1 *Dodelson* ch.4, Exercice 8

On veut montrer que $T \propto a^{-2}$ lorsque T représente la température (à l'équilibre) de particules massives non-relativistiques sans interactions. Pour ce faire, on doit dériver l'équation de Boltzmann. On définit la direction du vecteur de quantité de mouvement $\hat{p}^i$ et la magnitude de la quantité de mouvement

$$p^2 \equiv g_{ij} P^i P^j$$

Par définition, la lettre majuscule P réfère au 4-vecteur de la quantité de mouvement

$$P^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$$

Notons que

$$\delta_{ij}\hat{p}^i\hat{p}^j = 1$$

de sortes que $\hat{p}^i = \hat{p}_i$.

En supposant que $f = f^{(0)}$ est une distribution à l'équilibre, $f = f(E(p), t)$ ne peut que dépendre du temps et de la magnitude de la quantité de mouvement (ou de l'énergie dans notre cas). Aussi, le terme de collision $C[f] = 0$ par supposition de sortes que l'équation de Boltzmann est

$$\frac{df(E,t)}{t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial E}\frac{dE}{dt} = 0 \tag{1.1}$$

Pour poursuivre, on doit déterminer $\dfrac{dE}{dt}$. Notons que l'énergie remplace la quantité de mouvement p pour le cas des photons (et se réduit à ce cas lorsque la particule a une masse nulle). On travaille avec la métrique FRW

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 \\ g_{0i} &= 0 \\ g_{ij}(t) &= a^2\delta_{ij} \end{aligned}$$

Par définition, l'équation de conservation de l'énergie est

$$\frac{dP^0}{d\lambda} = -\Gamma^0_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta$$

On peut exprimer P^0 en terme de l'énergie en réalisant que

$$P^2 = g_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta = -(P^0)^2 + p^2 = -m^2$$

d'où

$$P^0 = \sqrt{p^2 + m^2} = E$$

On utilise aussi la définition $P^0 \equiv \dfrac{dt}{d\lambda}$, de sortes que multiplier $\dfrac{dP^0}{d\lambda}$ par $\dfrac{1}{P^0}$ revient à changer la variable $\lambda \to t$ dans la derivée:

$$\frac{1}{P^0}\frac{dP^0}{d\lambda} = \frac{dE}{dt} = -\frac{1}{E}\Gamma^0_{\alpha\beta}P^\alpha P^\beta$$

On se rappel que les seuls symbols de Christoffels temporels non-nuls sont $\Gamma^0_{ij} = \dfrac{da}{dt}a\delta_{ij} = a^2H\delta_{ij}$. Ainsi,

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{a^2H}{E}\delta_{ij}P^iP^j$$

On écrit

$$P^i = C\hat{p}^i$$

où C est une constante de normalisation qu'on trouve avec la définition de p^2:

$$p^2 = C^2a^2\underbrace{\delta_{ij}\hat{p}^i\hat{p}^j}_{\equiv 1}$$

puisque $\hat{\mathbf{p}}$ est un vecteur unitaire. Ainsi, $C = \dfrac{p}{a}$ et on trouve

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{p^2H}{E}$$

L'équation de Boltzmann devient

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{p^2 H}{E}\frac{\partial f}{\partial E} = 0$$

Dans la limite non-relativiste, on peut prendre

$$E(p) \simeq m + \frac{p^2}{2m}$$

De sortes que

$$\frac{p^2}{E}\frac{\partial f}{\partial E} \simeq \frac{p^2}{m}\frac{m}{p}\frac{\partial f}{\partial p}$$

D'où

$$\frac{\partial f}{\partial t} - pH\frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

Pour déterminer le comportement de la température en fonction du facteur d'échelle, on suppose que f est la distribution de Maxwell-Boltzmann:

$$f(p,t) \propto \exp\left\{-\frac{p^2}{2mT(t)}\right\}$$

De sortes que,

$$\frac{\partial f}{\partial p} = f\left(-\frac{p}{mT}\right)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial T} = f\left(\frac{p^2}{2mT^2}\right)$$

On trouve la relation

$$\frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{p}{2T}\frac{\partial f}{\partial p}$$

En remplaçant dans l'équation de Boltzmann, on obtient

$$\left(-\frac{1}{2T}\frac{dT}{dt} - \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\right)p\frac{\partial f}{\partial E} = 0$$

Ce qui est satisfait seulement lorsque

$$T \propto a^{-2}$$

2 Le faux vide

a) Densité de cordes cosmiques

Une corde cosmique aurait une densité linéaire

$$\mu \simeq \frac{M^2}{\hbar c}$$

Si on suppose que la distance typique entre deux cordes est de 100 Mpc alors la densité d'énergie est

$$\rho \simeq \frac{\mu}{(100\,\mathrm{Mpc})^2}$$

b) Les domaines cosmologiques

Si on suppose que ce mur possède une coordonnée comobile constante, alors son énergie est équivalente à son énergie de masse $E \sim \rho V$. La pression exercée par ce mur est

$$P = -\frac{dE}{dV} = -\rho$$

De sortes que

$$\boxed{w \sim \frac{\rho}{P} \sim -1}$$

3 *Dodelson* ch.6, Exercice 4

a) *Flatness problem*

Le *flatness problem* stipule est la réalisation que le paramètre de courbure κ est très proche de 0 (Univers plat), ce qui requiert en principe une condition initiale très précise pour Ω. On exprime le paramètre de courbure en terme du paramètre de densité d'énergie totale dans l'Univers Ω:

$$1 - \Omega(t) = -\frac{\kappa}{a^2(t)H^2(t)}$$

Lorsque $a(t) \to 0$, le côté droit de l'équation $\to \infty$ si $\kappa \neq 0$, de sortes que si le côté gauche est différent de 0 lors des premiers moments de l'Univers, κ va devoir prendre une valeur absolue très grande $|\kappa| \gg 1$ pour compenser la petitesse du paramètre d'échelle. On peut visualiser le comportement du côté droit en posant $\Omega_0 = \Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} = 0.3$:

$$\Omega(t) \equiv \frac{8\pi G\rho(t)}{3H^2(t)}$$

où ρ est la densité d'énergie de la radiation et de la matière. On pose que

$$H^2(t) = H_0^2\left(\Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{m,0}a^{-3} + (1-\Omega_0)a^{-2}\right)$$

Où Ω_0 est la valeur du paramètre de densité total observé aujourd'hui. On a négligé le paramètre d'énergie sombre pour simplifier l'argument. On a que

$$\rho(t) = \Omega_{m,0}\rho_{\text{crit}}a^{-3} + \Omega_{r,0}\rho_{\text{crit}}a^{-4}$$

De sortes que

$$\Omega(t) = \frac{\Omega_{m,0}a + \Omega_{r,0}}{\Omega_{r,0} + \Omega_{m,0}a + (1-\Omega_0)a^2}$$

et

$$1 - \Omega(t) = \frac{(1-\Omega_0)a^{-2}}{\Omega_{r,0} + \Omega_{m,0}a + (1-\Omega_0)a^2}$$

Naturellement, lorsque $a \to 0$, la valeur précise de Ω_0 importe peu et $|1 - \Omega(t)| \to 0$.

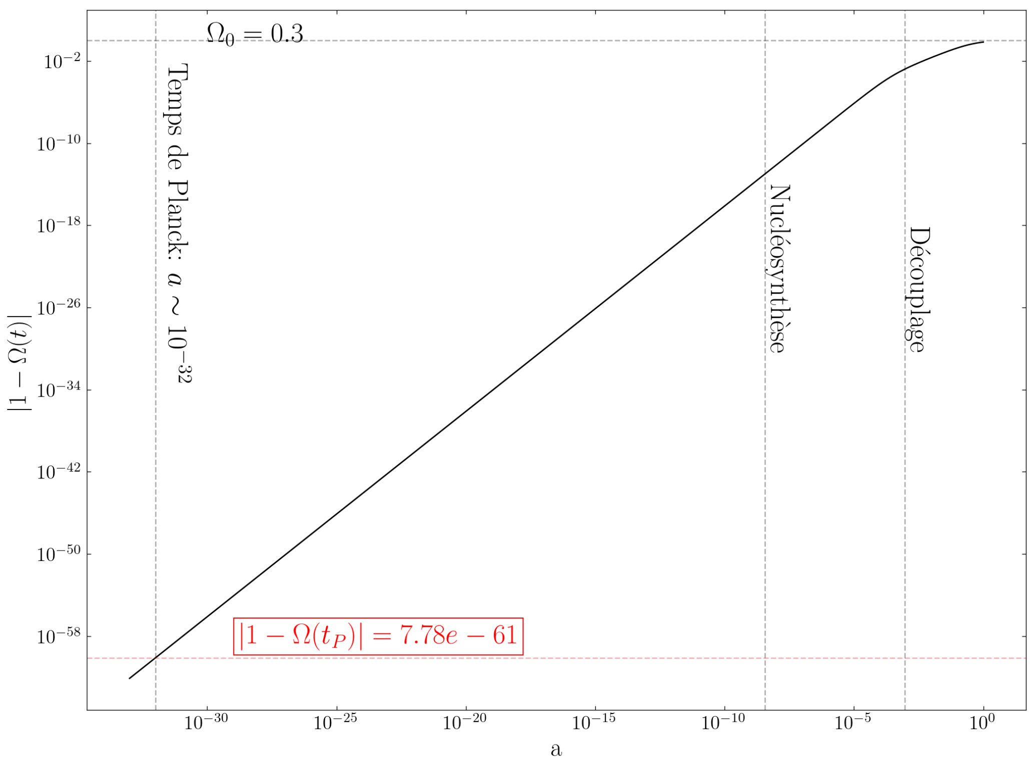

Figure 1: Paramètre de densité au début de l'Univers.

b) Inflation

L'inflation est une époque dans l'univers où l'accélération de l'expansion $\ddot{a} > 0$. La seconde équation de Friedmann s'écrit

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda_i}{3} > 0$$

où on a supposé que l'équation d'état de cette énergie du vide est $P = -\rho/3$. Cette équation différentielle a comme solution

$$a(t) \propto e^{H_i t}$$

où H_i est la constante de Hubble durant l'inflation (constante en fonction du temps). Ainsi, durant l'inflation, on a

$$1 - \Omega(t) \propto \frac{1}{H_i}(1 - \Omega_0)e^{-2H_i t}$$

Si on pose t_i comme le temps au début de l'inflation et t_f le temps à la fin, alors

$$|1 - \Omega(t_f)| = e^{-2N}|1 - \Omega(t_i)|$$

où N est le nombre de repliements exponentiels ayant eu lieu durant l'inflation $t_f \simeq (N+1)t_{\text{GUT}}$. Si N est suffisamment grand, alors la valeur de $\Omega(t_i)$ n'a plus besoin d'être aussi proche de 1, comme dans le cas étudié au sous numéro précédent. En particulier, on peut choisir $\Omega(t_{\text{GUT}}) = 0$ pour une inflation qui perdure durant $N = 60$ repliement exponentiels.

$$a_{\text{GUT}} \simeq \frac{T_{\text{CMB}}}{T_{\text{GUT}}} \simeq 2.73 \times 10^{-28}$$

On peut déterminer $a(t_f)$, soit le facteur d'échelle après l'inflation à partir de la valeur de N choisit

$$\boxed{a(t_f) \simeq a_{\text{GUT}}\sqrt{N+1}}$$

puisque $a \sim t^{1/2}$ dans l'Univers jeune. On utilise cette valeur pour extrapoler la valeur de $|1 - \Omega(t)|$ avant et durant l'inflation.

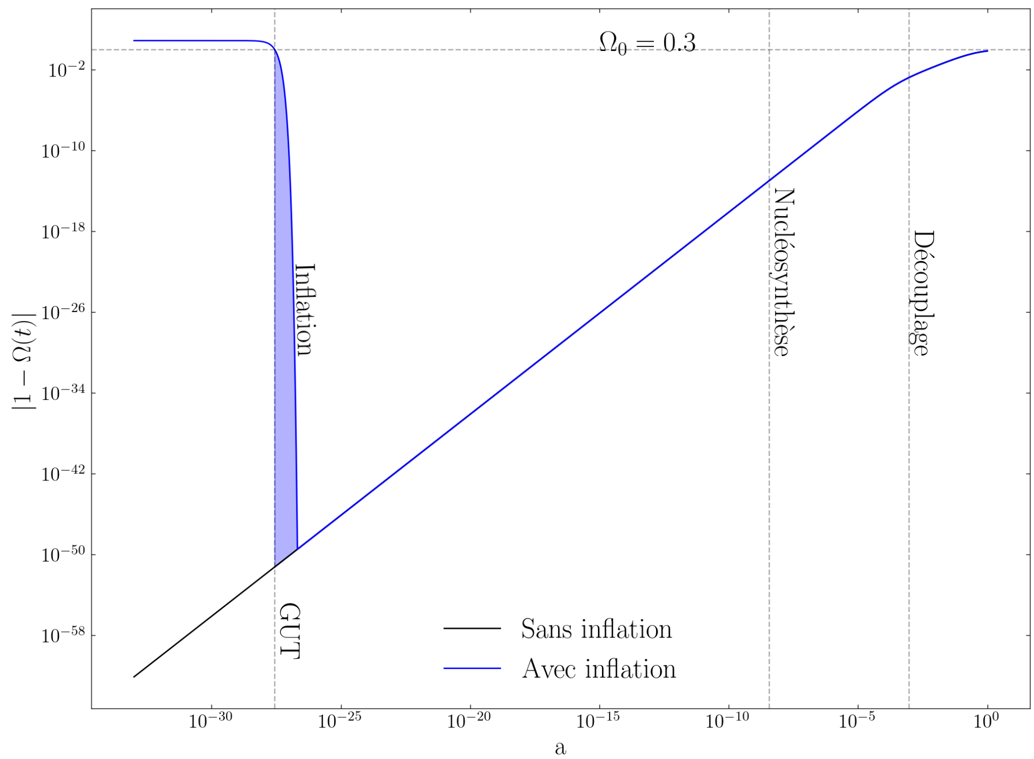

Figure 2: L'inflation fait en sortes que $\Omega(t_i)$ peut prendre n'importe quelle valeur, et les observations faites aujourd'hui sont respectées.