

1 Un peu de relativité

a)

Classiquement, un photon se propageant dans le vide peut-il se désintégrer en une paire électron-positron ? Que ce passera-t-il en théorie quantique des champs (QFT) ?

b)

Quelle est la condition pour qu'un tenseur soit invariant sous transformations de Lorentz ?

Soit un tenseur T de rang (m, n) , avec les éléments $T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n}$, et la métrique de Minkowsky η . Soit une transformation de Lorentz $\Lambda \in \text{SO}^+(1, 3)$ définit tel que

$$\eta^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \eta^{\alpha\beta}. \quad (1.1)$$

L'inverse transposée de la transformation $(\Lambda^{-1})^\mu_\nu = \Lambda_\mu^\nu$ agit sur les indices covariants et est définit tel que

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \eta_{\alpha\beta} \quad (1.2)$$

Pour que T soit un invariant de Lorentz, il doit donc satisfaire

$$T^{\mu_1 \dots \mu_m}_{\nu_1 \dots \nu_n} = \Lambda^{\mu_1}_{\alpha_1} \dots \Lambda^{\mu_m}_{\alpha_m} \Lambda_{\nu_1}^{\beta_1} \dots \Lambda_{\nu_n}^{\beta_n} T^{\alpha_1 \dots \alpha_m}_{\beta_1 \dots \beta_n}. \quad (1.3)$$

c)

Les tenseurs δ^ν_μ et $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ (Levi-Civita) sont-ils invariants de Lorentz ?

Réponse 1.1. Le delta de Kronecker δ^ν_μ est un invariant de Lorentz.

Solution. On remarque que $\delta^\nu_\mu = \eta_{\mu\alpha} \eta^{\alpha\nu}$. Puisque la métrique de Minkowsky est une invariant de Lorentz (par définition), alors δ^ν_μ l'est aussi. \square

Réponse 1.2. Le tenseur de Levi-Civita est un invariant de Lorentz.

Solution. On applique une transformation de Lorentz sur le tenseur de Levi-Civita

$$(\epsilon')^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\rho_\gamma \Lambda^\sigma_\delta \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

On examine maintenant certains éléments du tenseur transformé. Je note $S_n^+ = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn}(\sigma) = +1\}$ les permutations paires pour n indices, où $\text{sgn}(\sigma)$ dénote le signe du déterminant de la matrice associé à la permutation σ . Par exemple, $S_3^+ = \{(123), (312), (231)\}$; la matrice associé à $\sigma = (312)$ est

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle possède un déterminant positif, $\det(M_\sigma) = 1$, de sortes que $\text{sgn}(\sigma) = +1$. L'ensemble des permutations impaires est noté S_n^- . Naturellement, $|S_n^+| = |S_n^-| = \frac{n!}{2}$. En utilisant la propriété complètement antisymétrique du tenseur de Levi-Civita

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \mu\nu\rho\sigma \in S_4^+ \\ -1 & \mu\nu\rho\sigma \in S_4^- \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}, \quad (1.4)$$

on trouve que

$$(\epsilon')^{\mu\nu\rho\sigma} = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta \in S_4^+} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\rho_\gamma \Lambda^\sigma_\delta - \sum_{\alpha\beta\gamma\delta \in S_4^-} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta \Lambda^\rho_\gamma \Lambda^\sigma_\delta. \quad (1.5)$$

Cas des indices identiques: Sous cette forme, on peut résoudre les valeurs du tenseur transformé lorsqu'au moins 2 indices sont identiques. Dans ce cas, $(\epsilon')^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 0$. Par exemple, considérons le cas $\mu\nu\rho\sigma = 0012$, où les deux premiers indices sont identiques.

$$\begin{aligned} (\epsilon')^{0012} &= \sum_{\alpha\beta\gamma\delta \in S_4^+} \Lambda^0_\alpha \Lambda^0_\beta \Lambda^1_\gamma \Lambda^2_\delta - \sum_{\alpha\beta\gamma\delta \in S_4^-} \Lambda^0_\alpha \Lambda^0_\beta \Lambda^1_\gamma \Lambda^2_\delta \\ &= \dots + \Lambda^0_0 \Lambda^0_1 \Lambda^1_2 \Lambda^2_3 - \Lambda^0_1 \Lambda^0_0 \Lambda^1_2 \Lambda^2_3 - \dots \\ &= 0. \end{aligned}$$

En effet, pour chaque permutations $\alpha\beta\gamma\delta \in S_4^+$, on peut échanger α et β , de sorte qu'on peut toujours trouver le terme $\beta\alpha\gamma\delta \in S_4^-$ dans la somme sur les indices impaires qui annule le terme $\alpha\beta\gamma\delta$ dans la première somme. Cet argument se généralise à tout autre cas où au moins deux indices parmi $\mu\nu\rho\sigma$ sont identiques.

Cas des indices distincts: Je poursuis la démonstration avec l'exemple $\mu\nu\rho\sigma = 0123$. Pour le résoudre, on doit démontrer que $(\epsilon')^{0123} = \det(\Lambda) = 1$. Le fait qu'une transformation de Lorentz a un déterminant unité suit du fait qu'une transformation de Lorentz doit satisfaire la condition

$$\Lambda(-v) = \Lambda(v)^{-1}, \quad (1.6)$$

où v est le paramètre de la transformation (vitesse pour un boost, angle pour une rotation). Puisque $\Lambda(-v) = R(\pi)^T \Lambda(v) R(\pi) \implies \det(\Lambda(-v)) = \det(\Lambda(v))$, il suit que, $\det(\Lambda) = \pm 1$. Finalement, on requiert que $\Lambda(0) = \mathbb{1}$, la matrice identité, donc $\det(\Lambda(0)) = 1 \implies \det(\Lambda(v)) = 1$.

La formule de Leibniz pour le déterminant nous indique que

$$\det(\Lambda) = \Lambda^0_\alpha \Lambda^1_\beta \Lambda^2_\gamma \Lambda^3_\delta \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (1.7)$$

Or, le côté droit de l'égalité est précisément le résultat de la transformation de Lorentz pour l'élément 0123 du tenseur de Levi-Civita, donc $(\epsilon')^{0123} = \det(\Lambda) = 1$. Les autres cas suivent par la permutation des indices contravariant au côté droit de la formule de Leibniz. Par exemple, supposons que $\mu\nu\rho\sigma = 1032 \in S_4^+$:

$$\begin{aligned} (\epsilon')^{1032} &= \Lambda^1_\alpha \Lambda^0_\beta \Lambda^3_\gamma \Lambda^2_\delta \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= \Lambda^0_\beta \Lambda^1_\alpha \Lambda^2_\delta \Lambda^3_\gamma \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} && \{\text{Réarrangement des termes}\} \\ &= \Lambda^0_\beta \Lambda^1_\alpha \Lambda^2_\delta \Lambda^3_\gamma \epsilon^{\beta\alpha\delta\gamma} && \{\text{Permutation paire des indices du tenseur de Levi-Civita}\} \\ &= \Lambda^0_\alpha \Lambda^1_\beta \Lambda^2_\gamma \Lambda^3_\delta \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} && \{\text{Redéfinition des indices factices}\} \\ &= \det(\Lambda) = 1. \end{aligned}$$

Comme l'argument est général, on a que $(\epsilon')^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, $\forall \mu\nu\rho\sigma \in S_4^+$. L'argument pour une permutation impaire est très similaire et nous mène à conclure que

$$(\epsilon')^{\mu\nu\rho\sigma} = -\det(\Lambda) = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad \forall \mu\nu\rho\sigma \in S_4^-. \quad (1.8)$$

Donc, ayant couvert tous les cas possible, on conclut que

$$(\epsilon')^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (1.9)$$

□

2 Invariance d'échelle

Soit un champ scalaire Klein-Gordon ϕ de masse m en d dimensions spatiales. Considérons une transformation continue

$$x \rightarrow bx \quad (2.1)$$

$$\phi(x) \rightarrow b^{-\Delta} \phi(x) \quad (2.2)$$

où $b \in \mathbb{R}_{>0}$ et $\Delta \in \mathbb{R}$.

a)

Quelle sont les conditions pour que (2.1) soit une symétrie de la théorie? Appelons l'action de cette théorie S_* . Quel est le courant de Noether associé?

La transformation (2.1) est une symétrie de la théorie si l'action

$$S_* = \int d^{d+1}x \mathcal{L}_*(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (2.3)$$

est invariante sous l'application de la transformation. Puisque l'élément de volume devient

$$d^{d+1}x \rightarrow b^{d+1} d^{d+1}x, \quad (2.4)$$

alors la transformation est une symétrie de la théorie si et seulement si

$$\mathcal{L}_* \rightarrow b^{-(d+1)} \mathcal{L}_* + \partial_\mu \mathcal{J}^\mu. \quad (2.5)$$

La divergence $\partial_\mu \mathcal{J}^\mu$ devient un terme de surface dans l'intégrale de l'action, qui s'annule par définition de la dérivée fonctionnelle de l'action. Puisque $\partial_\mu \rightarrow b^{-1} \partial_\mu$, alors la densité du Lagrangien de Klein-Gordon transformée devient

$$\mathcal{L}'_* = b^{-2-2\Delta} \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - b^{-2\Delta} \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (2.6)$$

Ainsi, la transformation d'échelle (2.1) est une symétrie de la théorie seulement lorsque $m = 0$ et $\Delta = \frac{d-1}{2}$.

Le courant de Noether est défini comme

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta_\alpha \phi - \mathcal{J}^\mu. \quad (2.7)$$

Par l'éq. (2.6), on trouve que $\mathcal{J}^\nu = 0$. On cherche maintenant la variation infinitésimale du champ, $\delta_\alpha \phi$, en terme du paramètre de la transformation infinitésimale, α . On écrit cette variation infinitésimale comme une transformation active de ϕ :

$$\alpha \delta_\alpha \phi = \phi'(x) - \phi(x) \quad (2.8)$$

On pose $b = 1 - \alpha$, de sorte que

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= b^{-\Delta} \phi(b^{-1}x) \\ &= (1 + \alpha \Delta) \phi(x + \alpha x) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= \phi(x) + \alpha(\Delta + x^\mu \partial_\mu) \phi(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

On trouve finalement

$$j^\mu_* = (\partial^\mu \phi)(\Delta \phi + x^\mu \partial_\mu \phi) \quad (2.9)$$

b)

Soit une quantité $\mathcal{O}(x)$ qui dépend du champ et ses dérivées au point x . Posons que \mathcal{O} transforme comme ϕ sous (2.1), mais avec Δ remplacé par $\Delta_{\mathcal{O}}$, appelé la dimension d'échelle de \mathcal{O} . Pour les conditions trouvées en a), quelle est la dimension d'échelle de la densité Lagrangienne \mathcal{L}_* et de ϕ^n , où $n \in \mathbb{N}$.

Avec les conditions trouvées en a), on a $\Delta_{\mathcal{L}_*} = d + 1$ et $\Delta_{\phi^n} = \frac{n(d-1)}{2}$

c)

On considère le Lagrangien avec un terme d'interaction

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \mathcal{L}_* - \lambda \phi^{2n} \quad (2.10)$$

où $n \in \mathbb{N}$. Quel doit être le signe de λ pour que la théorie soit physiquement raisonnable? Quelle est l'équation du mouvement pour cette théorie interagissante. Quelle est la nouvelle difficulté?

Le signe de λ gouverne la forme du potentiel $V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \lambda \phi^{2n}$. Dans le cas où $\lambda > 0$, alors le potentiel possède un état fondamental avec une énergie minimale, où $\phi = 0$. Dans le cas où $\lambda < 0$, alors on peut, en

principe, avoir des états avec une énergie arbitrairement négative. Donc il n'y a pas d'état fondamental. Ainsi, on doit avoir $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. L'équation du mouvement du champ $\phi(x)$ gouverné par \mathcal{L}_{int} est

$$\square\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi} = \partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2 \phi + 2n\lambda\phi^{2n-1} = 0 \quad (2.11)$$

La difficulté est de résoudre cette équation différentielle pour ϕ , qui n'est plus une combinaison linéaire d'ondes planes.

d)

En $d \in \{1, 2, 3\}$ dimensions, quelles sont les conditions pour que la théorie interagissante soit invariante sous une transformation d'échelle (2.1).

Le terme d'interaction rajouté, $V_\phi(\phi) = \lambda\phi^{2n}$, se transforme comme

$$V_{\text{int}} \rightarrow b^{-2n\Delta} V_{\text{int}} \quad (2.12)$$

Pour que le Lagrangien se transforme comme $\mathcal{L}_{\text{int}} \rightarrow b^{-2-2\Delta} \mathcal{L}_{\text{int}}$, on doit avoir $m = 0$ et

$$n = \frac{\Delta + 1}{\Delta} \quad (2.13)$$

En utilisant la condition dérivée en a) pour que la transformation d'échelle soit une symétrie de la théorie, soit que $\Delta = \frac{d-1}{2}$, on trouve

$$n = \frac{d}{d-1} \quad (2.14)$$

Ainsi, il n'y a pas de symétrie d'échelle pour les théories interagissantes avec $d = 1$ dimension, puisque $n = \infty \notin \mathbb{N}$. Pour $d = 2$, la théorie interagissante avec $n = 1$ et $m = 0$ possède une symétrie d'échelle. Il n'y a pas de symétrie d'échelle pour les théories interagissantes avec $d = 3$ dimension, puisque $n = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$ n'est pas une théorie physique.

3 Champs de jauge

Soit l'action de Maxwell

$$S = \int d^{d+1}x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.1)$$

où $d \geq 1$.

a)

Démontrer que l'action est invariante sous transformations de jauge : $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x)$, où f est une fonction scalaire suffisamment lisse.

Solution. Soit le Lagrangien de Maxwell

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

où $F_{\mu\nu}$ est le tenseur électromagnétique

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.3)$$

Pour déterminer si la transformation de l'action est invariante sous la transformation de jauge, on doit s'assurer que $\delta S = 0$. On commence par étudier la variation infinitésimale du Lagrangien

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} \quad (3.4)$$

La variation infinitésimale de $F_{\mu\nu}$ sous la transformation de jauge est

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu} &= \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu \\ &= \partial_\mu \partial_\nu f - \partial_\nu \partial_\mu f \\ &= 0. \end{aligned}$$

La dernière ligne est une conséquence du théorème de Schwarz, qui dicte que les dérivées secondes d'une fonction scalaire sont symétriques dans une région $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ qui contient un point $\mathcal{O} \in \Omega$ où la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ possède des dérivées secondes continues (en d'autres mots, la fonction est lisse). Il suit que l'action est invariante sous la transformation de jauge, $\delta S = \int d^{d+1}x \delta\mathcal{L} = 0$. \square

b)

Démontrer que l'action est invariante sous transformations de Lorentz. Est-ce qu'il existe un terme de masse pour le champ A_μ qui serait invariant de jauge et invariant de Lorentz?

Solution. Soit la transformation de Lorentz

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (3.5)$$

On étudie maintenant comment le Lagrangien se transforme. Pour se faire, on doit déterminer comment une dérivée se transforme. On trouve

$$\partial_\mu \rightarrow \partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu)} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu, \quad (3.6)$$

où on a introduit l'inverse transposée de la transformation de Lorentz $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\mu{}^\nu$. Avec ce résultat, on déduit la règle de transformation pour le vecteur covariant A_μ

$$A_\mu \rightarrow \Lambda_\mu{}^\nu A_\nu. \quad (3.7)$$

On calcule ensuite la transformation du tenseur électromagnétique

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\rightarrow F'_{\mu\nu} = \partial'_{[\mu} A'_{\nu]} \\ &= \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma \partial_{[\rho} A_{\sigma]}. \end{aligned}$$

Finalement, on calcule la transformation du Lagrangien. Notons que les vecteurs contravariants A^μ et ∂^μ se transforment exactement comme (3.5), de sorte que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L}' = -\frac{1}{4} (F')^{\mu\nu} (F')_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4} (\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \partial^{[\alpha} A^{\beta]}) (\Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma \partial_{[\rho} A_{\sigma]}) \\ &= -\frac{1}{4} \delta^\rho_\alpha \delta^\sigma_\beta \partial^{[\alpha} A^{\beta]} (\partial_{[\rho} A_{\sigma]}) \\ &= -\frac{1}{4} (\partial^{[\alpha} A^{\beta]}) (\partial_{[\alpha} A_{\beta]}) \\ &= -\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \\ &= \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Donc l'action est invariante sous une transformation de Lorentz

$$S \rightarrow S' = \int d^{d+1}x \mathcal{L}' = \int d^{d+1}x \mathcal{L} = S. \quad (3.8)$$

□

c)

Déterminer les équations du mouvement de la théorie. Est-ce qu'elles correspondent aux équations classiques de Maxwell? Si oui, sous quelles conditions?

Comme le Lagrangien ne dépend que du tenseur électromagnétique, on a que les équations du mouvement sont proportionnelles à

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \right) \propto \boxed{-\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0} \quad (3.9)$$

En principe, on devrait prendre la dérivée en terme de $\partial_\mu A_\nu$ pour obtenir les bons préfacteur (puisqu'on a normaliser le Lagrangien par $\frac{1}{4}$). Toutefois, ce raccourci nous donne la bonne équation du mouvement.

On peut maintenant vérifier que cette équation nous permet de retrouver les équations classiques de Maxwell. On pose

$$A^\mu = (\phi, \mathbf{A}) \quad (3.10)$$

et

$$\partial^\mu = (\partial_t, -\nabla) \quad (3.11)$$

On utilise les définitions $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{A}$ et $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ pour les champs électriques et magnétiques respectivement. On commence par l'équation correspondant avec $\nu = 0$. On trouve que

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu 0} &= \partial_\mu \partial^\mu \phi - \partial_\mu \partial_t A^\mu \\ &= (\partial_t^2 - \nabla^2)\phi - (\partial_t^2 \phi - \nabla \cdot \partial_t \mathbf{A}) \\ &= \nabla \cdot (-\nabla \phi - \partial_t \mathbf{A}) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{E}\end{aligned}$$

D'où $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, la première équation de Maxwell. On poursuit avec $\nu = i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu i} &= \partial_\mu \partial^\mu A^i - \partial_\mu \partial^i A^\mu \\ &= (\partial_t^2 - \nabla^2)A^i - \partial_t \partial^i \phi - \partial_j \partial^i A^j \\ &= (\partial_t^2 - \nabla^2)A^i - \partial_t \partial^i \phi - \partial^i \partial_j A^j,\end{aligned}$$

où la dernière ligne suit du théorème de Schwarz. On additionne ensuite les équations pour chaque indice i , de sorte que

$$\begin{aligned}0 &= \partial_t^2 \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} + \partial_t \nabla \phi + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ \implies 0 &= -\partial_t \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{B},\end{aligned}$$

où on a utilisé l'identité vectorielle $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$. On trouve finalement la loi d'Ampère dans le vide.

d)

Est-ce que la théorie de Maxwell est invariante sous une transformation d'échelle? Si oui, quelle sont les conditions appropriées, ainsi que les dimensions d'échelle du champ de jauge et du champ électrique.

e)

Quel est le champ canoniquement conjugué à A_μ .

4 Phonons

a)

b)

c)

5 Quantification 101

a)

b)

c)

d)