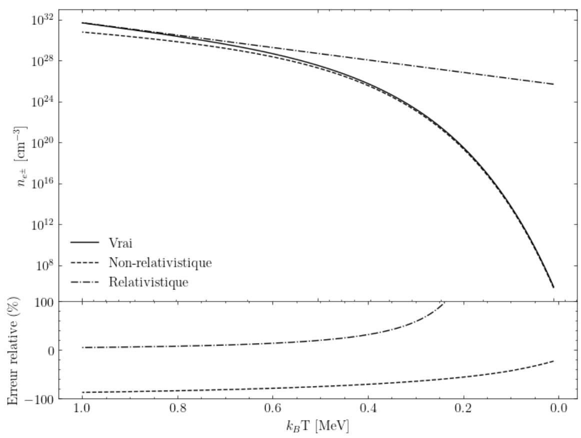
1 Nucléosynthèse

a) Dodelson ch. 3, Exercice 2

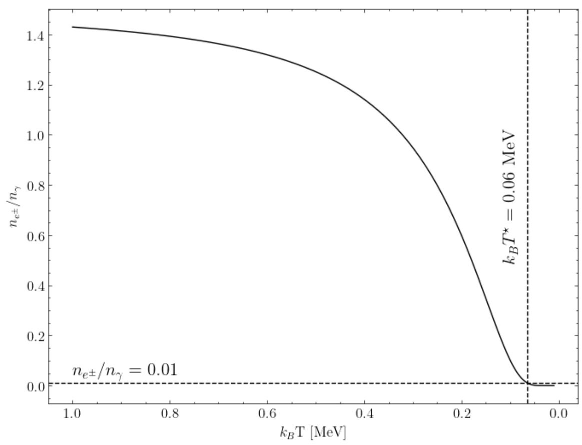
La densité numérique des électrons-positrons est donnée en terme de la distribution de Fermi-Dirac (on conserve les constantes physiques c, $\hbar$, k_B pour ce sous-numéro):

$$n_{e^\pm}^{(0)} = g_{e^\pm} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp\left\{\dfrac{E(p)}{k_BT}\right\} + 1} \tag{1.1}$$

où $E(p) = \sqrt{p^2c^2 + m_e^2c^4}$ et $g_{e^\pm} = 2$ pour les états de spins. On a négligé le potentiel chimique des électrons μ_e car il est identiquement nul avant et durant la nucléosynthèse. À la température où la nucléosynthèse se produit ($k_BT \simeq 1\,\mathrm{MeV}$), on ne peut pas simplifier l'énergie en faveur de p ou m_e puisque la masse de l'électron $m_e \simeq 0.5\,\mathrm{MeV}/c^2$ est similaire à la température.



(a) Comparaison des approximations à la vrai fonction durant l'époque de nucléosynthèse.



(b) Ratio des densités numérique des électrons-positrons lors de l'époque de nucléosynthèse.

La densité numérique des photons se calcule directment à partir de la distribution de Planck

$$n_\gamma^{(0)} = g_\gamma \int_0^\infty 4\pi \frac{B(\nu,T)d\nu}{h\nu} = \frac{8\pi}{c^3} g_\gamma \int_0^\infty \frac{\nu^2 d\nu}{\exp\{h\nu/k_BT\} - 1} \tag{1.2}$$

Avec substition on retrouve une forme standard pour l'intégrale qui devient

$$n_\gamma^{(0)} = g_\gamma \frac{2\zeta(3)}{\pi^2}\left(\frac{k_BT}{\hbar c}\right)^3$$

où $\zeta(s)$ est la fonction zeta de Riemann. On cherche la température $T^\star$ à partir de laquelle la densité numérique des électrons devient 1% celle des photons $n_\gamma^{(0)}$. En interpolant une grille de valeurs, on obtient

$$\boxed{k_BT^\star = 0.06\,\mathrm{MeV}}$$

Avec un ratio de baryons sur photons de

$$\eta_b = 6 \times 10^{-10}$$

au moment de la nucléosynthèse (après annihilation des anti-particules), on peut tenter de déterminer le moment (la température) à partir duquel les électrons ne seront plus en équilibre avec le processus de création/annihiltion de paires. En effet, l'Univers observé est électriquement neutre et on doit avoir $n_{e^-} = n_p$ à un certains moment. Si on suppose que la grande majorité de la matière baryonique est constitué de protons (on néglige les neutrons), alors on trouve

$$\boxed{k_BT\left(\frac{n_{e^-}}{n_\gamma} \sim \eta_b\right) \simeq 0.02\,\mathrm{MeV}}$$

b) Dodelson ch. 3, Exercice 3

I Intégrale sur les particules massives

On cherche à calculer le taux de la conversion de neutrons en protons Γ_{np}. Pour ce faire, on estime la section efficace thermal des processus $n + \nu_e \longrightarrow p + e^-$ et $n + e^+ \longrightarrow p + \bar{\nu}_e$. On néglige la masse de l'électron et on assume que les processus peuvent être décrits pas les statistiques de Boltzmann. Dans quel cas leur taux de réaction est le même. On considère un seul processus pour le moment et on néglige les facteurs de Pauli ($f_i \ll 1$):

$$\begin{aligned}\langle\sigma v\rangle \equiv \frac{1}{n_n^{(0)} n_{e^+}^{(0)}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2E_{e^+}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_p}{(2\pi)^3 2E_p} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\nu}_e}} \exp\left\{-\frac{E_{p_n} + E_{p_{e^+}}}{T}\right\} \\ \times (2\pi)^4 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_{e^+} - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}) \delta(E_n + E_{e^+} - E_p - E_{\bar{\nu}_e}) |\mathcal{M}|^2\end{aligned}$$

En négligeant la masse des neutrinos (ce qui est toujours valide) et la masse des électrons (valide devant la masse du protons et du neutrons $m_p \sim m_n \sim 2000 m_e$), alors $E_{e^+} = p_{e^+} = |\mathbf{p}_{e^+}|$ et $E_{\bar{\nu}_e} = p_{\bar{\nu}_e}$. De plus, on approxime l'énergie des particules massive par leur énergie de masse $E_p \simeq m_p$ et $E_n \simeq m_n$ ce qui est valide durant la nucléosynthèse puisque la température est de $\sim 1\,\text{MeV} \ll m_p$.

$$\begin{aligned}\langle\sigma v\rangle = \frac{1}{n_n^{(0)} n_{e^+}^{(0)}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2m_n} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_p}{(2\pi)^3 2m_p} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}} \exp\left\{-\frac{m_n + p_{e^+}}{T}\right\} \\ \times (2\pi)^4 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_{e^+} - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}) \delta(\mathcal{Q} + p_{e^+} - p_{\bar{\nu}_e}) |\mathcal{M}|^2\end{aligned}$$

où on a définit $\mathcal{Q} = m_n - m_p = 1.293\,\text{MeV}$. On fait l'intégrale sur l'espace de phase des particules massives sur une coquille dans le système de référence du neutron (le choix est libre puisque l'intégrale est un invariant de Lorentz), de sortes que $\mathbf{p}_n = 0$. La fonction δ de Dirac restante sélectionne alors $\mathbf{p}_{e^+} = \mathbf{p}_p + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}$ par conservation de la quantité de mouvement et on obtient (en appliquant la fonction δ^3 sur $\int d^3\mathbf{p}_p$):

$$\begin{aligned}\langle\sigma v\rangle = \frac{1}{n_n^{(0)} n_{e^+}^{(0)}} \frac{2\pi}{4 m_n m_p} \int \frac{d^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}} \exp\left\{-\frac{m_n + p_{e^+}}{T}\right\} \\ \times \delta(\mathcal{Q} + p_{e^+} - p_{\bar{\nu}_e}) |\mathcal{M}|^2\end{aligned}$$

À l'équilibre,

$$n_n^{(0)} = 2 \int \frac{d^3\mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} \exp\left\{-\frac{m_n}{T}\right\}$$

De sortes que

$$\boxed{\langle\sigma v\rangle = \frac{1}{n_{e^+}^{(0)}} \frac{\pi}{4 m_n m_p} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}} \exp\left\{-\frac{p_{e^+}}{T}\right\} \delta(\mathcal{Q} + p_{e^+} - p_{\bar{\nu}_e}) |\mathcal{M}|^2}$$

II Taux de réaction

L'amplitude de la réaction est

$$|\mathcal{M}|^2 = 32 G_F^2 (1 + 3g_A^2) m_p^2 p_\nu p_e \tag{1.3}$$

où g_A est le vecteur axial de couplage du nucléon qu'on mesure aujourd'hui via le temps de vie du neutron

$$\tau_n^{-1} = \lambda_0 G_F^2 (1 + 3g_A^2) \frac{m_e^5}{2\pi^3}$$

où $\lambda_0 \simeq 1.636$, $\tau_n = 879.4 \pm 0.6$ s et G_F est la constante de Fermi

$$G_F = 1.16639(1) \times 10^{-5}\,\text{GeV}^{-2} (\hbar c)^3$$

On performe l'intégrale de la section efficace thermalisée sur une coquille dans l'espace de phase du positron. On applique en premier lieu la fonction δ sur l'énergie:

$$\begin{aligned}n_{e^+}^{(0)} \langle\sigma v\rangle &= \frac{32\pi G_F^2 (1 + 3g_A^2) m_p}{4 m_n} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}} \exp\left\{-\frac{p_{e^+}}{T}\right\} \delta(\mathcal{Q} + p_{e^+} - p_{\bar{\nu}_e}) p_{\bar{\nu}_e} p_{e^+} \\ &= \frac{32\pi G_F^2 (1 + 3g_A^2) m_p}{4 m_n} \int_0^\infty \frac{4\pi p_{e^+}^2 dp_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}} \int_0^\infty \frac{4\pi p_{\bar{\nu}_e}^2 dp_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}} \exp\left\{-\frac{p_{e^+}}{T}\right\} \delta(\mathcal{Q} + p_{e^+} - p_{\bar{\nu}_e}) p_{\bar{\nu}_e} p_{e^+}\end{aligned}$$

$$= \frac{4G_F^2(1+3g_A^2)m_p}{(2\pi)^3 m_n} \int_0^\infty p_{e^+}^2 dp_{e^+} \int_0^\infty p_{\bar{\nu}_e}^2 dp_{\bar{\nu}_e} \exp\left\{-\frac{p_{e^+}}{T}\right\} \delta(\mathcal{Q} + p_{e^+} - p_{\bar{\nu}_e})$$
$$= \frac{4G_F^2(1+3g_A^2)m_p}{(2\pi)^3 m_n} \int_0^\infty dp_{e^+} p_{e^+}^2 (\mathcal{Q} + p_{e^+})^2 \exp\left\{-\frac{p_{e^+}}{T}\right\}$$

On applique la substitution $y \equiv \dfrac{p_{e^+}}{T}$ pour obtenir

$$n_{e^+}^{(0)} \langle \sigma v \rangle = \frac{4G_F^2(1+3g_A^2)m_p}{(2\pi)^3 m_n} T^3 \int_0^\infty dy\ y^2(\mathcal{Q}^2 + 2\mathcal{Q}Ty + T^2y^2)e^{-y}$$

On reconnaît la forme intégrale de la fonction $\Gamma(s)$, ainsi

$$\begin{aligned} n_{e^+}^{(0)} \langle \sigma v \rangle &= \frac{4G_F^2(1+3g_A^2)m_p}{(2\pi)^3 m_n} T^3 \left[\Gamma(3)\mathcal{Q}^2 + 2\Gamma(4)\mathcal{Q}T + \Gamma(5)T^2\right] \\ &= \frac{4G_F^2(1+3g_A^2)m_p}{(2\pi)^3 m_n} T^3 \left[2\mathcal{Q}^2 + 12\mathcal{Q}T + 24T^2\right] \\ &= \frac{16\pi^3 m_p}{\lambda_0 (2\pi)^3 \tau_n m_e^5 m_n} T^3 \left[\mathcal{Q}^2 + 6\mathcal{Q}T + 12T^2\right] \end{aligned}$$

En posant de plus $x \equiv \dfrac{\mathcal{Q}}{T}$, on trouve

$$\boxed{\Gamma_{np} = 2n_{e^+}^{(0)} \langle \sigma v \rangle = \frac{4m_p\mathcal{Q}^5}{\lambda_0 \tau_n m_e^5 m_n} \frac{1}{x^5} \left[x^2 + 6x + 12\right]}$$

On peut comparer avec l'équation (3.29) et on remarque qu'on obtient

$$\boxed{\Gamma_{np} \simeq \frac{253.57}{\tau_n x^5} \left[x^2 + 6x + 12\right]}$$

La constante numérique 253 est comparable à 255, celle obtenue par Bernstein (1988).

2 Vitesse du son lors du découplement

a) Ratio de densité

On cherche
$$R \equiv \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}$$
où l'indice b réfère aux baryons.

La première loi de la thermodynamique avec $dQ = 0$ dans un Univers régit par la métrique FRW implique que
$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$$
qu'on réécrit
$$a^{-3}\frac{d(\rho a^3)}{dt} = -3\frac{\dot{a}}{a}p$$
Pour la matière, l'équation d'état $p = 0$ implique que
$$a^{-3}\frac{d}{dt}(\rho_b a^3) = 0 \implies \rho_b = \rho_{b,0}a^{-3}$$
Pour la radiation, on a plutôt $p = \rho_\gamma/3$, donc
$$\dot{\rho}_\gamma + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_\gamma = a^{-4}\frac{d(\rho_\gamma a^4)}{dt} = 0$$
Donc
$$\rho_\gamma = \rho_{\gamma,0}a^{-4}$$

Ainsi, le ratio de densité en terme du facteur d'échelle et des paramètres de densités d'aujourd'hui (on omet les indices 0):

$$\boxed{R = \frac{3}{4}\frac{\Omega_b}{\Omega_r}a}$$

Pour déterminer R au moment du découplement, on doit déterminer le moment dans l'évolution de l'Univers où le taux de diffusion Compton devient égal au taux d'expansion de l'Univers. En pratique, on sait que ce moment survient dans la limite non-relativistique de la distribution thermique des électrons, donc on utilise le taux de diffusion Thompson (unités de Planck):

$$\Gamma_T = X_e n_b \sigma_T$$

où σ_T est la section efficace de Thompson et X_e est la fraction d'électrons libres (dans l'Univers jeune, $X_e = 1$). On a utilisé le fait que $n_e = n_p$ et on a négligé le nombre de neutrons dans l'Univers ($n_b \simeq n_p + n_H$).

On utilise notre expression pour la densité baryonique et l'approximation $\rho_b \simeq m_p n_b$ ($m_H \simeq m_p$) pour obtenir

$$\Gamma_T = \frac{3H_0^2}{8\pi G m_p} X_e \Omega_b a^{-3} = 2.2396 \times 10^{-19}\ \text{s}^{-1}\ X_e \Omega_b h^2 a^{-3}$$

On veut déterminer a au moment où $\Gamma_T = H(a)$. Au moment du découplement, l'Univers est en transition entre un Univers dominé par la radiation et un Univers dominé par la matière. Ainsi,

$$H(a) = H_0\sqrt{\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3}}$$

Au moment de la recombinaison, $X_e \simeq 10^{-2}$, donc

$$\frac{\Gamma_T}{H} = 1 = 6.9108 \times 10^{-4}\frac{\Omega_b h a^{-3}}{\sqrt{\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3}}}$$