РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

ОТЧЕТ

ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №8

дисциплина: Научное программирование

Студент: Романова Александра

Группа: НПМмд-02-20

МОСКВА

2020 г.

Цель работы

Ознакомление с некоторыми операциями в среде Octave для работы с задачами на собственные значения и марковскими цепями.

Выполнение работы

Собственные значения и собственные векторы

Зададим матрицу (см. Рис. 1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Необходимо найти собственные значения и собственные векторы этой матрицы. Для нахождения используется команда eig с двумя выходными аргументами (см. Рис. 2). Синтаксис:

$$[v \;\; lambda] = eig(A)$$

Первый элемент результата есть матрица, столбцы которой представляют собой собственные векторы, второй результат будет диагональной матрицей с собственными значениями на диагонали (см. Рис. 2).

```
>> diary on
>> A = [1 2 -3; 2 4 0; 1 1 1]
A =

   1   2  -3
   2   4   0
   1   1   1
```

Рис. 1 Матрица А

```
>> [v lambda] = eig(A)
v =

  -0.2400 +      0i  -0.7920 +      0i  -0.7920 -      0i
  -0.9139 +      0i   0.4523 + 0.1226i   0.4523 - 0.1226i
  -0.3273 +      0i   0.2322 + 0.3152i   0.2322 - 0.3152i

lambda =

Diagonal Matrix

   4.5251 +      0i                   0                   0
                  0   0.7374 + 0.8844i                    0
                  0                   0   0.7374 - 0.8844i
```

Рис. 2 Собственные значения и собственные векторы матрицы А

Для того, чтобы получить матрицу с действительными собственными значениями нужно создать семмитричную матрицу путём умножения исходной матрицы на транспанированную и повторим действия. (см. Рис.3)

```
>> C = A' * A
C =

    6   11   -2
   11   21   -5
   -2   -5   10

>> [v lambda] = eig(C)
v =

   0.876137   0.188733  -0.443581
  -0.477715   0.216620  -0.851390
  -0.064597   0.957839   0.279949

lambda =

Diagonal Matrix

    0.1497         0         0
         0    8.4751         0
         0         0   28.3752
```

Рис. 3 Действительные собственные значения матрицы А

Диагональные элементы матрицы Λ являются собственными значениями, а соответствущие столбцы матрицы V являются соответствующими собственными векторами. Каждому собственному значению соответствует бесконечное семейство собственных векторов. Типичные собственные векторы, полученные в Octave, нормированы на единицу.

Марковские цепи. Случайное блуждание

Рассмотрим цепь Маркова. Наша задача - предстказать вероятности состояний системы. Предположим, что мы случайным образом передвигаемся следущим образом. В состояниях 2, 3 или 4 мы перемещаемся влево или вправо наугад. По достижении конца дороги (состояния 1 или 5) мы останавливаемся.

Наша цель - предсказать, где мы окажемся. Начнем с вектора вероятности. Предположим, что мы можем начать в любой точке в равной вероятностью. Тогда начальный вектор будет (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2). С другой стороны, мы можем знать начальное состояние. Предположим, мы начинаем с состояния 3. Тогда начальный вектор будет (0,0,1,0,0).

Мы хотим предсказать наше местоположение после k ходов. Это делается путем записи переходной матрицы(см. Рис. 4,5).

```
>> T = [1 0.5 0 0 0; 0 0 0.5 0 0; 0 0.5 0 0.5 0; 0 0 0.5 0 0; 0 0 0 0.5 1]
T =

   1.0000   0.5000        0        0        0
        0        0   0.5000        0        0
        0   0.5000        0   0.5000        0
        0        0   0.5000        0        0
        0        0        0   0.5000   1.0000

>> a = [0.2; 0.2; 0.2; 0.2; 0.2];
>> b = [0.5; 0; 0; 0; 0.5];
>> c = [0; 1; 0; 0; 0];
>> d = [0; 0; 1; 0; 0];
>> T^5 * a
ans =

   0.450000
   0.025000
   0.050000
   0.025000
   0.450000

>> T^5 * b
ans =

   0.5000
        0
        0
        0
   0.5000
```

Рис.4 Начальные вектора и нахождение вероятностей

```
>> T^5 * c
ans =

   0.6875
        0
   0.1250
        0
   0.1875

>> T^5 * d
ans =

   0.3750
   0.1250
        0
   0.1250
   0.3750
```

Рис.5 Нахождение вероятностей (продолжение)

Находим вектор равновесного состояния для цепи Маркова с переходной матрицей. (см. Рис. 6)

```
>> T = [0.48 0.51 0.14; 0.29 0.04 0.52; 0.23 0.45 0.34]
T =

   0.480000   0.510000   0.140000
   0.290000   0.040000   0.520000
   0.230000   0.450000   0.340000

>> [v lambda] = eig(T)
v =

  -0.6484  -0.8011   0.4325
  -0.5046   0.2639  -0.8160
  -0.5700   0.5372   0.3835

lambda =

Diagonal Matrix

   1.0000        0        0
        0   0.2181        0
        0        0  -0.3581

>> x = v(:,1)/sum(v(:,1))
x =

   0.3763
   0.2929
   0.3308
```

Рис. 6 Вектор равновесного состояния

Так как равновесное состояние не приводит к изменению в будущем, то мы можем проверить является ли найденный нами вектор равновесным. Для этого вычислим на 10 и на 50-ом шаге и вычтем одно из другого. (см. Рис. 7)

```
>> T^10 * x
ans =

   0.3763
   0.2929
   0.3308

>> T^50 * x
ans =

   0.3763
   0.2929
   0.3308

>> T^50 * x - T^10 * x
ans =

   4.4409e-16
   2.7756e-16
   3.8858e-16

>> diary off
```

Рис. 7 Проверка

Вывод

Таким образом, в ходе данной работы я ознакомилась с некоторыми операциями в среде Octave для работы с задачами на собственные значения и марковскими цепями.