Devoir 3 : Théorie des champs I (PHY 6812)

Prof. W. Witczak-Krempa

À remettre : mercredi 23 novembre au début du cours.
Valeur : les questions ont le même poids.

1. **Représentations projectives**.
Montrez que les spineurs de Weyl et Dirac forment des représentations projectives du groupe de Lorentz. En d'autres termes, montrez que ces représentations admettent au moins un 2-cocycle non-trivial.

2. **Charge d'un spineur**.
a) Considérons une transformation interne ($x' = x$) agissant sur un spineur de Dirac :
$$\psi'(x) = e^{i\theta}\psi(x) \tag{1}$$
avec θ réel. Cette transformation est-elle une symétrie du Lagrangien de Dirac ? Si oui, déterminez le courant de Noether associé.
b) Pour le Lagrangien de Dirac avec masse nulle, quelles sont les symétries de rotation de phase ? Identifiez le ou les courants de Noether.

3. **Invariance d'échelle**.
Soit un champ de Dirac ψ de masse m en 3 dimensions spatiales. Considérons une transformation continue :
$$x' = bx \tag{2}$$
$$\psi'(bx) = b^{-\Delta}\psi(x) \tag{3}$$
où $b > 0$ et Δ sont réels.
a) Quelle sont les conditions pour que (2) soit une symétrie de la théorie ? Appelons l'action de cette théorie $S_\star$. Quel est le courant de Noether associé ?
b) Soit une quantité $\mathcal{O}(x)$ qui dépend du champ et ses dérivées au point x. Posons que $\mathcal{O}$ transforme comme ψ sous (2), mais avec Δ remplacé par $\Delta_\mathcal{O}$, appelé la dimension d'échelle de $\mathcal{O}$. Pour les conditions trouvées en (a), déterminez la dimension d'échelle de la densité Lagrangienne $\mathcal{L}_\star$ et de $(\bar{\psi}\psi)^n$, où $n \geq 1$ est un entier.
c) Considérons la densité Lagrangienne avec un terme d'interaction :
$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \mathcal{L}_\star - \lambda(\bar{\psi}\psi)^n \tag{4}$$
avec $n > 1$ entier. Trouvez l'équation du mouvement pour cette théorie *interagissante*. Quelle est la nouvelle difficulté ?
d) Trouvez les conditions pour que la théorie interagissante soit invariante sous une transformation d'échelle (2).

4. **Théorie Yukawa classique**.
Soit la densité Lagrangienne pour un champ scalaire réel ϕ et un spineur de Dirac ψ :
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \lambda\phi^4 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi - g\phi\bar{\psi}\psi \tag{5}$$

où m, M sont les masses et λ, h des constantes de couplage. La version quantique de la théorie de Yukawa est utilisée pour décrire l'interaction nucléaire entre les nucléons médiée par les pions, le couplage entre le boson de Higgs et les quarks et leptons, ou bien des transitions de phases quantiques pour des semi-métaux de Dirac.
a) Est-ce une théorie relativiste ?
b) Déterminez les équation du mouvement de ce Lagrangien.
c) Sous quelles conditions cette théorie est-elle invariante d'échelle ?
d) Prenons $M = 0$. En posant que $\phi(x) = \phi_0$ est une constante dans l'espace-temps et que g est très petit, solutionnez pour ϕ_0. Nous allons prendre m^2 réel, mais pas nécessairement positif. Qu'arrive-t-il au champ de Dirac lorsque m^2 passe de positif à négatif ? Est-ce qu'il y a une ressemblance au mécanisme de Higgs ?

5. **Opérateurs qui anti-commutent**.
En mécanique quantique non-relativiste, nous sommes confrontés à l'Hamiltonien suivant

$$\hat{H} = \sum_{a,b=1}^{N} t_{a,b} \hat{c}_a^\dagger \hat{c}_b \tag{6}$$

$$\{\hat{c}_a, \hat{c}_b^\dagger\} = \delta_{a,b}\,, \quad \{\hat{c}_a, \hat{c}_b\} = 0 \tag{7}$$

a) Quelle condition la matrice $t_{a,b}$ doit-elle respecter pour que $\hat{H}$ soit hermitien (auto-adjoint) ?
b) Pour le cas $N = 1$, déterminez les états stationnaires et leurs énergies. Quelle est la dimension de l'espace d'Hilbert ? Comparez vos réponses avec le cas où les anti-commutateurs sont remplacés par des commutateurs.
c) Encore pour $N = 1$, définissons les opérateurs hermitiens suivants, appelés opérateurs Majorana :

$$\hat{\chi}_1 = (\hat{c} + \hat{c}^\dagger)/\sqrt{2}\,, \quad \hat{\chi}_2 = (\hat{c} - \hat{c}^\dagger)/(i\sqrt{2}) \tag{8}$$

Déterminez leurs relations d'anti-commutation. Écrivez l'Hamiltonien en termes de $\hat{\chi}_{1,2}$. Quels sont les états propres de $\hat{\chi}_a$ et les valeurs propres associées ?
d) Pour N général, déterminez les états stationnaires et leurs énergies. Quelle est la dimension de l'espace d'Hilbert ?

6. **Peskin & Schroeder problem 3.4 a,b,c,d. Majorana fermions.**