РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

ОТЧЕТ

ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4

" Матрицы и линейные системы"

дисциплина: Научное программирование

Студент: Романова Александра

Группа: НПМмд-02-20

МОСКВА

2020 г.

Цель работы

Ознакомление с некоторыми операциями в среде Octave для решения задач линейной алгебры.

Выполнение работы

Метод Гаусса

Octave содержит сложные алгоритмы, встроенные для решения систем линейных уравнений.

Для решения системы линейных уравнений:

$$Ax = b$$

методом Гаусса можно построить расширенную матрицу вида

$$B = (A|b).$$

Рассмотрим следующую расширенную матрицу(см. Рис.1):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

```
>> B = [ 1 2 3 4 ; 0 -2 -4 6 ; 1 -1 0 0 ]
B =

   1   2   3   4
   0  -2  -4   6
   1  -1   0   0

>> B (2, 3)
ans = -4
>> B (1, :)
ans =

   1   2   3   4
```

Рис.1

Реализуем теперь явно метод Гаусса.

Сначала добавим к третьей строке первую строку, умноженную на -1;``

Далее добавим к третьей строке вторую строку, умноженную на -1.5 (см.Рис.2):

```
>> B(3,:) = (-1) * B(1,:) + B(3,:)
B =

   1   2   3   4
   0  -2  -4   6
   0  -3  -3  -4

>> B(3,:) = -1.5 * B(2,:) + B(3,:)
B =

    1    2    3    4
    0   -2   -4    6
    0    0    3  -13

>> rref(B)
ans =

   1.0000        0        0   5.6667
        0   1.0000        0   5.6667
        0        0   1.0000  -4.3333
```

Рис.2

Матрица теперь имеет треугольный вид. Получим ответ:

$$x = (\frac{17}{3}\frac{17}{3}\frac{-13}{3}).$$

Обратим внимание, что все числа записываются в виде чисел с плавающей точкой (то есть десятичных дробей). Пять десятичных знаков отображаются по умолчанию. Переменные на самом деле хранятся с более высокой точностью, и при желании можно отобразить больше десятичных разрядов. Затем вернём предыдущий формат представления (см.Рис.3):

```
>> format long
>> rref(B)
ans =

 Columns 1 through 3:

   1.000000000000000                   0                   0
                   0   1.000000000000000                   0
                   0                   0   1.000000000000000

 Column 4:

   5.666666666666667
   5.666666666666666
  -4.333333333333333

>> format short
```

Рис.3

Левое деление

Встроенная операция для решения линейных систем вида $Ax = b$ в Octave называется левым делением и записывается как A\b. Это концептуально эквивалентно выражению $A^{-1}b$. Выделим из расширенной матрицы B матрицу A и вектор b. После найдем (см.Рис.4):

```
>> A = B(:,1:3)
A =

   1   2   3
   0  -2  -4
   0   0   3

>> b = B (:,4)
b =

    4
    6
  -13

>> A\b
ans =

   5.6667
   5.6667
  -4.3333
```

Рис.4

LU разложение

LU разложение – это вид факторизации матриц для метода Гаусса. Цель состоит в том, чтобы записать матрицу A в виде:

$$A = LU,$$

где L – нижняя треугольная матрица, а U – верхняя треугольная матрица. Эта факторизованная форма может быть использована для решения уравнения

$$Ax = b.$$

LU-разложение существует только в том случае, когда матрица A обратима, а все главные миноры матрицы A невырождены. Этот метод является одной из разновидностей метода Гаусса.

Если известно LU-разложение матрицы A, то исходная система может быть записана как

$$LUx = b.$$

Эта система может быть решена в два шага. На первом шаге решается система

$$Ly = b.$$

Поскольку L – нижняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно прямой подстановкой.

На втором шаге решается система

$$Ux = y.$$

Поскольку U – верхняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно обратной подстановкой.

Обращение матрицы A эквивалентно решению линейной системы

$$AX = I,$$

где X – неизвестная матрица, I – единичная матрица. Решение X этой системы является обратной матрицей A^{-1}.

Систему можно решить описанным выше методом LU-разложения.

Имея LU-разложение матрицы A, можно непосредственно вычислить её определитель,

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L)\det(U) = \prod_{i=1}^{n} L_{ii} \prod_{i=1}^{n} U_{ii},$$

где n – размер матрицы A, L_{ii} и U_{ii} – диагональные элементы матриц L и U.

Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Распишем ее LU-разложение. Используя встроенную функцию *lu(A)*, получим матрицы L (нижняя треугольная матрица), U (верхняя треугольная матрица) и P - матрица, демонтрирующая каким образом были переставлены строки исходной матрицы при разложении на множетели L и U (см.Рис.5).

```
>> A = [ 1 2 3 ; 0 -2 -4 ; 1 -1 0 ]
A =

   1   2   3
   0  -2  -4
   1  -1   0

>> [ L, U, P] = lu (A)
L =

   1.0000        0        0
   1.0000   1.0000        0
        0   0.6667   1.0000

U =

   1   2   3
   0  -3  -3
   0   0  -2

P =

Permutation Matrix

   1   0   0
   0   0   1
   0   1   0
```

Рис.5

Вывод

Таким образом, в ходе данной работы я ознакомилась с некоторыми операциями в среде Octave для решения задач линейной алгебры.