

1 Fonction de corrélation pour QFT scalaire interagissante ϕ^4

Réponse. La fonction de corrélation à trois points est nulle dans la théorie interagissante ϕ^4

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \} | \Omega \rangle = 0, \quad (1.1)$$

où $\phi(x)$ est un opérateur de champs Klein-Gordon dans le point de vue d'Heisenberg.

Solution. Par définition, la fonction de corrélation à trois points dans la théorie interagissante ϕ^4 en $(d+1)$ dimensions prend la forme

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \phi_I(x_3) \exp \left(-i \int_{-T}^T dt \int d^3 \mathbf{z} \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(t, \mathbf{z}) \right) \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp \left(-i \int_{-T}^T dt \int d^3 \mathbf{z} \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(t, \mathbf{z}) \right) \} | 0 \rangle}, \quad (1.2)$$

où $\phi_I(x)$ est dans la représentation d'interaction. On se concentre maintenant sur le numérateur. Dans la dérivation, la limite sur T est implicitement définie dans les bornes de l'intégrale sur l'espace-temps $\int d^4 z$. Le développement de la série de Dyson nous permet d'écrire

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) | \Omega \rangle \propto \langle 0 | T \left\{ \begin{aligned} &\phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \phi_I(x_3) \\ &+ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \phi_I(x_3) \frac{(-i)\lambda}{4!} \int d^4 z \phi_I^4(z) \\ &+ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \phi_I(x_3) \frac{(-i)^2 \lambda^2}{2!4!} \int d^4 z \phi_I^4(z) \int d^4 w \phi_I^4(w) \\ &+ \dots \end{aligned} \right\} | 0 \rangle \quad (1.3)$$

On peut évaluer chaque terme à l'aide du théorème de Wick. Le premier terme devient

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \phi_I(x_3) \} | 0 \rangle = \langle 0 | : \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \phi_I(x_3) + \left(\begin{array}{c} \text{Toutes les} \\ \text{contractions possibles} \end{array} \right) : | 0 \rangle \quad (1.4)$$

$$= 0 \quad (1.5)$$

En effet, il n'est pas possible de faire une contraction complète pour un nombre impair d'opérateurs. On peut démontrer explicitement ce fait pour le cas $m = 3$

$$: \left(\begin{array}{c} \text{Toutes les} \\ \text{contractions possibles} \end{array} \right) : = : \overline{\phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \phi_I(x_3)} + \overline{\phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \phi_I(x_3)} + \phi_I(x_1) \overline{\phi_I(x_2) \phi_I(x_3)} :$$

Dans tous les cas, il reste au moins un opérateur $\phi_I(x)$ tels que $\langle 0 | : \phi_I(x) : | 0 \rangle = 0$. Comme chaque terme dans le développement de la série de Dyson du numérateur possède strictement un nombre impair d'opérateur ($m = 3 + 4n$, $n \in \mathbb{N}_0$), alors

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \phi_I(x_3) \exp \left(-i \int d^4 z \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(z) \right) \} | 0 \rangle = 0 \quad (1.6)$$

D'un autre côté, le dénominateur possède toujours un nombre pair d'opérateurs ($m = 4n$, $n \in \mathbb{N}_0$). Donc,

$$\langle 0 | T \{ \exp \left(-i \int d^4 z \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(z) \right) \} | 0 \rangle \neq 0 \quad (1.7)$$

Ainsi,

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) | \Omega \rangle = 0 \quad (1.8)$$

□

2 Fonction de corrélation pour QFT scalaire interagissante ϕ^3

On considère le terme d'interaction

$$\hat{H}_{\text{int}} = \int d^3\mathbf{x} \frac{\lambda}{3!} \hat{\phi}^3(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

a)

On cherche à déterminer

$$\mathcal{A}(x, y) = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \exp \left(-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_{\text{int}}(t) \right) \} | 0 \rangle, \quad (2.2)$$

à l'ordre λ^2 inclusivement, où $\phi(x)$ est un opérateur de champs Klein-Gordon dans la représentation d'interaction. Le développement de la série de Dyson à l'ordre λ^2 est

$$\mathcal{A}(x, y) = \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle + \frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{3!} \right)^2 \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \int d^4z \phi^3(z) \int d^4w \phi^3(w) \} | 0 \rangle + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (2.3)$$

Les termes d'ordre λ^{2n+1} , $n \in \mathbb{Z}_0$, s'annulent puisqu'ils contiennent un nombre impair de champs ϕ . Le premier terme est simplement $D_F(x - y)$. Le second terme, par le théorème de Wick, est la somme des contractions complètes de $m = 8$ opérateurs de champs. Au total, il y a $(m - 1)!! = 105$ contractions complètes possibles. Or la plupart de ces contractions sont redondantes.

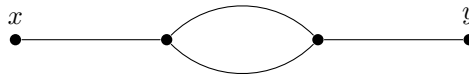
Les graphes connectés à 4 sommets On commence par énumérer les graphes connectés à 4 sommets, soit deux sommets qui correspondent aux points externes x et y , et deux sommets qui correspondent aux points internes z et w . Chacun de ces graphes possède 4 liens, ou propagateurs, correspondant à 4 contractions de 8 opérateurs. On peut énumérer les graphes connectés à 4 sommets uniques à partir des symétries des contractions. Pour simplifier la notation, on va simplement écrire

$$\phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(w)\phi(w)\phi(w) = \phi\phi\phi\phi\phi\phi\phi\phi \quad (2.4)$$

Les sommets z et w sont symétriques, de sorte que certains graphes sont équivalents par échange des sommets. Par exemple, les contractions suivantes sont congruentes

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \cong \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \quad (2.5)$$

puisqu'elles correspondent à l'échange de deux sommets internes du graphe



Ce graphe possède un facteur de symétrie $S = 2$ puisqu'il est possible d'échanger les deux liens entre z et w .

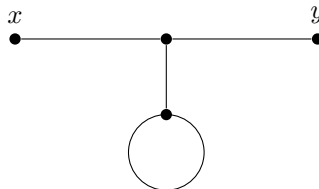
En effet, par le théorème de Wick, on peut compter le nombre de contractions congruentes à $\phi\phi\phi\phi\phi\phi\phi\phi$ de la façon suivante:

$$\underbrace{2!}_{\text{Échange des sommets internes}} \times \underbrace{3!}_{\text{Placement des contractions pour } z} \times \underbrace{3}_{\text{Placement des contractions pour } w} \quad (2.6)$$

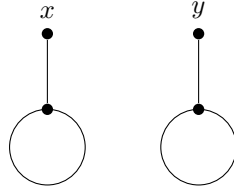
Ainsi, le préfacteur de ce graphe dans le développement de la série de Dyson sera

$$\frac{2! \cdot 3! \cdot 3}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{1}{2} = \frac{1}{S} \quad (2.7)$$

Dans ce qui suit, on déduit simplement le facteur de symétrie par la structure du graphe. On peut ensuite construire le graphe suivant



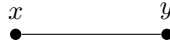
Ce graphe est associé aux contractions congruentes à $\overline{\phi\phi\phi\phi\phi\phi}$. Ce graphe possède un facteur de symétrie $S = 2$, soit un facteur 2 qui correspond à la boucle fermée. Finalement, on peut construire un dernier graphe où x et y sont déconnectés l'un de l'autre, mais qui est tout de même considérés comme *connecté* puisqu'il ne contient pas de boucle du vide fermée et déconnectée des points externes.



Ce graphe correspond aux contractions congruentes avec $\overline{\phi\phi\phi\phi\phi\phi}$, et possède un facteur de symétrie $S = 4$, qui correspond à la présence de deux boucles fermées.

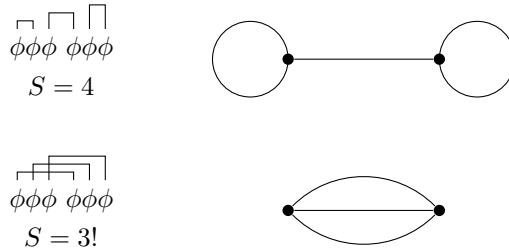
Les graphes connectés à 3 sommets On considère maintenant les graphes avec 3 sommets, soit deux points externes et un point interne. Dans une théorie ϕ^3 , il n'y a pas de graphes connectés à 3 sommets. En effet, une boucle du vide simple pour un terme à trois champs, par exemple $\overline{\phi\phi\phi}$, doit toujours inclure une contraction avec un champ associé à un autre point, donc il n'est pas possible d'isoler un sommet du graphe.

Les graphes connectés à 2 sommets On considère maintenant les graphes avec 2 sommets, soit deux points externes. Trivialement, il n'y a qu'un seul graphe avec deux sommets externes, soit



qui correspond à la contraction $\overline{\phi\phi}$, avec un facteur de symétrie $S = 1$.

Les graphes déconnectés On énumère finalement les graphes déconnectés. Tels que mentionné précédemment, il ne peut pas y avoir de graphe déconnecté à 1 sommet. À l'ordre λ^2 , on a seulement les boucles fermées avec 2 sommets internes et 3 liens.



L'échange possibles de 3 liens entre z et w produit un facteur de symétrie $S = 3!$. En effet, par le théorème de

Wick on a que le nombre de contractions congruentes à $\overline{\phi\phi\phi\phi\phi\phi}$ est

$$\underbrace{2!}_{\text{Échange des sommets internes}} \times \underbrace{3!}_{\text{Placement des contractions pour } w} \quad (2.8)$$

d'où le préfacteur

$$\frac{2! \cdot 3!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{S} \quad (2.9)$$

En collectant tous ces graphes, on obtient le terme suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, y) = & D_F(x - y) + (-i\lambda)^2 \left(x \text{---} y \left(\text{loop with 2 vertices} + \text{loop with 3 vertices} \right) \right. \\ & \left. + x \text{---} \text{loop} \text{---} y + x \text{---} \text{loop} \text{---} \text{loop} \text{---} y + x \text{---} \text{loop} \text{---} \text{loop} \text{---} \text{loop} \text{---} y \right) + \mathcal{O}(\lambda^4) \end{aligned} \quad (2.10)$$

En collectant les facteur de symétrie pour chaque graphe, on obtient finalement l'amplitude en terme des propagateurs de Feynman

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, y) = & D_F(x - y) + (-i\lambda)^2 \int d^4 z \int d^4 w \left(\frac{1}{4} D_F(x - y) D_F(z - z) D_F(w - w) D_F(z - w) \right. \\ & + \frac{1}{3!} D_F(x - y) D_F^3(z - w) + \frac{1}{2} D_F(x - z) D_F^2(z - w) D_F(y - w) \\ & \left. + \frac{1}{2} D_F(x - z) D_F(z - w) D_F(w - w) D_F(y - z) + \frac{1}{4} D_F(x - z) D_F(z - z) D_F(w - w) D_F(y - w) \right) + \mathcal{O}(\lambda^4) \end{aligned} \quad (2.11)$$

b)

On cherche à déterminer

$$\mathcal{B} = \langle 0 | T \{ \exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_{\text{int}}(t) dt \right) \} | 0 \rangle \quad (2.12)$$

à l'ordre λ^2 . On a déjà trouver les bulles du vides qui contribuent à ce processus à l'ordre λ^2 . Il n'y a pas graphes à l'ordre λ pour une théorie ϕ^3 . Ainsi,

$$\mathcal{B} = 1 + (-i\lambda)^2 \left(\text{diagram 1} + \text{diagram 2} \right) + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad (2.13)$$

D'où

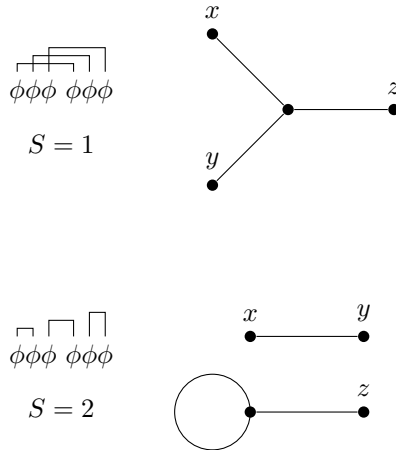
$$\mathcal{B} = 1 + (-i\lambda)^2 \int d^4 z \int d^4 w \left(\frac{1}{4} D_F(z - w) D_F(z) D_F(w) + \frac{1}{3!} D_F^3(z - w) \right) \quad (2.14)$$

c)

On cherche à calculer

$$\mathcal{C}(x, y, z) = \langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \phi(z) \} | \Omega \rangle \quad (2.15)$$

à l'ordre λ inclusivement. On commence par utiliser la représentation d'interactions pour l'Hamiltonien de Klein-Gordon avec un terme d'interaction ϕ^3 , $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}$. On assume, sans perte de généralité, que $x^0 > y^0 > z^0$. Le terme λ^0 ne contribue pas à \mathcal{C} . Pour le terme à l'ordre λ , on a les graphes suivants qui contribuent



$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x, y, z) = & -i\lambda \left(\text{diagram 1} + \text{diagram 2} \right) \\ = & -i\lambda \left(D_F(x - w) D_F(y - w) D_F(z - w) + \frac{1}{2} D_F(x - y) D_F(z - w) D_F(w) \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

En effet, le dénominateur de cette expression à l'ordre λ devient simplement l'unité puisque le terme à l'ordre λ contient 3 champs ϕ .

3 Dispersion de bosons dans une théorie ϕ^4

On cherche à calculer l'amplitude de la dispersion \mathcal{M} pour le processus $\phi\phi \rightarrow \phi\phi$ avec un champ scalaire ϕ de Klein-Gordon dans la théorie interagissante ϕ^4 . Par définition, l'amplitude de la dispersion se calcul à partir des éléments non-triviaux de la matrice $S = \mathbb{1} + iT$. En attribuant les indices $i \in \{1, 2\}$ pour identifier l'état initial et $j \in \{3, 4\}$ pour identifier l'état final de la dispersion, on a

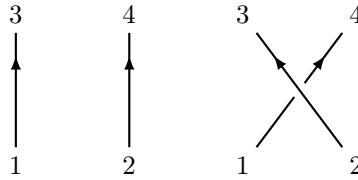
$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) i\mathcal{M}(p_1 p_2 \rightarrow p_3 p_4) = \langle \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 | iT | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle \quad (3.1)$$

où

$$\langle \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 | iT | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \left({}_0 \langle \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4 | T \{ \exp \left(-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_I(t) \right) \} | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle_0 \right)_{\text{Connecté Amputé}} \quad (3.2)$$

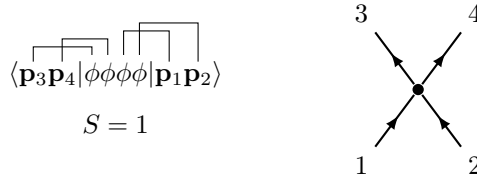
où $\hat{H}_I(t)$ est l'Hamiltonien de l'interaction pour la théorie ϕ^4 . Le développement de la série de Dyson se fait en ne considérant que les diagrammes de Feynman qui sont complètement connectés, c'est-à-dire que les chemins externes du graphes doivent être connecté entre eux via au moins un sommet. Les diagrammes amputés correspondent aux diagrammes complètement connectés avec les boucles sur les chemins externes amputées. Avec ces règles, on peut donc commencer à énumérer les diagrammes de Feynman qui contribuent à la matrice de transition T .

Ordre λ^0 À l'ordre λ^0 , on a seulement les diagrammes avec deux propagateurs et aucun sommet d'interaction



Ces diagrammes décrivent des processus triviaux où les états finaux et initiaux sont identiques, et ne contribuent pas à la matrice de transition T . Donc il n'y a pas de termes à l'ordre λ^0 qui contribue à l'amplitude \mathcal{M} .

Ordre λ À l'ordre λ , il n'y a qu'un seul diagramme qui contribue à \mathcal{M} , soit

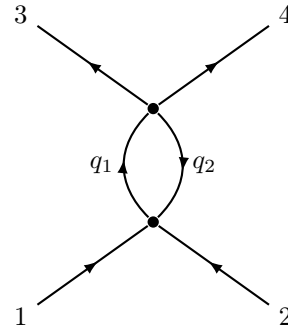
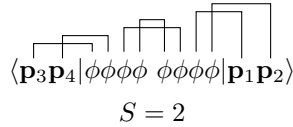
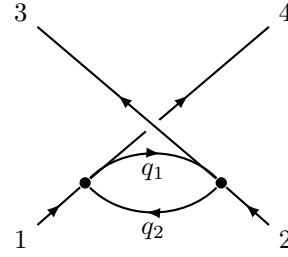
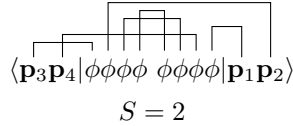
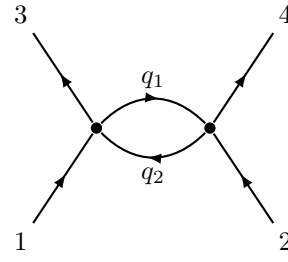
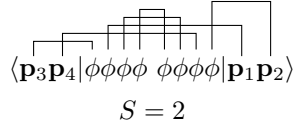


En utilisant les règle de Feynman, on peut évaluer sa contribution

$$\begin{array}{c} 3 \\ \swarrow \quad \nearrow \\ \bullet \\ \nwarrow \quad \searrow \\ 1 \quad 2 \end{array} = -i\lambda \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (3.3)$$

Donc, à l'ordre λ , on trouve simplement que $\mathcal{M} = -\lambda + \mathcal{O}(\lambda^2)$. Les autres diagrammes à l'ordre λ sont soit déconnectés ou correspondent à un processus trivial similaire à l'ordre λ^0 .

Ordre λ^2 À l'ordre λ^2 , il y a 3 diagrammes de Feynman qui contribue, chacun ayant 2 sommets interne et 2 liens internes



On cherche maintenant à évaluer chaque diagrammes en appliquant les règles de Feynman

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \frac{1}{2} (-i\lambda)^2 \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{i}{q_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 & \quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + q_2 - q_1 - p_3) \\
 & \quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 + q_1 - q_2 - p_4)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

On utilise la première fonction delta de Dirac pour éliminer q_2 et on nomme $q \equiv q_1$

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \frac{1}{2} (-i\lambda)^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(q + p_3 - p_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \\
 & \quad \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 + p_1 - p_3 - p_4)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

La seconde fonction delta de Dirac représente maintenant la conservation du moment cinétique pour les états initiaux et finaux, qu'on peut ignorer pour le calcul de \mathcal{M} .

Avant d'évaluer l'intégrale, on utilise la paramétrisation de Feynman pour simplifier l'intégrale

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{(xA + (1-x)B)^2} . \tag{3.6}$$

On pose $p_{31} \equiv p_3 - p_1$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{\underbrace{(q + p_3 - p_1)^2 - m^2 + i\epsilon}_{q+p_{31}}} &= \int_0^1 dx \frac{1}{(xq^2 + (1-x)(q^2 + p_{31}^2 + 2q \cdot p_{31}) - m^2 + i\epsilon)^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{(q^2 + (1-x)p_{31}^2 + 2(1-x)q \cdot p_{31} - m^2 + i\epsilon)^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{(q^2 + xp_{31}^2 + 2xq \cdot p_{31} - m^2 + i\epsilon)^2} \end{aligned}$$

La dernière ligne suit de la redéfinition $x \rightarrow 1 - x$. On définit $\ell \equiv q + xp_{31}$, d'où on obtient

$$\frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(q - p_{13})^2 - m^2 + i\epsilon} = \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell^2 + x(1-x)p_{13}^2 - m^2 + i\epsilon)^2}$$

On pose,

$$\mu_{13}^2(x) \equiv m^2 - x(1-x)p_{13}^2 \quad (3.7)$$

une correction sur la masse qui ne dépend pas de ℓ , ce qui va simplifier énormément l'intégrale de Feynman sur l'espace de phase q .

Pour évaluer l'intégrale qui nous intéresse, on remarque qu'on peut déformer le contour d'une intégrale complexe sans changer le résultat par le théorème de l'intégrale de Cauchy, ce tant et aussi longtemps que la déformation ne traverse pas de singularités. On applique la rotation de Wick pour transformer la variable ℓ , qui respecte la métrique de Minkowsky (avec comme signature $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$)

$$\ell^2 = \ell_0^2 - \ell^2, \quad (3.8)$$

vers une variable qui respecte une métrique Euclidienne

$$\ell_E^2 = \ell_{E0}^2 + \ell^2. \quad (3.9)$$

La rotation de Wick correspond donc clairement au changement de variable $q_0 \rightarrow iq_0$. On obtient aussi la transformation

$$\ell^2 \rightarrow -\ell_E^2. \quad (3.10)$$

Dans la figure 1, on montre comment cette déformation du contour ne traverse pas de singularité.

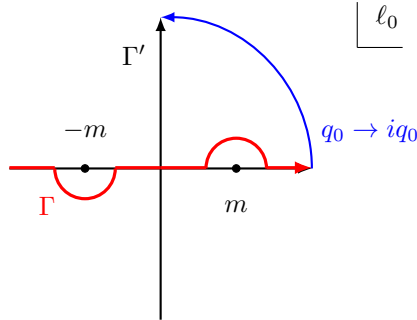


Figure 1: Rotation de Wick du contour pour l'intégrale de Feynman (3.15).

Avec ces outils en place, on peut finalement évaluer l'intégrale du diagramme de Feynman (3.15). Notons que le changement de variable $q \rightarrow \ell$ ne change pas les bornes d'intégrations puisqu'on prend le contour de l'intégrale à un rayon très grand, $\Lambda \gg 1$, tels que l'erreur dû au changement de variable, p_{13}^2/Λ^2 , est négligeable.

$$\begin{aligned} &\text{Diagramme de Feynman: un diagramme à quatre lignes externes (1, 2, 3, 4) et deux lignes internes (q1, q2) se croisant.} \\ &= \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(q + p_3 - p_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{1}{2}\lambda^2 \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell^2 + \mu_{13}^2(x) + i\epsilon)^2} \\ &= -\frac{i}{2}\lambda^2 \int \frac{d^4 \ell_E}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{(\ell_E^2 + \mu_{13}^2(x))^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

On peut résoudre l'intégrale en utilisant les coordonnées sphériques de l'espace euclidien à 4 dimensions

$$\ell_E = (r \sin \omega \sin \theta \cos \phi, r \sin \omega \sin \theta \sin \phi, r \sin \omega \cos \theta, r \cos \omega). \quad (3.12)$$

Comme l'intégrale possède une divergence UV, on introduit un rayon finit $r \in [0, \Lambda]$, $\Lambda < \infty$. Ainsi, le moment cinétique du boson virtuel de l'interaction est contraint par une énergie maximale.

$$\begin{aligned} \text{Diagram: } & \begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} q_1 \\ \text{---} \\ q_2 \end{array} \\ &= -i \frac{\lambda^2}{32\pi^4} \int_0^1 dx \underbrace{\int_0^\pi d\omega \sin^2 \omega}_{\pi/2} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\Lambda dr r^3 \frac{1}{(r^2 + \mu_{13}^2(x))^2} \\ &= -i \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{\Lambda^2} du \frac{u}{(u + \mu^2(x))^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

On a introduit le changement de variables $u \equiv r^2$ pour simplifier la dernière ligne.

$$\begin{aligned} \text{Diagram: } & \begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} q_1 \\ \text{---} \\ q_2 \end{array} \\ &= -i \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\mu_{13}^2}^{\Lambda^2 + \mu_{13}^2} du \frac{u - \mu_{13}^2}{u^2} \\ &= -i \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\log \left(1 + \frac{\Lambda^2}{\mu_{13}^2} \right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + \mu_{13}^2} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Puisque $\Lambda \gg 1$, on peut faire l'approximation

$$\begin{aligned} \text{Diagram: } & \begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ 1 \quad 2 \end{array} \quad \begin{array}{c} q_1 \\ \text{---} \\ q_2 \end{array} \\ &\simeq -i \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\log \left(\frac{\Lambda^2}{\mu_{13}^2} \right) - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Cette quantité diverge de façon logarithmique lorsque $\Lambda \rightarrow \infty$. Puisque l'intégrale sur le paramètre de Feynman est bien approximée par $\approx \log \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right)$, on peut estimer que l'amplitude de la dispersion est

$$\boxed{\mathcal{M} \approx -\lambda - \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \log \left(\frac{\Lambda}{m} \right) + \mathcal{O}(\lambda^3)} \quad (3.16)$$

En effet, les calculs pour les autres graphes ne diffèrent que par le changement des indices sur le terme de correction de mass μ_{ij} , donc on peut simplement additionner la contribution des trois termes à la dernière ligne où on néglige la correction de masse qui provient du moment cinétique.