

1 Le paradoxe d'Olber

Le paradoxe d'Olber peut être déclaré de la façon suivante:

Dans un univers infini peuplé de façon homogène par des étoiles, le ciel serait au moins aussi brillant que le Soleil.

En effet, supposant une densité cosmique constante n_* et une luminosité moyenne L_* , alors le flux reçu ($\text{erg } \text{\AA}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$) serait

$$\frac{dI}{d\Omega} \sim \int_0^\ell n_* \frac{L_*}{r^2} r^2 dr = n_* \ell L_* = \frac{L_*}{\pi R_*^2}$$

pour ℓ défini comme le libre parcours moyen d'un photon dans cet univers. La cosmologie moderne résout ce paradoxe en introduisant un âge fini à l'Univers ainsi qu'une expansion, ce qui crée un horizon cosmique.

a) Énoncé

Dans ces cosmologies, quel serait donc le redshift median auquel on s'attend lorsqu'on compile une large population de galaxies et d'étoiles? Notre stratégie pour évaluer cette quantité est fondée sur l'idée que le redshift médian correspond à

$$\left(\frac{\partial I_{\lambda_0}}{\partial \Omega} \right)_{\max}^{-1} \frac{\partial I_{\lambda_0}}{\partial \Omega} (z_{\text{median}}) = 0.5$$

où la médiane est défini relativement à une distribution cumulative du flux radiatif. Un équivalent bolométrique peut aussi être calculé. En d'autres mots, le redshift médian correspond au temps (passé) à partir duquel la moitié des photons nous provenant des galaxies et des étoiles ont été émis.

b) Dérivation

La métrique FRW est défini avec l'observateur \mathcal{O} situé à l'origine du système de coordonnées. Une section du volume d'une coquille entre la coordonnée comobile r et $r + dr$ est

$$\frac{\partial V_{\text{coquille}}}{\partial \Omega} = \frac{adr}{\sqrt{1 - kr^2}} a^2 r^2$$

Pour une cosmologie de poussière (dominée par la matière $\implies p = 0$), la conservation de l'entropie impose que la densité varie selon

$$\rho \propto a^{-3}$$

Dans ce cas, la densité numérique des étoiles et galaxies varie selon

$$n(t) = n_0 \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3$$

On définit le flux spécifique $f_\lambda(t)$ à partir de la fonction de Planck (ce qui est une approximation du spectre produit par une collection de galaxies)

$$f_\lambda(t) d\lambda \equiv C(t) \frac{4\pi \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{\exp \left\{ \frac{2\pi \hbar c}{k_b T \lambda} \right\} - 1} \quad (1.1)$$

où C est une constante qui peut en principe dépendre du temps pour refléter l'évolution des galaxies et des étoiles. Notons que la température peut elle aussi dépendre du temps pour refléter les cycles d'évolution des étoiles. La contribution des galaxies se situant dans la coquille mesurée par l'observateur produit une intensité

$$d \left(\frac{\partial I_\lambda}{\partial \Omega} \right) d\lambda = \frac{\partial V_{\text{coquille}}}{\partial \Omega} n(t) \frac{f_\lambda(t)}{4\pi a_0^2 r^2 (1+z)^2} d\lambda$$

Notons que les photons produits dans un interval de temps δ arrive à l'observateur dans un interval de temps $\delta_0 = \delta(1+z)$ selon l'effet de dilatation temporelle. Le second facteur de redshift vient du fait que l'énergie du photon est proportionnel à $E_\lambda = ch/\lambda$. L'énergie de chaque photon est réduit: $E_{\lambda_0} = ch/\lambda(1+z)$

Il est pratique de travailler avec la coordonnée cdt plutôt que la coordonnée radiale dr sachant que les photons suivent une géodésique radial

$$cdt = \frac{adr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

De sortes que

$$d\left(\frac{\partial I_\lambda}{\partial \Omega}\right)d\lambda = \frac{cn_0}{4\pi}f_\lambda(t)\frac{a(t)}{a_0}dtd\lambda$$

Pour connecter avec les observations, on doit exprimer cette quantité en terme de λ_0 ce qui fait apparaître un facteur de redshift supplémentaire:

$$d\left(\frac{\partial I_{\lambda_0}}{\partial \Omega}\right)d\lambda_0 = \frac{cn_0}{4\pi}f_{\lambda_0}(t)\left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^2 d\lambda_0 dt \quad (1.2)$$

L'intensité spécifique reçut par \mathcal{O} est donc

$$\frac{\partial I_{\lambda_0}}{\partial \Omega} = \frac{cn_0}{4\pi} \int_{t_f}^{t_0} f_{\lambda_0}(t) \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^2 dt \quad (1.3)$$

où $t_f \leq t \leq t_0$, avec t_f le temps où les galaxies sont originellement formée et t_0 le temps présent.

Pour un univers statique, où C et $T = T_0$ sont constants, la dépendance temporelle dans l'intégrale est lié uniquement à l'historique d'expansion de la cosmologie choisie. On commence par remplacer $f_{\lambda_0}(t)$ par l'équation (1.1):

$$\frac{\partial I_{\lambda_0}}{\partial \Omega} = \frac{cn_0}{4\pi} \left(\frac{4\pi C \hbar c^2}{\lambda_0^5}\right) \int_{t_f}^{t_0} \left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^3 \frac{1}{\exp\left\{\frac{2\pi \hbar c a_0}{k_B T_0 \lambda_0 a(t)}\right\} - 1} dt$$

Pour résoudre l'intégrale, on doit déterminer une expression pour dt en terme de dz . Dans une cosmologie avec pression nulle et $\Lambda = 0$, on peut simplifier les équations de Friedmann en terme du paramètre de densité Ω et le paramètre de décélération q :

$$\sigma = \frac{1}{2}\Omega \equiv \frac{4\pi G\rho}{3H^2}$$

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}}{aH^2}$$

On se réfère à [2] pour la procédure. On obtient

$$\dot{a}^2 = \dot{a}_0^2 \left[2\sigma_0 \frac{a_0}{a} + (\sigma_0 - q_0) \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + 1 + q_0 - 3\sigma_0 \right] \quad (1.4)$$

On utilise la variable d'intégration $(1+z) = \frac{a}{a_0}$, de sortes que ([4], [3])

$$dt = -\frac{(1+z)^2 dz}{H_0(2\sigma_0(1+z)^3 + (1+q_0-3\sigma_0)(1+z)^2 + \sigma_0 - q_0)^{1/2}}$$

D'un autre côté, si $\Lambda \neq 0$, alors on doit utiliser le modèle Λ CDM pour lequel on utilise plutôt les paramètres de densités Ω_m , Ω_Λ et $\Omega_r \simeq 0$ ainsi qu'une courbure nulle ($k=0$) ([1]):

$$\dot{a}^2 = \dot{a}_0^2 \left[\Omega_{0m} \left(\frac{a}{a_0}\right) + \Omega_{0r} \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + \Omega_{0\Lambda} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2} + (1 - \Omega_{0m} - \Omega_{0r} - \Omega_{0\Lambda}) \right]$$

Ainsi,

$$dz = -\frac{a_0}{a^2} \dot{a} dt \implies dt = -\frac{\dot{a}_0}{\dot{a}} \frac{a^2}{a_0^2} \frac{dz}{H_0}$$

d'où

$$dt = -\frac{(1+z)^2 dz}{H_0 \sqrt{\Omega_{0m}(1+z) + \Omega_{0r}(1+z)^2 + \Omega_{0\Lambda}(1+z)^{-2} + 1 - \Omega_{0m} - \Omega_{0r} - \Omega_{0\Lambda}}}$$

Avant de revenir à l'intégrale, on détermine C par un fit sur la température effective du spectre en utilisant la loi de Stefan-Boltzmann:

$$C = \frac{\pi L_0}{\sigma_{\text{SB}} T_0^4}$$

On définit les constantes suivantes:

$$\alpha = \frac{\pi \hbar c^3}{\sigma_{\text{SB}}}$$

$$\beta = \frac{n_0 L_0}{T_0^4 \lambda_0^5 H_0}$$

$$\gamma = \frac{2\pi \hbar c}{k_B T_0 \lambda_0}$$

De sortes qu'on obtient ([3]):

$$\frac{\partial I_{\lambda_0}}{\partial \Omega} = \alpha \beta \int_0^{z_f} \frac{(1+z)^2 dz}{[e^{\gamma(1+z)} - 1][2\sigma_0(1+z)^3 + (1+q_0 - 3\sigma_0)(1+z)^2 + \sigma_0 - q_0]^{1/2}}$$

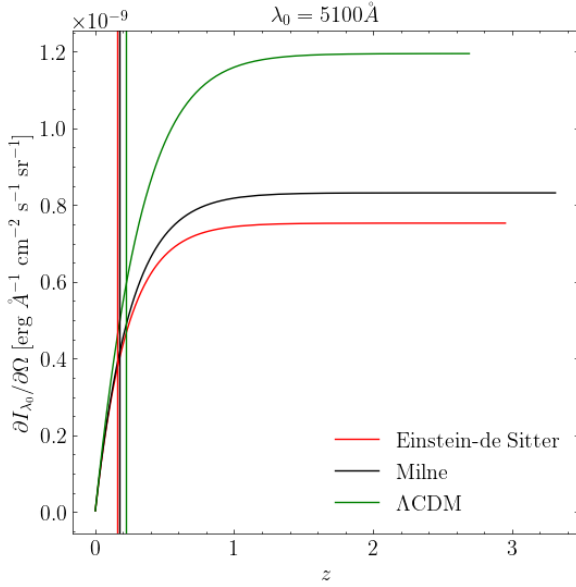
et

$$\frac{\partial I_{\lambda_0}}{\partial \Omega} = \alpha \beta \int_0^{z_f} \frac{(1+z)^2 dz}{[e^{\gamma(1+z)} - 1][\Omega_{0m}(1+z) + \Omega_{0r}(1+z)^2 + \Omega_{0\Lambda}(1+z)^{-2} + 1 - \Omega_{0m} - \Omega_{0r} - \Omega_{0\Lambda}]^{1/2}}$$

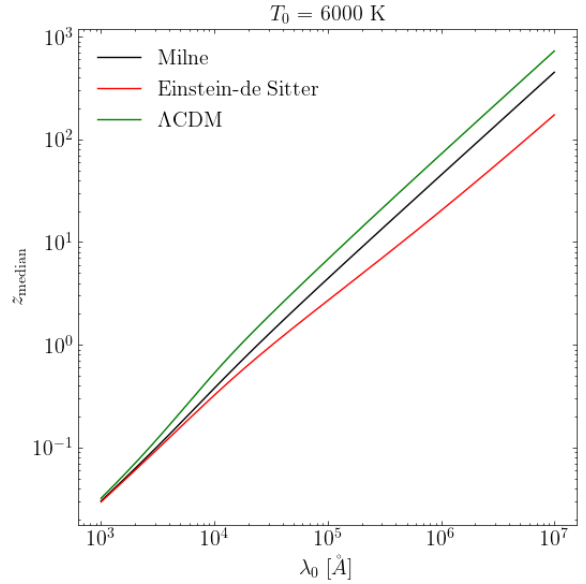
On considère deux cas en particulier pour l'univers de poussière:

1. Univers d'Einstein-de Sitter: $q_0 = \sigma_0 = \frac{1}{2}$
2. Univers de Milne: $q_0 = \sigma_0 = 0$

c) Résultats



(a) Illustration de la méthode de calcul, barres verticales indiquent la position de z_{median} comme le redshift où l'intensité atteint la moitié de son maximum. L'intégrale est calculée jusqu'à ce qu'un plateau soit atteint.



(b) Redshift median attendu dans un interval du spectre électromagnétique.

On a utilisé les résultats de la collaboration Planck pour l'univers Λ CDM:

h	0.676
Ω_{0m}	0.309
Ω_{0r}	0
$\Omega_{0\Lambda}$	0.679

Table 1: Paramètres de Λ CDM

On a aussi défini les paramètres physique suivants ([3]):

T_0	6000 K
ϵ_0	$2.5h \times 10^8 L_{\odot} \text{ Mpc}^{-3}$
λ_0	5100 Å

Table 2: Paramètres physiques, où $\epsilon_0 = n_0 L_0$ est la densité d'énergie lumineuse.

d) Discussion

2 Homogénéité de l'Univers

On considère un échantillon de galaxies du sondage BOSS dans un cône:

1. $0.001 \leq z \leq 0.4$
2. $156^\circ \leq \text{ra} \leq 160^\circ$
3. $27^\circ \leq \text{dec} \leq 33^\circ$

Notre échantillon contient $N_{\text{gal}} = ?$ galaxies

a) Nombre de voisins dans une sphère de rayon r

Une première approche pour modéliser l'excès de la densité numérique par rapport à un processus de Poisson est de moyenner le nombre de voisins d'une galaxie dans une sphère de rayon r . Le comportement attendu est que le nombre de galaxie augmente selon r^3 pour un processus de Poisson. Ainsi, une mesure d'homogénéité est

$$\eta(< r) + 1 = \frac{\langle N_{\text{échantillon}}(< r) \rangle}{\langle N_{\text{synthétique}}(< r) \rangle}$$

où $N_{\text{synthétique}}(< r)$ est le nombre de voisins dans un catalogue synthétique avec une distribution de densité uniforme. $\eta(< r) \rightarrow 0$ lorsque la distribution devient homogène à l'échelle sondée. La moyenne est pesée pour tenir compte du bruit de Poisson.

b) Fonction d'autocovariance $\xi(r)$

On définit la fonction d'autocovariance $\xi(r)$ comme l'amplitude de la tendance aux galaxies de s'agglomérer:

$$dP = \bar{n}(1 + \xi(r))dV$$

où dP mesure la probabilité de trouvé un voisin à une distance r dans un volume dV . Ainsi, $\xi(r)$ mesure l'excès de probabilité par rapport à un processus de Poisson (où la probabilité est fixe $dP^{\text{Poisson}} = \bar{n}dV$).

3 Les unités en cosmologie

On considère les unités naturelles

$$c = \hbar = k_B = 1$$

Dans ce système d'unité, le temps et les distances sont en cm, de même que l'inverse de la masse m^{-1} , et l'inverse de l'énergie E^{-1} . On trouve les facteurs de conversions suivants

$$\begin{aligned} 1 \text{ s} &\mapsto 29,979,245,800 \text{ cm} \\ 1 \text{ eV}^{-1} &\mapsto \frac{\hbar c}{\text{eV}} = 1.973 \times 10^{-5} \text{ cm} \\ 1 \text{ g}^{-1} &\mapsto \frac{\hbar}{c} \text{g}^{-1} = 3.518 \times 10^{-38} \text{ cm} \end{aligned}$$

a) H_0

$$H_0 \equiv 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

i) Conversion en eV

$$H_0 \mapsto \hbar H_0 \simeq 2.13h \times 10^{-33} \text{ eV}$$

ii) Conversion en Mpc^{-1}

$$H_0 \mapsto \frac{H_0}{c} \simeq 3.34h \times 10^{-4} \text{ Mpc}^{-1}$$

iii) Conversion en Gyr^{-1}

$$H_0 \simeq 0.10h \text{ Gyr}^{-1}$$

iv) **Conversion en m s^{-2}**

$$H_0 \mapsto H_0 c \simeq 9.72h \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}$$

b) **Taille caractéristique**

L'Univers devient homogène à la distance caractéristique où l'accélération gravitationnelle de Newton d'un amas de galaxie (typiquement $10^{15} M_\odot$) est égale au taux d'expansion de l'univers au temps présent.

$$\frac{GM}{R^2} = H_0 c \implies R = \sqrt{\frac{GM}{H_0 c}} \simeq 37.9h^{-1/2} \text{ Mpc}$$

c) **ρ_{crit}**

La densité critique est

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

i) **Conversion en g/cm^3**

$$\rho_{\text{crit}} = 1.88h^2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$$

ii) **Conversion en GeV^4**

$$\rho_{\text{crit}} \mapsto \frac{c}{\hbar} (\hbar c)^4 \rho_{\text{crit}} \simeq 8.096h^2 \times 10^{-47} \text{ GeV}^4$$

iii) **Conversion en eV/cm^3**

$$\rho_{\text{crit}} \mapsto c^2 \rho_{\text{crit}} \simeq 1.05h^2 \times 10^4 \text{ eV cm}^{-3}$$

iv) **Conversion en protons/cm³**

$$\rho_{\text{crit}} \mapsto \frac{\rho_{\text{crit}}}{m_p} \simeq 1.123h^2 \times 10^{-5} \text{ protons cm}^{-3}$$

v) **Conversion en M_\odot/Mpc^3**

$$\rho_{\text{crit}} = 2.78h^2 \times 10^{11} M_\odot \text{ Mpc}^{-3}$$

4 Le rayon de Schwarzschild

Pour estimer la masse de l'Univers, on utilise la densité critique ρ_{crit} et le rayon de Hubble (distance par rapport à l'observateur à partir de laquelle la vitesse de récession dépasse la vitesse de la lumière – aussi nommé horizon cosmique)

$$R_H \equiv \frac{c}{H_0} \simeq 2998h^{-1} \text{ Mpc}$$

$$M = \rho_{\text{crit}} \frac{4\pi R_H^3}{3} = \frac{c^3}{2GH_0} \simeq 3.132h^{-1} \times 10^{22} M_\odot$$

C'est la formule de Hoyle-Carvalho. Le rayon de Schwarzschild est donc:

$$r_s \equiv \frac{2GM}{c^2} = R_H$$

5 La métrique

a) Redéfinir π

Existe-t-il un univers où le ratio entre le rayon et la circonférence est constant et égal à 3? Pour répondre à la question, on considère un univers homogène et isotropique défini par la métrique suivante:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2$$

où $k \in \{-1, 0, 1\}$ et $r \in [0, 1[$ est une coordonnée affine. La circonférence d'un cercle est défini par

$$C = \oint_{\gamma} \sqrt{ds^2} = 2\pi R$$

où γ est la trajectoire avec $r = R$, $\theta = \pi/2$ et $\phi \in [0, 2\pi]$. Le rayon du cercle, quant à lui, est défini comme

$$R_c = \int_0^R \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}$$

Ainsi, on obtient les trois ratio suivant (pour les différentes valeurs de k):

$$\frac{C}{R_c} = \begin{cases} 2\pi, & k = 0 \\ \frac{2\pi R}{\arcsin R} < 2\pi, & k = 1 \\ \frac{2\pi R}{\sinh^{-1} R} > 2\pi, & k = -1 \end{cases}$$

Pour un espace fermé ($k = 1$), le rapport entre la circonférence et le rayon varie en fonction de la coordonnée affine du rayon. Dans ce cas, il serait possible de redéfinir $\pi = 3$. Examinons l'expansion de Taylor de l'expression pour $k = 1$ autour de $R = 0$:

$$\frac{C}{R_c} \simeq \frac{2\pi R}{R + \frac{R^3}{6} + \mathcal{O}(R^5)} \simeq 2\pi \left(1 - \frac{R^2}{6} - \mathcal{O}(R^4) \right)$$

Pour redéfinir $\pi = 3$, alors le cercle de référence doit être crée à la coordonnée affine

$$R^* \simeq 0.532$$

Dans la perspective de cet univers, le rapport circonférence sur le rayon suit la loi

$$\frac{C}{R_c} \simeq 6 \left(1 - \frac{(R - R^*)^3}{6|R - R^*|} - \mathcal{O} \left(\frac{(R - R^*)^5}{|R - R^*|} \right) \right),$$

Donc, la réponse est oui, il est parfaitement légitime de redéfinir $\pi = 3$ dans un univers fermé (de courbure positive) en utilisant un cercle de référence avec un rayon de coordonnée affine $R^* \simeq 0.532$.

Toutefois, **il n'existe pas d'univers où le ratio circonférence sur rayon est constant où $\pi \neq 3.14159...$** Le ratio est constant seulement dans un univers Euclidien où π ne peut pas prendre une valeur différente de celle connue. C'est à dire que

$$\pi \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

qui est basé sur la métrique $ds^2 = dx^2 + dy^2$ avec la condition $x^2 + y^2 = 1$. En ce sens, la valeur de la constante π ne peut pas être changé en ce sens qu'elle est une construction théorique liée à un espace Euclidien.

b) *Hartle*, exercice 2, ch. 2

Supposant que l'on puisse se situer sur la surface du Soleil et qu'on répéter l'expérience de Gauss pour mesurer les angles d'un triangle. La différence entre la somme des angles mesurées $\sum \alpha_i$ et la somme attendu pour un espace Euclidien π est

$$\sum \alpha_i - \pi \simeq \frac{A_{\Delta}}{R_{\odot}^2} \left(\frac{GM_{\odot}}{R_{\odot} c^2} \right)$$

Le premier facteur est un effet purement géométrique (le Soleil est une sphère en première approximation), alors que le second facteur est une correction approtée par la relativité générale.

En supposant qu'on répète l'expérience de Gauss, on mesure l'angle du triangle entre les monts Brocken, Hohenhagen et Inselberg. Les distances entre ces montagnes sont 69 km, 85 km et 107 km. En utilisant la formule de Héron,

$$A_{\triangle} \simeq 2929 \text{ km}^2$$

De sortes que

$$\frac{A_{\triangle}}{R^2} \simeq \begin{cases} 6.05 \times 10^{-9}, & R_{\odot} \\ 7.20 \times 10^{-5}, & R_{\oplus} \end{cases}$$

et

$$\frac{GM_{\odot}}{c^2 R_{\odot}} \simeq \begin{cases} 2.12 \times 10^{-6}, & R_{\odot} \\ 6.95 \times 10^{-10}, & R_{\oplus} \end{cases}$$

Pour une déviation égale à

$$\sum \alpha_i - \pi \simeq \begin{cases} 1.29 \times 10^{-14}, & R_{\odot} \\ 5.01 \times 10^{-14}, & R_{\oplus} \end{cases}$$

On remarque que dans les deux cas, la déviation est similaire mais la source de cette déviation est différente. Pour le Soleil, l'effet gravitationnel est beaucoup plus important que l'effet géométrique.

References

- [1] P.P. Coles and P.F. Lucchin. *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure*. Wiley, 2003.
- [2] R. Stabell and S. Refsdal. Classification of General Relativistic World Models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 132(2):379–388, apr 1966.
- [3] Paul S. Wesson. Olbers's paradox and the spectral intensity of the extragalactic background light. Technical report, 1991.
- [4] Paul S. Wesson, K. Valle, and R. Stabell. The extragalactic background light and a definitive resolution of Olbers's paradox. *The Astrophysical Journal*, 317:601, jun 1987.