1 Les distances en cosmologie

a) Distance angulaire

On cherche le redshift z où l'angle apparent d'un objet est à son minimum en supposant un univers dominé par la matière.

L'angle apparent d'un objet dépend de la taille que cette objet aurait au temps présent ($\ell(z)$) et de la distance comobile entre l'observateur et l'objet:

$$\theta = \frac{\ell(z)}{\chi(z)} \tag{1.1}$$

Un objet de taille caractéristique ℓ (dans son référentiel, au temps où l'objet à émis la lumière observée) aura une taille assumée dans le référentiel de l'observateur égale à

$$\ell(z) = \frac{a_0}{a}\ell = (1+z)\ell$$

Pour un univers de poussière ($\Lambda = p = 0$), la distance comobile prend une forme analytique:

$$\chi(z) = \frac{2c}{H_0}\frac{\Omega_0 z + (\Omega_0 - 2)(\sqrt{\Omega_0 z + 1} - 1)}{\Omega_0^2(1+z)} \tag{1.2}$$

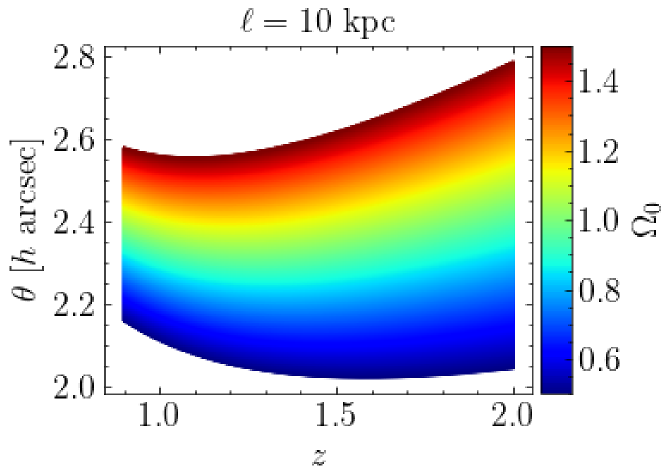
On peut donc déterminer un redshift où la taille atteint un maxima:

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{dz} &= \frac{H_0\ell}{2c}\frac{d}{dz}\frac{\Omega_0^2(1+z)^2}{\Omega_0 z + (\Omega_0 - 2)(\sqrt{\Omega_0 z + 1} - 1)} \\
&= \frac{\Omega_0^2 H_0 \ell}{2c}\frac{2(1+z)\left[\Omega_0 z + (\Omega_0 - 2)(\sqrt{\Omega_0 z + 1} - 1)\right] - (1+z)^2\left[\Omega_0 + \frac{1}{2}\frac{\Omega_0(\Omega_0 - 2)}{\sqrt{\Omega_0 z + 1}}\right]}{(\Omega_0 z + (\Omega_0 - 2)(\sqrt{\Omega_0 z + 1} - 1))^2}
\end{aligned}$$

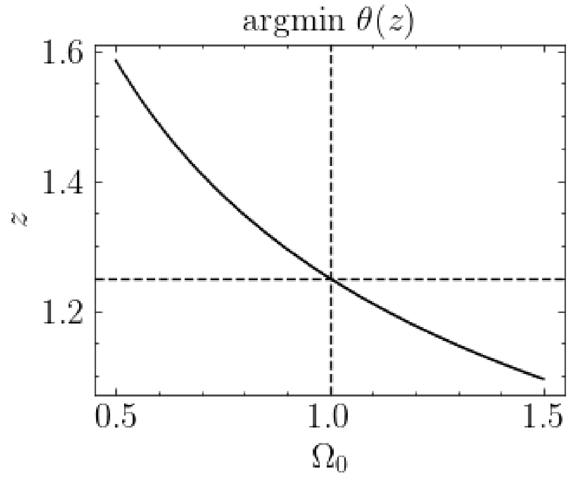
Il s'avère qu'il est possible de résoudre analytiquement ce système seulement pour $\Omega_0 = 1$ (univers plat):

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\theta}{dz}\right|_{\Omega_0 = 1} &= 0 \\
\implies 2\left[z - \sqrt{z+1} + 1\right] &= (1+z)\left[1 - \frac{1}{2\sqrt{z+1}}\right] \\
\implies 2(x^2 - x) &= x^2(1 - \frac{1}{2x}), \qquad \{x = \sqrt{z+1}\} \\
\implies x^2 - \frac{3x}{2} &= 0 \\
\implies \sqrt{z+1} &= \frac{3}{2}, \qquad \{z \geq 0 \implies x \neq 0\} \\
\implies &\boxed{z = \frac{5}{4}}
\end{aligned}$$

Il serait possible de faire un traitement perturbatoire pour $\Omega_0 = 1 \pm \epsilon$, $\epsilon \ll 1$, mais on trouve qu'une solution numérique sert mieux nos besoins. Les prochaines figures montrent le redshift où l'angle apparent est minimal pour une une densité totale Ω_0 donnée.



(a) Taille angulaire apparente d'un objet de distance caractéristique ℓ



(b) Le redshift où θ est minimal se comporte comme Ω_0^{-1} autour de la solution pour un univers plat.

b) Le nombre total de galaxies dans l'univers

Pour déterminer la densité de galaxie de l'univers à un temps donné, il est coutume de se référer à la fonction de Schechter pour mesurer la densité numérique de galaxies en fonction de leur distribution de masse:

$$\phi(M) = b\phi^* \ln(10) \left[10^{b(M-M^*)}\right]^{1+\alpha} \exp\left\{-10^{b(M-M^*)}\right\} \tag{1.3}$$

où $b = 1$ pour la fonction de masse. En principe, α, M^* et ϕ^* doivent être ajusté sur les observations et peuvent dépendre de l'historique de formation des galaxies. En d'autres mots, ce sont des paramètres qui dépendent du redshift. On mesure M en unité logarithmique de masse solaire:

$$M = \log \frac{M_{\text{gal}}}{M_\odot}$$

La fonction de Schechter n'est valide que dans un interval de masses considérées. La borne inférieur choisie dans l'analyse de [?] est $M > 6$. Le meilleur fit sur les données pour la densité numérique intégrée sur le profile de Schechter ϕ_T

$$\phi_T(z) = \int_{M_1}^{M_2} \phi(M, z) dM \qquad [\text{Mpc}^{-3}]$$

est [?]

$$\log \phi_T(t) = (-1.08 \pm 0.20) \log \left(\frac{t}{1\,\text{Gyr}} \right) - 0.26 \pm 0.06$$

Ce résultat est un constat que le taux de production de galaxies est variable en fonction du temps. En particulier, il est plus bas aujourd'hui qu'il ne l'était à $z = 6$.

Le nombre total de galaxies dans l'univers visible, en supposant un modèle d'évolution qui commence à $z = 6$ et la cosmologie du modèle ΛCDM plat, est donc l'intégrale de la fonction du nombre de densité total multiplié par le volume de l'univers visible en fonction du redshift $V_{\text{univers}}(z)$:

$$N_{\text{tot}} = \frac{c}{H_0} \int_{z=0}^{6} \int_0^{4\pi} \underbrace{\frac{(1+z)^2 D_A^2}{\sqrt{\Omega_{0m}(1+z)^3 + \Omega_{0\Lambda}}}}_{\frac{\partial^2 V_{\text{univers}}(z)}{\partial\Omega\partial z}} \phi_T(t(z)) d\Omega dz \tag{1.4}$$

où D_A est la distance angulaire en fonction de z

$$D_A = \frac{(1+z)^{-1}}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_{0m}(1+z')^3 + \Omega_{0\Lambda}}} \tag{1.5}$$

et

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \int_z^\infty \frac{(1+z')^{-1} dz'}{\sqrt{\Omega_{0m}(1+z')^3 + \Omega_{0\Lambda}}} \tag{1.6}$$

Les paramètres du modèle cosmologique sont données dans la table suivante.

h	Ω_{0m}	Ω_Λ
0.72	0.3	0.7

Table 1

Le résultat de l'équation (1.4) est

$$\boxed{N_{\text{tot}} = (6 \pm 1) \times 10^{11} \,\text{galaxies}}$$

En principe, il y a N_{tot} galaxie observable dans l'univers visible.

2 L'horizon

L'horizon comobile est définie comme

$$\eta \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}$$

$(c = 1)$. La distance comobile entre deux points est définie comme

$$\chi(a) = \int_a^1 \frac{da'}{a'^2 H(a')}$$

a)

On cherche le redshift à partir duquel un miroir peut réfléchit la lumière du Big Bang vers la position d'un observateur de sortes que celui-ci reçoit cette lumière au temps t_0.

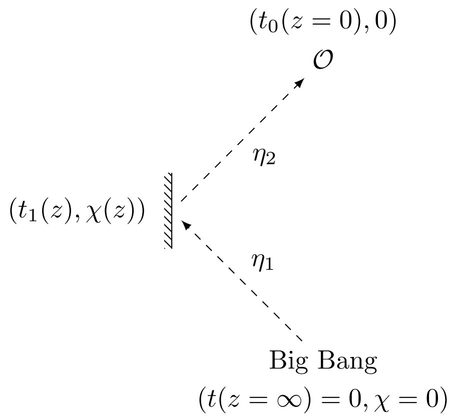


Figure 2: Illustration du problème

Par géométrie, les horizons comobiles η_1 et η_2 sont égales à la distance comobile $\chi(z)$ entre le miroir et l'observateur:

$$\chi(z) = \frac{1}{2}\left(\int_0^{t_1} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}\right)$$

Pour un univers de poussière ($\Lambda = p = 0$) plat ($\Omega_0 = 1$), les équations de Friedmann ont comme solution

$$t(z) = t_0(1+z)^{-3/2}$$
$$\implies dt = -\frac{3}{2} t_0 (1+z)^{-5/2} dz$$

En remplaçant $a(z) = (1+z)^{-1}$, dans l'intégrale de l'horizon comobile, on obtient

$$\chi(z) = \frac{1}{2}\int_\infty^0 \left(-\frac{3}{2}\right) t_0 (1+z)^{-3/2} dz$$

Ainsi,

$$\chi(z) = \frac{3}{2H_0}$$

Du côté gauche, la distance comobile prend la forme

$$\chi(z) = \frac{2}{H_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)$$

De sortes que

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} &= \frac{3}{4} \\ \implies &\boxed{z = 3} \end{aligned}$$

b)

Dans un univers ouvert ($\kappa = -1, \Omega < 1$) dominé par la matière ($\Lambda = p = 0$), les équations de Friedmann deviennent

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &= \frac{8\pi G\rho a^2}{3} - 1 \\ \ddot{a} &= -\frac{4\pi G\rho a}{3} \\ d(\rho a^3) &= 0 \end{aligned}$$

On introduit le paramètre de densité

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \qquad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$