B**

Валовая прибыль (FY)**45.729B**

Выручка за посл. год (FY)**193.859B**

Общая выручка (FY)**193.859B**

Движение своб. денежных средств (TTM)**6.724B**

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Расчет волатильности акций НКНСП

Цена акций в 2019 году:

Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
65,40	63,40	87,40	65,80	67,40	74,85
64,80	65,00	86,80	66,00	67,00	76,50
64,60	65,00	87,00	66,60	67,10	76,85
64,60	65,20	88,60	66,80	67,10	73,00
65,00	65,00	87,60	68,40	66,85	71,15
65,40	65,20	87,00	65,80	66,10	69,75
66,20	64,40	86,20	69,80	65,80	69,75
65,20	65,00	87,40	71,00	65,80	69,55
65,80	65,20	87,80	88,80	66,00	69,50
65,80	64,80	87,20	88,00	65,90	69,45
66,00	64,80	82,80	87,60	66,00	68,85
66,00	64,60	82,60	88,40	65,90	69,50
65,80	64,80	85,20	88,00	65,60	68,40
65,00	64,80	84,60	87,80	65,35	68,35
65,20	64,40	90,00	86,60	65,90	67,50
65,40	65,00	62,60	87,00	64,75	70,86
65,20	64,60	62,00	87,40	65,20	
64,80	64,80	63,60	87,40	65,30	
65,20	64,80	64,00	87,20	65,00	
65,00	65,00	64,60	87,80	66,00	
65,32	64,79	80,75	88,00	65,65	
			87,80	65,99	
			80,36		
Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь
73,60	84,00	94,75	96,55	94,40	96,85
73,20	83,70	93,55	97,00	93,95	96,20
73,20	82,35	94,00	96,90	93,00	95,50
73,85	78,95	94,00	97,10	92,95	95,55
74,10	81,00	92,90	95,55	91,60	95,70
74,45	80,50	93,00	96,25	91,75	96,20
75,45	78,05	93,10	98,00	91,10	96,10
75,35	76,30	95,90	97,85	93,55	96,35
75,10	75,00	97,60	99,00	93,75	96,35
74,30	74,80	97,40	99,95	93,40	96,40
74,00	74,50	93,30	99,85	92,50	96,70
73,70	72,60	95,30	99,55	92,60	96,40
73,80	74,35	89,35	99,80	92,70	95,40
72,70	74,60	87,00	101,00	94,55	95,60
73,05	74,95	85,25	95,55	94,75	95,90
73,00	75,60	85,15	100,70	95,65	95,95
72,00	76,10	84,15	99,95	96,80	95,90
72,75	75,05	84,35	97,00	96,00	93,50
73,55	75,20	85,20	97,45	95,75	94,85
73,25	74,75	83,50	96,30	97,00	93,05

72,75	74,30	84,00	94,10	93,89	91,16
73,25	74,75	90,61	94,80		
74,70	76,88		94,90		
73,70			97,61		

Месяц	1	2	3	4	5	6
Дней	20	20	20	22	21	15
Среднее	65,32	64,79	80,75	80,36	65,99	70,86
Ср.*дн	1306,4	1295,8	1615	1767,92	1385,79	1062,9

Месяц	7	8	9	10	11	12	Итого
Дней	23	22	21	23	20	20	247
Среднее	73,7	76,88	90,61	97,61	93,89	91,16	79,63202
Ср.*дн	1695,1	1691,36	1902,81	2245,03	1877,8	1823,2	19669,11

Цена	Кв.откл.	Цена	Кв.откл.	Цена	Кв.откл.	Цена	Кв.откл.
65,40	202,5504	64,60	225,9616	73,20	41,37088	84,15	20,41214
64,80	219,9888	65,80	191,3248	73,20	41,37088	84,35	22,25934
64,60	225,9616	66,00	185,832	73,85	33,43176	85,20	31,0024
64,60	225,9616	66,60	169,8335	74,10	30,60325	83,50	14,96127
65,00	214,096	66,80	164,6607	74,45	26,85333	84,00	19,07925
65,40	202,5504	68,40	126,1583	75,45	17,48929	96,55	286,218
66,20	180,4192	65,80	191,3248	75,35	18,3357	97,00	301,6467
65,20	208,2832	69,80	96,66862	75,10	20,53921	96,90	298,1831
65,80	191,3248	71,00	74,51177	74,30	28,43044	97,10	305,1303
65,80	191,3248	88,80	84,05186	74,00	31,71965	95,55	253,3821
66,00	185,832	88,00	70,02309	73,70	35,18886	96,25	276,1573
66,00	185,832	87,60	63,48871	73,80	34,01246	98,00	337,3827
65,80	191,3248	88,40	76,87747	72,70	48,0529	97,85	331,8948
65,00	214,096	88,00	70,02309	73,05	43,32299	99,00	375,1186
65,20	208,2832	87,80	66,7159	73,00	43,98369	99,95	412,8203
65,40	202,5504	86,60	48,55275	72,00	58,24773	99,85	408,7667
65,20	208,2832	87,00	54,28713	72,75	47,3622	99,55	396,7259
64,80	219,9888	87,40	60,34151	73,55	36,99097	99,80	406,7474
65,20	208,2832	87,40	60,34151	73,25	40,73018	101,00	456,5906
65,00	214,096	87,20	57,27432	72,75	47,3622	95,55	253,3821
63,40	263,4785	87,80	66,7159	73,25	40,73018	100,70	443,8598
65,00	214,096	88,00	70,02309	74,70	24,32482	99,95	412,8203
65,00	214,096	87,80	66,7159	84,00	19,07925	97,00	301,6467
65,20	208,2832	67,40	149,6223	83,70	16,54846	97,45	317,4804
65,00	214,096	67,00	159,5679	82,35	7,387415	96,30	277,8216
65,20	208,2832	67,10	157,0515	78,95	0,465151	94,10	209,3224
64,40	232,0144	67,10	157,0515	81,00	1,871369	94,80	230,0676
65,00	214,096	66,85	163,38	80,50	0,753389	94,90	233,1112
65,20	208,2832	66,10	183,1156	78,05	2,502787	94,40	218,0932
64,80	219,9888	65,80	191,3248	76,30	11,10236	93,95	205,0046
64,80	219,9888	65,80	191,3248	75,00	21,45561	93,00	178,7029
64,60	225,9616	66,00	185,832	74,80	23,34842	92,95	177,3686
64,80	219,9888	65,90	188,5684	74,50	26,33763	91,60	143,2325

64,80	219,9888	66,00	185,832	72,60	49,44931	91,75	146,8454
64,40	232,0144	65,90	188,5684	74,35	27,89974	91,10	131,5146
65,00	214,096	65,60	196,8976	74,60	25,32123	93,55	193,7102
64,60	225,9616	65,35	203,9761	74,95	21,92131	93,75	199,3174
64,80	219,9888	65,90	188,5684	75,60	16,25719	93,40	189,5573
64,80	219,9888	64,75	221,4745	76,10	12,47517	92,50	165,5849
65,00	214,096	65,20	208,2832	75,05	20,99491	92,60	168,1685
87,40	60,34151	65,30	205,4068	75,20	19,6428	92,70	170,7721
86,80	51,37994	65,00	214,096	74,75	23,83412	94,55	222,5461
87,00	54,28713	66,00	185,832	74,30	28,43044	94,75	228,5533
88,60	80,42467	65,65	195,4969	74,75	23,83412	95,65	256,5757
87,60	63,48871	74,85	22,86772	94,75	228,5533	96,80	294,7395
87,00	54,28713	76,50	9,809549	93,55	193,7102	96,00	267,9108
86,20	43,13836	76,85	7,739635	94,00	206,4388	95,75	259,7893
87,40	60,34151	73,00	43,98369	94,00	206,4388	97,00	301,6467
87,80	66,7159	71,15	71,94466	92,90	176,0393	96,85	296,4588
87,20	57,27432	69,75	97,65432	93,00	178,7029	96,20	274,498
82,80	10,0361	69,75	97,65432	93,10	181,3865	95,50	251,7928
82,60	8,808905	69,55	101,6471	95,90	264,6472	95,55	253,3821
85,20	31,0024	69,50	102,6578	97,60	322,8483	95,70	258,18
84,60	24,68083	69,45	103,6735	97,40	315,7011	96,20	274,498
90,00	107,495	68,85	116,252	93,30	186,8137	96,10	271,1944
62,60	290,0897	69,50	102,6578	95,30	245,4856	96,35	279,4909
62,00	310,8881	68,40	126,1583	89,35	94,43914	96,35	279,4909
63,60	257,0257	68,35	127,284	87,00	54,28713	96,40	281,1652
64,00	244,36	67,50	147,1859	85,25	31,5617	96,70	291,3159
64,60	225,9616	73,60	36,38527	85,15	30,4481	96,40	281,1652
Цена	Кв.откл.						
95,40	248,6292						
95,60	254,9764						
95,90	264,6472						
95,95	266,2765						
95,90	264,6472						
93,50	192,3209						
94,85	231,5869						
93,05	180,0422						
Итого:	10611,85						
Дисп.	158,63						
Ср.кв.от.	12,595						

Выводы:

Средняя цена акции в 2019 году: 79,63 руб.

Дисперсия цены за год: 158,63

Волатильность цены: 12,595 руб. или 15,82 %