1 Un peu de relativité

a)

Classiquement, un photon se propageant dans le vide peut-il se désintégrer en une paire électron-positron ? Que ce passera-t-il en théorie quantique des champs (QFT) ?

b)

Quelle est la condition pour qu'un tenseur soit invariant sous transformations de Lorentz ?

Soit un tenseur de rang (m, n), $m, n \in \mathbb{N}$, avec les éléments $T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n}$, et la métrique de Minkowsky η. Soit une transformation de Lorentz Λ définit tel que

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta} \tag{1.1}$$

Pour que T soit un invariant de Lorentz, il doit satisfaire

$$\boxed{T^{\mu_1 \cdots \mu_m}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\alpha_1} \dots \Lambda^{\mu_m}{}_{\alpha_m} \Lambda^{\beta_1}{}_{\nu_1} \dots \Lambda^{\beta_n}{}_{\nu_n} T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}{}_{\beta_1 \dots \beta_n}}\,, \tag{1.2}$$

similairement à la métrique de Minkowsky.

c)

Les tenseurs δ_μ^ν et $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ (Levi-Civita) sont-ils invariants de Lorentz ?

Réponse 1.1. *Le delta de Kronecker δ_μ^ν est un invariant de Lorentz.*

Solution. On remarque que $\delta_\mu^\nu = \eta_{\mu\alpha}\eta^{\alpha\nu}$. Puisque la métrique de Minkowsky est une invariant de Lorentz (par définition), alors δ_μ^ν l'est aussi. □

Réponse 1.2. *Le tenseur de Levi-Civita est un invariant de Lorentz.*

Solution. On applique une transformation de Lorentz sur le tenseur de Levi-Civita

$$(\epsilon')^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,.$$

On examine maintenant certains éléments du tenseur transformé. Je note $S_n^+ = \{\sigma \in S_n \mid \mathrm{sgn}(\sigma) = +1\}$ les permutations paires pour n indices, où $\mathrm{sgn}(\sigma)$ dénote le signe du déterminant de la matrice associé à la permutation σ. Par exemple, $S_3^+ = \{(1\,2\,3), (3\,1\,2), (2\,3\,1)\}$; la matrice associé à $\sigma = (3\,1\,2)$ est

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Elle possède un déterminant positif, $\det(M_\sigma) = 1$, de sortes que $\mathrm{sgn}(\sigma) = +1$. L'ensemble des permutations impaires est noté S_n^-. Naturellement, $|S_n^+| = |S_n^-| = \frac{n!}{2}$. En utilisant la propriété complètement antisymétrique du tenseur de Levi-Civita

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \mu\nu\rho\sigma \in S_4^+ \\ -1 & \mu\nu\rho\sigma \in S_4^- \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}\,, \tag{1.3}$$

on trouve que

$$(\epsilon')^{\mu\nu\rho\sigma} = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta \in S_4^+} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta - \sum_{\alpha\beta\gamma\delta \in S_4^-} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta\,. \tag{1.4}$$

Cas des indices identiques: Sous cette forme, on peut résoudre les valeurs du tenseur transformé lorsqu'au moins 2 indices sont identiques. Dans ce cas, $(\epsilon')^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$. Par exemple, considérons le cas $\mu\nu\rho\sigma = 0012$, où les deux premiers indices sont identiques.

$$\begin{aligned}
(\epsilon')^{0012} &= \sum_{\alpha\beta\gamma\delta \in S_4^+} \Lambda^0{}_\alpha \Lambda^0{}_\beta \Lambda^1{}_\gamma \Lambda^2{}_\delta - \sum_{\alpha\beta\gamma\delta \in S_4^-} \Lambda^0{}_\alpha \Lambda^0{}_\beta \Lambda^1{}_\gamma \Lambda^2{}_\delta \\
&= \dots + \Lambda^0{}_0 \Lambda^0{}_1 \Lambda^1{}_2 \Lambda^2{}_3 - \Lambda^0{}_1 \Lambda^0{}_0 \Lambda^1{}_2 \Lambda^2{}_3 - \dots \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

En effet, pour chaque permutations $\alpha\beta\gamma\delta \in S_4^+$, on peut échanger α et β, de sortes qu'on peut toujours trouver le terme $\beta\alpha\gamma\delta \in S_4^-$ dans la somme sur les indices impaires qui annule le terme $\alpha\beta\gamma\delta$ dans la première somme. Cet argument se généralise à tout autre cas où au moins deux indices parmis $\mu\nu\rho\sigma$ sont identiques.

Cas des indices distincts: Je poursuis la démonstration avec l'exemple $\mu\nu\rho\sigma = 0123$. Pour le résoudre, on doit démontrer que $(\epsilon')^{0123} = \det(\Lambda) = 1$. Le fait qu'une transformation de Lorentz a un déterminant unité suit du fait qu'une transformation de Lorentz doit satisfaire la condition

$$\Lambda(-v) = \Lambda(v)^{-1}\,, \tag{1.5}$$

où v est le paramètre de la transformation (vitesse pour un boost, angle pour une rotation). Puisque $\Lambda(-v) = R(\pi)^T\Lambda(v)R(\pi) \implies \det(\Lambda(-v)) = \det(\Lambda(v))$, il suit que, $\det(\Lambda) = \pm 1$. Finalement, on requiert que $\Lambda(0) = \mathbb{1}$, la matrice identité, donc $\det(\Lambda(0)) = 1 \implies \det(\Lambda(v)) = 1$.

La formule de Leibniz pour le déterminant nous indique que

$$\det(\Lambda) = \Lambda^0{}_\alpha\Lambda^1{}_\beta\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,. \tag{1.6}$$

Or, le côté droit de l'égalité est précisément le résultat de la transformation de Lorentz pour l'élement 0123 du tenseur de Levi-Civita, donc $(\epsilon')^{0123} = \det(\Lambda) = 1$. Les autres cas suivent par la permutation des indices contravariant au côté droit de la formule de Leibniz. Par exemple, supposons que $\mu\nu\rho\sigma = 1032 \in S_4^+$:

$$\begin{aligned}
(\epsilon')^{1032} &= \Lambda^1{}_\alpha\Lambda^0{}_\beta\Lambda^3{}_\gamma\Lambda^2{}_\delta\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\
&= \Lambda^0{}_\beta\Lambda^1{}_\alpha\Lambda^2{}_\delta\Lambda^3{}_\gamma\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} && \{\text{Réarrangement des termes}\} \\
&= \Lambda^0{}_\beta\Lambda^1{}_\alpha\Lambda^2{}_\delta\Lambda^3{}_\gamma\epsilon^{\beta\alpha\delta\gamma} && \{\text{Permutation paire des indices du tenseur de Levi-Civita}\} \\
&= \Lambda^0{}_\alpha\Lambda^1{}_\beta\Lambda^2{}_\gamma\Lambda^3{}_\delta\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} && \{\text{Redéfinition des indices factices}\} \\
&= \det(\Lambda) = 1\,.
\end{aligned}$$

Comme l'argument est général, on a que $(\epsilon')^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, $\forall \mu\nu\rho\sigma \in S_4^+$. L'argument pour une permutation impaire est très similaire et nous mène à conclure que

$$(\epsilon')^{\mu\nu\rho\sigma} = -\det(\Lambda) = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma},\ \forall \mu\nu\rho\sigma \in S_4^-\,. \tag{1.7}$$

Donc, ayant couvert tous les cas possible, on conclut que

$$(\epsilon')^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,. \tag{1.8}$$

□

2 Invariance d'échelle

Soit un champ scalaire Klein-Gordon ϕ de masse m en d dimensions spatiales. Considérons une transformation continue

$$x' = bx \tag{2.1}$$
$$\phi'(bx) = b^{-\Delta}\phi(x) \tag{2.2}$$

où $b, \Delta \in \mathbb{R}_{>0}$.

a)

Quelle sont les conditions pour que (2.1) soit une symétrie de la théorie? Appelons l'action de cette théorie $S_\star$. Quel est le courant de Noether associé?

b)

Soit une quantité $\mathcal{O}(x)$ qui dépend du champ et ses dérivées au point x. Posons que $\mathcal{O}$ transforme comme ϕ sous (2.1), mais avec Δ remplacé par $\Delta\mathcal{O}$, appelé la dimension d'échelle de $\mathcal{O}$. Pour les conditions trouvées en a), quelle est la dimension d'échelle de la densité Lagrangienne $\mathcal{L}_\star$ et de ϕ^n, où $n \in \mathbb{N}$

c)

On considère le Lagrangien avec un terme d'intéraction

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \mathcal{L}_\star - \lambda\phi^{2n} \tag{2.3}$$

où $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Quel doit être le signe de λ pour que la théorie soit physiquement raisonnable? Quelle est l'équation du mouvement pour cette théorie intéragissante. Quelle est la nouvelle difficulté?

d)

En $d \in \{1,2,3\}$ dimensions, quelles sont les conditions pour que la théorie intéragissante soit invariante sous une transformation d'échelle (2.1).

3 Champs de jauge

Soit l'action de Maxwell

$$S = \int d^{d+1}x\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{3.1}$$

où $d \geq 1$.

a)

Démontrer que l'action est invariante sous transformations de jauge : $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu f(x)$, où f est une fonction scalaire suffisamment lisse.

b)

c)

d)

e)

4 Phonons

a)

b)

c)

5 Quantification 101

a)

b)

c)

d)