Rapport de méthodes numériques pour l'actuariat

Chevaux Alexandre // Garrigue Matthieu

Projet 4 : Incertitude en polynôme du chaos

On cherche à mesurer l'impact de l'incertitude σ sur le calcul du Best Estimate et sur le coût de la garantie associée.

On rappelle que la valeur économique notée ϕ est la solution de :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k(x_\infty - x)\frac{\partial \phi}{\partial x} + x\phi + (1-g)\phi = 0 \tag{1}$$

Dans notre cas ϕ est dépendante du paramètre incertain σ. On modélise σ par un bruit gaussien :

$$\sigma^2 = \sigma^2(\xi) = (\mu + \nu\xi)^2, \xi \backsim \mathcal{N}(0,1) \tag{2}$$

<u>(i) Déterminer le système linéaire bloc (d+1)×(d+1) couplant les EDP :</u>

On prendra dans notre cas **d=2** autrement dit, on se restreindra aux termes ϕ_k avec $k \leq 2$ pour des raisons numériques.

On a

$$\phi(x,t,\xi) = \sum_{j\geq 0} \phi_j(x,t) H_j(\xi) \tag{3}$$

avec $(H_n)_{n\geq 0}$ la famille des polynômes de Hermite

On multiplie (1) par H_k et on appliquera ensuite l'espérance à chaque terme. Cela nous permettra d'obtenir un système linéaire.

$$\phi(x,t,\xi) = \sum_{j\geq 0} \phi_j(x,t) H_j(\xi) \tag{4}$$

On rappelle que :

$$\mathbb{E}(H_m(\xi)H_n(\xi)) = \delta_{m,n} n! \tag{5}$$

On utilisera tout au long de ces calculs les résultats d'espérance de puissances de ξ.
En effet, on peut noter que $\mathbb{E}[\xi^{n+1}] = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ Pour les puissances paires, les résultats sont moins immédiats :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\xi^2) = \mathbb{E}(\xi)^2 + \mathrm{Var}(\xi) = 1 \\
&\mathbb{E}(\xi^4) = 3 \text{ par intégration par parties} \\
&\mathbb{E}(\xi^6) = 15 \text{ en utilisant la formule générale de l'espérance des puissance paires} \\
&\qquad \text{d'une variable aleatoire normale centrée réduite.}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on utilisera aussi les propriétés sur les polynômes de l'Hermite, autrement dit $H_{n+1} = XH_n - nH_{n-1} \quad H_0 = 1, \ H_1 = X \ n \geq 1$
On utilisera également la linéarité de l'espérance ainsi que les propriétés (5)et (3)

Pour H_0 :
On va appliquer

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+k(x_\infty - x)\frac{\partial \phi}{\partial x}+x\phi+(1-g)\phi\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \phi_0}{\partial t}\times 1+\frac{\partial \phi_1}{\partial t}\times 0\frac{\partial \phi_2}{\partial t}\times 0+\mathbb{E}\left[\frac{(\mu+\nu\xi)^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}\times 1+\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2}\times \xi+\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2}\times(\xi^2-1)\right)\right]$$

$$+k(x_\infty - x)\frac{\partial \phi_0}{\partial x}\times 1+x(\phi_0)+(1-g)\phi_0=0$$

Distribuons avec le terme $\frac{(\mu+\nu\xi)^2}{2}$ et appliquons la linéarité de l'espérance.
On utilisera par ailleurs les résultats sur l'espérance des puissances de ξ donnés plus haut.

Ainsi, on obtient finalement,
EDP en H_0 :

$$\boxed{\frac{\partial \phi_0}{\partial t}+\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}(\frac{\mu^2+\nu^2}{2})+\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2}(\mu\nu)+\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2}\times\nu^2+k(x_\infty - x)\frac{\partial \phi_0}{\partial x}+x\phi_0+(1-g)\phi_0=0}$$

Pour H_1 :

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial \phi}{\partial t}H_1\right]=\mathbb{E}\left[\frac{\partial \phi_0}{\partial t}H_0H_1\right]+\mathbb{E}\left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t}H_1^2\right]\mathbb{E}\left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t}H_2H_1\right]$$

1er terme :

$$\cancel{\frac{\partial \phi_0}{\partial t}\times 0}+\frac{\partial \phi_1}{\partial t}\times 1+\cancel{\frac{\partial \phi_2}{\partial t}\times 0}$$

On utilisera pour le calcul du deuxième terme les résultats sur l'espérance des puissance de ξ, la linéarité de l'espérance et le résultat donnés en (5)
2ème terme :

$$\mathbb{E}\left[\frac{\sigma^2}{2}(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}H_0H_1)\right]+\mathbb{E}\left[\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2}H_1^2\right]+\mathbb{E}\left[\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2}H_2H_1\right]$$
$$=\mathbb{E}\left[\frac{\mu+2\mu\nu\xi+\mu^2\xi^2}{2}\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}H_0H_1\right]$$
$$+\mathbb{E}\left[\frac{\mu+2\mu\nu\xi+\mu^2\xi^2}{2}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2}H_1^2\right]$$
$$+\mathbb{E}\left[\frac{\mu+2\mu\nu\xi+\mu^2\xi^2}{2}\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2}H_2H_1\right]$$
$$=\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}\mathbb{E}\left[\frac{\mu^2\xi+2\mu\nu\xi^2+\mu^2\xi^2}{2}\right]$$
$$+\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2}\mathbb{E}\left[\frac{\mu^2\xi^2+2\mu\nu\xi^3+\mu^2\xi^4}{2}\right]$$
$$+\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2}\mathbb{E}\left[\frac{\mu^2(\xi^3-\xi)+2\mu\nu(\xi^4-\xi^2)+\mu^2(\xi^5-\xi^3)}{2}\right]$$
$$=\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}\mu\nu+\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2}\frac{\mu^2+3\nu^2}{2}+\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2}\times 2\mu\nu$$

3ème terme : $k(x_\infty - x)\frac{\partial \phi_1}{\partial x}$

4ème terme :

$$\mathbb{E}\left[x\phi H_1\right] = x\mathbb{E}\left[\phi_0 H_0 H_1\right] + x\mathbb{E}\left[\phi_1 H_1^2\right] + x\mathbb{E}\left[\phi_2 H_2 H_1\right]$$
$$= x\phi_1$$

5ème terme :

$$\mathbb{E}\left[(1-g)\phi H_1\right] = (1-g)\phi_1$$

EDP en H_1 :

$$\boxed{\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}\mu\nu + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2}(\frac{\mu^2 + 3\nu^2}{2}) + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} \times 2\mu\nu + k(x_\infty - x)\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + x\phi_1 + (1-g)\phi_1 = 0}$$

Pour H_2 :
1er terme :

$$\mathbb{E}\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} H_2\right] = \cancel{\frac{\partial \phi_0}{\partial t}\mathbb{E}\left[H_0 H_2\right]} + \cancel{\frac{\partial \phi_1}{\partial t}\mathbb{E}\left[H_1 H_2\right]} + \frac{\partial \phi_2}{\partial t}\mathbb{E}\left[H_2^2\right]$$
$$= \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \times 2! = \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \times 2$$

2ème terme :

$$\mathbb{E}\left[\frac{\sigma^2}{2}(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} H_2)\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\frac{(\mu^2 + 2\mu\nu\xi + \mu^2\xi^2)}{2}\right]\left(\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} H_0 H_2 + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} H_1 H_2 + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} H_2^2\right)$$
$$= \cancel{\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}}(0) + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2}(2\mu\nu) + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} \times \left[\frac{(\mu^2 + 2\mu\nu\xi + \mu^2\xi^2)}{2}\right] \times (\xi^4 - 2\xi^2 + 1)$$
$$= \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2}(2\mu\nu) + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2}\left(\mu^2 + \mathbb{E}\left(\frac{(\xi^6 - 2\xi^4 + \xi^2)\nu^2}{2}\right)\right)$$
$$= \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2}(2\mu\nu) + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2}\left(\mu^2 + \mathbb{E}\left(\frac{15 - 6 + 1}{2}\nu^2\right)\right)$$
$$= \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \times (2\mu\nu) + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} \times (\mu^2 + 5\nu^2)$$

3ème terme :

$$\mathbb{E}\left[k(x_\infty - x)\frac{\partial \phi}{\partial x} H_2\right] = k(x_\infty - x)2\frac{\partial \phi_2}{\partial t}$$

4ème terme :

$$\mathbb{E}\left[x\phi H_2\right] = x\phi_2 \times 2$$

5ème terme :

$$\mathbb{E}\left[(1-g)\phi H_2\right] = 2(1-g)\phi_2$$

EDP en H_2 :

$$\boxed{2\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \times (2\mu\nu) + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} \times (\mu^2 + 5\nu^2) + 2k(x_\infty - x)\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + 2x\phi_2 + 2(1-g)\phi_2 = 0}$$

Finalement, on a le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \cdot \dfrac{\partial\phi_0}{\partial t} + \dfrac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2}(\dfrac{\mu^2+\nu^2}{2}) + \dfrac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}(\mu\nu) + \dfrac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2}\times\nu^2 + k(x_\infty - x)\dfrac{\partial\phi_0}{\partial x} + x\phi_0 + (1-g)\phi_0 = 0 \\ \cdot \dfrac{\partial\phi_1}{\partial t} + \dfrac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2}\mu\nu + \dfrac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}(\dfrac{\mu^2+3\nu^2}{2}) + \dfrac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2}\times 2\mu\nu + k(x_\infty - x)\dfrac{\partial\phi_1}{\partial x} + x\phi_1 + (1-g)\phi_1 = 0 \\ \cdot\, 2\dfrac{\partial\phi_2}{\partial t} + \dfrac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}\times(2\mu\nu) + \dfrac{\partial^2\phi_2}{\partial x^2}\times(\mu^2+5\nu^2) + 2k(x_\infty - x)\dfrac{\partial\phi_2}{\partial x} + 2x\phi_2 + 2(1-g)\phi_2 = 0 \end{cases}$$

Ecrivons le sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \partial_t\phi_0 \\ \partial_t\phi_1 \\ 2\partial_t\phi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x+(1-g) & k(x_\infty-x) & \frac{\mu^2+\nu^2}{2} & 0 & 0 & \mu\nu & 0 & 0 & \nu^2 \\ 0 & 0 & \mu\nu & x+(1-g) & k(x_\infty-x) & \frac{\mu^2+3\nu^2}{2} & 0 & 0 & 2\mu\nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu\nu & 2(x+(1-g)) & 2k(x_\infty-x) & \mu^2+5\nu^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \partial_x\phi_0 \\ \partial_x^2\phi_0 \\ \phi_1 \\ \partial_x\phi_1 \\ \partial_x^2\phi_1 \\ \phi_2 \\ \partial_x\phi_2 \\ \partial_x^2\phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De manière générale, le problème peut se ramener à **une structure penta-diagonale bloc** avec une implémentation qui se fait en deux parties, représentant l'EDP pour la partie intérieure et prenant en comtpe les conditions au bord pour la partie exterieure.
Pour la partie exterieure, en se basant sur les conditions aux bords (Neumann, Dirichlet et imposer que $\frac{\partial\phi}{\partial x^2} = 0$), il nous sera possible d'obtenir les équations manquantes pour fermer le système.

(ii) Déterminer le *Best Estimate* moyen à t=0 :

On rappelle que le *Best Estimate* est $\mathbb{E}[\phi(x,0,\xi)]$

Comme $\phi_k(x,t) = \mathbb{E}(\phi,x,t,\xi)\dfrac{H_k(\xi)}{k!}$

$\mathbb{E}[\phi(x,0,\xi)] = \mathbb{E}(\phi,x,0,\xi)\dfrac{H_0(\xi)}{0!} = \phi_0(x,0)$

Or $\phi_0(x,0)$ vérifie :

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial t} + \frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2}(\frac{\mu^2+\nu^2}{2}) + \frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}(\mu\nu) + k(x_\infty - x)\frac{\partial\phi_0}{\partial x} + x\phi_0 + (1-g)\phi_0 = 0$$

On résout donc cette équation à t=0.

Pour cela, nous allons utiliser une méthode des différences finies :

Nous allons discrétiser l'intervalle [0,L] en n points de pas $h = \frac{L}{n}$ et on fait de même pour l'intervalle de temps $h^{'} = \frac{T}{n}$ On discrétise les dérivées partielles :

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial t}(x_i,t_j) = \frac{\phi 0(x_i,t_{j+1}) - \phi 0(x_i,t_j)}{h^{'}}$$

$$\frac{\partial^2\phi_0}{\partial x^2}(x_i,t_j) = \frac{\phi 0(x_{i-1},t_j) + \phi 0(x_{i+1},t_j) - 2\phi 0(x_i,t_j)}{h^2}$$

On peut ainsi avoir une formule de $\phi 0(x_i,t_{j+1})$ en fonction de $\phi_0(x_{i-1},t_j)$ et $\phi_0(x_{i+1},t_j)$

Par soucis de simplification, on va considérer trois hypothèses :

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2} = 0$$

$u(0) = 0$

L'équation est donc :

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}(\frac{\mu^2+\nu^2}{2}) + +k(x_\infty - x)\frac{\partial \phi_0}{\partial x} + x\phi_0 + (1-\eta x)\phi_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}(\frac{\mu^2+\nu^2}{2}) + kx_\infty\frac{\partial \phi_0}{\partial x} - x\frac{\partial \phi_0}{\partial x} + (1-\eta)x\phi_0 + \phi_0 = 0$$

On va écrire notre équation sous la forme d'un produit matriciel tel que :

$$\begin{pmatrix} \phi_0(1,j+1) \\ \phi_0(2,j+1) \\ \phi_0(3,j+1) \\ ... \\ \phi_0(n-1,j+1) \\ \phi_0(n,j+1) \end{pmatrix} = \left((\frac{\mu^2+\nu^2}{2}) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & ... & ... & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} + (kx_\infty) \begin{pmatrix} -1 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 1 & -1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & ... & ... & ... & 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$+ \left(\begin{pmatrix} 0 & ... & ... & ... & 0 \\ k & -k & 0 & ... & 0 \\ 0 & 2k & -2k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ ... & 0 & (n-1)k & -(n-1)k & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 & -nk \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -2(1-\eta) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & -(n-1)(1-\eta) & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 & -n(1-\eta) \end{pmatrix} + Id \right)$$

$$\times \begin{pmatrix} \phi_0(1,j) \\ \phi_0(2,j) \\ \phi_0(3,j) \\ ... \\ \phi_0(n-1,j-1) \\ \phi_0(n,j) \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant mettre en place le code :

Matrice tridiagonale :

```
### Construction de la matrice tridiagonale
T=1
S_0=1
x_max=2*S_0
m=10
dt=T/n
dx=x_max/m
##2eme terme
mat_tridiag=np.eye(m)*2+np.eye(m,k=1)+ np.eye(m,k=-1)
mat_tridiag=mat_tridiag*((mu*mu+nu*nu)/2)
##3eme terme
iden_2=-np.eye(m)+np.eye(m,k=-1)
iden_2=iden_2*(k*x_inf)
###4eme terme
iden= np.eye(m)+np.eye(m,k=-1)
cpt_row=0
cpt_col=0
for i in iden:
    iden[cpt_row,cpt_col-1]=k*cpt_row
    iden[cpt_row,cpt_col]=-k*cpt_row
    cpt_row=cpt_row+1
```

```
    cpt_col=cpt_col+1
##5eme terme
iden_3=np.eye(m)
cpt_row=0
cpt_col=0
for i in iden_3:
    iden[cpt_row,cpt_col]=(1-eta)*cpt_row
    cpt_row=cpt_row+1
    cpt_col=cpt_col+1
##6eme terme
iden_3=np.eye(m)
```

Conditions initiales :

```
iden[len(iden)-1]=0
iden_2[len(iden_2)-1]=0
iden_3[len(iden_3)-1]=0
mat_tridiag[len(mat_tridiag)-1]=0
```

Matrice obtenue :

```
[[ 0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00
   0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00]
 [ 1.3015e-02  2.0015e-02  1.0000e-02  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00
   0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00]
 [ 0.0000e+00  1.6015e-02  1.0015e-02  1.0000e-02  0.0000e+00  0.0000e+00
   0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00]
 [ 0.0000e+00  0.0000e+00  1.9015e-02  1.5000e-05  1.0000e-02  0.0000e+00
   0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00]
 [ 0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  2.2015e-02 -9.9850e-03  1.0000e-02
   0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00]
 [ 0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  2.5015e-02 -1.9985e-02
   1.0000e-02  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00]
 [ 0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  2.8015e-02
  -2.9985e-02  1.0000e-02  0.0000e+00  0.0000e+00]
 [ 0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00
   3.1015e-02 -3.9985e-02  1.0000e-02  0.0000e+00]
 [ 0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00
   0.0000e+00  3.4015e-02 -4.9985e-02  1.0000e-02]
 [ 0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00
   0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00  0.0000e+00]]
```

Code des simulations :

```
U=[]
U=[np.sin(np.pi*k/x_max) for k in np.linspace(0,x_max,m)]
V=np.dot(mat,U)
plt.plot(V)
```

Résultat de la simulation :