1

La valeur de a_{rec} (et particulièrement de z_{rec}) est très sensible à X_e. En principe, on doit résoudre l'équation de Boltzmann pour le processus de recombinaison pour déterminer sa valeur. Une approximation qui simplifie légèrement notre tâche est d'utiliser l'équation de Saha (qui cesse d'être valide très peu de temps avant le moment qui nous intéresse).

$$\frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}} = \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{\text{Ry}}{T}\right\}$$

Selon notre approximation,

$$\frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}} = \frac{X_e n_p}{1 - X_e}$$

Pour éliminer n_p de l'équation, on utilise $\eta_b \equiv n_b/n_\gamma$:

$$\implies n_p = \eta_b X_e n_\gamma = \eta_b X_e \frac{4\zeta(3)}{\pi^2} T^3$$

On doit donc résoudre

$$\frac{1 - X_e}{X_e^2} = \frac{4\zeta(3)}{\pi^2} \eta_b \left(\frac{m_e}{2\pi T}\right)^{-3/2} \exp\left\{\frac{\text{Ry}}{T}\right\} \equiv S(\eta_b, T)$$

Qui a comme solution physique

$$X_e = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4S}}{2S}$$

Sachant que la température suit la loi

$$T = T_{\text{CMB}} a^{-1}$$

au moment de la recombinaison, on peut donc chercher une solution à l'équation transcendentale

$$a_{\text{rec}} = 0.6840\, (\Omega_b h^2)$$

2

Pour résoudre, on doit aussi déterminer X_e en terme du facteur d'échelle. Pour ce faire, on doit résoudre l'équation de Boltzmann de la réaction de recombinaison $e^- + p \longleftrightarrow \gamma + H$. Ici, on assume que $n_\gamma = n_\gamma^{(0)}$:

$$a^{-3} \frac{d(n_e a^3)}{dt} = n_e^{(0)} n_p^{(0)} \langle \sigma v \rangle \left\{ \frac{n_H}{n_H^{(0)}} - \frac{n_e^2}{n_e^{(0)} n_p^{(0)}} \right\} \tag{2.1}$$

On peut simplifier cette expression avec l'équation de Saha pour les distributions à l'équilibres:

$$\frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}} = \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{\text{Ry}}{T}\right\}$$

où $\text{Ry} = 2\pi\hbar c R_\infty = m_e + m_p - m_h$ est la constante de Rydberg. Avec $n_h = n_b(1 - X_e)$ on obtient

$$a^{-3} \frac{d(n_e a^3)}{dt} = (1 - X_e) n_b \beta - X_e^2 n_b^2 \alpha^{(2)}$$

où β est le taux d'ionisation (on réintroduit les unités physiques)

$$\beta \equiv \alpha^{(2)} c \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{\text{Ry}}{k_B T}\right\}$$

et $\alpha^{(2)} = \langle \sigma v \rangle$ est la section efficace thermalisée excluant le niveau fondamental $n = 1$ puisque le photon de recombinaison de cet état état va ioniser immédiatement un atome H voisin. On omet le détail de ce calcul et on se réfère à l'équation (3.42) de Dodelson pour une approximation de cette section efficace

$$\alpha^{(2)} = 9.78 \frac{\hbar^2 \alpha^2}{m_e^2 c^2} \left(\frac{\text{Ry}}{k_B T}\right)^{1/2} \ln\left(\frac{\text{Ry}}{k_B T}\right)$$

Sachant qu'au moment de la recombinaison, la température de la matière est approximativement la même que la température des photons à cause des processus de diffusion, on a

$$T = T_{\text{CMB}} a^{-1} = 2.725\,48\, a^{-1}\ \text{K}$$

On a donc des expressions en terme du facteur d'échelle pour la plupart des quantités d'intérêt. On revient à l'équation de Boltzmann pour changer la variable d'intégration et simplifier le côté gauche. En effet, on réalise que $n_e a^3 \simeq X_e n_b a^3$. D'où

$$\frac{dX_e}{dt} = (1 - X_e(a))\beta(a) - X_e^2(a) n_b \alpha^{(2)}(a)$$

On utilise la seconde équation de Friedmann pour une expression de dt dans le régime matière-radiation qui nous intéresse:

$$dt = \frac{da}{H_0\sqrt{\Omega_0 a^{-2} + \Omega_m a^{-1}}}$$

d'où l'équation différentielle

$$\frac{dX_e}{da} = (100\,\text{km}\,\text{s}^{-1}\,\text{Mpc}^{-1})^{-1}\frac{(1 - X_e(a))\beta(a) - X_e^2(a) n_b \alpha^{(2)}(a)}{h\sqrt{\Omega_r a^{-2} + \Omega_m a^{-1}}}$$