

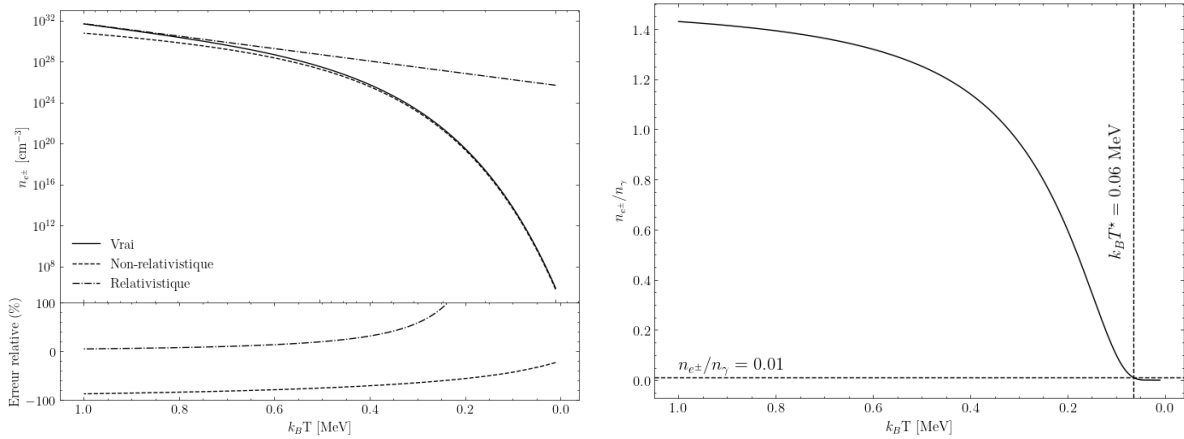
# 1 Nucleosynthese

## a) Dodelson ch. 3, Exercice 2

La densité numérique des électrons-positrons est donnée en terme de la distribution de Fermi-Dirac (on conserve les constantes physiques  $c$ ,  $\hbar$ ,  $k_B$  pour ce sous-numéro):

$$n_{e^\pm}^{(0)} = g_{e^\pm} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp\left\{\frac{E(p)}{k_B T}\right\} + 1} \quad (1.1)$$

où  $E(p) = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}$  et  $g_{e^\pm} = 2$  pour les deux états de spins. On a négligé le potentiel chimique des électrons  $\mu_e$  car il est identiquement nul avant et durant la nucléosynthèse. La température où la nucléosynthèse se produit ( $k_B T \simeq 1$  MeV), on ne peut pas simplifier l'énergie en faveur de  $p$  ou  $m_e$  puisque la masse de l'électron  $m_e \simeq 0.5$  MeV/ $c^2$  est similaire à la température.



(a) Comparaison des approximations de la vraie fonction pendant l'époque de nucléosynthèse.

(b) Ratio des densités numériques des électrons-positrons lors de l'époque de nucléosynthèse.

La densité numérique des photons se calcule directement à partir de la distribution de Planck

$$n_\gamma^{(0)} = \int_0^\infty \frac{B(\nu, T) d\nu}{h\nu} = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^2 d\nu}{\exp\{h\nu/k_B T\} - 1} \quad (1.2)$$

Avec substitution on retrouve une forme standard pour l'intégrale qui devient

$$n_\gamma^{(0)} = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \left( \frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3$$

où  $\zeta(s)$  est la fonction zeta de Riemann. On cherche la température  $T^*$  à partir de laquelle la densité numérique des électrons devient 1% celle des photons  $n_\gamma^{(0)}$ . En interpolant une grille de valeurs, on obtient

$$k_B T^* = 0.06 \text{ MeV}$$

Avec un ratio de baryons sur photons de

$$\eta_b = 6 \times 10^{-10}$$

au moment de la nucléosynthèse (après annihilation des anti-particules), on peut tenter de déterminer le moment (la température) à partir duquel les électrons ne seront plus en équilibre avec le processus de création/annihilation de paires. En effet, l'Univers observé est électriquement neutre et on doit avoir  $n_{e^-} = n_p$  à certains moments. Si on suppose que la grande majorité de la matière baryonique est constituée de protons (on néglige les neutrons), alors on trouve

$$k_B T \left( \frac{n_{e^-}}{n_\gamma} \sim \eta_b \right) \simeq 0.02 \text{ MeV}$$

## b) Dodelson ch. 3, Exercice 3

### I Intégrale sur les particules massives

On cherche à calculer le taux de la conversion de neutrons en protons  $\Gamma_{np}$ . Pour ce faire, on estime la section efficace thermique des processus  $n + \nu_e \rightarrow p + e^-$  et  $n + e^+ \rightarrow p + \bar{\nu}_e$ . On néglige la masse de l'électron et on assume que les processus peuvent être décrits par les statistiques de Boltzmann. Dans quel cas leur taux de réaction est le même. On considère un seul processus pour le moment et on néglige les facteurs de Pauli ( $f_i \ll 1$ ):

$$\langle \sigma v \rangle \equiv \frac{1}{n_n^{(0)} n_{e^+}^{(0)}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2E_{e^+}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_p}{(2\pi)^3 2E_p} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\nu}_e}} \exp \left\{ -\frac{E_{p_n} + E_{p_{e^+}}}{T} \right\} \\ \times (2\pi)^4 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_{e^+} - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}) \delta(E_n + E_{e^+} - E_p - E_{\bar{\nu}_e}) |\mathcal{M}|^2$$

En négligeant la masse des neutrinos (ce qui est toujours valide) et la masse des électrons (valable devant la masse du proton et du neutron  $m_p \sim m_n \sim 2000 m_e$ ), alors  $E_{e^+} = p_{e^+} = |\mathbf{p}_{e^+}|$  et  $E_{\bar{\nu}_e} = p_{\bar{\nu}_e}$ . De plus, on approxime l'énergie des particules massive par leur énergie de masse  $E_p \simeq m_p$  et  $E_n \simeq m_n$  ce qui est valide durant la nucléosynthèse puisque la température est de  $\sim 1 \text{ MeV} \ll m_p$ .

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{1}{n_n^{(0)} n_{e^+}^{(0)}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2m_n} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_p}{(2\pi)^3 2m_p} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}} \exp \left\{ -\frac{m_n + p_{e^+}}{T} \right\} \\ \times (2\pi)^4 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_{e^+} - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}) \delta(Q + p_{e^+} - p_{\bar{\nu}_e}) |\mathcal{M}|^2$$

où on a défini  $Q = m_n - m_p = 1.293 \text{ MeV}$ . On fait l'intégrale sur l'espace de phase des particules massives sur une coquille dans le système de référence du neutron (le choix est libre puisque l'intégrale est un invariant de Lorentz), de sorte que  $\mathbf{p}_n = 0$ . La fonction  $\delta$  de Dirac restante sélectionne alors  $\mathbf{p}_{e^+} = \mathbf{p}_p + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}$  par conservation de la quantité de mouvement et on obtient (en appliquant la fonction  $\delta^3$  sur  $\int d^3 \mathbf{p}_p$ ):

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{1}{n_n^{(0)} n_{e^+}^{(0)}} \frac{2\pi}{4m_n m_p} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}} \exp \left\{ -\frac{m_n + p_{e^+}}{T} \right\} \\ \times \delta(Q + p_{e^+} - p_{\bar{\nu}_e}) |\mathcal{M}|^2$$

l'équilibre,

$$n_n^{(0)} = 2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} \exp \left\{ -\frac{m_n}{T} \right\}$$

De sorte que

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{1}{n_{e^+}^{(0)}} \frac{\pi}{4m_n m_p} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}} \exp \left\{ -\frac{p_{e^+}}{T} \right\} \delta(Q + p_{e^+} - p_{\bar{\nu}_e}) |\mathcal{M}|^2$$

### II Taux de réaction

L'amplitude de la réaction est

$$|\mathcal{M}|^2 = 32 G_F^2 (1 + 3g_A^2) m_p^2 p_{\nu} p_e \quad (1.3)$$

où  $g_A$  est le vecteur axial de couplage du nucléon qu'on mesure aujourd'hui via le temps de vie du neutron

$$\tau_n^{-1} = \lambda_0 G_F^2 (1 + 3g_A^2) \frac{m_e^5}{2\pi^3}$$

où  $\lambda_0 \simeq 1.636$ ,  $\tau_n = 879.4 \pm 0.6 \text{ s}$  et  $G_F$  est la constante de Fermi

$$G_F = 1.16639(1) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} (\hbar c)^3$$

On performe l'intégrale de la section efficace thermalisée sur une coquille dans l'espace de phase du positron. On applique en premier lieu la fonction  $\delta$  sur l'énergie:

$$n_{e^+}^{(0)} \langle \sigma v \rangle = \frac{32\pi G_F^2 (1 + 3g_A^2) m_p}{4m_n} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}} \exp \left\{ -\frac{p_{e^+}}{T} \right\} \delta(Q + p_{e^+} - p_{\bar{\nu}_e}) p_{\bar{\nu}_e} p_{e^+} \\ = \frac{32\pi G_F^2 (1 + 3g_A^2) m_p}{4m_n} \int_0^\infty \frac{4\pi p_{e^+}^2 dp_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}} \int_0^\infty \frac{4\pi p_{\bar{\nu}_e}^2 dp_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}} \exp \left\{ -\frac{p_{e^+}}{T} \right\} \delta(Q + p_{e^+} - p_{\bar{\nu}_e}) p_{\bar{\nu}_e} p_{e^+}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4G_F^2(1+3g_A^2)m_p}{(2\pi)^3m_n} \int_0^\infty p_{e^+}^2 dp_{e^+} \int_0^\infty p_{\bar{\nu}_e}^2 dp_{\bar{\nu}_e} \exp\left\{-\frac{p_{e^+}}{T}\right\} \delta(Q + p_{e^+} - p_{\bar{\nu}_e}) \\
 &= \frac{4G_F^2(1+3g_A^2)m_p}{(2\pi)^3m_n} \int_0^\infty dp_{e^+} p_{e^+}^2 (Q + p_{e^+})^2 \exp\left\{-\frac{p_{e^+}}{T}\right\}
 \end{aligned}$$

On applique la substitution  $y \equiv \frac{p_{e^+}}{T}$  pour obtenir

$$n_{e^+}^{(0)} \langle \sigma v \rangle = \frac{4G_F^2(1+3g_A^2)m_p}{(2\pi)^3m_n} T^3 \int_0^\infty dy y^2 (Q^2 + 2QTy + T^2y^2) e^{-y}$$

On reconnait la forme integrale de la fonction  $\Gamma(s)$ , ainsi

$$\begin{aligned}
 n_{e^+}^{(0)} \langle \sigma v \rangle &= \frac{4G_F^2(1+3g_A^2)m_p}{(2\pi)^3m_n} T^3 [\Gamma(3)Q^2 + 2\Gamma(4)QT + \Gamma(5)T^2] \\
 &= \frac{4G_F^2(1+3g_A^2)m_p}{(2\pi)^3m_n} T^3 [2Q^2 + 12QT + 24T^2] \\
 &= \frac{16\pi^3m_p}{\lambda_0(2\pi)^3\tau_n m_e^5 m_n} T^3 [Q^2 + 6QT + 12T^2]
 \end{aligned}$$

En posant de plus  $x \equiv \frac{Q}{T}$ , on trouve

$$\Gamma_{np} = 2n_{e^+}^{(0)} \langle \sigma v \rangle = \frac{4m_p Q^5}{\lambda_0 \tau_n m_e^5 m_n} \frac{1}{x^5} [x^2 + 6x + 12]$$

On peut comparer avec l'equation (3.29) et on remarque qu'on obtient

$$\Gamma_{np} \simeq \frac{253.57}{\tau_n x^5} [x^2 + 6x + 12]$$

La constante numrique 253 est comparable 255, celle obtenue par Bernstein (1988).

## 2 Vitesse du son lors du dcouplement

### a) Ratio de densit

On cherche

$$R \equiv \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}$$

o l'indice  $b$  rfere aux baryons.

La premiere loi de la thermodynamique avec  $dQ = 0$  dans un Univers rgit par la mtrique FRW implique que

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$$

qu'on rcrit

$$a^{-3} \frac{d(\rho a^3)}{dt} = -3\frac{\dot{a}}{a} p$$

Pour la matire, l'equation d'tat  $p = 0$  implique que

$$a^{-3} \frac{d}{dt}(\rho_b a^3) = 0 \implies \rho_b = \rho_{b,0} a^{-3}$$

Pour la radiation, on a plut  $p = \rho_\gamma/3$ , donc

$$\dot{\rho}_\gamma + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_\gamma = a^{-4} \frac{d(\rho_\gamma a^4)}{dt} = 0$$

Donc

$$\rho_\gamma = \rho_{\gamma,0} a^{-4}$$

On peut dterminer  $\rho_{\gamma,0}$  partir du fond diffus cosmologique partir de la distribution de Planck:

$$\rho_{\gamma,0} = \frac{2\zeta(2)}{5} T_{\text{CMB}}^4$$

On realise alors que  $T_\gamma \propto a$  en comparant nos deux expressions pour la densit d'nergie de radiation. De plus, on rcrit  $\rho_b$  en terme de la densit critique:

$$\rho_b = \Omega_b \rho_{\text{cr}} a^{-3} = 5.3397 \times 10^8 \text{ cm}^{-4} (\Omega_b h^2) a^{-3}$$

Ainsi, le ratio de densit en terme du facteur d'chelle et des paramtres de densits d'aujourd'hui ( $T_{\text{CMB}} = 2.725 \text{ K} = 11.9 \text{ cm}^{-1}$ ):

$$R = \frac{66\,565}{\zeta(2)} (\Omega_b h^2) a$$

On peut valuer  $R$  au dcouplement avec le rsultat thorique  $z_{\text{dec}} \simeq 1090$ , de sortes que

$$R(z_{\text{dec}} = 1090) = 0.8302 \left( \frac{\Omega_b h^2}{0.022383} \right)$$

O on a normalis l'expression par rapport au rsultat de la collaboration Planck (2018). La suite est une drivation thorique approximative de ce rsultat.

Pour dterminer  $R$  au moment du dcouplement, on doit dterminer le moment dans l'volution de l'Univers o le taux de diffusion Compton devient gal au taux d'expansion de l'Univers. En pratique, on sait que ce moment survient dans la limite non-relativistique de la distribution thermique des lectrons, donc on utilise le taux de diffusion Thompson (units de Planck):

$$\Gamma_T = X_e n_b \sigma_T$$

o  $\sigma_T$  est la section efficace de Thompson et  $X_e$  est la fraction d'lectrons libres.

$$X_e \equiv \frac{n_p}{n_H + n_p} = \frac{n_e}{n_b}$$

On a utilis le fait que  $n_e = n_p$  et on a nglig le nombre de neutrons dans l'Univers ( $n_b \simeq n_p + n_H$ ).

On utilise notre expression pour la densit baryonique et l'approximation  $\rho_b \simeq m_p n_b$  ( $m_H \simeq m_p$ ) pour obtenir

$$\Gamma_T = \frac{\rho_{\text{cr}}}{m_p} \sigma_T X_e \Omega_b a^{-3} = 2.2396 \times 10^{-19} \text{ s}^{-1} X_e \Omega_b h^2 a^{-3}$$

On veut dterminer  $a$  au moment o  $\Gamma_T = H(a)$ . Au moment du dcouplement, l'Univers est en transition entre un Univers domin par la radiation et un Univers domin par la matire. Toutefois, dans un Univers plat  $\Lambda\text{CDM}$  on peut nglig la radiation au moment du dcouplement (ce n'est pas prcis mais cela nous permet de simplifier normment les expressions):

$$H(a_{\text{dec}}) \simeq H_0 \Omega_m^{1/2} a_{\text{dec}}^{-3/2}$$

Ainsi,

$$\frac{\Gamma_T}{H} = 1 = \frac{\rho_{\text{cr}} \sigma_T}{m_p H_0 \Omega_m^{1/2}} X_e \Omega_b a_{\text{dec}}^{-3/2}$$

d'o

$$a_{\text{dec}} = \left( \frac{\rho_{\text{cr}} \sigma_T}{m_p H_0 \Omega_m^{1/2}} \right)^{2/3} \Omega_b^{2/3} (X_e(a_{\text{dec}}))^{2/3} \quad (2.1)$$

On obtient une quation implicite en terme de  $a_{\text{dec}}$ . La solution finale pour  $R$  est trs sensible  $X_e$  et on doit donc utiliser un modle plausible pour la fraction d'ionisation.

Une approximation qui simplifie lgrement notre tche est d'utiliser l'quation de Saha (qui cesse d'tre valide trs peu de temps avant le moment qui nous intresse).

$$\frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}} = \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{\text{Ry}}{T} \right\}$$

o Ry est la constante de Rydberg. Selon nos approximations prcdentes ( $n_b \simeq n_p + n_n$ ),

$$\frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}} = \frac{X_e n_p}{1 - X_e}$$

Pour limiter  $n_p$  de l'équation, on utilise  $\eta_b \equiv n_b/n_\gamma$ :

$$\Rightarrow n_p = \eta_b X_e n_\gamma = \eta_b X_e \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3$$

On doit donc résoudre

$$\frac{1 - X_e}{X_e^2} = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \eta_b \left( \frac{m_e}{2\pi T} \right)^{-3/2} \exp \left\{ \frac{\text{Ry}}{T} \right\} \equiv S(\eta_b, T)$$

Qui a comme solution physique

$$X_e = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4S}}{2S}$$

Sachant que la température suit la loi

$$T = T_{\text{CMB}} a^{-1}$$

et que la fraction de baryons sur photons est mesurée

$$\eta_b = 5.5 \times 10^{-10} \left( \frac{\Omega_b h^2}{0.02} \right)$$

on peut finalement résoudre l'équation 2.1 en utilisant la méthode numérique de bisection et les paramètres cosmologiques

$$\Omega_b = 0.048; \quad \Omega_m = 0.31; \quad h = 0.68$$

On obtient  $X_e(a_{\text{dec}}) = 6.56 \times 10^{-3}$  et le facteur d'échelle obtenu correspond au redshift  $z_{\text{dec}} \simeq 1121$ . Notons que la fraction d'ionisation elle-même ne dépend que faiblement des paramètres cosmologiques. L'exponentielle joue un rôle beaucoup plus important (expression pour  $S$ ). La réponse est comparable  $z_{\text{dec}} = 1090$  annoncé. Toutefois, ce résultat plus précis requiert d'intégrer l'équation de Boltzmann et de considérer la contribution de  $\Omega_r$  dans le facteur de Hubble. Ainsi, avec l'approximation de Saha on obtient

$$R^{\text{Saha}}(a_{\text{dec}}) = 1.328 \left( \frac{\Omega_b h^2}{0.022383} \right)$$

Pour déterminer la vitesse du son la prochaine étape, cette approximation ne change pas le résultat de façon significative comparé à la vraie réponse et donc on conserve le facteur numérique de la réponse théorique pour la prochaine sous-section.

## b) Vitesse du son

La vitesse du son au découplage est déterminée en terme de sa définition

$$c_s^2 \equiv \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_S$$

où l'entropie est conservée constante. Comme la pression du fluide baryons-photons est dominée par la pression des photons:

$$P \simeq P_\gamma = \frac{1}{3} \rho_\gamma$$

D'où

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \frac{\partial \rho_\gamma}{\partial (\rho_\gamma + \rho_b)} = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{\partial \rho_b}{\partial \rho_\gamma} \right)^{-1}$$

En remplaçant  $a^{-1} = T/T_{\text{CMB}}$  dans les expressions trouvées précédemment pour  $\rho_\gamma$  et  $\rho_b$ , on trouve

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{\partial \rho_b}{\partial T} \left( \frac{\partial \rho_\gamma}{\partial T} \right)^{-1} \right)^{-1} = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\rho_b}{\rho_\gamma} \right)^{-1}$$

D'où

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{1 + R}}$$

En utilisant la réponse trouvée précédemment, on peut déterminer la vitesse du son de la matière baryonique au moment du découplage dans un espace de paramètres plausibles pour  $\Omega_b h^2$ .

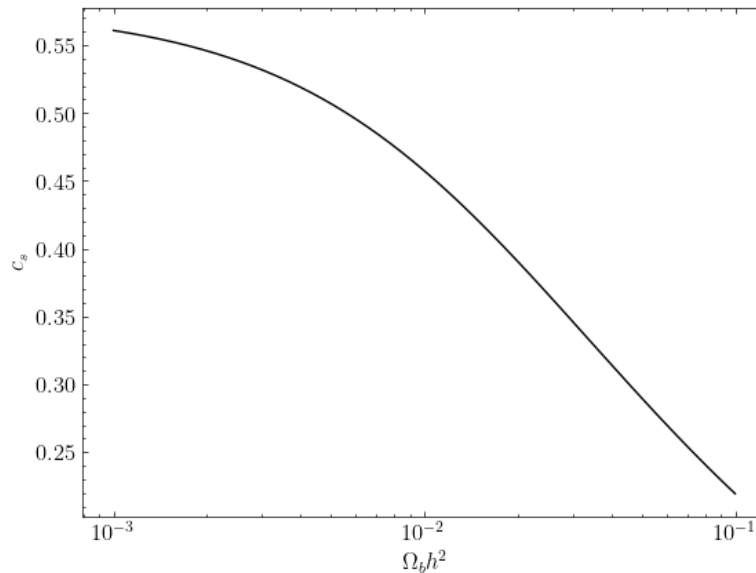


Figure 2: Vitesse du son lors du d'couplement (fraction de la vitesse de la lumire).

### c) Nombre d'onde de Jeans

Le nombre d'onde de Jeans dans les coordonnes comobiles est

$$k_J = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_b a^2}{c_s^2}}$$

et d'crit la taille minimale d'un objet de densit de matire  $\rho_b$  pour l'instabilit de Jeans (effondrement gravitationnel). On s'intresse la priode avant le d'couplement, donc  $a < a_{\text{dec}}$ . ce moment, l'Univers est domin par la radiation donc ( $a(t=0) = 0$ ):

$$\dot{a} = H_0 \Omega_r^{1/2} a^{-1} \implies a(t) = \left(2H_0 \Omega_r^{1/2} t\right)^{1/2}$$

Donc, l'horizon est

$$\eta(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \sqrt{\frac{t}{2H_0 \Omega_r^{1/2}}} = \frac{a}{2H_0 \Omega_r^{1/2}}$$

Malgr le fait que  $k_J$  diminue en fonction de  $a$ , l'acclration de l'expansion de l'Univers fait en sorte que  $\eta k_J \rightarrow 1$  environ au moment du d'couplement, ce qui permet au large structure de l'Univers de commencer se former sous l'attraction gravitationnelle.

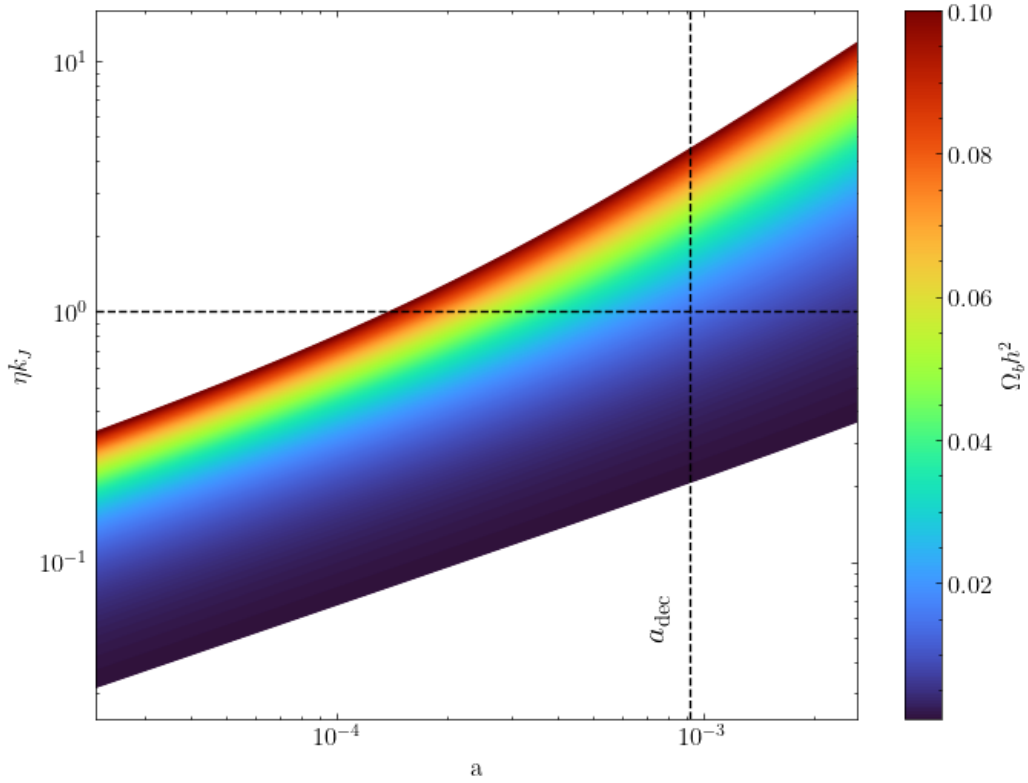


Figure 3: Rapport de la longueur d'onde de Jeans et de l'horizon cosmique. Lorsque  $\eta k_J < 1$ , la matiere est stable par rapport aux instabilités gravitationnelles. On remarque que  $\eta k_J < 1$  pour  $a < a_{\text{dec}}$  et  $\Omega_b h^2 \lesssim 0.022$  ce qui correspond bien à un Univers stable avant le découplage.

### 3 La vraisemblance

On considère la fonction de vraisemblance Gaussienne:

$$\mathcal{L}(\mathcal{D} \mid w, \sigma_w^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma_w^2)^{|\mathcal{D}|/2}} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} \frac{(d_i - w)^2}{2\sigma_w^2} \right\}$$

On cherche l'erreur sur la déviation standard  $\sigma_w$ . On suppose que la fonction de vraisemblance est quadratique autour de la solution MLE.

$$\ln \mathcal{L}(\mathcal{D} \mid \sigma_w; \bar{w}) \simeq \ln \mathcal{L}(\mathcal{D} \mid \bar{\sigma}_w; \bar{w}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma_w^2} \bigg|_{\sigma_w = \bar{\sigma}_w} (\sigma_w - \bar{\sigma}_w)^2$$

En effet, on sait que

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma_w} \bigg|_{\text{MLE}} = \frac{1}{\sigma_w^3} \sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} (d_i - \bar{w})^2 - \frac{|\mathcal{D}|}{\sigma_w} = 0$$

D'où on avait trouvé la solution MLE pour la variance

$$\bar{\sigma}_w^2 = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} (d_i - \bar{w})^2$$

Où  $\bar{w}$  est la solution attendue pour le signal  $w$  (moyenne). L'erreur sur la déviation standard est 2 fois l'inverse du coefficient de deuxième ordre dans l'expansion de Taylor de la vraisemblance autour de son maximum global.

$$\begin{aligned} \sigma_{\sigma_w}^{-1} &= -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma_w^2} \bigg|_{\text{MLE}} \\ &= \frac{3}{\bar{\sigma}_w^4} \sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} (d_i - \bar{w})^2 - \frac{|\mathcal{D}|}{\bar{\sigma}_w^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{2|\mathcal{D}|^2}{\sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} (d_i - \bar{w})^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\sigma_w} = \frac{1}{2|\mathcal{D}|^2} \sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} (d_i - \bar{w})^2$$

Donc l'incertitude sur la dviation standard diminue trs rapidement avec la taille du jeu de donne  $|\mathcal{D}|$ .