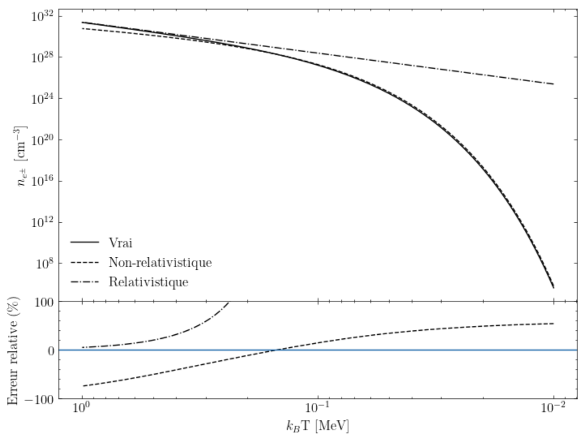
1 Nuclosynthse

a) Dodelson ch. 3, Exercice 2

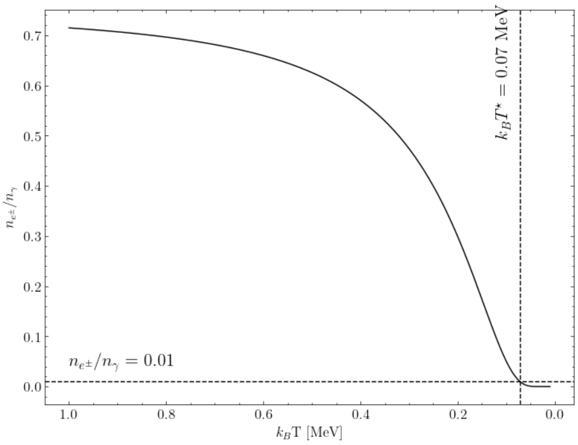
La densit numrique des lectrons-positrons est donne en terme de la distribution de Fermi-Dirac (on conserve les constantes physiques c, $\hbar$, k_B pour ce sous-numro):

$$n_{e^\pm}^{(0)} = g_{e^\pm} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp\left\{\dfrac{E(p)}{k_BT}\right\} + 1} = \begin{cases} \dfrac{3\zeta(3)}{2\pi^2}\left(\dfrac{T}{\hbar c}\right)^3, & T \gg m_e \\ \dfrac{2\zeta(3)}{\pi^2}(m_eT)^{3/2}\exp\left\{-\dfrac{m_e}{T}\right\}, & T \ll m_e \end{cases} \tag{1.1}$$

o $E(p) = \sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4}$ et $g_{e^\pm} = 2$ pour les tats de spins. On a nglig le potentiel chimique des lectrons μ_e car il est identiquement nul avant et durant la nuclosynthse. la temprature o la nuclosynthse se produit ($k_BT \simeq 1\,\text{MeV}$), on ne peut pas simplifier l'nergie en faveur de p ou m_e puisque la masse de l'lectron $m_e \simeq 0.5\,\text{MeV}/c^2$ est similaire la temprature.



(a) Comparaison des approximations la vrai fonction durant l'poque de nuclosynthse.



(b) Ratio des densits numrique des lectrons-positrons lors de l'poque de nuclosynthse.

La densit numrique des photons se calcule directment partir de la distribution de Planck

$$n_\gamma^{(0)} = \int_0^\infty \frac{B(\nu, T)d\nu}{h\nu} = \frac{8\pi}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^2 d\nu}{\exp\{h\nu/k_BT\} - 1} \tag{1.2}$$

Avec substition on retrouve une forme standard pour l'intgrale qui devient

$$n_\gamma^{(0)} = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2}\left(\frac{k_BT}{\hbar c}\right)^3$$

o $\zeta(s)$ est la fonction zeta de Riemann. On cherche la temprature $T^\star$ partir de laquelle la densit numrique des lectrons devient 1% celle des photons $n_\gamma^{(0)}$. En interpolant une grille de valeurs, on obtient

$$\boxed{k_BT^\star = 0.06\,\text{MeV}}$$

Avec un ratio de baryons sur photons de

$$\eta_b = 6 \times 10^{-10}$$

au moment de la nuclosynthse (aprs annihilation des anti-particules), on peut tenter de dterminer le moment (la temprature) partir duquel les lectrons ne seront plus en quilibre avec le processus de cration/annihiltion de paires. En effet, l'Univers observ est lectriquement neutre et on doit avoir $n_{e^-} = n_p$ un certains moment. Si on suppose que la grande majorit de la matire baryonique est constitu de protons (on nglige les neutrons), alors on trouve

$$\boxed{k_BT\left(\frac{n_{e^-}}{n_\gamma} \sim \eta_b\right) \simeq 0.02\,\text{MeV}}$$

b) Dodelson ch. 3, Exercice 3

I Intgrale sur les particules massives

On cherche calculer le taux de la conversion de neutrons en protons Γ_{np}. Pour ce faire, on estime la section efficace thermal des processus $n+\nu_e \longrightarrow p+e^-$ et $n+e^+ \longrightarrow p+\bar{\nu}_e$. On nglige la masse de l'lectron et on assume que les processus peuvent tre dcrits pas les statistiques de Boltzmann. Dans quel cas leur taux de raction est le mme. On considre un seul processus pour le moment et on nglige les facteurs de Pauli ($f_i \ll 1$):

$$\begin{aligned}\langle\sigma v\rangle \equiv \frac{1}{n_n^{(0)}n_{e^+}^{(0)}}\int\frac{d^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n}\int\frac{d^3\mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2E_{e^+}}\int\frac{d^3\mathbf{p}_p}{(2\pi)^3 2E_p}\int\frac{d^3\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\nu}_e}}\exp\left\{-\frac{E_{p_n}+E_{p_{e^+}}}{T}\right\}\\ \times(2\pi)^4\delta^{(3)}(\mathbf{p}_n+\mathbf{p}_{e^+}-\mathbf{p}_p-\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e})\delta(E_n+E_{e^+}-E_p-E_{\bar{\nu}_e})|\mathcal{M}|^2\end{aligned}$$

En ngligeant la masse des neutrinos (ce qui est toujours valide) et la masse des lectrons (valide devant la masse du protons et du neutrons $m_p\sim m_n\sim 2000m_e$), alors $E_{e^+}=p_{e^+}=|\mathbf{p}_{e^+}|$ et $E_{\bar{\nu}_e}=p_{\bar{\nu}_e}$. De plus, on approxime l'nergie des particules massive par leur nergie de masse $E_p\simeq m_p$ et $E_n\simeq m_n$ ce qui est valide durant la nuclosynthse puisque la temprature est de $\sim 1\,\mathrm{MeV}\ll m_p$.

$$\begin{aligned}\langle\sigma v\rangle = \frac{1}{n_n^{(0)}n_{e^+}^{(0)}}\int\frac{d^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2m_n}\int\frac{d^3\mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}}\int\frac{d^3\mathbf{p}_p}{(2\pi)^3 2m_p}\int\frac{d^3\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}}\exp\left\{-\frac{m_n+p_{e^+}}{T}\right\}\\ \times(2\pi)^4\delta^{(3)}(\mathbf{p}_n+\mathbf{p}_{e^+}-\mathbf{p}_p-\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e})\delta(\mathcal{Q}+p_{e^+}-p_{\bar{\nu}_e})|\mathcal{M}|^2\end{aligned}$$

o on a dfinit $\mathcal{Q}=m_n-m_p=1.293\,\mathrm{MeV}$. On fait l'intgrale sur l'espace de phase des particules massives sur une coquille dans le systme de rfrence du neutron (le choix est libre puisque l'intgrale est un invariant de Lorentz), de sortes que $\mathbf{p}_n=0$. La fonction δ de Dirac restante slectionne alors $\mathbf{p}_{e^+}=\mathbf{p}_p+\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}$ par conservation de la quantit de mouvement et on obtient (en appliquant la fonction δ^3 sur $\int d^3\mathbf{p}_p$):

$$\begin{aligned}\langle\sigma v\rangle = \frac{1}{n_n^{(0)}n_{e^+}^{(0)}}\frac{2\pi}{4m_n m_p}\int\frac{d^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}}\int\frac{d^3\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}}\exp\left\{-\frac{m_n+p_{e^+}}{T}\right\}\\ \times\delta(\mathcal{Q}+p_{e^+}-p_{\bar{\nu}_e})|\mathcal{M}|^2\end{aligned}$$

l'quilibre,

$$n_n^{(0)} = 2\int\frac{d^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3}\exp\left\{-\frac{m_n}{T}\right\}$$

De sortes que

$$\boxed{\langle\sigma v\rangle = \frac{1}{n_{e^+}^{(0)}}\frac{\pi}{4m_n m_p}\int\frac{d^3\mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}}\int\frac{d^3\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}}\exp\left\{-\frac{p_{e^+}}{T}\right\}\delta(\mathcal{Q}+p_{e^+}-p_{\bar{\nu}_e})|\mathcal{M}|^2}$$

II Taux de raction

L'amplitude de la raction est

$$|\mathcal{M}|^2 = 32G_F^2(1+3g_A^2)m_p^2 p_\nu p_e \tag{1.3}$$

o g_A est le vecteur axial de couplage du nuclon qu'on mesure aujourd'hui via le temps de vie du neutron

$$\tau_n^{-1} = \lambda_0 G_F^2(1+3g_A^2)\frac{m_e^5}{2\pi^3}$$

o $\lambda_0\simeq 1.636$, $\tau_n = 879.4\pm 0.6$ s et G_F est la constante de Fermi

$$G_F = 1.16639(1)\times 10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}(\hbar c)^3$$

On performe l'intgrale de la section efficace thermalise sur une coquille dans l'espace de phase du positron. On applique en premier lieu la fonction δ sur l'nergie:

$$\begin{aligned}n_{e^+}^{(0)}\langle\sigma v\rangle &= \frac{32\pi G_F^2(1+3g_A^2)m_p}{4m_n}\int\frac{d^3\mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}}\int\frac{d^3\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}}\exp\left\{-\frac{p_{e^+}}{T}\right\}\delta(\mathcal{Q}+p_{e^+}-p_{\bar{\nu}_e})p_{\bar{\nu}_e}p_{e^+}\\ &= \frac{32\pi G_F^2(1+3g_A^2)m_p}{4m_n}\int_0^\infty\frac{4\pi p_{e^+}^2dp_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}}\int_0^\infty\frac{4\pi p_{\bar{\nu}_e}^2dp_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}}\exp\left\{-\frac{p_{e^+}}{T}\right\}\delta(\mathcal{Q}+p_{e^+}-p_{\bar{\nu}_e})p_{\bar{\nu}_e}p_{e^+}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4G_F^2(1+3g_A^2)m_p}{(2\pi)^3 m_n}\int_0^\infty p_{e^+}^2 dp_{e^+}\int_0^\infty p_{\bar\nu_e}^2 dp_{\bar\nu_e}\exp\left\{-\frac{p_{e^+}}{T}\right\}\delta(\mathcal{Q}+p_{e^+}-p_{\bar\nu_e})\\
&= \frac{4G_F^2(1+3g_A^2)m_p}{(2\pi)^3 m_n}\int_0^\infty dp_{e^+}p_{e^+}^2(\mathcal{Q}+p_{e^+})^2\exp\left\{-\frac{p_{e^+}}{T}\right\}
\end{aligned}
$$

On applique la substitution $y \equiv \dfrac{p_{e^+}}{T}$ pour obtenir

$$
n_{e^+}^{(0)}\langle\sigma v\rangle = \frac{4G_F^2(1+3g_A^2)m_p}{(2\pi)^3 m_n}T^3\int_0^\infty dy\; y^2(\mathcal{Q}^2+2\mathcal{Q}Ty+T^2y^2)e^{-y}
$$

On reconnat la forme intgrale de la fonction $\Gamma(s)$, ainsi

$$
\begin{aligned}
n_{e^+}^{(0)}\langle\sigma v\rangle &= \frac{4G_F^2(1+3g_A^2)m_p}{(2\pi)^3 m_n}T^3\left[\Gamma(3)\mathcal{Q}^2+2\Gamma(4)\mathcal{Q}T+\Gamma(5)T^2\right]\\
&= \frac{4G_F^2(1+3g_A^2)m_p}{(2\pi)^3 m_n}T^3\left[2\mathcal{Q}^2+12\mathcal{Q}T+24T^2\right]\\
&= \frac{16\pi^3 m_p}{\lambda_0(2\pi)^3\tau_n m_e^5 m_n}T^3\left[\mathcal{Q}^2+6\mathcal{Q}T+12T^2\right]
\end{aligned}
$$

En posant de plus $x \equiv \dfrac{\mathcal{Q}}{T}$, on trouve

$$
\boxed{\Gamma_{np} = 2n_{e^+}^{(0)}\langle\sigma v\rangle = \frac{4m_p\mathcal{Q}^5}{\lambda_0\tau_n m_e^5 m_n}\frac{1}{x^5}\left[x^2+6x+12\right]}
$$

On peut comparer avec l'quation (3.29) et on remarque qu'on obtient

$$
\boxed{\Gamma_{np} \simeq \frac{253.57}{\tau_n x^5}\left[x^2+6x+12\right]}
$$

La constante numrique 253 est comparable 255, celle obtenue par Bernstein (1988).

2 Vitesse du son lors du dcouplement

a) Ratio de densit

On cherche

$$
R \equiv \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}
$$

o l'indice b rfre aux baryons.

La premire loi de la thermodynamique avec $dQ=0$ dans un Univers rgit par la mtrique FRW implique que

$$
\dot\rho + 3\frac{\dot a}{a}(\rho+p) = 0
$$

qu'on rcrit

$$
a^{-3}\frac{d(\rho a^3)}{dt} = -3\frac{\dot a}{a}p
$$

Pour la matire, l'quation d'tat $p=0$ implique que

$$
a^{-3}\frac{d}{dt}(\rho_b a^3) = 0 \implies \rho_b = \rho_{b,0}a^{-3}
$$

Pour la radiation, on a plutt $p=\rho_\gamma/3$, donc

$$
\dot\rho_\gamma + 4\frac{\dot a}{a}\rho_\gamma = a^{-4}\frac{d(\rho_\gamma a^4)}{dt} = 0
$$

Donc

$$
\rho_\gamma = \rho_{\gamma,0}a^{-4}
$$

On peut dterminer $\rho_{\gamma,0}$ partir du fond diffus cosmologique partir de la distribution de Planck:

$$\rho_{\gamma,0} = \frac{2\zeta(2)}{5} T_{\text{CMB}}^4$$

On ralise alors que $T_\gamma \propto a$ en comparant nos deux expressions pour la densit d'nergie de radiation. De plus, on rcrit ρ_b en terme de la densit critique:

$$\rho_b = \Omega_b \rho_{\text{cr}} a^{-3} = 5.3397 \times 10^8 \text{ cm}^{-4} \; (\Omega_b h^2) a^{-3}$$

Ainsi, le ratio de densit en terme du facteur d'chelle et des paramtres de densits d'aujourd'hui ($T_{\text{CMB}} = 2.725 \text{ K} = 11.9 \text{ cm}^{-1}$):

$$\boxed{R = \frac{66\,565}{\zeta(2)} (\Omega_b h^2) a}$$

On peut valuer R au dcouplement avec le rsultat thorique $z_{\text{dec}} \simeq 1090$, de sortes que

$$\boxed{R(z_{\text{dec}} = 1090) = 0.8302 \left(\frac{\Omega_b h^2}{0.022383} \right)}$$

O on a normalis l'expression par rapport au rsultat de la collaboration Planck (2018). La suite est une drivation thorique approximative de ce rsultat.

Pour dterminer R au moment du dcouplement, on doit dterminer le moment dans l'volution de l'Univers o le taux de diffusion Compton devient gal au taux d'expansion de l'Univers. En pratique, on sait que ce moment survient dans la limite non-relativistique de la distribution thermique des lectrons, donc on utilise le taux de diffusion Thompson (units de Planck):

$$\Gamma_T = X_e n_b \sigma_T$$

o σ_T est la section efficace de Thompson et X_e est la fraction d'lectrons libres.

$$X_e \equiv \frac{n_p}{n_H + n_p} = \frac{n_e}{n_b}$$

On a utilis le fait que $n_e = n_p$ et on a nglig le nombre de neutrons dans l'Univers ($n_b \simeq n_p + n_H$).

On utilise notre expression pour la densit baryonique et l'approximation $\rho_b \simeq m_p n_b$ ($m_H \simeq m_p$) pour obtenir

$$\Gamma_T = \frac{\rho_{\text{cr}}}{m_p} \sigma_T X_e \Omega_b a^{-3} = 2.2396 \times 10^{-19} \text{ s}^{-1} \; X_e \Omega_b h^2 a^{-3}$$

On veut dterminer a au moment o $\Gamma_T = H(a)$. Au moment du dcouplement, l'Univers est en transition entre un Univers domin par la radiation et un Univers domin par la matire. Toutefois, dans un Univers plat ΛCDM on peut nglig la radiation au moment du dcouplement (ce n'est pas prcis mais cela nous permet de simplifier normment les expressions):

$$H(a_{\text{dec}}) \simeq H_0 \Omega_m^{1/2} a_{\text{dec}}^{-3/2}$$

Ainsi,

$$\frac{\Gamma_T}{H} = 1 = \frac{\rho_{\text{cr}} \sigma_T}{m_p H_0 \Omega_m^{1/2}} X_e \Omega_b a_{\text{dec}}^{-3/2}$$

d'o

$$a_{\text{dec}} = \left(\frac{\rho_{\text{cr}} \sigma_T}{m_p H_0 \Omega_m^{1/2}} \right)^{2/3} \Omega_b^{2/3} (X_e(a_{\text{dec}}))^{2/3} \tag{2.1}$$

On obtient une quation implicite en terme de a_{dec}. La solution finale pour R est trs sensible X_e et on doit donc utiliser un modle plausible pour la fraction d'ionisation.

Une approximation qui simplifie lgrement notre tche est d'utiliser l'quation de Saha (qui cesse d'tre valide trs peu de temps avant le moment qui nous intresse).

$$\frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}} = \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left\{ -\frac{\text{Ry}}{T} \right\}$$

o Ry est la constante de Rydberg. Selon nos approximations prcdentes ($n_b \simeq n_p + n_n$),

$$\frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}} = \frac{X_e n_p}{1 - X_e}$$

Pour liminer n_p de l'quation, on utilise $\eta_b \equiv n_b/n_\gamma$:

$$\implies n_p = \eta_b X_e n_\gamma = \eta_b X_e \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3$$

On doit donc rsoudre

$$\frac{1 - X_e}{X_e^2} = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \eta_b \left(\frac{m_e}{2\pi T} \right)^{-3/2} \exp\left\{ \frac{\mathrm{Ry}}{T} \right\} \equiv S(\eta_b, T)$$

Qui a comme solution physique

$$X_e = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4S}}{2S}$$

Sachant que la temprature suit la loi

$$T = T_{\mathrm{CMB}} a^{-1}$$

et que la fraction de baryons sur photons est mesure

$$\eta_b = 6.155 \times 10^{-10} \left(\frac{\Omega_b h^2}{0.022383} \right)$$

on peut finalement rsoudre l'quation 2.1 en utilisant la mthode numrique de bissection et les paramtres cosmologiques

$$\Omega_b = 0.048; \;\; \Omega_m = 0.31; \;\; h = 0.68$$

On obtient $X_e(a_{\mathrm{dec}}) = 6.56 \times 10^{-3}$, $T_{\mathrm{dec}} = 0.2636$ eV et le facteur d'chelle obtenu correspond au redshift $z_{\mathrm{dec}} \simeq 1121$. Notons que la fraction d'ionization elle-mme ne dpend que faiblement des paramtres cosmologiques. La temprature T_{dec} joue un rle beaucoup plus important cause du facteur exponentiel. La rponse est comparable $z_{\mathrm{dec}} = 1090$ annonc. Toutefois, ce rsultat plus prcis requiert d'intgrer l'quation de Boltzmann et de considrer la contribution de Ω_r dans le facteur de Hubble. Ainsi, avec l'approxmation de Saha on obtient

$$\boxed{R^{\mathrm{Saha}}(a_{\mathrm{dec}}) = 1.328 \left(\frac{\Omega_b h^2}{0.022383} \right)}$$

Pour dterminer la vitesse du son la prochaine tape, cette approximation ne change pas le rsultat de faon significative compar la vrai rponse et donc on conserve le facteur numrique de la rponse thorique pour la prochaine sous-section.

b) Vitesse du son

La vitesse du son au dcouplement est dtermin en terme de sa dfinition

$$c_s^2 \equiv \frac{\partial P}{\partial \rho}\bigg|_S$$

o l'entropie est guarde constante. Comme la pression du fluide baryons-photons est domines par la pression des photons:

$$P \simeq P_\gamma = \frac{1}{3} \rho_\gamma$$

D'o

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \frac{\partial \rho_\gamma}{\partial(\rho_\gamma + \rho_b)} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\partial \rho_b}{\partial \rho_\gamma} \right)^{-1}$$

En remplaant $a^{-1} = T/T_{\mathrm{CMB}}$ dans les expressions trouves prcdemment pour ρ_γ et ρ_b, on trouve

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\partial \rho_b}{\partial T} \left(\frac{\partial \rho_\gamma}{\partial T} \right)^{-1} \right)^{-1} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\rho_b}{\rho_\gamma} \right)^{-1}$$

D'o

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{1 + R}}$$

En utilisant la rponse trouve prcdemment, on peut dterminer la vitesse du son de la matire baryonique au moment du dcouplement dans un espace de paramtres plausibles pour $\Omega_b h^2$.

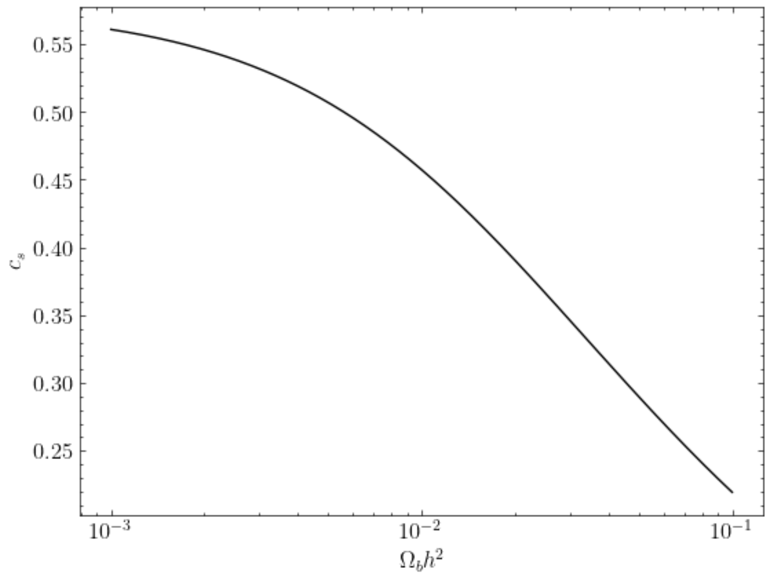


Figure 2: Vitesse du son lors du dcouplement (fraction de la vitesse de la lumire).

c) Nombre d'onde de Jeans

Le nombre d'onde de Jeans dans les coordonnes comobiles est

$$k_J = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_b a^2}{c_s^2}}$$

et dcrit la taille minimale d'un objet de densit de matire ρ_b pour l'instabilit de Jeans (effondrement gravitationnel). On s'intresse la priode avant le dcouplement, donc $a < a_{\text{dec}}$. ce moment, l'Univers est domin par la radiation donc ($a(t=0)=0$):

$$\dot{a} = H_0 \Omega_r^{1/2} a^{-1} \implies a(t) = \left(2H_0\Omega_r^{1/2} t\right)^{1/2}$$

Donc, l'horizon est

$$\eta(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \sqrt{\frac{t}{2H_0\Omega_r^{1/2}}} = \frac{a}{2H_0\Omega_r^{1/2}}$$

Malgr le fait que k_J diminue en fonction de a, l'acclration de l'expansion de l'Univers fait en sorte que $\eta k_J \to 1$ environ au moment du dcouplement, ce qui permet au large structure de l'Univers de commencer se former sous l'attraction gravitationnelle.

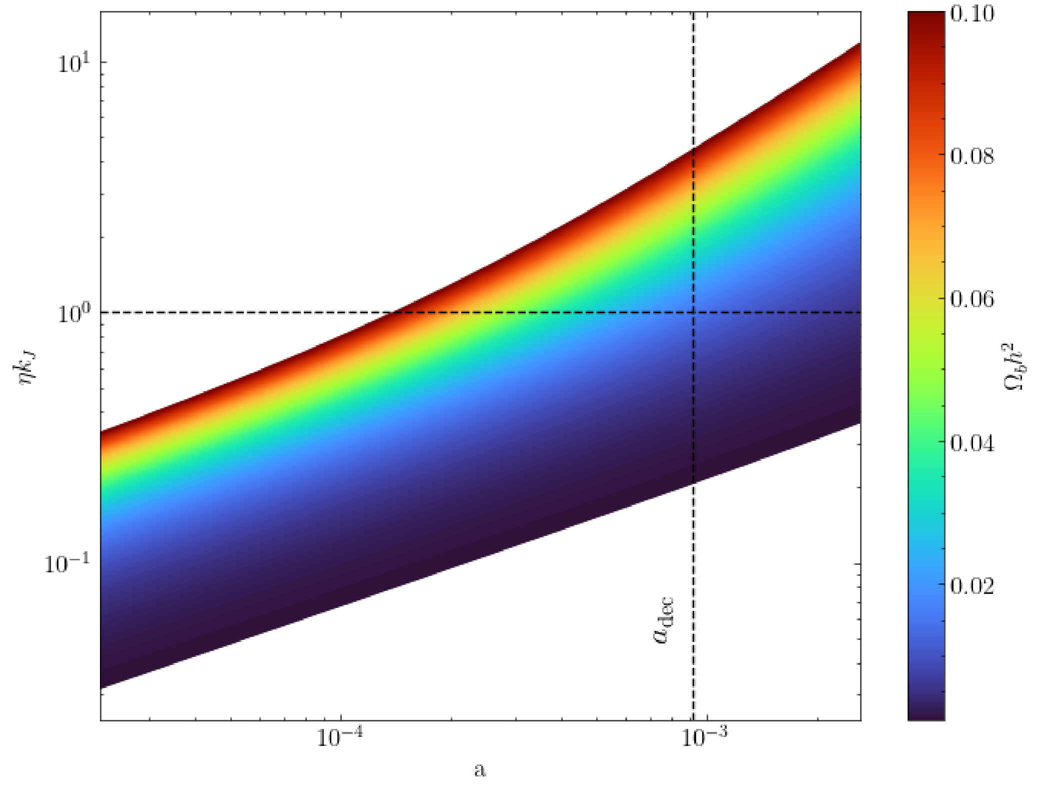


Figure 3: Rapport de la longueur d'onde de Jeans et de l'horizon cosmique. Lorsque $\eta k_J < 1$, la matire est stable par rapport au instabilits gravitationnelles. On remarque que $\eta k_J < 1$ pour $a < a_{\rm dec}$ et $\Omega_b h^2 \lesssim 0.022$ ce qui correspond bien un Univers stable avant le dcouplement.

3 La vraisemblance

On considre la fonction de vraisemblance Gaussienne:

$$\mathcal{L}(\mathcal{D} \mid w, \sigma_w^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma_w^2)^{|\mathcal{D}|/2}} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} \frac{(d_i - w)^2}{2\sigma_w^2}\right\}$$

o $\mathcal{D} = \{d_i\}$ est le jeu de donnes et $|\mathcal{D}|$ est la taille du jeu de donne.

a) Dodelson ch.11, Exercice 1

En premier lieu, on cherche la distribution *a posteriori* de la dviation standard. Pour rendre les choses simples, on dtermine la conditionnelle *a posteriori* $P(\sigma_w \mid \mathcal{D}, \mu)$ au lieu de la distribution marginale. Pour la dviation standard, on utilise une distribution *a priori* uniforme impropre

$$\pi(\sigma_w) = 1$$

Cette distribution est impropre car elle n'est pas normalise $\int_0^\infty \pi(\sigma_w) d\sigma_w = \infty$. Toutefois, elle nous permet d'obtenir une relation de proportionnalit pour la distribution *a posteriori*

$$P(\sigma_w \mid \mathcal{D}, \mu) \propto_{\sigma_w} \left(\frac{1}{\sigma_w}\right)^{|\mathcal{D}|} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|}(d_i - \mu)^2\right\}, \qquad \sigma_w > 0$$

On trouve une distribution Gamma inverse gnralise

$$P(x \mid \alpha, \beta, \delta) = \frac{\delta \alpha^\beta}{\Gamma(\frac{\beta}{\delta})} \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta+1} \exp\left\{-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^\delta\right\}, \qquad x > 0$$

avec les paramtres *a posteriori*

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|}(d_i - \mu)}$$
$$\beta = |\mathcal{D}| - 1$$
$$\delta = 2$$

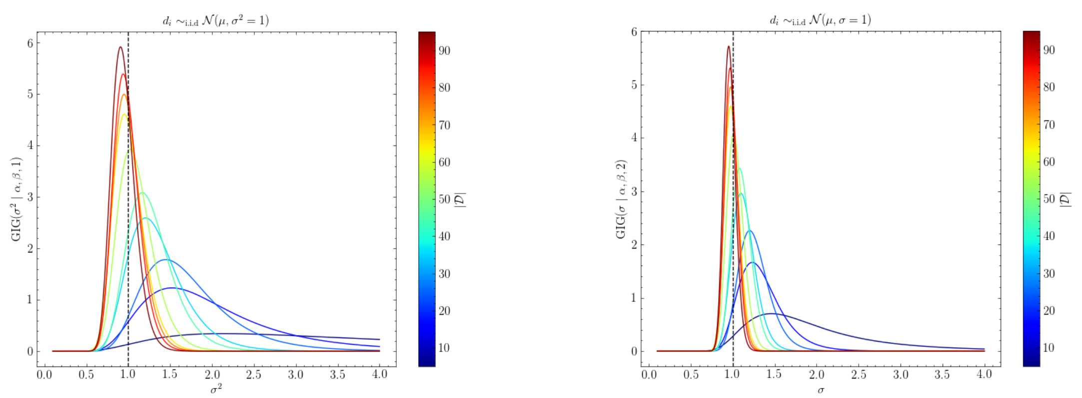
D'un autre ct, si on choisit plutt une distribution *a priori* en terme de la variance σ_w^2

$$\pi(\sigma_w^2) = 1$$

Alors la distribution *a posteriori* a plutt une distribution Gamma inverse avec les paramtres

$$\alpha = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|}(d_i - \mu)^2$$
$$\beta = \frac{|\mathcal{D}|}{2} - 1$$
$$(\delta = 1)$$

On obtient deux distributions qui appartiennent la mme famille, mais qui ont une forme diffrentes.



(a) Distribution *a posteriori* avec le choix $\pi(\sigma) = 1$. (b) Distribution *a posteriori* avec le choix $\pi(\sigma^2) = 1$.

Figure 4: Comparaison des distributions postrieurs pour un choix diffrent de distribution *a priori*. Ce choix influence la forme de la distribution d'une manire prdictible, et nous indique que le choix de la taille de la distribution *a priori* doit prendre en compte le fait que la distribution *a posteriori* de la variance a une queue plus longue dans sa distribution pour un petit jeu de donnes.

b) Dodelson ch.11, Exercice 2

On cherche l'erreur sur la dviation standard σ_w. On suppose que la fonction de vraisemblance est quadratique autour de la solution MLE.

$$\ln \mathcal{L}(\mathcal{D} \mid \sigma_w, w = \bar{w}) \simeq \ln \mathcal{L}(\mathcal{D} \mid \bar{\sigma}_w, \bar{w}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma_w^2}\bigg|_{\sigma_w = \bar{\sigma}_w}(\sigma_w - \bar{\sigma}_w)^2$$

En effet, on sait que

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma_w}\bigg|_{\text{MLE}} = \frac{1}{\bar{\sigma}_w^3}\sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|}(d_i - \bar{w})^2 - \frac{|\mathcal{D}|}{\bar{\sigma}_w} = 0$$

D'o on avait trouv la solution MLE pour la variance

$$\bar{\sigma}_w^2 = \frac{1}{|\mathcal{D}|}\sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|}(d_i - \bar{w})^2$$

O $\bar{w}$ est la solution attendu pour le signal w (moyenne). L'erreur sur la dviation standard est 2 fois l'inverse du coefficient de deuxime ordre dans l'expansion de Taylor de la vraisemblance autour de son maximum global (dfinition de FHWM):

$$\sigma_{\sigma_w}^{-1} = -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma_w^2}\bigg|_{\text{MLE}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3}{\bar{\sigma}_w^4} \sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} (d_i - \bar{w})^2 - \frac{|\mathcal{D}|}{\bar{\sigma}_w^2} \\
&= \frac{2|\mathcal{D}|^2}{\sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} (d_i - \bar{w})^2} \\
\implies & \boxed{\sigma_{\sigma_w} = \frac{1}{2|\mathcal{D}|^2} \sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} (d_i - \bar{w})^2 = \frac{\bar{\sigma}_w}{2|\mathcal{D}|}}
\end{aligned}
$$

Donc l'incertitude sur la dviation standard diminue trs rapidement avec la taille du jeu de donne $|\mathcal{D}|$.