

# 1 Nucléosynthèse

## a) Dodelson ch. 3, Exercice 2

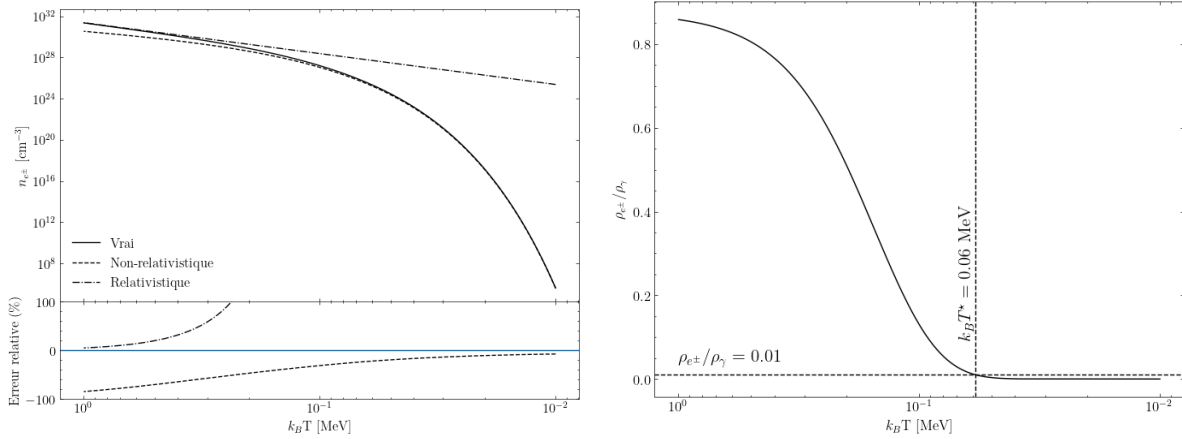
La densité numérique des électrons-positrons est donnée en terme de la distribution de Fermi-Dirac (on conserve les constantes physiques  $c$ ,  $\hbar$ ,  $k_B$  pour ce sous-numéro):

$$n_{e^\pm}^{(0)} = g_{e^\pm} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp\left\{\frac{E(p)}{k_B T}\right\} + 1} = \begin{cases} \frac{3\zeta(3)}{2\pi^2} \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3, & T \gg m_e \\ \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} (m_e T)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m_e}{T}\right\}, & T \ll m_e \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $E(p) = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}$  et  $g_{e^\pm} = 2$  pour les états de spins. Similairement, la densité énergétique est

$$\rho_{e^\pm}^{(0)} = g_{e^\pm} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E(p)}{\exp\left\{\frac{E(p)}{k_B T}\right\} + 1} \quad (1.2)$$

On a négligé le potentiel chimique des électrons  $\mu_e$  car il est identiquement nul avant et durant la nucléosynthèse. À la température où la nucléosynthèse se produit ( $k_B T \simeq 1$  MeV), on ne peut pas simplifier l'énergie en faveur de  $p$  ou  $m_e$  puisque la masse de l'électron  $m_e \simeq 0.5$  MeV/ $c^2$  est similaire à la température.



(a) Comparaison des approximations à la vraie fonction durant l'époque de nucléosynthèse.

(b) Ratio des densités énergétiques des électrons-positrons lors de l'époque de nucléosynthèse.

La densité numérique des photons se calcule directement à partir de la distribution de Planck

$$n_\gamma^{(0)} = \int_0^\infty \frac{B(\nu, T) d\nu}{h\nu} = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^2 d\nu}{\exp\{h\nu/k_B T\} - 1} \quad (1.3)$$

Avec substitution on retrouve une forme standard pour l'intégrale qui devient

$$n_\gamma^{(0)} = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3$$

où  $\zeta(s)$  est la fonction zeta de Riemann. La densité énergétique suit de la loi de Stefan-Boltzmann

$$\rho_\gamma^{(0)} = \frac{\hbar c \pi^2}{15} \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^4$$

On cherche la température  $T^*$  à partir de laquelle la densité énergétique des électrons devient 1% celle des photons  $\rho_\gamma^{(0)}$ . En interpolant une grille de valeurs, on obtient

$$\boxed{k_B T^* = 0.06 \text{ MeV}}$$

Avec un ratio de baryons sur photons de

$$\eta_b = 6 \times 10^{-10}$$

au moment de la nucléosynthèse (après annihilation des antiparticules), on peut tenter de déterminer le moment (la température) à partir duquel les électrons ne seront plus en équilibre avec le processus de création/annihilation de paires. En effet, l'Univers observé est électriquement neutre et on doit avoir  $n_{e^-} = n_p$  à un certain moment. Si on suppose que la grande majorité de la matière baryonique est constituée de protons (on néglige les neutrons), alors on trouve

$$k_B T \left( \frac{n_{e^-}}{n_\gamma} \sim \eta_b \right) \simeq 0.02 \text{ MeV}$$

## b) Dodelson ch. 3, Exercice 3

### I Intégrale sur les particules massives

On cherche à calculer le taux de la conversion de neutrons en protons  $\Gamma_{np}$ . Pour ce faire, on estime la section efficace thermal des processus  $n + \nu_e \rightarrow p + e^-$  et  $n + e^+ \rightarrow p + \bar{\nu}_e$ . On néglige la masse de l'électron et on assume que les processus peuvent être décrits par les statistiques de Boltzmann. Dans quel cas leur taux de réaction est le même. On considère un seul processus pour le moment et on néglige les facteurs de Pauli ( $f_i \ll 1$ ):

$$\langle \sigma v \rangle \equiv \frac{1}{n_n^{(0)} n_{e^+}^{(0)}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2E_{e^+}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_p}{(2\pi)^3 2E_p} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\nu}_e}} \exp \left\{ -\frac{E_{p_n} + E_{p_{e^+}}}{T} \right\} \\ \times (2\pi)^4 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_{e^+} - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}) \delta(E_n + E_{e^+} - E_p - E_{\bar{\nu}_e}) |\mathcal{M}|^2$$

En négligeant la masse des neutrinos (ce qui est toujours valide) et la masse des électrons (valide devant la masse du proton et du neutron  $m_p \sim m_n \sim 2000 m_e$ ), alors  $E_{e^+} = p_{e^+} = |\mathbf{p}_{e^+}|$  et  $E_{\bar{\nu}_e} = p_{\bar{\nu}_e}$ . De plus, on approxime l'énergie des particules massive par leur énergie de masse  $E_p \simeq m_p$  et  $E_n \simeq m_n$  ce qui est valide durant la nucléosynthèse puisque la température est de  $\sim 1 \text{ MeV} \ll m_p$ .

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{1}{n_n^{(0)} n_{e^+}^{(0)}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3 2m_n} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_p}{(2\pi)^3 2m_p} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}} \exp \left\{ -\frac{m_n + p_{e^+}}{T} \right\} \\ \times (2\pi)^4 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_n + \mathbf{p}_{e^+} - \mathbf{p}_p - \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}) \delta(Q + p_{e^+} - p_{\bar{\nu}_e}) |\mathcal{M}|^2$$

où on a défini  $Q = m_n - m_p = 1.293 \text{ MeV}$ . On fait l'intégrale sur l'espace de phase des particules massives sur une coquille dans le système de référence du neutron (le choix est libre puisque l'intégrale est un invariant de Lorentz), de sorte que  $\mathbf{p}_n = 0$ . La fonction  $\delta$  de Dirac restante sélectionne alors  $\mathbf{p}_{e^+} = \mathbf{p}_p + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}$  par conservation de la quantité de mouvement et on obtient (en appliquant la fonction  $\delta^3$  sur  $\int d^3 \mathbf{p}_p$ ):

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{1}{n_n^{(0)} n_{e^+}^{(0)}} \frac{2\pi}{4m_n m_p} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}} \exp \left\{ -\frac{m_n + p_{e^+}}{T} \right\} \\ \times \delta(Q + p_{e^+} - p_{\bar{\nu}_e}) |\mathcal{M}|^2$$

À l'équilibre,

$$n_n^{(0)} = 2 \int \frac{d^3 \mathbf{p}_n}{(2\pi)^3} \exp \left\{ -\frac{m_n}{T} \right\}$$

De sorte que

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{1}{n_{e^+}^{(0)}} \frac{\pi}{4m_n m_p} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}} \exp \left\{ -\frac{p_{e^+}}{T} \right\} \delta(Q + p_{e^+} - p_{\bar{\nu}_e}) |\mathcal{M}|^2$$

### II Taux de réaction

L'amplitude de la réaction est

$$|\mathcal{M}|^2 = 32 G_F^2 (1 + 3g_A^2) m_p^2 p_\nu p_e \quad (1.4)$$

où  $g_A$  est le vecteur axial de couplage du nucléon qu'on mesure aujourd'hui via le temps de vie du neutron

$$\tau_n^{-1} = \lambda_0 G_F^2 (1 + 3g_A^2) \frac{m_e^5}{2\pi^3}$$

où  $\lambda_0 \simeq 1.636$ ,  $\tau_n = 879.4 \pm 0.6 \text{ s}$  et  $G_F$  est la constante de Fermi

$$G_F = 1.16639(1) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} (\hbar c)^3$$

On performe l'intégrale de la section efficace thermalisée sur une coquille dans l'espace de phase du positron. On applique en premier lieu la fonction  $\delta$  sur l'énergie:

$$\begin{aligned} n_{e^+}^{(0)} \langle \sigma v \rangle &= \frac{32\pi G_F^2 (1 + 3g_A^2) m_p}{4m_n} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}} \exp \left\{ -\frac{p_{e^+}}{T} \right\} \delta(\mathcal{Q} + p_{e^+} - p_{\bar{\nu}_e}) p_{\bar{\nu}_e} p_{e^+} \\ &= \frac{32\pi G_F^2 (1 + 3g_A^2) m_p}{4m_n} \int_0^\infty \frac{4\pi p_{e^+}^2 dp_{e^+}}{(2\pi)^3 2p_{e^+}} \int_0^\infty \frac{4\pi p_{\bar{\nu}_e}^2 dp_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2p_{\bar{\nu}_e}} \exp \left\{ -\frac{p_{e^+}}{T} \right\} \delta(\mathcal{Q} + p_{e^+} - p_{\bar{\nu}_e}) p_{\bar{\nu}_e} p_{e^+} \\ &= \frac{4G_F^2 (1 + 3g_A^2) m_p}{(2\pi)^3 m_n} \int_0^\infty p_{e^+}^2 dp_{e^+} \int_0^\infty p_{\bar{\nu}_e}^2 dp_{\bar{\nu}_e} \exp \left\{ -\frac{p_{e^+}}{T} \right\} \delta(\mathcal{Q} + p_{e^+} - p_{\bar{\nu}_e}) \\ &= \frac{4G_F^2 (1 + 3g_A^2) m_p}{(2\pi)^3 m_n} \int_0^\infty dp_{e^+} p_{e^+}^2 (\mathcal{Q} + p_{e^+})^2 \exp \left\{ -\frac{p_{e^+}}{T} \right\} \end{aligned}$$

On applique la substitution  $y \equiv \frac{p_{e^+}}{T}$  pour obtenir

$$n_{e^+}^{(0)} \langle \sigma v \rangle = \frac{4G_F^2 (1 + 3g_A^2) m_p}{(2\pi)^3 m_n} T^3 \int_0^\infty dy y^2 (\mathcal{Q}^2 + 2\mathcal{Q}Ty + T^2 y^2) e^{-y}$$

On reconnaît la forme intégrale de la fonction  $\Gamma(s)$ , ainsi

$$\begin{aligned} n_{e^+}^{(0)} \langle \sigma v \rangle &= \frac{4G_F^2 (1 + 3g_A^2) m_p}{(2\pi)^3 m_n} T^3 [\Gamma(3)\mathcal{Q}^2 + 2\Gamma(4)\mathcal{Q}T + \Gamma(5)T^2] \\ &= \frac{4G_F^2 (1 + 3g_A^2) m_p}{(2\pi)^3 m_n} T^3 [2\mathcal{Q}^2 + 12\mathcal{Q}T + 24T^2] \\ &= \frac{16\pi^3 m_p}{\lambda_0 (2\pi)^3 \tau_n m_e^5 m_n} T^3 [\mathcal{Q}^2 + 6\mathcal{Q}T + 12T^2] \end{aligned}$$

En posant de plus  $x \equiv \frac{\mathcal{Q}}{T}$ , on trouve

$$\Gamma_{np} = 2n_{e^+}^{(0)} \langle \sigma v \rangle = \frac{4m_p \mathcal{Q}^5}{\lambda_0 \tau_n m_e^5 m_n} \frac{1}{x^5} [x^2 + 6x + 12]$$

On peut comparer avec l'équation (3.29) et on remarque qu'on obtient

$$\Gamma_{np} \simeq \frac{253.57}{\tau_n x^5} [x^2 + 6x + 12]$$

La constante numérique 253 est comparable à 255, celle obtenue par Bernstein (1988).

## 2 Vitesse du son lors du découplément

### a) Ratio de densité

On cherche

$$R \equiv \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}$$

où l'indice  $b$  réfère aux baryons.

La première loi de la thermodynamique avec  $dQ = 0$  dans un Univers régit par la métrique FRW implique que

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$$

qu'on réécrit

$$a^{-3} \frac{d(\rho a^3)}{dt} = -3\frac{\dot{a}}{a} p$$

Pour la matière, l'équation d'état  $p = 0$  implique que

$$a^{-3} \frac{d}{dt}(\rho_b a^3) = 0 \implies \rho_b = \rho_{b,0} a^{-3}$$

Pour la radiation, on a plutôt  $p = \rho_\gamma/3$ , donc

$$\dot{\rho}_\gamma + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_\gamma = a^{-4}\frac{d(\rho_\gamma a^4)}{dt} = 0$$

Donc

$$\rho_\gamma = \rho_{\gamma,0}a^{-4}$$

On peut déterminer  $\rho_{\gamma,0}$  à partir du fond diffus cosmologique à partir de la distribution de Planck:

$$\rho_{\gamma,0} = \frac{2\zeta(2)}{5}T_{\text{CMB}}^4$$

On réalise alors que  $T_\gamma \propto a$  en comparant nos deux expressions pour la densité d'énergie de radiation. De plus, on réécrit  $\rho_b$  en terme de la densité critique:

$$\rho_b = \Omega_b \rho_{\text{cr}} a^{-3} = 5.3397 \times 10^8 \text{ cm}^{-4} (\Omega_b h^2) a^{-3}$$

Ainsi, le ratio de densité en terme du facteur d'échelle et des paramètres de densités d'aujourd'hui ( $T_{\text{CMB}} = 2.725 \text{ K} = 11.9 \text{ cm}^{-1}$ ):

$$R = \frac{66\,565}{\zeta(2)} (\Omega_b h^2) a$$

On peut évaluer  $R$  au découplément avec le résultat théorique  $z_{\text{dec}} \simeq 1090$ , de sortes que

$$R(z_{\text{dec}} = 1090) = 0.8302 \left( \frac{\Omega_b h^2}{0.022383} \right)$$

Où on a normalisé l'expression par rapport au résultat de la collaboration Planck (2018). La suite est une dérivation théorique approximative de ce résultat.

Pour déterminer  $R$  au moment du découplément, on doit déterminer le moment dans l'évolution de l'Univers où le taux de diffusion Compton devient égal au taux d'expansion de l'Univers. En pratique, on sait que ce moment survient dans la limite non-relativistique de la distribution thermique des électrons, donc on utilise le taux de diffusion Thompson (unités de Planck):

$$\Gamma_T = X_e n_b \sigma_T$$

où  $\sigma_T$  est la section efficace de Thompson et  $X_e$  est la fraction d'électrons libres.

$$X_e \equiv \frac{n_p}{n_H + n_p} = \frac{n_e}{n_b}$$

On a utilisé le fait que  $n_e = n_p$  et on a négligé le nombre de neutrons dans l'Univers ( $n_b \simeq n_p + n_H$ ).

On utilise notre expression pour la densité baryonique et l'approximation  $\rho_b \simeq m_p n_b$  ( $m_H \simeq m_p$ ) pour obtenir

$$\Gamma_T = \frac{\rho_{\text{cr}}}{m_p} \sigma_T X_e \Omega_b a^{-3} = 2.2396 \times 10^{-19} \text{ s}^{-1} X_e \Omega_b h^2 a^{-3}$$

On veut déterminer  $a$  au moment où  $\Gamma_T = H(a)$ . Au moment du découplément, l'Univers est en transition entre un Univers dominé par la radiation et un Univers dominé par la matière. Toutefois, dans un Univers plat  $\Lambda\text{CDM}$  on peut négligé la radiation au moment du découplément (ce n'est pas précis mais cela nous permet de simplifier énormément les expressions):

$$H(a_{\text{dec}}) \simeq H_0 \Omega_m^{1/2} a_{\text{dec}}^{-3/2}$$

Ainsi,

$$\frac{\Gamma_T}{H} = 1 = \frac{\rho_{\text{cr}} \sigma_T}{m_p H_0 \Omega_m^{1/2}} X_e \Omega_b a_{\text{dec}}^{-3/2}$$

d'où

$$a_{\text{dec}} = \left( \frac{\rho_{\text{cr}} \sigma_T}{m_p H_0 \Omega_m^{1/2}} \right)^{2/3} \Omega_b^{2/3} (X_e(a_{\text{dec}}))^{2/3} \quad (2.1)$$

On obtient une équation implicite en terme de  $a_{\text{dec}}$ . La solution finale pour  $R$  est très sensible à  $X_e$  et on doit donc utiliser un modèle plausible pour la fraction d'ionisation.

Une approximation qui simplifie légèrement notre tâche est d'utiliser l'équation de Saha (qui cesse d'être valide très peu de temps avant le moment qui nous intéresse).

$$\frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}} = \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{R_y}{T} \right\}$$

où  $R_y$  est la constante de Rydberg. Selon nos approximations précédentes ( $n_b \simeq n_p + n_n$ ),

$$\frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}} = \frac{X_e n_p}{1 - X_e}$$

Pour éliminer  $n_p$  de l'équation, on utilise  $\eta_b \equiv n_b/n_\gamma$ :

$$\Rightarrow n_p = \eta_b X_e n_\gamma = \eta_b X_e \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3$$

On doit donc résoudre

$$\frac{1 - X_e}{X_e^2} = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \eta_b \left( \frac{m_e}{2\pi T} \right)^{-3/2} \exp \left\{ \frac{R_y}{T} \right\} \equiv S(\eta_b, T)$$

Qui a comme solution physique

$$X_e = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4S}}{2S}$$

Sachant que la température suit la loi

$$T = T_{\text{CMB}} a^{-1}$$

et que la fraction de baryons sur photons est mesurée à

$$\eta_b = 6.155 \times 10^{-10} \left( \frac{\Omega_b h^2}{0.022383} \right)$$

on peut finalement résoudre l'équation 2.1 en utilisant la méthode numérique de bisection et les paramètres cosmologiques

$$\Omega_b = 0.048; \quad \Omega_m = 0.31; \quad h = 0.68$$

On obtient  $X_e(a_{\text{dec}}) = 6.56 \times 10^{-3}$ ,  $T_{\text{dec}} = 0.2636$  eV et le facteur d'échelle obtenu correspond au redshift  $z_{\text{dec}} \simeq 1121$ . Notons que la fraction d'ionisation elle-même ne dépend que faiblement des paramètres cosmologiques. La température  $T_{\text{dec}}$  joue un rôle beaucoup plus important à cause du facteur exponentiel. La réponse est comparable à  $z_{\text{dec}} = 1090$  annoncé. Toutefois, ce résultat plus précis requiert d'intégrer l'équation de Boltzmann et de considérer la contribution de  $\Omega_r$  dans le facteur de Hubble. Ainsi, avec l'approximation de Saha on obtient

$$R^{\text{Saha}}(a_{\text{dec}}) = 1.328 \left( \frac{\Omega_b h^2}{0.022383} \right)$$

Pour déterminer la vitesse du son à la prochaine étape, cette approximation ne change pas le résultat de façon significative comparé à la vraie réponse et donc on conserve le facteur numérique de la réponse théorique pour la prochaine sous-section.

## b) Vitesse du son

La vitesse du son au découplage est déterminée en terme de sa définition

$$c_s^2 \equiv \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_S$$

où l'entropie est gardée constante. Comme la pression du fluide baryons photons est dominée par la pression des photons:

$$P \simeq P_\gamma = \frac{1}{3} \rho_\gamma$$

D'où

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \frac{\partial \rho_\gamma}{\partial (\rho_\gamma + \rho_b)} = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{\partial \rho_b}{\partial \rho_\gamma} \right)^{-1}$$

En remplaçant  $a^{-1} = T/T_{\text{CMB}}$  dans les expressions trouvées précédemment pour  $\rho_\gamma$  et  $\rho_b$ , on trouve

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{\partial \rho_b}{\partial T} \left( \frac{\partial \rho_\gamma}{\partial T} \right)^{-1} \right)^{-1} = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\rho_b}{\rho_\gamma} \right)^{-1}$$

D'où

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{1+R}}$$

En utilisant la réponse trouvée précédemment, on peut déterminer la vitesse du son de la matière baryonique au moment du découplage dans un espace de paramètres plausibles pour  $\Omega_b h^2$ .

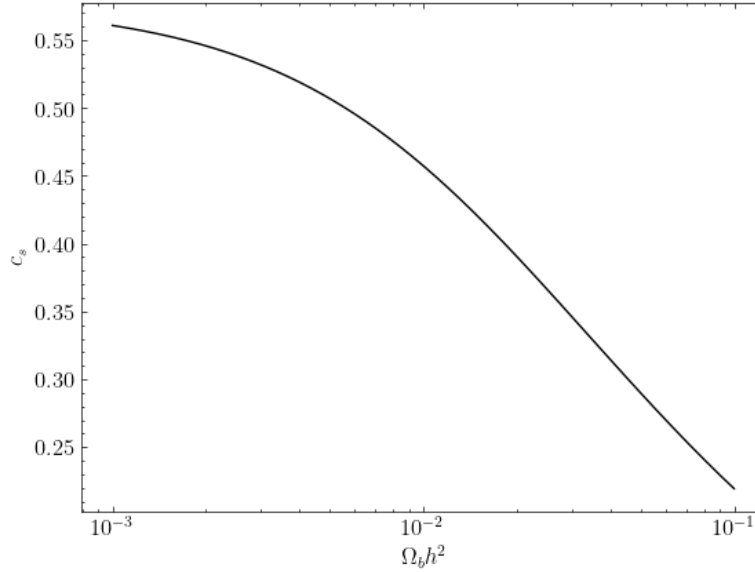


Figure 2: Vitesse du son lors du découplage (fraction de la vitesse de la lumière).

### c) Nombre d'onde de Jeans

Le nombre d'onde de Jeans dans les coordonnées comobiles est

$$k_J = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_b a^2}{c_s^2}}$$

et décrit la taille minimale d'un objet de densité de matière  $\rho_b$  pour l'instabilité de Jeans (effondrement gravitationnel). On s'intéresse à la période avant le découplage, donc  $a \lesssim a_{\text{dec}}$ . À cette époque, la radiation et la matière contribue de façon similaire à l'expansion, ainsi

$$\dot{a} = H_0 \sqrt{\Omega_r a^{-2} + \Omega_m a^{-1}}$$

Donc, l'horizon est

$$\eta(a) = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{da'}{\sqrt{\Omega_r + \Omega_m a'}} = \frac{2}{\Omega_m H_0} (\sqrt{\Omega_r + \Omega_m a} - \sqrt{\Omega_r})$$

Avec les résultats de Planck on a

$$\Omega_r = 2.47 \times 10^{-5}, \quad \Omega_m = 0.31$$

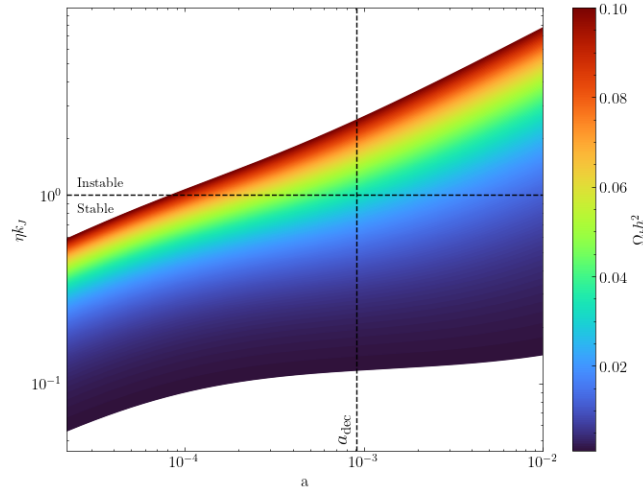


Figure 3: Rapport de la longueur d'onde de Jeans et de l'horizon cosmique. Lorsque  $\eta k_J < 1$ , la matière est stable par rapport aux instabilités gravitationnelles. On remarque que  $\eta k_J < 1$  pour  $a < a_{\text{dec}}$  et  $\Omega_b h^2 \lesssim 0.022$  ce qui correspond bien à un Univers stable avant le découplage.

### 3 La vraisemblance

On considère la fonction de vraisemblance Gaussienne:

$$\mathcal{L}(\mathcal{D} \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{|\mathcal{D}|/2}} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} \frac{(d_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

où  $\mathcal{D} = \{d_i\}$  est le jeu de données et  $|\mathcal{D}|$  est la taille du jeu de donnée.

#### a) Dodelson ch.11, Exercice 1

En premier lieu, on cherche la distribution *a posteriori* de la déviation standard. Pour rendre les choses simples, on détermine la conditionnelle *a posteriori*  $P(\sigma_w \mid \mathcal{D}, \mu)$  au lieu de la distribution marginale. Pour la déviation standard, on utilise une distribution *a priori* uniforme impropre

$$\pi(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma > 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Cette distribution est impropre car elle n'est pas normalisée  $\int_0^\infty \pi(\sigma) d\sigma = \infty$ . Toutefois, elle nous permet d'obtenir une relation de proportionnalité pour la distribution *a posteriori*

$$P(\sigma \mid \mathcal{D}, \mu) = \frac{1}{\int_0^\infty P(\sigma) d\sigma} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^{|\mathcal{D}|} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} (d_i - \mu)^2 \right\}, \quad \sigma > 0$$

Avec un changement de variable, on peut déterminer la constante de normalisation

$$\int_0^\infty P(\sigma) d\sigma = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{|\mathcal{D}|} \int_0^\infty \left( \frac{1}{\sigma} \right)^{|\mathcal{D}|} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} (d_i - \mu)^2 \right\} d\sigma$$

$\overbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} (d_i - \mu)^2}^{\equiv \alpha^2}$

On pose  $x \equiv \alpha^2 \sigma^{-2} \implies dx = -2\alpha^2 \sigma^{-3} d\sigma \implies d\sigma = -\frac{dx}{2\alpha^2 x^{3/2}}$ :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty P(\sigma) d\sigma &= \frac{1}{2\alpha^{|\mathcal{D}|-1}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{|\mathcal{D}|} \int_0^\infty x^{|\mathcal{D}|/2} \exp \{-x\} \frac{dx}{x^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2\alpha^{|\mathcal{D}|-1}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{|\mathcal{D}|} \Gamma \left( \frac{|\mathcal{D}|-1}{2} \right) \end{aligned}$$

D'où la distribution *a posteriori*

$$P(\sigma | \mathcal{D}, \mu) = \frac{2\alpha^{|\mathcal{D}|-1}}{\Gamma\left(\frac{|\mathcal{D}-1}{2}\right)} \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{|\mathcal{D}|} \exp\left\{-\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^2\right\}$$

D'un autre côté, pour  $\pi(\sigma^2) = 1$ , on a (en posant  $\alpha^2 \rightarrow \alpha$ )

$$\int_0^\infty P(\sigma^2) d\sigma^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{|\mathcal{D}|} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{|\mathcal{D}|/2} \exp\left\{-\frac{\alpha}{\sigma^2}\right\} d\sigma^2$$

En posant  $x \equiv \alpha/\sigma^2 \implies dx = -\alpha d\sigma^2/\sigma^4 \implies d\sigma^2 = -\alpha dx/x^2$ :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty P(\sigma^2) d\sigma^2 &= \frac{1}{\alpha^{|\mathcal{D}|/2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{|\mathcal{D}|} \int_0^\infty x^{|\mathcal{D}|/2} \exp\{-x\} \frac{\alpha dx}{x^2} \\ &= \frac{1}{\alpha^{|\mathcal{D}|/2-1}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{|\mathcal{D}|} \Gamma\left(\frac{|\mathcal{D}|}{2} - 1\right) \end{aligned}$$

Donc

$$P(\sigma^2 | \mathcal{D}, \mu) = \frac{\alpha^{|\mathcal{D}|/2-1}}{\Gamma\left(\frac{|\mathcal{D}|}{2} - 1\right)} \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{|\mathcal{D}|/2} \exp\left\{-\frac{\alpha}{\sigma^2}\right\}$$

On trouve que la distribution *a posteriori* de  $\sigma$  suit une distribution Gamma inverse généralisée

$$P(x | \alpha, \beta, \delta) = \frac{\delta \alpha^\beta}{\Gamma(\frac{\beta}{\delta})} \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta+1} \exp\left\{-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^\delta\right\}, \quad x > 0$$

avec les paramètres *a posteriori*

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} (d_i - \mu)} \\ \beta &= |\mathcal{D}| - 1 \\ \delta &= 2 \end{aligned}$$

D'un autre côté, si on choisit plutôt une distribution *a priori* en terme de la variance  $\sigma^2$

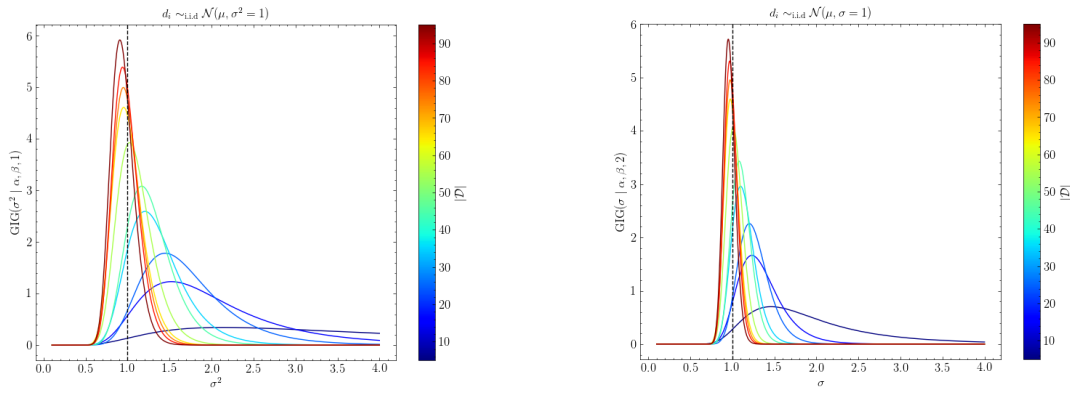
$$\pi(\sigma^2) = \begin{cases} 1 & \sigma^2 > 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Alors la distribution *a posteriori* a plutôt une distribution Gamma inverse avec les paramètres

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} (d_i - \mu)^2 \\ \beta &= \frac{|\mathcal{D}|}{2} - 1 \\ (\delta &= 1) \end{aligned}$$

On obtient deux distributions qui appartiennent à la même famille, mais qui ont une forme différentes.





(a) Distribution *a posteriori* avec le choix  $\pi(\sigma) = 1$ . (b) Distribution *a posteriori* avec le choix  $\pi(\sigma^2) = 1$ .

Figure 4: Comparaison des distributions postérieures pour un choix différent de distribution *a priori*. Ce choix influence la forme de la distribution d'une manière prédictible, et nous indique que le choix de la taille de la distribution *a priori* doit prendre en compte le fait que la distribution *a posteriori* de la variance a une queue plus longue dans sa distribution pour un petit jeu de données.

## b) Dodelson ch.11, Exercice 2

On cherche l'erreur sur la déviation standard  $\sigma_w$ . On suppose que la fonction de vraisemblance est quadratique autour de la solution MLE.

$$\ln \mathcal{L}(\mathcal{D} \mid \sigma, \mu = \bar{\mu}) \simeq \ln \mathcal{L}(\mathcal{D} \mid \bar{\sigma}, \bar{\mu}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma^2} \bigg|_{\sigma=\bar{\sigma}} (\sigma - \bar{\sigma})^2$$

En effet, on sait que

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma} \bigg|_{\text{MLE}} = \frac{1}{\bar{\sigma}^3} \sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} (d_i - \bar{\mu})^2 - \frac{|\mathcal{D}|}{\bar{\sigma}} = 0$$

D'où on avait trouvé la solution MLE pour la variance

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} (d_i - \bar{\mu})^2$$

Où  $\bar{\mu}$  est la solution attendu pour la moyenne. L'erreur sur la déviation standard est 2 fois l'inverse du coefficient de deuxième ordre dans l'expansion de Taylor de la vraisemblance autour de son maximum global ( définition de FWHM):

$$\begin{aligned} \text{Var}(\sigma)^{-1} &= - \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma^2} \bigg|_{\text{MLE}} \\ &= \frac{3}{\bar{\sigma}^4} \sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} (d_i - \bar{\mu})^2 - \frac{|\mathcal{D}|}{\bar{\sigma}^2} \\ &= \frac{2|\mathcal{D}|^2}{\sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} (d_i - \bar{\mu})^2} \\ \Rightarrow \text{Var}(\sigma) &= \frac{1}{2|\mathcal{D}|^2} \sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} (d_i - \bar{\mu})^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{2|\mathcal{D}|} \end{aligned}$$