

# 1 Les distances en cosmologie

## a) Distance angulaire

On cherche le redshift  $z$  où l'angle apparent d'un objet est à son minimum en supposant un univers dominé par la matière.

L'angle apparent d'un objet dépend de la taille que cette objet aurait au temps présent ( $\ell(z)$ ) et de la distance comobile entre l'observateur et l'objet:

$$\theta = \frac{\ell(z)}{\chi(z)} \quad (1.1)$$

Un objet de taille caractéristique  $\ell$  (dans son référentiel, au temps où l'objet à émis la lumière observée) aura une taille assumée dans le référentiel de l'observateur égale à

$$\ell(z) = \frac{a_0}{a} \ell = (1+z)\ell$$

Pour un univers de poussière ( $\Lambda = p = 0$ ), la distance comobile prend une forme analytique:

$$\chi(z) = \frac{2c}{H_0} \frac{\Omega_0 z + (\Omega_0 - 2)(\sqrt{\Omega_0 z + 1} - 1)}{\Omega_0^2(1+z)} \quad (1.2)$$

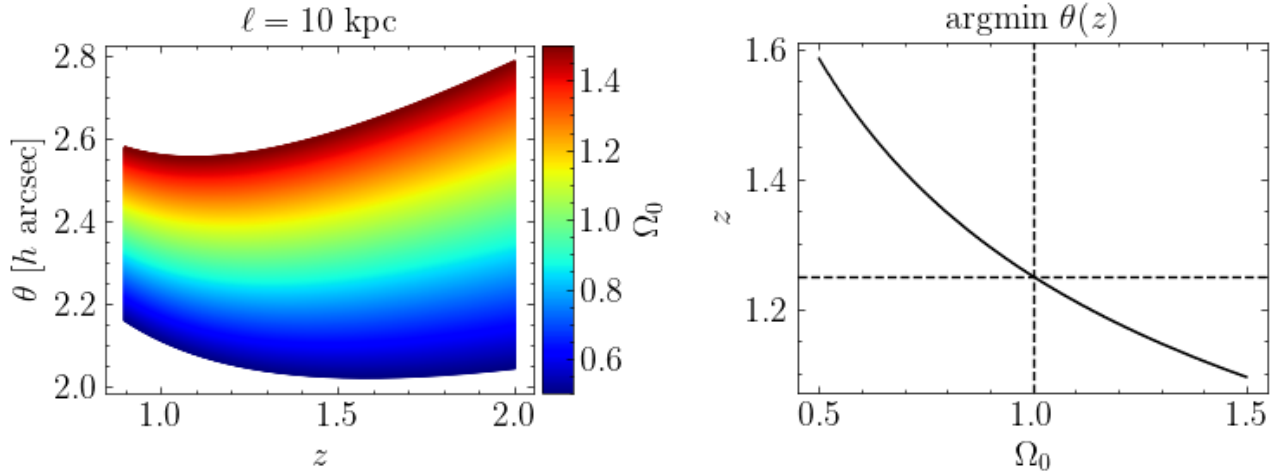
On peut donc déterminer un redshift où la taille atteint un maxima:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dz} &= \frac{H_0 \ell}{2c} \frac{d}{dz} \frac{\Omega_0^2(1+z)^2}{\Omega_0 z + (\Omega_0 - 2)(\sqrt{\Omega_0 z + 1} - 1)} \\ &= \frac{\Omega_0^2 H_0 \ell}{2c} \frac{2(1+z) [\Omega_0 z + (\Omega_0 - 2)(\sqrt{\Omega_0 z + 1} - 1)] - (1+z)^2 \left[ \Omega_0 + \frac{1}{2} \frac{\Omega_0(\Omega_0 - 2)}{\sqrt{\Omega_0 z + 1}} \right]}{(\Omega_0 z + (\Omega_0 - 2)(\sqrt{\Omega_0 z + 1} - 1))^2} \end{aligned}$$

Il s'avère qu'il est possible de résoudre analytiquement ce système seulement pour  $\Omega_0 = 1$  (univers plat):

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\theta}{dz} \right|_{\Omega_0=1} &= 0 \\ \implies 2[z - \sqrt{z+1} + 1] &= (1+z) \left[ 1 - \frac{1}{2\sqrt{z+1}} \right] \\ \implies 2(x^2 - x) &= x^2(1 - \frac{1}{2x}), \quad \{x = \sqrt{z+1}\} \\ \implies x^2 - \frac{3x}{2} &= 0 \\ \implies \sqrt{z+1} &= \frac{3}{2}, \quad \{z \geq 0 \implies x \neq 0\} \\ \implies \boxed{z = \frac{5}{4}} \end{aligned}$$

Il serait possible de faire un traitement perturbatoire pour  $\Omega_0 = 1 \pm \epsilon$ ,  $\epsilon \ll 1$ , mais on trouve qu'une solution numérique sert mieux nos besoins. Les prochaines figures montrent le redshift où l'angle apparent est minimal pour une densité totale  $\Omega_0$  donnée.



(a) Taille angulaire apparente d'un objet de distance caractéristique  $\ell$   
(b) Le redshift où  $\theta$  est minimal se comporte comme  $\Omega_0^{-1}$  autour de la solution pour un univers plat.

## b) Le nombre total de galaxies dans l'univers

Pour déterminer la densité de galaxies de l'univers à un temps donné, il est coutume de se référer à la fonction de Schechter pour mesurer la densité numérique de galaxies en fonction de leur distribution de masse:

$$\phi(M) = b\phi^* \ln(10) \left[ 10^{b(M-M^*)} \right]^{1+\alpha} \exp \left\{ -10^{b(M-M^*)} \right\} \quad (1.3)$$

où  $b = 1$  pour la fonction de masse. En principe,  $\alpha$ ,  $M^*$  et  $\phi^*$  doivent être ajusté sur les observations et peuvent dépendre de l'historique de formation des galaxies. En d'autres mots, ce sont des paramètres qui dépendent du redshift. On mesure  $M$  en unité logarithmique de masse solaire:

$$M = \log \frac{M_{\text{gal}}}{M_{\odot}}$$

La fonction de Schechter n'est valide que dans un interval de masses considérées. La borne inférieure choisie dans l'analyse de [1] est  $M > 6$ . Le meilleur fit sur les données pour la densité numérique intégrée sur le profil de Schechter  $\phi_T$

$$\phi_T(z) = \int_{M_1}^{M_2} \phi(M, z) dM \quad [\text{Mpc}^{-3}]$$

est [1]

$$\log \phi_T(t) = (-1.08 \pm 0.20) \log \left( \frac{t}{1 \text{ Gyr}} \right) - 0.26 \pm 0.06$$

Ce résultat est un constat que le taux de production de galaxies est variable en fonction du temps. En particulier, il est plus bas aujourd'hui qu'il ne l'était à  $z = 6$ .

Le nombre total de galaxies dans l'univers visible, en supposant un modèle d'évolution qui commence à  $z = 6$  et la cosmologie du modèle  $\Lambda$ CDM plat, est donc l'intégrale de la fonction du nombre de densité total multiplié par le volume de l'univers visible en fonction du redshift  $V_{\text{univers}}(z)$ :

$$N_{\text{tot}} = \frac{c}{H_0} \int_{z=0}^6 \int_0^{4\pi} \underbrace{\frac{(1+z)^2 D_A^2}{\sqrt{\Omega_{0m}(1+z)^3 + \Omega_{0\Lambda}}}}_{\frac{\partial^2 V_{\text{univers}}(z)}{\partial \Omega \partial z}} \phi_T(t(z)) d\Omega dz \quad (1.4)$$

où  $D_A$  est la distance angulaire en fonction de  $z$

$$D_A(z) = \frac{(1+z)^{-1}}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_{0m}(1+z')^3 + \Omega_{0\Lambda}}} \quad (1.5)$$

et

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \int_z^\infty \frac{(1+z')^{-1} dz'}{\sqrt{\Omega_{0m}(1+z')^3 + \Omega_{0\Lambda}}} \quad (1.6)$$

Les paramètres du modèle cosmologique sont données dans la table suivante.

$h$	$\Omega_{0m}$	$\Omega_\Lambda$
0.7	0.3	0.7

Table 1

Le résultat de l'équation (1.4) est

$$N_{\text{tot}} = (6 \pm 1) \times 10^{11} \text{ galaxies}$$

## 2 L'horizon

L'horizon comobile est définie comme

$$\eta \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}$$

( $c = 1$ ). La distance comobile entre deux points est définie comme

$$\chi(a) = \int_a^1 \frac{da'}{a'^2 H(a')}$$

a)

On cherche le redshift à partir duquel un miroir peut réfléchir la lumière du Big Bang vers la position d'un observateur de sorte que celui-ci reçoit cette lumière au temps  $t_0$ .

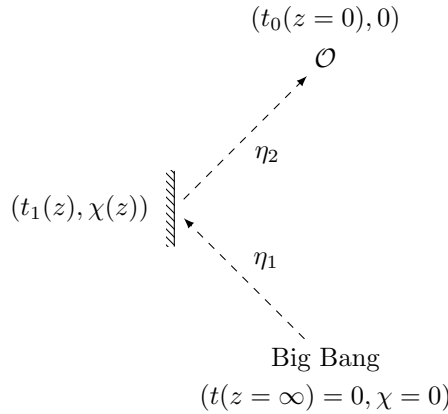


Figure 2: Illustration du problème

Par géométrie, les horizons comobiles  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont égales à la distance comobile  $\chi(z)$  entre le miroir et l'observateur:

$$\chi(z) = \frac{1}{2} \left( \int_0^{t_1} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \right)$$

Pour un univers de poussière ( $\Lambda = p = 0$ ) plat ( $\Omega_0 = 1$ ), les équations de Friedmann ont comme solution

$$t(z) = t_0(1+z)^{-3/2} \\ \implies dt = -\frac{3}{2}t_0(1+z)^{-5/2}dz$$

En remplaçant  $a(z) = (1+z)^{-1}$ , dans l'intégrale de l'horizon comobile, on obtient

$$\chi(z) = \frac{1}{2} \int_\infty^0 \left( -\frac{3}{2} \right) t_0(1+z)^{-3/2} dz$$

Ainsi,

$$\chi(z) = \frac{3}{2H_0}$$

Du côté gauche, la distance comobile prend la forme

$$\chi(z) = \frac{2}{H_0} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right)$$

De sorte que

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} &= \frac{3}{4} \\ \Rightarrow \boxed{z=3} \end{aligned}$$

**b)**

Dans un univers ouvert ( $\kappa = -1, \Omega < 1$ ) dominé par la matière ( $\Lambda = p = 0$ ), les équations de Friedmann deviennent

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &= \frac{8\pi G \rho a^2}{3} + 1 \\ \ddot{a} &= -\frac{4\pi G \rho a}{3} \\ d(\rho a^3) &= 0 \end{aligned}$$

On introduit le paramètre de densité au temps présent

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{0c}}, \quad \rho_{0c} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

En utilisant notre équation d'état, on peut remplacer  $\rho a^3 = \rho_0 a_0^3$ :

$$\Rightarrow \left( \frac{\dot{a}}{a_0} \right)^2 = H_0^2 \Omega_0 \frac{a_0}{a} + \frac{1}{a_0^2}$$

On remarque que le terme  $1/a_0^2$  est constant. On peut ainsi, en manipulant l'équation, le remplacer en terme des constantes physiques actuelles:

$$\left( \frac{\dot{a}}{a_0} \right)^2 - H_0^2 \Omega_0 \frac{a_0}{a} = \frac{1}{a_0^2}$$

En particulier, cette équation est vrai à  $a = a_0$ , donc on obtient

$$\left( \frac{\dot{a}}{a_0} \right)^2 = H_0^2 \left( \Omega_0 \left( \frac{a_0}{a} \right) + (1 - \Omega_0) \right) \quad (2.1)$$

On remarque premièrement que  $\dot{a} > 0 \forall t$ , puisque le côté droit de l'équation est toujours positif pour un univers ouvert ( $\Omega_0 < 1$ ). Ainsi, on s'attend que le facteur d'échelle augmente en fonction de  $t$  et que  $\Omega_0 a_0/a$  devienne négligeable devant  $1 - \Omega_0$  à un certain moment dans l'évolution de l'univers.

Ceci survient lorsque

$$a \gg a^* = \frac{a_0 \Omega_0}{1 - \Omega_0}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \dot{a} &\simeq H_0 (1 - \Omega_0)^{1/2} \\ \Rightarrow \boxed{a(t) \simeq H_0 (1 - \Omega_0)^{1/2} t, \quad a \gg a^*} \end{aligned}$$

**c)**

Pour répéter l'expérience de pensée de la sous section a), on doit déterminer la solution  $a(t)$  générale. On définit le temps conforme  $\eta$  de sorte que

$$d\eta = H_0 \sqrt{1 - \Omega_0} \frac{dt}{a}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{H_0 \sqrt{1 - \Omega_0}} \left( \frac{\dot{a}}{a_0} \right) = \frac{1}{a_0 H_0 \sqrt{1 - \Omega_0}} \frac{da}{dt} = \frac{1}{a_0} \frac{d \ln a}{d\eta}$$

On intègre l'équation de Friedmann en terme du temps conforme avec la condition initiale  $a(\eta = 0) = 0$  et  $a_0 = 1$ :

$$\eta = \int_0^a \frac{da'}{\sqrt{\frac{\Omega_0}{1-\Omega_0}a' + a'^2}}$$

Cette intégrale a une primitive en terme du logarithme naturel:

$$\eta = \ln \left( \frac{\frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{1-\Omega_0} + a + \sqrt{\frac{\Omega_0}{1-\Omega_0}a + a^2}}{\frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{1-\Omega_0}} \right)$$

Notons que

$$\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Ainsi,

$$\eta = \cosh^{-1} \left( 1 + \frac{2a(1-\Omega_0)}{\Omega_0} \right)$$

D'où on trouve que

$$a(\eta) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{1-\Omega_0} (\cosh(\eta) - 1) \quad (2.2)$$

Similairement, on trouve (avec  $t(0) = 0$ ):

$$t(\eta) = \frac{1}{H_0 \sqrt{1-\Omega_0}} \int_0^\eta a(\eta') d\eta' = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{H_0 (1-\Omega_0)^{3/2}} (\sinh(\eta) - \eta) \quad (2.3)$$

Notons qu'on a utiliser la variable  $\eta$  pour représenter le temps conforme, car ce temps correspond aussi à l'horizon cosmique défini plus haut (multiplié par le bon facteur). Il est facile de le démontrer avec les équations différentielles défini plus haut. La distance comobile est simplement

$$\eta_{\text{horizon}} = \frac{c}{H_0 \sqrt{1-\Omega_0}} \eta$$

$$\chi(\eta) = \frac{c}{H_0 \sqrt{1-\Omega_0}} (\eta_0 - \eta)$$

où  $\eta_0$  correspond au temps conforme présent. Le problème du miroir revient donc à résoudre

$$\frac{1}{1+z} = a(\eta) = \frac{1}{2} \eta_0$$

On trouve  $\eta_0$  par l'équation (2.2) ( $a_0 = 1$ ):

$$\eta_0 = \cosh^{-1} \left( \frac{2-\Omega_0}{\Omega_0} \right)$$

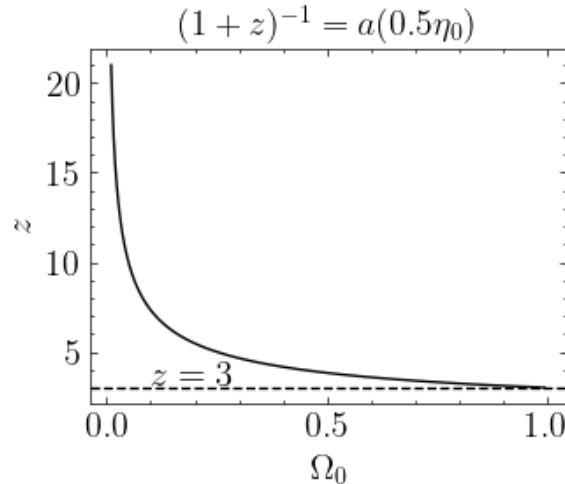


Figure 3: On remarque que la solution diverge lorsque  $\Omega_0 \rightarrow 0$ , ce qui est attendu. La solution converge aussi vers la solution d'un univers plat développé à la sous-section a).

### 3 Le signal de EDGES

Le télescope radio EDGES a mesuré la température de transition hyperfine de l'hydrogène dans l'intervalle  $13 < z < 27$ . Un abaissement de la température du spin de l'hydrogène est attendu entre  $z = 20$  et  $z = 15$ , au moment où les premières étoiles commencent à rayonner et exciter l'état triplet de l'hydrogène.

#### a) Ratio de température

La température du rayonnement évolue comme

$$T_\gamma = T_{\text{CMB}}(1 + z)$$

Alors que la température du gaz évolue plutôt comme

$$T_{\text{gaz}} = T_0(1 + z)^2$$

En utilisant le fait que  $T_{\text{gaz}}(z = 200) \simeq T_\gamma(200)$ , on peut déterminer  $T_0$  et on trouve

$$\boxed{\frac{T_\gamma}{T_{\text{gaz}}} \simeq \frac{201}{21}}$$

Ce qui correspond à une température

$$T_{\text{gaz}}(z = 20) = 5.97 \text{ K}$$

#### b)

La température du profil d'absorption  $T_{21}$  suit la loi

$$T_{21} = \frac{1}{1 + z}(T_s - T_{\text{CMB}})(1 - e^{-\tau})$$

où  $\tau$  est l'épaisseur optique à l'époque de la réionisation et  $T_s$  est la température du spin de l'hydrogène. Plus précisément, c'est la température effective qui mesure le ratio d'hydrogène dans l'état singulet (1) et l'état triplet (2) par la distribution de Boltzmann:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp \left\{ -\frac{E_{21}}{k_b T_s} \right\} \quad (3.1)$$

En assumant que l'épaisseur optique est  $\tau \ll 1$ , on trouve [2]

$$T_{21} \simeq (0.011 \text{ K}) \frac{2}{h} \left( \frac{\Omega_b h^2}{0.2} \right) \sqrt{\frac{1+z}{9}} x_{HI} \left( \frac{T_s - T_\gamma}{T_s} \right) \quad (3.2)$$

où  $T_s$  est la température de spin de l'hydrogène et  $x_{HI}$ . On suppose  $T_{\text{gaz}} = T_s$  et  $x_{HI} \simeq 1$ . Le résultat de EDGES montre que  $\delta T \simeq -500 \text{ mK}$ . On infère la température du gaz en inversant la relation 3.2 pour déterminer

$$T_s(z = 20) \simeq 0.62 \text{ K}$$

Ce résultat confirme que la température de l'hydrogène qui est responsable du signal mesuré par EDGES est beaucoup plus petite que celle à laquelle on s'attend (5.97 K). On peut construire un modèle où une certaine quantité de matière noire  $\chi$  très froide interagit avec le bain d'hydrogène pour le refroidir. Dans ce cas,

$$\frac{T_s(z = 20)}{T_{\text{gaz}}(z = 20)} = \frac{n_H}{n_H + n_\chi}$$

Ainsi, en utilisant les résultats de la collaboration Planck [3]:

$$\boxed{n_\chi = n_h \left( \frac{T_{\text{gaz}}}{T_s} - 1 \right) \simeq 0.014 \text{ cm}^{-3}}$$

où  $n_H \simeq 1.62 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$ .

## References

- [1] C. J. Conselice, A. Wilkinson, K. Duncan, and A. Mortlock. The Evolution of Galaxy Number Density at  $z < 8$  and its Implications. *The Astrophysical Journal*, 830(2):83, 2016.
- [2] P. Madau, A. Meiksin, and M. J. Rees. 21 Centimeter Tomography of the Intergalactic Medium at High Redshift. *The Astrophysical Journal*, 475(2):429–444, 1997.
- [3] Planck Collaboration. Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck. 2018.