Devoir maison de grandes matrices aléatoires

Chevaux Alexandre // Garrigue Matthieu

Table des matières

Première partie

Etude des matrices de Wigner à entrées gaussiennes complexes (Examen 2017 Master MVA)

Introduction

Le modèle de Wigner à entrées complexes :

On se donne X une gaussienne complexe centrée réduite, notée $X \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$ avec $X = \dfrac{U+iV}{\sqrt{2}}$ avec $U, V \sim \mathcal{N}(0,1)$

Vérifions les égalités données dans l'énoncé :

- $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\dfrac{U+iV}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{E}(U) + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\mathbb{E}(V) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times 0 + \dfrac{i}{\sqrt{2}} \times 0 = 0$
- $\mathbb{E}|X|^2 = \mathbb{E}\left(\dfrac{U^2}{2} + \dfrac{V^2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\mathbb{E}(U^2) + \dfrac{1}{2}\mathbb{E}(V^2) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{Var}(U) + (\mathbb{E}(U))^2\right) + \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{Var}(V) + (\mathbb{E}(V))^2\right)$
  $= \dfrac{1}{2}(1+0) + \dfrac{1}{2}(1+0) = 1$
- $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}\left(\dfrac{(U+iV)^2}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\mathbb{E}\left(U^2 - V^2 + 2iUV\right) = \dfrac{1}{2}(1 - 1 + 2i\mathbb{E}(UV)) \overset{U \perp\!\!\!\perp V}{=} i\mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V) = 0$

Préliminaires

Question 1 :

Pour cette question, on utilisera les formules de dérivation de la résolvante et $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$

En passant par la forme algébrique :

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial X_{kl}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \operatorname{Re}(X_{kl})} - i\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \operatorname{Im}(X_{kl})}\right) = \frac{-1}{2\sqrt{n}}(Q_{ik}Q_{lj} + Q_{il}Q_{kj} - (i \times i)(Q_{ik}Qlj - Q_{il}Q_{kj})) = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{n}}Q_{ik}Q_{lj}}$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \overline{X_{kl}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \operatorname{Re}(X_{kl})} + i\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \operatorname{Im}(X_{kl})}\right)) = \frac{-1}{2\sqrt{n}}(Q_{ik}Q_{lj} + Q_{il}Q_{kj} + (i \times i)(Q_{ik}Qlj - Q_{il}Q_{kj})) = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{n}}Q_{il}Q_{kj}}$$

Question 2 :

On remarque et notera pour cette question

$$\Phi(X) = \Phi(X_{kk}, \operatorname{Re}(X_{kl}), \operatorname{Im}(X_{kl}); 1 \le k, l \le n; k < l)$$

1er cas : si $k \neq l$

Alors $X_{kl} \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$

Et $\sigma^2_{(\operatorname{Im}(X_{kl}))} = \sigma^2_{(\operatorname{Re}(X_{kl}))} = \dfrac{1}{2}$

$\mathbb{E}X_{kl}\Phi(X) = \mathbb{E}\Big[\operatorname{Re}(X_{kl}\Phi(X)\Big] + i\mathbb{E}\big[\operatorname{Im}(X_{kl})\Phi(X)\big]$

Avec la linéarité de l'espérance et la formule de l'énoncé $\mathbb{E}X_i\Phi(X_1, ..., X_n) = \sigma_i^2\mathbb{E}\dfrac{\partial}{\partial X_i}\Phi(X_1, ..., X_n)$:

$$\mathbb{E}\Big[\operatorname{Re}(X_{kl}\Phi(X)\Big] + i\mathbb{E}\Big[\operatorname{Im}(X_{kl})\Phi(X)\Big]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\Big[\frac{\partial}{\partial \operatorname{Re}(X_{kl})}\Phi(X)\Big] + i\mathbb{E}\Big[\frac{\partial}{\partial \operatorname{Im}(X_{kl})}\Phi(X)\Big]\right)$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{Re}(X_{kl})}\Phi(X) + i\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{Im}(X_{kl})}\Phi(X)\right)\right]$$

En utilisant, le fait que $\frac{\partial}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ on a finalement :

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{Re}(X_{kl})}\Phi(X) + i\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{Im}(X_{kl})}\Phi(X)\right)\right] = \mathbb{E}\Big[\frac{\partial}{\partial\overline{X_{kl}}}\Phi(X)\Big]$$

<u>2ème cas si $k = l$</u>

Alors $X_{kl} \sim \mathcal{N}(0,1)$
Et $\sigma^2_{X_{kk}} = 1$
$\mathbb{E}X_{kk}\Phi(X) = 1 \times \mathbb{E}\Big[\frac{\partial}{\partial X_{kk}}\Phi(X)\Big] = \mathbb{E}\Big[\frac{\partial}{\partial\overline{X_{kk}}}\Phi(X)\Big]$ (comme $X_{kk} \in \mathbb{R}$)

Similairement,
<u>Si $k \neq l$</u>

$$\mathbb{E}\overline{X_{kl}}\Phi(X) = \mathbb{E}\Big[\,\mathrm{Re}(X_{kl}\Phi(X)\Big] - i\mathbb{E}\Big[\,\mathrm{Im}(X_{kl})\Phi(X)\Big]$$

$$\mathbb{E}\Big[\,\mathrm{Re}(X_{kl})\Phi(X)\Big] - i\mathbb{E}\Big[\,\mathrm{Im}(X_{kl})\Phi(X)\Big] = \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\frac{\partial}{\partial Re(X_{kl})}\Phi(X) - i\frac{\partial}{\partial Im(X_{kl})}\Phi(X)\Big]$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{Re}(X_{kl})}\Phi(X) - i\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{Im}(X_{kl})}\Phi(X)\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{Re}(X_{kl})}\Phi(X) - i\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{Im}(X_{kl})}\Phi(X)\right)\right] = \mathbb{E}\Big[\frac{\partial}{\partial X_{kl}}\Phi(X)\Big]$$

<u>Si $k = l$</u>
Alors $X_{kl} \sim \mathcal{N}(0,1)$
Et $\sigma^2_{X_{kk}} = 1$
$\mathbb{E}\overline{X_{kk}}\Phi(X) = 1 \times \mathbb{E}\Big[\frac{\partial}{\partial X_{kk}}\Phi(X)\Big] = \mathbb{E}\Big[\frac{\partial}{\partial X_{kk}}\Phi(X)\Big]$ (comme $X_{kk} \in \mathbb{R}$)

Ainsi : $\boxed{\mathbb{E}X_{kl}\Phi(X) = \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial\overline{X_{kl}}}\Phi(X)\right] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\overline{X_{kl}}\Phi(X) = \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial X_{kl}}\Phi(X)\right]}$

<u>Question 3 :</u>

On se donne $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $z = x + iy$
On utilisera le fait que $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ (cf. énoncé).

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\right|^2 &= \left|\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[\left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right|^2 + \left|\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right|\right]^2\end{aligned}$$

En passant par la forme algébrique à partir du terme précédent, on obtient :

$$\frac{1}{4}\left[\left(\mathrm{Re}(\frac{\partial\varphi}{\partial x}) + \mathrm{Im}(\frac{\partial\varphi}{\partial y})\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(\frac{\partial\varphi}{\partial x}) - \mathrm{Re}(\frac{\partial\varphi}{\partial y})\right)^2 + \left(\mathrm{Re}(\frac{\partial\varphi}{\partial x}) - \mathrm{Im}(\frac{\partial\varphi}{\partial y})\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(\frac{\partial\varphi}{\partial x}) + \mathrm{Re}(\frac{\partial\varphi}{\partial y})\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[4\left(\mathrm{Re}(\frac{\partial\varphi}{\partial x})\right)^2 + 4\left(\mathrm{Im}(\frac{\partial\varphi}{\partial y})\right)^2 + 0\right]$$

$$= \boxed{\left(\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right)^2}$$

Par ailleurs,
$$\frac{1}{2}\left\{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2\right\}=\frac{1}{2}\left[\mathrm{Re}(\frac{\partial\varphi}{\partial x})^2+\mathrm{Im}(\frac{\partial\varphi}{\partial x})^2+\mathrm{Re}(\frac{\partial\varphi}{\partial y})^2+\mathrm{Im}(\frac{\partial\varphi}{\partial y})^2\right]$$
$$=\boxed{\left(\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right)^2+\left(\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right)^2}$$

Finalement, on a bien : $\boxed{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|^2+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\right|^2=\frac{1}{2}\left\{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|^2\right\}}$

Question 4 :

On applique la relation :

$$\mathrm{var}(\Phi(\vec{x}))\leq\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial X_i}\right|^2 \quad \text{à } \Phi(X)=\Phi(X_{kk},\ \mathrm{Re}(X_{kl}),\ \mathrm{Im}(X_{kl});\ 1\leq k,\ l\leq n;\ k<l)$$

On a ainsi :
$$\mathrm{var}(\Phi(X))\leq\sum_{i=1}^{n^2}\sigma_i^2\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial X_i}\right|^2 \quad X \text{ possedant } n^2 \text{ composantes.} \tag{1}$$

Nous remarquons que $\sigma^2_{\mathrm{Im}(X_i)}=\sigma^2_{\mathrm{Re}(X_i)}=\frac{1}{2}$ et $\sigma^2_{X_{kk}}=1$
$\Big($car $X=\frac{U+iV}{\sqrt{2}}$ et U et V gaussiennes centrées réduites indépendantes et $X_{kk}\sim\mathcal{N}(0,1)\Big)$

Nous allons appliquer la formule (1) en décomposant X en 3 :

$$\mathrm{var}(\Phi(X))\leq\sum_{k=1}^{n}\sigma^2_{X_{kk}}\times\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{kk}}\right|^2+\sigma^2_{\mathrm{Re}(X_i)}\sum_{k<1}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial\,\mathrm{Re}(X_{kk})}\right|^2+\sigma^2_{\mathrm{Im}(X_i)}\sum_{k<l}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial\,\mathrm{Im}(X_{kk})}\right|^2$$
$$\boxed{\leq 1\times\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{kk}}\right|^2+\frac{1}{2}\sum_{k<1}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial\,\mathrm{Re}(X_{kk})}\right|^2+\frac{1}{2}\sum_{k<l}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial\,\mathrm{Im}(X_{kk})}\right|^2}$$
$$\leq\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{kk}}\right|^2+\frac{1}{2}\left(\sum_{k<1}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial\,\mathrm{Re}(X_{kk})}\right|^2+\sum_{k<l}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial\,\mathrm{Im}(X_{kk})}\right|^2\right)$$
$$\leq\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{kk}}\right|^2+\frac{1}{2}\sum_{k<1}\mathbb{E}\left(\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial\,\mathrm{Re}(X_{kk})}\right|^2+\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial\,\mathrm{Im}(X_{kk})}\right|^2\right)$$

On a regroupé les termes de la somme et utilisé la linéarité de l'espérance.
En utilisant de nouveau cette dernière pour distribuer avec l'application du résultat de la question 3, on obtient finalement :

$$\boxed{\mathrm{var}(\Phi(X))\leq\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{kk}}\right|^2+\sum_{k<l}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial X_{kl}}\right|^2+\sum_{k<l}\mathbb{E}\left|\frac{\partial\Phi(X)}{\partial\overline{X}_{kl}}\right|^2}$$

Question 5 :

On a :

$$g_n(z) = \frac{1}{n}\,\text{Trace}(Q(z)) \text{ avec la résolvante } Q(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}X - zI_n\right)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_n(z)}{\partial X_{kk}} &= \frac{\partial \frac{1}{n}\,\text{Trace}\,Q(z)}{\partial X_{kk}} \\
&= \frac{1}{n}\frac{\partial \sum\limits_{i=1}^{n} Q_{ii}(z)}{\partial X_{kk}} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Q_{ii}(z)}{\partial X_{kk}} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}Q_{ik}Q_{kj}\right) \\
&= \frac{1}{n}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sum_{i=1}^{n} Q_{ik}Q_{kj}
\end{aligned}$$

Or $\sum_{i=1}^{n} Q_{ik}Q_{kj} = [Q^2]_{kk}$

On a finalement : $\boxed{\frac{\partial g_n(z)}{\partial X_{kk}} = \frac{1}{n}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)[Q^2]_{kk}} = \alpha_n[Q^2]_{kk}$ avec $\boxed{\alpha_n = -n^{-3/2}}$

De même :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_n(z)}{\partial X_{kl}} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Q_{ii}(z)}{\partial X_{kl}} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}Q_{ik}Q_{li}\right) \quad \text{(résultat de la question 1 avec } j = i) \\
&= \frac{1}{n}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sum_{i=1}^{n} Q_{ik}Q_{li}
\end{aligned}$$

Or $\sum_{i=1}^{n} Q_{ik}Q_{li} = [Q^2]_{lk}$

On a finalement : $\boxed{\frac{\partial g_n(z)}{\partial X_{lk}} = \frac{1}{n}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)[Q^2]_{lk}} = \beta_n[Q^2]_{lk}$ avec $\boxed{\beta_n = -n^{-3/2}}$

De même :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_n(z)}{\partial \overline{X}_{kl}} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial Q_{ii}(z)}{\partial \overline{X}_{kl}} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}Q_{il}Q_{ki}\right) \quad \text{(résultat de la question 1 avec } j = i) \\
&= \frac{1}{n}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sum_{i=1}^{n} Q_{il}Q_{ki}
\end{aligned}$$

Or $\sum_{i=1}^{n} Q_{il}Q_{ki} = [Q^2]_{kl}$

On a finalement : $\boxed{\frac{\partial g_n(z)}{\partial \overline{X}_{kl}} = \frac{1}{n}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)[Q^2]_{kl}} = \delta_n[Q^2]_{kl}$ avec $\boxed{\delta_n = -n^{-3/2}}$

Question 6 :

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on a :

$$\mathrm{var}(g_n(z)) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left|\frac{\partial g_n(z)}{\partial X_{kk}}\right|^2 + \sum_{k<l} \mathbb{E}\left|\frac{\partial g_n(z)}{\partial X_{kl}}\right|^2 + \sum_{k<l} \mathbb{E}\left|\frac{\partial g_n(z)}{\partial \overline{X_{kl}}}\right|^2 \text{ (en utilisant la question 4)}$$

On utilise les résultats de la question 5 et on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(g_n(z)) &\leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E} n^{-3} \left[Q(z)^2\right]_{kk} \times \left[(Q(z)^*)^2\right]_{kk} + \sum_{k<l} \mathbb{E} n^{-3} \left[Q(z)^2\right]_{kl} \times \left[(Q(z)^*)^2\right]_{lk} \\
&+ \sum_{k<l} \mathbb{E} n^{-3} \left[Q(z)^2\right]_{lk} \times \left[(Q(z)^*)^2\right]_{kl} \\
&\leq n^{-3}\, \mathbb{E}\left[\sum_{\substack{l=1:n \\ k=1:n}} \left(\left[Q(z)^2\right]_{kl} \times \left[(Q(z)^*)^2\right]_{lk}\right)\right] \\
&\leq \frac{1}{n^3} \mathbb{E}\left(\mathrm{Trace}(Q^2(z) Q^2(\overline{z}))\right) \text{ car } Q^*(z) = Q(\overline{z}) \\
&\leq \frac{1}{n^2} \frac{1}{\mathrm{Im}(z)^4} \text{ car la norme spectrale est toujours majorée par } \mathrm{Im}(z)^{-1}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{g_n(z) = \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

Question 7 :

Soit f la transformée de Stieltjes d'une probabilité sur $\mathbb{R}$
On étudie $g(z) = \dfrac{-1}{z + f(z)}$

Comme f est analytique sur $\mathbb{C}^+$ et que $z + f(z)$ ne s'annule pas, g est analytique

Montrons que $\mathrm{Im}(g(z)) > 0$

$$\begin{aligned}
g(z) &= -\frac{1}{z + f(z)} \\
g(z) &= -\frac{\overline{z} + \overline{f(z)}}{|z + f(z)|^2} \\
\mathrm{Im}(g(z)) &= \frac{\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(f(z))}{|z + f(z)|^2}
\end{aligned}$$

Or $\mathrm{Im}(z) > 0$ et $\mathrm{Im}(f(z)) > 0$ par définition
Ainsi $\mathrm{Im}(g(z)) > 0$

D'autre part, montrons que $|g(z)| \leq \dfrac{K}{\mathrm{Im}(z)}$

$$\begin{aligned}
|g(z)| &\leq \frac{1}{|z + f(z)|} \\
&\leq \frac{1}{\mathrm{Im}(z + f(z))} \text{avec } z \in \mathbb{C}^+ \\
&\leq \frac{1}{\mathrm{Im}(z)}
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
iyg(iy) &= \frac{-iy}{iy+f(iy)} \\
&= \frac{y}{-y+if(y)} \\
&= \frac{1}{-1+i\frac{f(iy)}{y}} \xrightarrow[y\to\infty]{} -1
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{g est la transformée de Stieltjes d'une probabilité sur } \mathbb{R}}$

De plus $\boxed{\dfrac{1}{|z+f(z)|} \leq \dfrac{1}{\mathrm{Im}(z)}}$

Question 8 :

Utilisons les propriétés données dans l'énoncé sur $g_{sc}(z)$ (unique solution X de l'équation $X^2+zX+1=0$) et $g_\delta(z)$ (solution de l'équation $g_\delta^2+zg_\delta+1=\delta$)

$$g_\delta^2+zg_\delta+1=\delta \tag{2}$$
$$g_{sc}^2+zg_{sc}+1=0 \tag{3}$$

En calculant : (2) − (3) , on obtient :

$$\begin{aligned}
& g_\delta^2-g_{sc}^2+z(g_\delta-g_{sc})=\delta \\
\Leftrightarrow \quad & (g_\delta-g_{sc})(g_\delta+g_{sc}+z)=\delta \\
\Leftrightarrow \quad & g_\delta(z)-g_{sc}(z)=\frac{\delta}{g_\delta(z)+g_{sc}(z)+z} \\
\Leftrightarrow \quad & |g_\delta(z)-g_{sc}(z)|=\frac{\delta}{|g_\delta(z)+g_{sc}(z)+z|}
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de la question 7 : $\dfrac{1}{|z+f(z)|} \leq \dfrac{1}{\mathrm{Im}(z)}$ sachant $g_\delta(z)+g_{sc}(z)$ est bien une transformée de Stieljes :

Ainsi : $\boxed{\Big|g_\delta(z)-g_{sc}(z)\Big| \leq \dfrac{\delta}{\mathrm{Im}(z)}}$

Et donc :

$$\boxed{g_\delta(z)-g_{sc}(z)=\mathcal{O}_z(\delta)}$$

Convergence de la mesure spectrale

Question 9 :

On utilise le fait que $Q^{-1}Q=I$

$$\left[(\frac{1}{\sqrt{n}}X-zI)Q\right]_{ij}=\delta_{ij}$$
$$\left[(\frac{1}{\sqrt{n}}X*Q-zQ\right]_{ij}=\delta_{ij}$$

On prend l'espérance :
$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}\sum_{k=1}^{n}X_{ik}Q_{kj}-\mathbb{E}zQ_{ij}=\delta_{ij}$

Par linéarité de l'espérance, et en séparant avec $k = i$ et $k \neq i$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{E}X_{ii}Q_{ij} + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k\neq i}\mathbb{E}(X_{ik}Q_{kj})_z\mathbb{E}Q_{ij} = \delta_{ij}}$$

Question 10 :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}X_{ik}Q_{kj} - z\mathbb{E}Q_{ij} = \delta_{ij}$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\frac{\partial}{\partial X_{ik}}Q_{kj} - z\mathbb{E}Q_{ij} = \delta_{ij}(\text{ d'après la question 2})$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\frac{-1}{\sqrt{n}}Q_{kk}Q_{ij} - z\mathbb{E}Q_{ij} = \delta_{ij}(\text{ d'après la question 1})$$

Ainsi $\boxed{\frac{-1}{n}\mathbb{E}\left(Q_{ij}\sum_{k=1}^{n}Q_{kk}\right) - z\mathbb{E}Q_{ij} = \delta_{ij}}$

Question 11 :

$$\frac{-1}{n}\mathbb{E}\left(Q_{ij}\sum_{k=1}^{n}Q_{kk}\right) - z\mathbb{E}Q_{ij} = \delta_{ij}$$
$$\frac{-1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n}Q_{kk}Q_{ij}\right) - z\mathbb{E}Q_{ij} = \delta_{ij}$$
$$\frac{-1}{n}\mathbb{E}Q_{ij}\operatorname{Trace}Q - z\mathbb{E}Q_{ij} = \delta_{ij}$$

On spécifie maintenant $i = j$
$\frac{-1}{n}\mathbb{E}Q_{ii}\operatorname{Trace}Q - z\mathbb{E}Q_{ii} = \delta_{ii}$
On sommera sur i tout en normalisant

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{-1}{n}\mathbb{E}Q_{ii}\operatorname{Trace}Q - z\mathbb{E}Q_{ii}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1$$
$$\frac{-1}{n^2}\mathbb{E}\operatorname{Trace}Q^2 - z\mathbb{E}\operatorname{Trace}Q = \frac{n}{n}$$
$$\frac{-1}{n^2}\mathbb{E}g_n(z)^2 - z\mathbb{E}g_n = 1$$
$$\frac{1}{n^2}\mathbb{E}g_n(z)^2 + z\mathbb{E}g_n + 1 = 0$$

D'après la question 4, $\operatorname{var}(g_n(z)) = \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Donc $\mathbb{E}g_n^2(z) = (\mathbb{E}g_n))^2 + \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right)$

En utilisant l'expression ci-dessus, on a :

$$\boxed{[\mathbb{E}g_n(z)]^2 + z\mathbb{E}g_n(z) + 1 = \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

Question 12 :

En utilisant les propriétés de $g_{sc}(z)$ et la question 8 avec $g_\delta = \mathbb{E}g_n(z)$
On a $\mathbb{E}g_n(z) - g_{sc}(z) = \mathcal{O}_z(\delta)$ Or ici $\delta = \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Ainsi $\boxed{\mathbb{E}g_n(z) - g_{sc}(z) = \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

Question 13 :

Montrons que la transformée de Stieljes de L_n est $g_n(z)$.
$L_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_{\lambda_i}}{\sqrt{n}}$ avec λ_i valeurs propres de X.
Transformée de Stieljes de L_n :
$\int_{\mathbb{R}} \frac{L_n(d\lambda)}{\lambda - z}$ (par définition)
On utilise la propriété du cours qui affirme que : si f est continue, $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)L_n(d\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{\lambda_i}{\sqrt{n}}\right)$
Ainsi l'intégrale vaut : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\frac{\lambda_i}{\sqrt{n}} - z}$ $\qquad \left(f(\lambda) = \frac{1}{\lambda - z}\right)$
Sachant $\text{Trace}(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_1} + ... + \frac{1}{\lambda_n}$ avec A inversible et diagonalisable et les valeurs propres de $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}X - zI\right)$ sont de la forme $\frac{\lambda_1}{\sqrt{n}} - z, ..., \frac{\lambda_n}{\sqrt{n}} - z$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\frac{\lambda_i}{\sqrt{n}} - z} &= \frac{1}{n}\,\text{Trace}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}X - zI\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{n}\,\text{Trace}\left(Q(z)\right) \\
&= g_n(z)
\end{aligned}$$

D'où <u>la transformée de Stieljes de L_n est bien $g_n(z)$.</u>

Par ailleurs, d'après la question 12, on a $\mathbb{E}g_n(z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g_{sc}(z)$ et de plus, le fait que var $g_n(z) \leq \mathcal{O}_z\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (question 6) nous permet de déduire que $g_n(z) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g_{sc}(z)$
En utilisant la propriété qui dit que la convergence de suites de mesures de probabilité équivaut à la convergence des transformées de Stieljes et comme la transformée de Stieljes de $\mathbb{P}_{sc}$ est g_{sc}, on en déduit :

$$\boxed{L_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{sc}}$$

(avec $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ la convergence en distribution)

Deuxième partie

Exercice 3 page 47 (polycopié) Transformée de Stieltjes de la loi du demi-cercle

Question 1 :

On rappelle que :

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\exp^{i\frac{\theta}{2}} \text{ si } z = r\exp^{i\theta} \tag{4}$$

On va analyser l'argument de $(z-2)(z+2)$ afin de montrer $\sqrt{z^2-4} \in \mathbb{C}^+$

$$\begin{aligned}\mathrm{Arg}(z^2-4) &= \mathrm{Arg}\left((z-2)(z+2)\right)\\ &= \mathrm{Arg}(z-2) + \mathrm{Arg}(z+2)\end{aligned}$$

Or $z \in \mathbb{C}^+$ donc $(z-2), (z+2) \in \mathbb{C}^+$
Donc $\mathrm{Arg}(z+2)$ et $\mathrm{Arg}(z-2) \in \,]0,\pi[\,\,[2\pi]$ (modulo 2π)
Donc $\mathrm{Arg}(z+2) + \mathrm{Arg}(z-2) \in \,]0,2\pi[\,\,[2\pi]$
En appliquant la fonction racine carré et on constatant que celle-ci divise l'argument par 2 (voir (4)), on a :
$\mathrm{Arg}(\sqrt{z^2-4}) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Arg}(z-2) + \mathrm{Arg}(z+2)\right) \in]0,\pi[\,\,[2\pi]$
Ainsi $\boxed{z \to \sqrt{z^2-4} \text{ est une application de } \mathbb{C}^+ \text{ dans } \mathbb{C}^+}$

On utilisera le fait qu'une composée de fonctions analytiques est analytique.
L'application $z \to z^2 - 4$ est analytique car polynomiale.
On sait que $z \to \sqrt{z}$ définit une fonction analytique sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$.
Montrons ainsi que $z^2 - 4 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$

Par la forme algébrique :
On raisonne par l'absurde, on suppose que $\sqrt{z^2-4} \in \mathbb{R}^+$
On pose $z = x + iy$
$z^2 - 4 = x^2 - y^2 - 2ixy - 4$
Comme $z^2 - 4 \in \mathbb{R}^+$, $2xy$=0
Et puisque $\mathrm{Im}(z) = y > 0$, on a forcément $x = 0$
Donc $z^2 - 4 = -y^2 - 4 < 0$
On a une contradiction ainsi $z \to z^2-4 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$

En analysant l'argument :
$\mathrm{Arg}(z^2) = 2 \times \mathrm{Arg}(z)\ [2\pi]$
Sachant $z \in \mathbb{C}^+$, $\mathrm{Arg}(z) \in]0,\pi[\,\,[2\pi]$
On a donc $2\,\mathrm{Arg}(z) \in]0, 2\pi[$
Étant donné le signe ouvert, z^2 ne peut être un réel positif donc $z^2 - 4$ non plus
Donc $z \to z^2 - 4 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$

On a donc une composée de deux fonctions analytiques et donc : $\boxed{z \to \sqrt{z^2-4} \text{ est une application analytique}}$

Finalement :

$$\boxed{z \to \sqrt{z^2-4} \text{ est une application analytique de } \mathbb{C}^+ \text{ dans } \mathbb{C}^+}$$

Question 2 :

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}^+$ $\lim\limits_{z\in\mathbb{C}^+,\mathrm{Im}(z)\downarrow 0} \mathrm{Im}\left(\sqrt{z^2-4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{z\in\mathbb{C}^+,y\downarrow 0} \mathrm{Im}\left(\sqrt{z^2-4}\right)$
Lorsque $y \to 0$: $z \to x$ et $z^2 - 4 \to x^2 - 4$

- Si $x^2 - 4 \geq 0$:

$\sqrt{z^2-4} \to \sqrt{x^2-4}$ (au sens des réels)
Or $\mathrm{Im}\left(\sqrt{x^2-4}\right) = 0$ donc $\boxed{\mathrm{Im}\left(\sqrt{z^2-4}\right) \to 0}$

• Si $x^2 - 4 \leq 0$:

$\sqrt{z^2-4} \to i\sqrt{4-x^2}$

Or $\text{Im}\left(i\sqrt{4-x^2}\right) = \sqrt{4-x^2}$ donc $\boxed{\text{Im}\left(\sqrt{z^2-4}\right) \to \sqrt{4-x^2}}$

Finalement :

Si $x^2 - 4 \geq 0$: (autrement dit $4 - x^2 \leq 0$) : $\text{Im}\left(\sqrt{z^2-4}\right) \to 0$

Si $x^2 - 4 \leq 0$: (autrement dit $4 - x^2 \geq 0$) : $\text{Im}\left(\sqrt{z^2-4}\right) \to \sqrt{4-x^2}$

En résumé :

$$\boxed{\lim_{z\in\mathbb{C}^+, \text{Im}(z)\downarrow 0} \text{Im}\left(\sqrt{z^2-4}\right) = \sqrt{(4-x^2)_+}} \tag{5}$$

Question 3 :

Soit $m(z) = \dfrac{-z+\sqrt{z^2-4}}{2}$

• On a vu dans la question 1 que $\sqrt{z^2-4}$ est analytique sur $\mathbb{C}^+$.
En additionant ce terme par une fonction analytique sur $\mathbb{C}^+$ et en multipliant par un réel (ici $\frac{1}{2}$), on a bien toujours une fonction analytique sur $\mathbb{C}^+$

Ainsi $\boxed{m \text{ est analytique sur } \mathbb{C}^+}$

•

$$\begin{aligned} m(z) &= \frac{\sqrt{z^2-4}-z}{2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(\sqrt{z^2-4}-z)(\sqrt{z^2-4}+z)}{\underbrace{\sqrt{z^2-4}+z}_{\neq 0,\ \in\mathbb{C}^+}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{-4}{\sqrt{z^2-4}+z} = \frac{2}{-\sqrt{z^2-4}-z} \end{aligned}$$

$\text{Im}(-\sqrt{z^2-4}) < 0$ et $\text{Im}(-z) < 0$

Donc $\text{Im}\left(-\sqrt{z^2-4}-z\right) < 0$ d'où $\text{Im}\left(\dfrac{1}{-\sqrt{z^2-4}-z}\right) > 0$

Ainsi on a bien : $\boxed{\text{Im}\left(m(z)\right) > 0}$

• $m(z) = \dfrac{-z+\sqrt{z^2-4}}{2} = \dfrac{-2}{\sqrt{z^2-4}+z}$

$$\begin{aligned} |m(z)| &= \frac{2}{\left|\sqrt{z^2-4}+z\right|} \\ &\leq \frac{2}{\text{Im}\left(\sqrt{z^2-4}+z\right)} \end{aligned}$$

On a donc : $\boxed{|m(z)| \leq \dfrac{2}{\text{Im}(z)}}$

Avec les trois points précédents on peut donc conclure que $\boxed{m(z) \text{ est une transformée de Stieljes}}$

Pour calculer la masse totale, on utilise une propriété du cours sur la masse totale $\mu(\mathbb{R})$:
$-\mu(\mathbb{R}) = \lim_{y\to\infty} iy\ m(iy)$

$$
\begin{aligned}
iy\ m(iy) &= \frac{-2iy}{\sqrt{(iy)^2-4}+iy} \quad \text{(grâce à l'expression de } m(z) \text{ utilisée avant)}\\
&= \frac{-2i\cancel{y}}{\cancel{(iy)}\left(\frac{\sqrt{(iy)^2-4}}{(iy)}+1\right)}\\
&= \frac{-2}{\frac{\cancel{(iy)}\sqrt{1-\frac{4}{(iy)^2}}}{\cancel{(iy)}}+1}
\end{aligned}
$$

Or $\lim_{y\to\infty} \sqrt{1-\frac{4}{(iy)^2}}+1 = 2$

Donc $\lim_{y\to\infty} iy\ m(iy) = \lim_{y\to\infty} \dfrac{-2}{\sqrt{1-\frac{4}{(iy)^2}}+1} = -1$

$\boxed{\text{Ainsi la masse totale de la mesure positive dont la transformée de Stieltjes est } m(z) \text{ est } \mu(\mathbb{R}) = 1}$

Question 4 :

$$
\begin{aligned}
\lim_{y\downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}\left(m(x+iy)\right) &= \lim_{y\downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}\left(\frac{-x-iy+\sqrt{z^2-4}}{2}\right)\\
&= \lim_{y\downarrow 0} \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Im}\left(\frac{-x-iy}{2}\right)+\operatorname{Im}\left(\frac{\sqrt{z^2-4}}{2}\right)\right)\\
&= \left(\underbrace{\lim_{y\downarrow 0} \frac{1}{\pi}\left(-\frac{y}{2}\right)}_{=0}\right) + \frac{\sqrt{(4-x^2)_+}}{2\pi} \qquad \text{en utilisant (5)}\\
&= \frac{1}{2\pi}\sqrt{(4-x^2)_+}
\end{aligned}
$$

On a donc bien :

$$
\boxed{\lim_{y\downarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}\left(m(x+iy)\right) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(4-x^2)_+}}
$$

Question 5 :

On utilise la propriété $\mu(a,b) = \lim_{y\searrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_a^b g_\mu(x+iy)dx$ avec a et b deux points de continuité de μ et g_μ la transforméee de Stieljes.

Dans notre cas :

$$
\begin{aligned}
\mu(a,b) &= \lim_{y\searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_a^b \operatorname{Im} m(z)dx\\
&= \int_a^b \lim_{y\searrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} m(z)dx \qquad \text{(on utilise la convergence dominée)}\\
&= \int_a^b \underbrace{\frac{1}{2\pi}\sqrt{(4-x^2)_+}dx}_{\mu(dx)} \qquad \text{(avec la question 4)}
\end{aligned}
$$

Finalement on a bien :

$$
\boxed{\mu(dx) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(4-x^2)_+}dx}
$$