

1 Le paradoxe d'Olber

Le paradoxe d'Olber peut être déclaré de la façon suivante:

Dans un univers infini peuplé de façon homogène par des étoiles, le ciel serait au moins aussi brillant que le Soleil.

En effet, supposant une densité cosmique constante n_* et une luminosité moyenne L_* , alors le flux reçu (erg $\text{\AA}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$) serait

$$\frac{dI}{d\Omega} \sim \int_0^\ell n_* \frac{L_*}{r^2} r^2 dr = n_* \ell L_* = \frac{L_*}{\pi R_*^2}$$

pour ℓ défini comme le libre parcours moyen d'un photon dans cet univers. La cosmologie moderne résout ce paradoxe en introduisant un âge fini à l'Univers ainsi qu'une expansion, ce qui crée un horizon cosmique.

a) Énoncé

Dans ces cosmologies, quel serait donc le redshift median auquel on s'attend lorsqu'on compile une large population de galaxies et d'étoiles? Notre stratégie pour évaluer cette quantité est fondée sur l'idée que le redshift médian correspond à

$$\left(\frac{\partial I_{\lambda_0}}{\partial \Omega} \right)^{-1}_{\max} \frac{\partial I_{\lambda_0}}{\partial \Omega} (z_{\text{median}}) = 0.5$$

où la médiane est défini relativement à une distribution cumulative du flux radiatif. Un équivalent bolométrique peut aussi être calculé. En d'autres mots, le redshift médian correspond au temps (passé) à partir duquel la moitié des photons nous provenant des galaxies et des étoiles ont été émis.

b) Dérivation

La métrique FRW est défini avec l'observateur \mathcal{O} situé à l'origine du système de coordonnées. Une section du volume d'une coquille entre la coordonnée comobile r et $r + dr$ est

$$\frac{\partial V_{\text{coquille}}}{\partial \Omega} = \frac{adr}{\sqrt{1 - kr^2}} a^2 r^2$$

Pour une cosmologie de poussière (dominée par la matière $\implies p = 0$), la conservation de l'entropie impose que la densité varie selon

$$\rho \propto a^{-3}$$

Dans ce cas, la densité numérique des étoiles et galaxies varie selon

$$n(t) = n_0 \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3$$

On définit le flux spécifique $f_\lambda(t)$ à partir de la fonction de Planck (ce qui est une approximation du spectre produit par une collection de galaxies)

$$f_\lambda(t) d\lambda \equiv C(t) \frac{4\pi \hbar c^2}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{\exp \left\{ \frac{2\pi \hbar c}{k_b T \lambda} \right\} - 1} \quad (1.1)$$

où C est une constante qui peut en principe dépendre du temps pour refléter l'évolution des galaxies et des étoiles. Notons que la température peut elle aussi dépendre du temps pour refléter les cycles d'évolution des étoiles. La contribution des galaxies se situant dans la coquille mesurée par l'observateur produit une intensité

$$d \left(\frac{\partial I_\lambda}{\partial \Omega} \right) d\lambda = \frac{\partial V_{\text{coquille}}}{\partial \Omega} n(t) \frac{f_\lambda(t)}{4\pi a_0^2 r^2 (1+z)^2} d\lambda$$

Notons que les photons produits dans un interval de temps δ arrive à l'observateur dans un interval de temps $\delta_0 = \delta(1+z)$ selon l'effet de dilatation temporelle. Le second facteur de redshift vient du fait que l'énergie du photon est proportionnel à $E_\lambda = ch/\lambda$. L'énergie de chaque photon est réduit: $E_{\lambda_0} = ch/\lambda(1+z)$

Il est pratique de travailler avec la coordonnée cdt plutôt que la coordonnée radiale dr sachant que les photons suivent une géodésique radial

$$cdt = \frac{adr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

De sortes que

$$d\left(\frac{\partial I_\lambda}{\partial \Omega}\right)d\lambda = \frac{cn_0}{4\pi}f_\lambda(t)\frac{a(t)}{a_0}dtd\lambda$$

Pour connecter avec les observations, on doit exprimer cette quantité en terme de λ_0 ce qui fait apparaître un facteur de redshift supplémentaire:

$$d\left(\frac{\partial I_{\lambda_0}}{\partial \Omega}\right)d\lambda_0 = \frac{cn_0}{4\pi}f_{\lambda_0}(t)\left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^2 d\lambda_0 dt \quad (1.2)$$

L'intensité spécifique reçut par \mathcal{O} est donc

$$\frac{\partial I_{\lambda_0}}{\partial \Omega} = \frac{cn_0}{4\pi} \int_{t_f}^{t_0} f_{\lambda_0}(t) \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^2 dt \quad (1.3)$$

où $t_f \leq t \leq t_0$, avec t_f le temps où les galaxies sont originellement formée et t_0 le temps présent.

Pour un univers statique, où C et $T = T_0$ sont constants, la dépendance temporelle dans l'intégrale est lié uniquement à l'historique d'expansion de la cosmologie choisie. On commence par remplacer $f_{\lambda_0}(t)$ par l'équation (1.1):

$$\frac{\partial I_{\lambda_0}}{\partial \Omega} = \frac{cn_0}{4\pi} \left(\frac{4\pi C \hbar c^2}{\lambda_0^5}\right) \int_{t_f}^{t_0} \left(\frac{a_0}{a(t)}\right)^3 \frac{1}{\exp\left\{\frac{2\pi \hbar c a_0}{k_B T_0 \lambda_0 a(t)}\right\} - 1} dt$$

Pour résoudre l'intégrale, on doit déterminer une expression pour dt en terme de dz . Dans une cosmologie avec pression nulle et $\Lambda = 0$, on peut simplifier les équations de Friedmann en terme du paramètre de densité Ω et le paramètre de décélération q :

$$\sigma = \frac{1}{2}\Omega \equiv \frac{4\pi G\rho}{3H^2}$$

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}}{aH^2}$$

On se réfère à [6] pour la procédure. On obtient

$$\dot{a}^2 = \dot{a}_0^2 \left[2\sigma_0 \frac{a_0}{a} + (\sigma_0 - q_0) \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + 1 + q_0 - 3\sigma_0 \right] \quad (1.4)$$

On utilise la variable d'intégration $(1+z) = \frac{a}{a_0}$, de sortes que ([8], [7])

$$dt = -\frac{(1+z)^2 dz}{H_0(2\sigma_0(1+z)^3 + (1+q_0-3\sigma_0)(1+z)^2 + \sigma_0 - q_0)^{1/2}}$$

D'un autre côté, si $\Lambda \neq 0$, alors on doit utiliser le modèle Λ CDM pour lequel on utilise plutôt les paramètres de densités Ω_m , Ω_Λ et $\Omega_r \simeq 0$ ainsi qu'une courbure nulle ($k=0$) ([1]):

$$\dot{a}^2 = \dot{a}_0^2 \left[\Omega_{0m} \left(\frac{a}{a_0}\right) + \Omega_{0r} \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 + \Omega_{0\Lambda} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2} + (1 - \Omega_{0m} - \Omega_{0r} - \Omega_{0\Lambda}) \right]$$

Ainsi,

$$dz = -\frac{a_0}{a^2} \dot{a} dt \implies dt = -\frac{\dot{a}_0}{\dot{a}} \frac{a^2}{a_0^2} \frac{dz}{H_0}$$

d'où

$$dt = -\frac{(1+z)^2 dz}{H_0 \sqrt{\Omega_{0m}(1+z) + \Omega_{0r}(1+z)^2 + \Omega_{0\Lambda}(1+z)^{-2} + 1 - \Omega_{0m} - \Omega_{0r} - \Omega_{0\Lambda}}}$$

Avant de revenir à l'intégrale, on détermine C par un fit sur la température effective du spectre en utilisant la loi de Stefan-Boltzmann:

$$C = \frac{\pi L_0}{\sigma_{\text{SB}} T_0^4}$$

On définit les constantes suivantes:

$$\alpha = \frac{\pi \hbar c^3}{\sigma_{\text{SB}}}$$

$$\beta = \frac{n_0 L_0}{T_0^4 \lambda_0^5 H_0}$$

$$\gamma = \frac{2\pi \hbar c}{k_B T_0 \lambda_0}$$

De sortes qu'on obtient ([7]):

$$\frac{\partial I_{\lambda_0}}{\partial \Omega} = \alpha \beta \int_0^{z_f} \frac{(1+z)^2 dz}{[e^{\gamma(1+z)} - 1][2\sigma_0(1+z)^3 + (1+q_0 - 3\sigma_0)(1+z)^2 + \sigma_0 - q_0]^{1/2}}$$

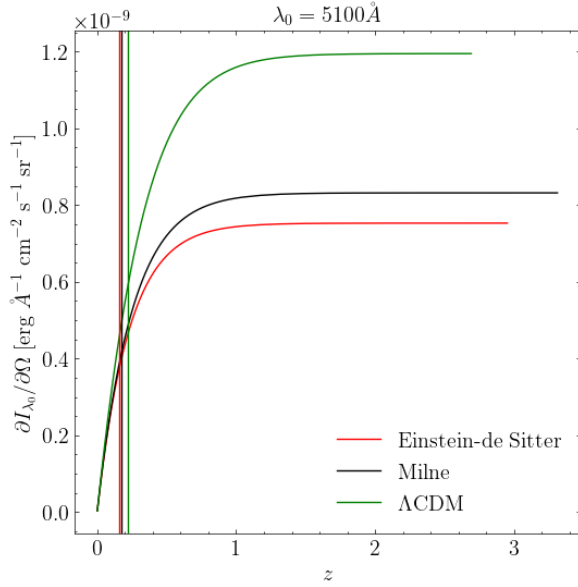
et

$$\frac{\partial I_{\lambda_0}}{\partial \Omega} = \alpha \beta \int_0^{z_f} \frac{(1+z)^2 dz}{[e^{\gamma(1+z)} - 1][\Omega_{0m}(1+z) + \Omega_{0r}(1+z)^2 + \Omega_{0\Lambda}(1+z)^{-2} + 1 - \Omega_{0m} - \Omega_{0r} - \Omega_{0\Lambda}]^{1/2}}$$

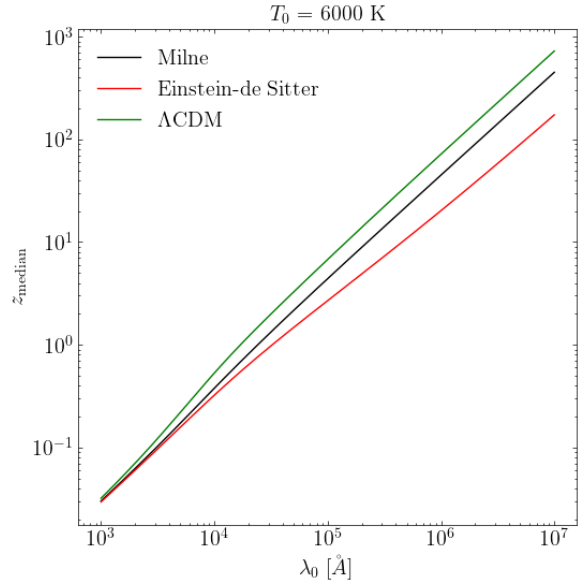
On considère deux cas en particulier pour l'univers de poussière:

1. Univers d'Einstein-de Sitter: $q_0 = \sigma_0 = \frac{1}{2}$
2. Univers de Milne: $q_0 = \sigma_0 = 0$

c) Résultats



(a) Illustration de la méthode de calcul, barres verticales indiquent la position de z_{median} comme le redshift où l'intensité atteint la moitié de son maximum. L'intégrale est calculé jusqu'à ce qu'un plateau soit atteint.



(b) Redshift median attendu dans un interval du spectre électromagnétique.

On a utilisé les résultats de la collaboration Planck pour l'univers Λ CDM:

h	0.676
Ω_{0m}	0.309
Ω_{0r}	0
$\Omega_{0\Lambda}$	0.679

Table 1: Paramètres de Λ CDM

On a aussi défini les paramètres physique suivants ([7]):

T_0	6000 K
ϵ_0	$2.5h \times 10^8 L_{\odot} \text{ Mpc}^{-3}$
λ_0	5100 Å

Table 2: Paramètres physiques, où $\epsilon_0 = n_0 L_0$ est la densité d'énergie lumineuse.

d) Discussion

On observe que les longueur d'onde plus énergétique ont un redshift médian beaucoup plus petit que les longueurs d'ondes plus rouge. De ce fait, une grande partie des émissions dans l'infrarouge proviennent du jeune Univers, ce qui est confirmé par les observations (CMB).

Les approximations utilisées sont les suivantes:

1. On suppose que chaque objets est un corps noir
2. On suppose que la température moyenne T_0 de chaque objet est constante en fonction du redshift (ce qui n'est pas cohérent avec les modèles d'évolution des étoiles).
3. On a supposé un univers plat, ce qui n'est pas nécessairement le cas
4. Notre calcul dépend de la cosmologie choisie, de façon plus importante pour les redshift médian dans l'infrarouge. On a donc supposé que les trois cosmologies choisies étaient de bon candidat pour comparer avec les observations.

2 Homogénéité de l'Univers

On considère un échantillon de galaxies du sondage BOSS dans le cône:

1. $0.0001 \leq z \leq 1$
2. $156^\circ \leq \text{ra} \leq 160^\circ$
3. $27^\circ \leq \text{dec} \leq 33^\circ$

Ceci équivaut à plus de 15,000 galaxies, dispersés de façon inégale selon le redshift.

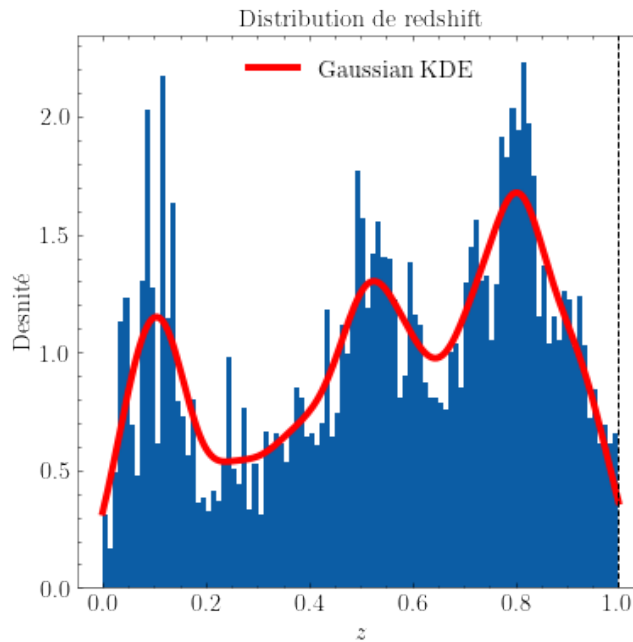


Figure 2

On tient compte de cette distribution en ajustant un Kernel Density Estimator gaussien sur la distribution. Ainsi, on peut associer un poids à chaque galaxie selon son redshift:

$$w(z) = \frac{(P_{\text{KDE}}(z))^{-1}}{\int_0^1 (P_{\text{KDE}}(z))^{-1}} \quad (2.1)$$

a) Nombre de voisins dans une sphère de rayon r

Une première approche pour modéliser l'excès de la densité numérique par rapport à un processus de Poisson est de moyenner sur chaque galaxie le nombre de voisins trouvés dans une sphère de rayon r . Le comportement attendu est que le nombre de galaxie augmente selon r^3 pour un processus de Poisson. Ainsi, une mesure d'homogénéité est

$$\mathcal{N}(< r) = \frac{\langle N_D(< r) \rangle_w}{\langle N_R(< r) \rangle}$$

où l'indice w indique la moyenne pesée avec les poids normalisés de l'équation (2.1) et où $N_R(< r)$ est le nombre de voisins dans un catalogue synthétique avec une distribution de densité uniforme. On s'attend à ce que $\mathcal{N}(< r) \rightarrow 1$ lorsque la distribution devient homogène à l'échelle sondée.

Pour déterminer la distance comobile r (on suppose un Univers de courbure nulle), on utilise la cosmologie Λ CDM avec les résultats de la collaboration Planck (table 1).

Pour améliorer la confiance du calcul, on crée 100 catalogues synthétiques pour obtenir des statistiques sur $\mathcal{N}(< r)$. Finalement, chaque réalisation du calcul est obtenue à l'aide de 5000 galaxies choisies aléatoirement du catalogue.

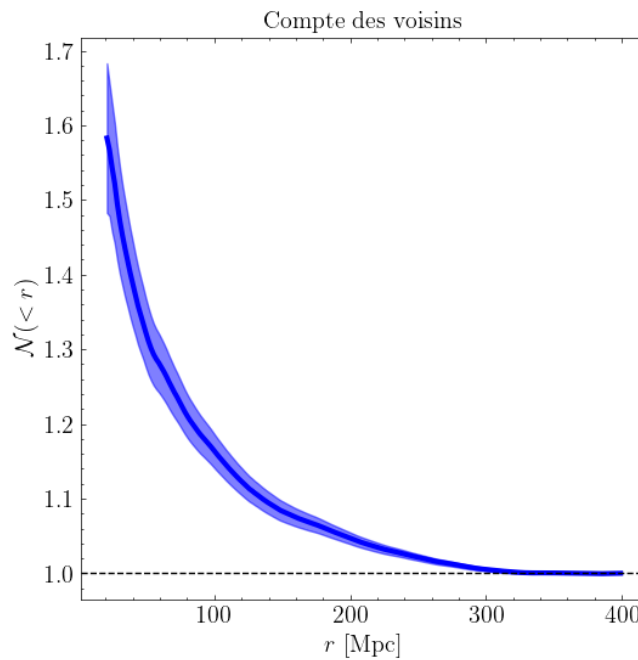


Figure 3: 100 réalisations du compte de nombre de voisins pour 5000 objets sélectionnés du catalogue

b) Fonction de covariance $\xi(r)$

On définit la fonction de covariance $\xi(r)$ comme l'amplitude de la tendance aux galaxies de s'agglomérer [5]:

$$dP = \bar{n}(1 + \xi(r))dV$$

où dP mesure la probabilité de trouver un voisin à une distance r dans un volume dV . Ainsi, $\xi(r)$ mesure l'excès de probabilité par rapport à un processus de Poisson (où la probabilité est fixe $dP_{\text{Poisson}} = \bar{n}dV$). En pratique, on peut définir l'estimateur de Davis et Peebles basé sur l'histogramme des distances de chaque paires [2]:

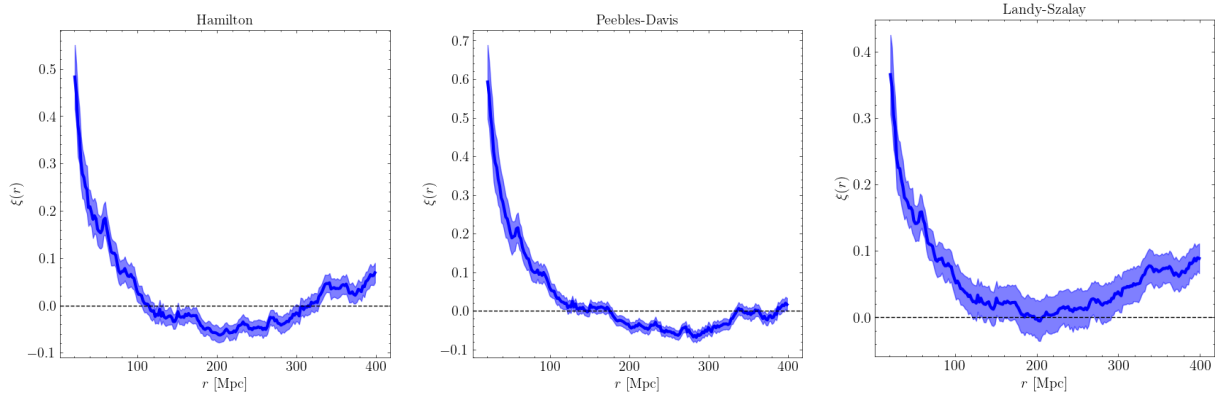
$$\hat{\xi}_{DP}(r) + 1 = \frac{\bar{n}_R}{\bar{n}_D} \frac{\langle N_D(r) \rangle_w}{\langle N_R(r) \rangle} \quad (2.2)$$

où N_D est le nombre de voisins d'une galaxie dans une coquille à un rayon r d'épaisseur dr . Certains estimateurs ont été introduits avec une erreur statistique plus basse. On définit ainsi l'estimateur d'Hamilton [3]:

$$\hat{\xi}_H(r) + 1 = \frac{\langle N_D(r) \rangle_w \langle N_R(r) \rangle}{\langle N_{DR}(r) \rangle^2} \quad (2.3)$$

où N_{DR} est l'histogramme des distances entre les deux catalogues. Finalement, on introduit l'estimateur de Landy-Szalay [4]

$$\hat{\xi}_{LS}(r) + 1 = \frac{1}{\langle N_R \rangle} \left[\langle N_D \rangle_w \left(\frac{\bar{n}_R}{\bar{n}_D} \right)^2 - 2 \langle N_{DR} \rangle \left(\frac{\bar{n}_R}{\bar{n}_D} \right) + \langle N_R \rangle \right] \quad (2.4)$$



(a) 100 réalisations de la formule (2.3) pour 5000 objets.

(b) 100 réalisations de la formule (2.2) pour 5000 objets.

(c) 100 réalisations de la formule (2.4) pour 5000 objets.

c) Discussion

i) Résultats

L'Univers devient homogène lorsque la fonction de covariance tend vers 0. Selon nos trois estimateurs, ceci survient autour de

$$r \sim 200 \text{ Mpc}$$

qui est la moyenne l'estimé provenant du compte de voisins et les fonctions de covariances (qui predisent autour de $r \sim 100 \text{ Mps}$).

ii) Biais

1. On assume une cosmologie avec courbure nulle;
2. On assume le modèle Λ CDM, donc l'échelle de distance dépend de notre choix pour h et le paramètres de densité Ω_{0m} ;
3. Notre estimateur dépend fortement de la qualité des catalogues synthétiques, donc le nombre de points utilisés dans le catalogue influence le bruit intrinsèque (de Poisson) dans chaque bin de l'histogramme;
4. Une source de bruit importante pour le redshift est la vitesse propre des galaxies, et ce bruit n'est pas pris en compte dans notre analyse;
5. Notre analyse suppose que l'Univers est *statique*, en ce sens qu'on ne suppose pas de modèle d'évolution des galaxies en fonction du redshift. Une analyse plus poussée devrait prendre en compte cette distribution pour isoler la corrélation spatiale des galaxies.

Notons que notre analyse n'est pas influencée par la fenêtre de sélection du catalogue puisque le catalogue synthétique possède la même fenêtre de sélection.

3 Les unités en cosmologie

On considère les unités naturelles

$$c = \hbar = k_B = 1$$

Dans ce système d'unité, le temps et les distances sont en cm, de même que l'inverse de la masse m^{-1} , et l'inverse de l'énergie E^{-1} . On trouve les facteurs de conversions suivants

$$\begin{aligned} 1 \text{ s} &\mapsto 29,979,245,800 \text{ cm} \\ 1 \text{ eV}^{-1} &\mapsto \frac{\hbar c}{\text{eV}} = 1.973 \times 10^{-5} \text{ cm} \\ 1 \text{ g}^{-1} &\mapsto \frac{\hbar}{c} \text{g}^{-1} = 3.518 \times 10^{-38} \text{ cm} \end{aligned}$$

a) H_0

$$H_0 \equiv 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

i) **Conversion en eV**

$$H_0 \mapsto \hbar H_0 \simeq 2.13h \times 10^{-33} \text{ eV}$$

ii) **Conversion en Mpc^{-1}**

$$H_0 \mapsto \frac{H_0}{c} \simeq 3.34h \times 10^{-4} \text{ Mpc}^{-1}$$

iii) **Conversion en Gyr^{-1}**

$$H_0 \simeq 0.10h \text{ Gyr}^{-1}$$

iv) **Conversion en m s^{-2}**

$$H_0 \mapsto H_0 c \simeq 9.72h \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}$$

b) **Taille caractéristique**

L'Univers devient homogène à la distance caractéristique où l'accélération gravitationnelle de Newton d'un amas de galaxie (typiquement $10^{15} M_\odot$) est égale au taux d'expansion de l'univers au temps présent.

$$\frac{GM}{R^2} = H_0 c \implies R = \sqrt{\frac{GM}{H_0 c}} \simeq 37.9h^{-1/2} \text{ Mpc}$$

c) **ρ_{crit}**

La densité critique est

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

i) **Conversion en g/cm^3**

$$\rho_{\text{crit}} = 1.88h^2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$$

ii) **Conversion en GeV^4**

$$\rho_{\text{crit}} \mapsto \frac{c}{\hbar} (\hbar c)^4 \rho_{\text{crit}} \simeq 8.096h^2 \times 10^{-47} \text{ GeV}^4$$

iii) **Conversion en eV/cm^3**

$$\rho_{\text{crit}} \mapsto c^2 \rho_{\text{crit}} \simeq 1.05h^2 \times 10^4 \text{ eV cm}^{-3}$$

iv) **Conversion en protons/ cm^3**

$$\rho_{\text{crit}} \mapsto \frac{\rho_{\text{crit}}}{m_p} \simeq 1.123h^2 \times 10^{-5} \text{ protons cm}^{-3}$$

v) **Conversion en M_\odot/Mpc^3**

$$\rho_{\text{crit}} = 2.78h^2 \times 10^{11} M_\odot \text{ Mpc}^{-3}$$

4 Le rayon de Schwarzschild

Pour estimer la masse de l'Univers, on utilise la densité critique ρ_{crit} et le rayon de Hubble (distance par rapport à l'observateur à partir de laquelle la vitesse de récession dépasse la vitesse de la lumière – aussi nommé horizon cosmique)

$$R_H \equiv \frac{c}{H_0} \simeq 2998h^{-1} \text{ Mpc}$$

$$M = \rho_{\text{crit}} \frac{4\pi R_H^3}{3} = \frac{c^3}{2GH_0} \simeq 3.132h^{-1} \times 10^{22} M_\odot$$

C'est la formule de Hoyle-Carvalho. Le rayon de Schwarzschild est donc:

$$r_s \equiv \frac{2GM}{c^2} = R_H$$

a) Horizon

On suppose que le tenseur de stress-énergie tombe à zéro à l'extérieur de l'horizon cosmique. En principe, ceci implique qu'un élément de matière test ressent une force d'attraction gravitationnelle seulement vers la direction intérieur de l'Univers (vers le centre de l'Univers, qui se situe à la position de l'observateur \mathcal{O} dans notre expérience de pensée). Ainsi, on s'attendrait à voir le redshift de ces galaxies vers le bleu plutôt que le rouge. Il est évident que ce n'est pas ce qu'on observe.

b) Différentes cosmologie

Le rayon de Schwarzschild dépend de la cosmologie choisie. Dans un espace courbe, le paramètre de densité critique $\Omega_0 \neq 1$. Ainsi, lorsque $k > 1$, $\Omega_0 > 1$ et le rayon de Schwarzschild est généralement plus grand que le rayon cosmique. De la même façon, un univers ouvert aura un rayon de Schwarzschild plus petit que le rayon cosmique.

5 La métrique

a) Redéfinir π

Existe-t-il un univers où le ratio entre le rayon et la circonférence est constant et égal à 3? Pour répondre à la question, on considère un univers homogène et isotropique défini par la métrique suivante:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2$$

où $k \in \{-1, 0, 1\}$ et $r \in [0, 1[$ est une coordonnée affine. La circonférence d'un cercle est défini par

$$C = \oint_{\gamma} \sqrt{ds^2} = 2\pi R$$

où γ est la trajectoire avec $r = R$, $\theta = \pi/2$ et $\phi \in [0, 2\pi]$. Le rayon du cercle, quant à lui, est défini comme

$$R_c = \int_0^R \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}$$

Ainsi, on obtient les trois ratio suivant (pour les différentes valeurs de k):

$$\frac{C}{R_c} = \begin{cases} 2\pi, & k = 0 \\ \frac{2\pi R}{\arcsin R} < 2\pi, & k = 1 \\ \frac{2\pi R}{\sinh^{-1} R} > 2\pi, & k = -1 \end{cases}$$

Pour un espace fermé ($k = 1$), le rapport entre la circonférence et le rayon varie en fonction de la coordonnée affine du rayon. Dans ce cas, il serait possible de redéfinir $\pi = 3$. Examinons l'expansion de Taylor de l'expression pour $k = 1$ autour de $R = 0$:

$$\frac{C}{R_c} \simeq \frac{2\pi R}{R + \frac{R^3}{6} + \mathcal{O}(R^5)} \simeq 2\pi \left(1 - \frac{R^2}{6} - \mathcal{O}(R^4) \right)$$

Pour redéfinir $\pi = 3$, alors le cercle de référence doit être créé à la coordonnée affine

$$R^* \simeq 0.532$$

Dans la perspective de cet univers, le rapport circonférence sur le rayon suit la loi

$$\frac{C}{R_c} \simeq 6 \left(1 - \frac{(R - R^*)^3}{6|R - R^*|} - \mathcal{O} \left(\frac{(R - R^*)^5}{|R - R^*|} \right) \right),$$

Donc, la réponse est oui, de façon pratique on peut redéfinir $\pi = 3$ dans un univers fermé (de courbure positive) en utilisant un cercle de référence avec un rayon de coordonnée affine $R^* \simeq 0.532$. Ceci est en définissant π comme la moitié du ratio circonférence-rayon.

Toutefois, **il n'existe pas d'univers où le ratio circonférence sur rayon est constant où $\pi \neq 3.14159\dots$** Le ratio est constant seulement dans un univers Euclidien où π ne peut pas prendre une valeur différente de celle connue. C'est à dire que

$$\pi \equiv \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

qui est basé sur la métrique $ds^2 = dx^2 + dy^2$ avec la condition $x^2 + y^2 = 1$. En ce sens, la valeur de la constante π ne peut pas être changé puisque π est une construction théorique liée à un espace Euclidien.

b) *Doddleson*, Ch. 2, P2

On considère un espace Euclidienne avec des coordonnées polaires

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

où $i, j \in (r, \theta)$.

i) Symboles de Christoffel

Par définition

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} \right)$$

Les symétries $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\gamma\beta}$ et $\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = -\Gamma_{\beta\alpha\gamma} = -\Gamma_{\gamma\alpha\beta}$ sont immédiatement apparentes. Notons que la seule dérivée non-nul est

$$g_{\theta\theta;r} = 2r$$

De sorte que les seuls symboles de Christoffel non-nuls sont

$$\Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{g^{\theta\theta}}{2} g_{\theta\theta;r} = \frac{1}{r}$$

En utilisant la propriété d'antisymétrie du coefficient complètement covariant, on trouve aussi

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -g^{rr}\Gamma_{\theta\theta r} = -r$$

ii) Géodésiques

Il est aussi possible de trouver les symboles de Christoffel en développant les équations d'Euler-Lagrange en terme de la coordonnée affine λ :

$$-\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial(dx^\alpha/d\lambda)} \right) + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0$$

où le Lagrangien est défini comme la dérivée de la coordonnée affine en fonction du temps propre τ :

$$L \left(x^\alpha, \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) = \frac{d\lambda}{d\tau} = \sqrt{-g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}} = \sqrt{-\left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial(dr/d\lambda)} \right) &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{L} \frac{dr}{d\lambda} \right) = \frac{1}{L} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) = \frac{1}{L} \frac{d^2 r}{d\tau^2} \\ -\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial(d\theta/d\lambda)} \right) &= \frac{d}{d\lambda} \left(r^2 \frac{d\theta}{d\lambda} \right) = \frac{1}{L} \left[2r \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right) + r^2 \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} \right] \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= -\frac{1}{L} r \left(\frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned}$$

Sachant que l'équation d'une géodésique doit s'écrire

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau}$$

Alors on simplifie les équations d'Euler-Lagrange pour isoler la seconde dérivée au côté gauche. Pour la coordonnée r , on obtient (en simplifiant $1/L$)

$$\boxed{\frac{d^2 r}{d\tau^2} = r \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2}$$

Pour θ :

$$\boxed{\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = -2 \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau}}$$

On remarque qu'on obtient bien les coefficients de Christoffel de la section précédentes en tenant compte du fait que le facteur 2 apparaissant devant r^{-1} vient de la contribution de deux termes: $\Gamma_{r\theta}^\theta$ et $\Gamma_{\theta r}^\theta$.

References

- [1] P.P. Coles and P.F. Lucchin. *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure*. Wiley, 2003.
- [2] M. Davis and P.J.E. Peebles. A survey of galaxy redshifts. V. The two-point position and velocity correlations. *The Astrophysical Journal*, 267:465–482, April 1983.
- [3] A.J.S. Hamilton. Toward Better Ways to Measure the Galaxy Correlation Function. *The Astrophysical Journal*, 417:19, November 1993.
- [4] Stephen D. Landy and Alexander S. Szalay. Bias and Variance of Angular Correlation Functions. *The Astrophysical Journal*, 412:64, July 1993.
- [5] P.J.E. Peebles. *The large-scale structure of the universe*. Princeton, N.J., Princeton Univ. Press, 1980.
- [6] R. Stabell and S. Refsdal. Classification of General Relativistic World Models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 132(2):379–388, apr 1966.
- [7] Paul S. Wesson. Olbers's paradox and the spectral intensity of the extragalactic background light. Technical report, 1991.
- [8] Paul S. Wesson, K. Valle, and R. Stabell. The extragalactic background light and a definitive resolution of Olbers's paradox. *The Astrophysical Journal*, 317:601, jun 1987.