SCHOOLMOUV

Ensemble des nombres réels et intervalles

Introduction :

Les ensembles des nombres entiers, des entiers relatifs, des décimaux et des rationnels sont connus depuis les cours de mathématiques du collège. Dans ce cours, nous allons découvrir un ensemble qui les contient tous : l'ensemble des nombres réels.

Nous allons, dans un premier temps, rappeler ces ensembles que nous connaissons et donner le vocabulaire et les notations à connaître quand on travaille sur des ensembles.
Puis nous définirons l'ensemble des nombres réels et ce que sont les intervalles, avant d'apprendre à calculer des distances entre deux nombres.

1 Les ensembles de nombres : rappels et notations

a. Les nombres entiers

Au collège, nous avons vu qu'un **nombre entier naturel** est un nombre entier positif, et aussi qu'un **nombre entier relatif** est un **nombre entier**, positif ou négatif.

À retenir

- L'ensemble des nombres entiers naturels est noté : $\mathbb{N}$.
- L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté : $\mathbb{Z}$.

-4 est un nombre entier négatif, c'est donc un nombre entier relatif.

→ On note : $-4 \in \mathbb{Z}$.

Cette dernière écriture se lit : « -4 **appartient** à l'ensemble des nombres entiers relatifs ».

En revanche, -4 n'est pas un nombre positif, donc, il **n'appartient pas** à l'ensemble des entiers naturels.

→ On note : $-4 \notin \mathbb{N}$.

De la définition d'un entier relatif, nous comprenons que tout entier naturel est un entier relatif. Ainsi, tous les éléments de l'ensemble des entiers naturels appartiennent aussi à l'ensemble des entiers relatifs.

→ On dit que l'ensemble des entiers naturels est **inclus** dans l'ensemble des entiers relatifs, ou que l'ensemble des entiers naturels est un **sous-ensemble** de l'ensemble des entiers relatifs.

→ Et on note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Voir aussi le cours : « Nombres entiers : multiples, diviseurs et nombres premiers ».

b. Les nombres décimaux et les nombres rationnels

Nous savons aussi ce que sont un nombre décimal et un nombre rationnel :

- un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale :

$$\frac{a}{10^n} \text{ [avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}]$$

- un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction :

$$\frac{a}{b} \text{ [avec } a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{Z}^*]$$

À retenir

La notation $\mathbb{Z}^*$ signifie qu'il s'agit de l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, **privé de** zéro. Ainsi, dans la dernière formule, b peut prendre toutes les valeurs entières, positives ou négatives, mais pas la valeur nulle.

→ On peut aussi l'écrire sous la forme : $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

De manière générale, si on veut « priver » un ensemble de l'élément nul, on le note avec un astérisque.

→ $\mathbb{N}^*$ est par exemple l'ensemble des entiers naturels non nuls, soit les entiers strictement positifs.

À retenir

- L'ensemble des nombres **décimaux** est noté : $\mathbb{D}$.
- L'ensemble des nombres **rationnels** est noté : $\mathbb{Q}$.

Nous l'avons vu, tout entier naturel est un entier relatif. C'est aussi un nombre décimal (par exemple : $2 = \frac{2}{10^0}$). Et c'est également un nombre rationnel (par exemple : $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} \ldots$).

→ Nous avons donc :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$$

Tous les nombres ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'une fraction et ne sont donc pas des rationnels. Par exemple : π ou $\sqrt{2}$.

→ On dit que ce sont des nombres irrationnels :

$$\pi \notin \mathbb{Q}$$
$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Voir aussi le cours : « Les nombres décimaux, rationnels et irrationnels », qui démontre notamment que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal et que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

2 Les nombres réels

a. Ensemble des nombres réels

Définition

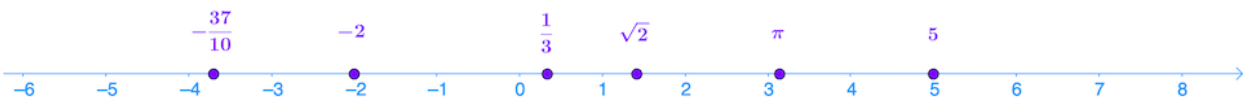
Ensemble des nombres réels :

Considérons une droite graduée.
Les nombres réels sont les abscisses des points de la droite.

→ L'ensemble des nombres réels est noté : $\mathbb{R}$.

Exemple

5, -2, $-\frac{37}{10}$ et $\frac{1}{3}$ sont des nombres réels. π et $\sqrt{2}$ sont aussi des réels.

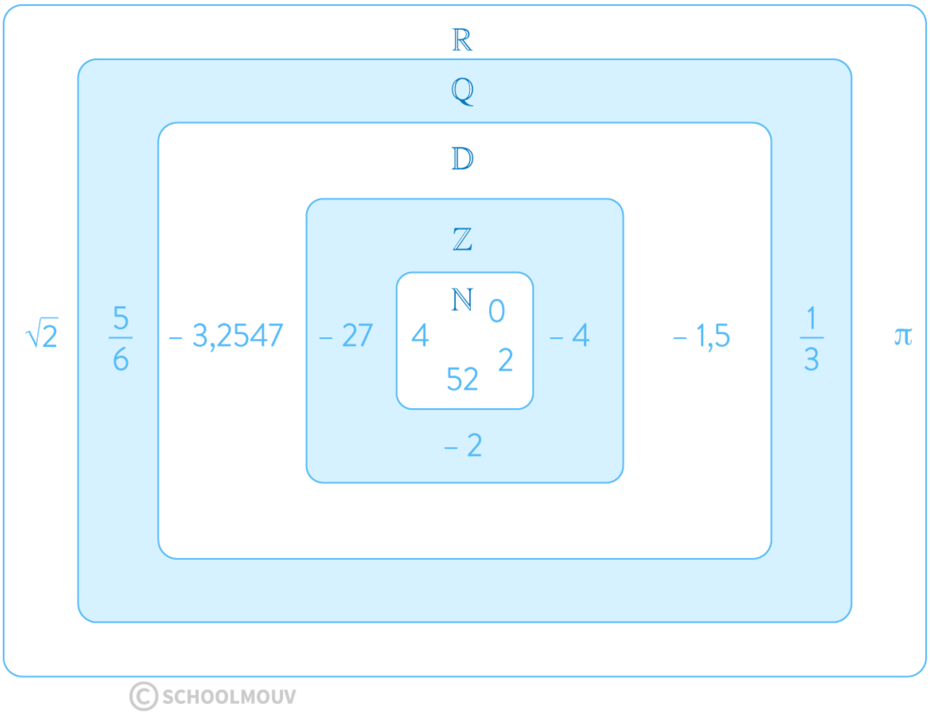


À retenir

L'ensemble des nombres rationnels est inclus dans l'ensemble des nombres réels.

→ Nous avons finalement les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Revenons sur $\sqrt{2}$, qui est un nombre irrationnel.
Nous avons donc : $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\sqrt{2}$ appartient donc à l'ensemble des nombres réels privé de l'ensemble des nombres rationnels.

→ On peut noter : $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

b. Les intervalles de $\mathbb{R}$

Définition

Intervalle de $\mathbb{R}$:

Soit a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$.

- L'intervalle $[a\ ;\ b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que : $a \leq x \leq b$.
- L'intervalle $]-\infty\ ;\ b]$ (où le signe « ∞ » représente l'infini) est l'ensemble des nombres réels x tels que : $x \leq b$.
- L'intervalle $[a\ ;\ +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que : $x \geq a$.

À retenir

Soit a et b deux nombres réels.

- Soit l'intervalle $I_1 = [a\ ;\ b]$.
  - a est appelé **borne inférieure** de l'intervalle I_1.
  - b est appelé **borne supérieure** de l'intervalle I_1.

→ On dit que I_1 est un **intervalle borné**.

- Soit l'intervalle $I_2 =]-\infty\ ;\ b]$ et l'intervalle $I_3 = [a\ ;\ +\infty[$.

→ On dit que I_2 et I_3 sont des **intervalles non bornés**.

Exemple

L'ensemble des réels x tels que $-2 \leq x \leq 3$ est donc l'intervalle borné $[-2\ ;\ 3]$.

- -2 est la borne inférieure ;
- 3 est la borne supérieure.

Nous pouvons représenter cet intervalle sur la droite des réels :

Et nous avons, par exemple :

- $-3 \notin [-2\ ;\ 3]$;
- $-1 \in [-2\ ;\ 3]$;
- $0 \in [-2\ ;\ 3]$;
- $\sqrt{2} \approx 1,41 \in [-2\ ;\ 3]$
- $2 \in [-2\ ;\ 3]$;

- $\pi \approx 3,14 \notin [-2\ ;\ 3]$.

Astuce

L'ensemble des nombres réels est un intervalle qui peut se noter $]-\infty\,;+\infty[$.

Les intervalles se notent de différentes façons selon les caractéristiques de leurs deux bornes. Il existe des intervalles :

- **ouverts** : les bornes sont exclues de l'intervalle,
- **semi-ouverts** : une seule borne appartient à l'intervalle,
- **fermés** : les deux bornes appartiennent à l'intervalle.

→ Le tableau suivant résume les différentes possibilités.

À retenir

On considère deux réels a et b tels que $a \leq b$.

Notation	Représentation sur la droite des réels	Ensemble des réels x tels que :	Signification
$[a\ ;\ b]$		$a \leq x \leq b$	Intervalle **fermé** : les bornes appartiennent à l'intervalle
$]a\ ;\ b]$		$a < x \leq b$	Intervalle **semi-ouvert** : ouvert en a et fermé en b. Des deux bornes,

			seul b appartient à l'intervalle
$[a\ ;\ b[$		$a \leq x < b$	Intervalle **semi-ouvert** : ouvert en b et fermé en a. Des deux bornes, seul a appartient à l'intervalle
$]a\ ;\ b[$		$a < x < b$	Intervalle **ouvert** : a et b n'appartiennent pas à l'intervalle
$]-\infty\ ;\ b]$		$x \leq b$	Intervalle **fermé** en b et dont toutes les valeurs sont inférieures ou égales à b
$]-\infty\ ;\ b[$		$x < b$	Intervalle **ouvert** en b et dont toutes les valeurs sont strictement inférieures à b
$[a\ ;\ +\infty[$		$x \geq a$	Intervalle **fermé** en a et dont toutes les valeurs sont supérieures ou égales à a
$]a\ ;\ +\infty[$		$x > a$	Intervalle **ouvert** en a et dont

			toutes les valeurs sont strictement supérieures à a

Astuce

- On parle souvent de crochet « ouvert » ou « fermé ». Un crochet est ouvert lorsqu'il « tourne le dos » à sa borne. Il indique alors que celle-ci ne fait pas partie de l'intervalle. Pour l'intervalle $[2;5[$, la borne 5 ne fait pas partie de l'intervalle car le crochet est ouvert en 5.
- Pour $+\infty$ ou $-\infty$, le crochet est toujours ouvert.

c. Réunion et intersection d'intervalles

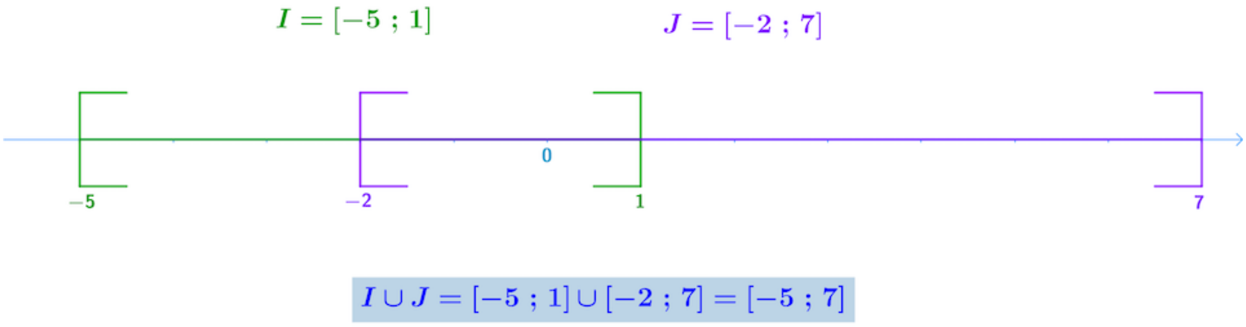
Définition

Réunion d'intervalles :

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
La réunion des intervalles I et J, notée $I \cup J$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à I **ou** à J.

Exemple

Soit l'intervalle $I = [-5\ ;\ 1]$ et l'intervalle $J = [-2\ ;\ 7]$.
L'ensemble des réels qui appartiennent à $I \cup J$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à $[-5\ ;\ 1]$ ou à $[-2\ ;\ 7]$.



$I \cup J$ est ainsi l'intervalle $[-5 \ ; \ 7]$, c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que : $-5 \leq x \leq 7$.

Astuce

Si J est un sous-ensemble de I, c'est-à-dire si tous les éléments de J appartiennent à I, alors : $I \cup J = I$.

Attention

La réunion de deux intervalles n'est pas toujours un intervalle.
Par exemple, $[-5 \ ; \ -2[\ \cup \ ]1 \ ; \ 7]$ n'est pas un intervalle : les réels compris entre -2 et 1 n'appartiennent pas à $[-5 \ ; \ -2[\ \cup \ ]1 \ ; \ 7]$; il y a un « trou », ce n'est donc pas un intervalle, ce dernier ne devant pas avoir de « trous ».

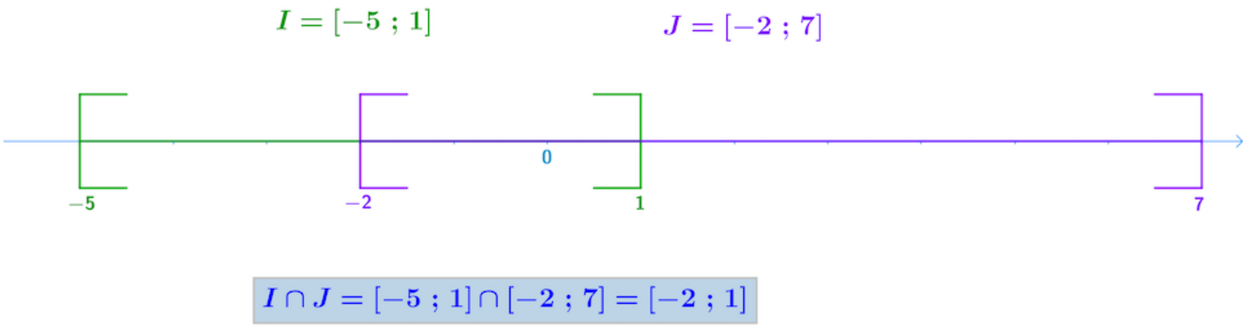
Définition

Intersection d'intervalles :

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
L'intersection des intervalles I et J, notée $I \cap J$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à I **et** à J.

Exemple

Soit l'intervalle $I = [-5 ; 1]$ et l'intervalle $J = [-2 ; 7]$.
L'ensemble des réels qui appartiennent à $I \cap J$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à $[-5 ; 1]$ et à $[-2 ; 7]$.



$I \cap J$ est ainsi l'intervalle $[-2 ; 1]$, c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que : $-2 \leq x \leq 1$.

À retenir

L'intersection de deux ensembles peut n'avoir aucun élément et être l'ensemble vide.
Par exemple, aucun réel n'appartient à la fois à $[-5 ; -2[$ et à $]1 ; 7]$.

→ Nous avons alors :

$$[-5 ; -2[\cap]1 ; 7] = \varnothing$$

Astuce

Si J est un sous-ensemble de I, c'est-à-dire si tous les éléments de J appartiennent à I, alors : $I \cap J = J$.

3 | Représenter la distance entre deux nombres réels

a. Valeur absolue d'un nombre réel

Définition

Valeur absolue :

Soit une droite graduée d'origine O et un point M d'abscisse x.
On appelle « valeur absolue de x » sa distance à l'origine, soit la distance OM.

À retenir

La valeur absolue d'un réel x se note $|x|$, et nous avons :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Donnons maintenant quelques propriétés de la valeur absolue.

Propriété

Soit x et y deux nombres réels.

- Nous avons :

$$\begin{aligned} |x| &\geq 0 \\ |-x| &= |x| \\ |x \times y| &= |x| \times |y| \\ \left|\frac{x}{y}\right| &= \frac{|x|}{|y|} \ [\text{avec } y \neq 0] \end{aligned}$$

- Nous avons aussi les équivalences suivantes :

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$$

→ Le signe $\Leftrightarrow$ signifie « … est équivalent à… ».

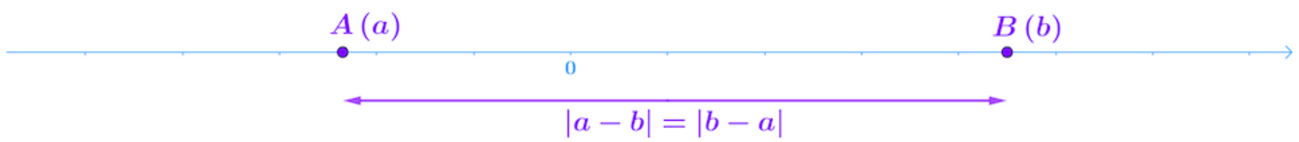
Exemple

$$|5| = 5$$
$$|-3| = -(-3) = 3$$
$$|-2,5| = |2,5| = 2,5$$

b. Distance entre deux nombres réels

Propriété

Sur une droite graduée, soit deux points A et B, d'abscisses respectives a et b.
La distance entre les réels a et b, qu'on peut noter $\text{d}(a\ ;\ b)$ ou $\text{d}(b\ ;\ a)$, est égale à : $|b-a|$, ou $|a-b|$.



À retenir

Soit a et b deux réels. Nous avons :

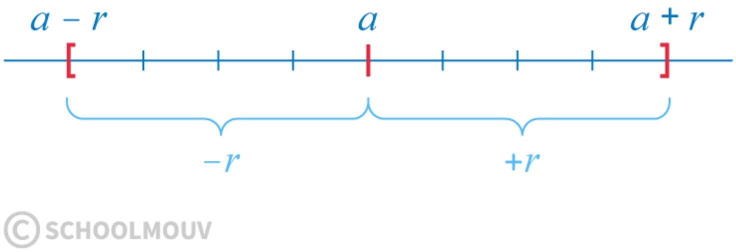
$$|a-b| = \begin{cases} a-b & \text{si } a \geq b \\ b-a & \text{si } a \leq b \end{cases}$$

Propriété

Soit a un nombre réel et r un nombre réel positif.
L'ensemble des réels x tels que $|x-a| \leq r$ est l'intervalle borné fermé :

$$[a-r\ ;\ a+r]$$

→ Cet intervalle est fermé, centré en a et ses bornes sont $a - r$ et $a + r$.



À retenir

Dire que le réel x est tel que $|x - a| \leq r$ revient à dire que : $x \in [a - r\ ;\ a + r]$.

→ Autrement dit, la distance entre les réels a et x est inférieure ou égale à r.

Nous allons maintenant nous servir de ce que nous avons vu pour résoudre une inéquation.

Exemple

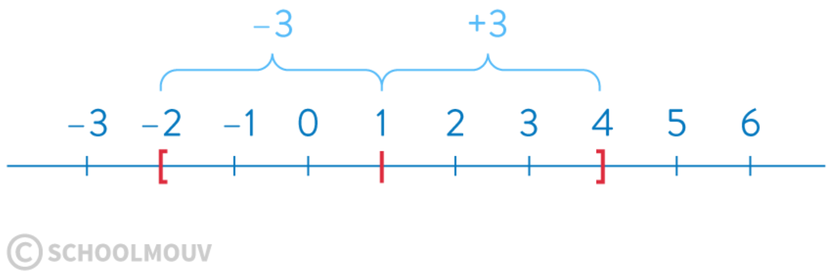
Nous cherchons à résoudre l'inéquation : $|x - 1| \leq 3$.

→ Nous cherchons donc l'ensemble des réels x dont la distance avec 1 est inférieure ou égale à 3.

Nous avons ici $a = 1$ et $r = 3$.

→ L'ensemble solution S de cette inéquation est :

$$\begin{aligned} S &= [\overbrace{1 - 3}^{a-r}\ ;\ \overbrace{1 + 3}^{a+r}] \\ &= [-2\ ;\ 4] \end{aligned}$$



Conclusion :

Dans ce cours, nous avons découvert un nouvel ensemble de nombres, celui des réels noté $\mathbb{R}$, qui inclut tous les ensembles que nous avons vus au collège. Nous avons aussi appris de nouvelles notations, dont nous nous servirons très souvent au lycée (et plus tard).

Dans les prochains cours, nous allons approfondir les ensembles des entiers naturels et relatifs ($\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$), des décimaux et des rationnels ($\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$).