Devoir 2 : Théorie des champs I (PHY 6812)

Prof. W. Witczak-Krempa

À remettre : mardi 1er novembre, avant le cours.
Valeur : les questions ont le même poids.

1. **Causalité**.
   a) Dans la preuve que la QFT du champ scalaire respecte la causalité, nous avons utilisé la propriété que $x - y$ peut être envoyé à $-(x - y)$ par une transformation de Lorentz connectée de manière continue à l'identité, en autant que la séparation est du genre espace. Trouvez explicitement cette transformation de Lorentz. Expliquez comment votre construction échoue si $(x - y)^2 > 0$. Ici, $d = 3$.
   b) Pour $(x-y)^2 > 0$, donnez une transformation de Lorentz qui envoie $(x-y) \to -(x-y)$. Est-elle connectée de manière continue à l'identité ? Pourquoi ne peut-on pas l'utiliser pour montrer que $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)] = 0$ pour une séparation du genre temps ?

2. **Questions diverses**. Justifiez toutes vos réponses. Travaillez en 3+1 dimensions.
   a) Montrez que les opérateurs $\hat{a}_{\boldsymbol{p}}$ commutent entre eux.
   b) Soit deux observables classiques A et B. Considérons l'observable $\mathcal{O} = AB$. En quantifiant la théorie, il y a une ambiguité potentielle pour $\hat{\mathcal{O}}$ du fait que $\hat{A}$ et $\hat{B}$ ne commutent pas nécessairement. Cette ambiguité pose-t-elle problème pour l'opérateur d'impulsion totale $\hat{\boldsymbol{P}}$?
   c) En travaillant dans le point de vue de Schrödinger avec la théorie de Klein-Gordon, déterminez l'évolution temporelle de l'état $b_0|0\rangle + b_1|p\rangle + b_2|p, q, k\rangle$, où b_i sont des nombres complexes et p, q, k des quadri-vecteurs.
   d) Est-ce possible de construire un état normalisable dans le sous-espace à 1 particule ? Si non, expliquez, si oui, construisez un état normalisé.

3. **Invariance d'échelle quantique**. Soit la QFT du champ scalaire Klein-Gordon sans masse en 3 dimensions spatiales. Considérons une transformation continue :

$$x' = bx, \quad \hat{\phi}'(bx) = b^{-\Delta}\hat{\phi}(x) \tag{1}$$

   où $b > 0$ et Δ sont réels.
   a) Déterminez

$$D(x - y) = \langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(y)|0\rangle \tag{2}$$
$$D_\pi(x - y) = \langle 0|\hat{\pi}(x)\hat{\pi}(y)|0\rangle \tag{3}$$

   pour des coordonnées générales. Vous devez explicitement évaluer les intégrales. Ces amplitudes sont-elles invariantes de Lorentz ? Expliquez.
   b) En demandant que $D(x' - y') = \langle 0|\hat{\phi}'(x')\hat{\phi}'(y')|0\rangle$, déterminez Δ. Comparez votre réponse à celle obtenue dans le devoir 1.
   c) En évaluant D pour des temps égaux, que pouvez-vous conclure à propos de l'étendue spatiale de l'état $\hat{\phi}(x)|0\rangle$?

4. **Opérateur de nombre**.
   a) Soit l'opérateur $\hat{n}_{\boldsymbol{q}} = \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{q}}\hat{a}_{\boldsymbol{q}}$. Cet opérateur commute-t-il avec l'Hamiltonien de Klein-

Gordon (avec masse générale) ? Quelle est son évolution temporelle ? Quelle est la conséquence physique de ces résultats ?

b) Quelle est l'action de $\hat{n}_{\boldsymbol{q}}$ sur les états $|0\rangle, |p\rangle, |p, p'\rangle$.

c) Définissons l'opérateur de nombre $\hat{N} = \int \frac{d^d\boldsymbol{q}}{(2\pi)^d} \hat{n}_{\boldsymbol{q}}$. Quelles sont ses états propres et valeurs propres ?

d) $\hat{N}$ commute-t-il avec l'Hamiltonien ? Quelle est l'évolution temporelle de $\hat{N}$? Quelle est la conséquence physique de ces résultats ?

e) On ajoute un terme d'intéraction $\lambda\hat{\phi}^4$ à l'Hamiltonien. L'opérateur $\hat{n}_{\boldsymbol{q}}$ commute-t-il avec le nouvel Hamiltonien ? Quelle est la conséquence physique de ce résultat ?

5. **Peskin & Schroeder problem 2.2. The complex scalar field.**