

1 Représentations projectives

On cherche à montrer que les spineurs de Weyl et Dirac forment des représentations projectives du groupe de Lorentz. En d'autres termes, montrez que ces représentations admettent au moins un 2-cocycle non-trivial.

2 Charge d'un spineur

a)

On considère une transformation interne agissant sur un spineur de Dirac

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\theta} \psi(x) \quad (2.1)$$

où $\theta \in \mathbb{R}$. On cherche à savoir si cette transformation est une symétrie du Lagrangien de Dirac

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi \quad (2.2)$$

Réponse 2.1. La transformation interne (2.1), soit une transformation $U(1)$, est une symétrie du Lagrangien de Dirac.

Solution. La preuve suit par calcul direct

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \bar{\psi}'(i\partial\!\!\!/ - m)\psi' \\ &= e^{-i\theta} \psi^\dagger \gamma^0 (i\partial\!\!\!/ - m) e^{i\theta} \psi \\ &= \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m) e^{i\theta} \psi \\ &= \mathcal{L} \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\theta \in \mathbb{R}$ est un paramètre constant et global, donc $e^{-i\theta}$ commute avec la dérivée ∂_μ . \square

Réponse 2.2. Le courant de Noether associé à la transformation interne (2.1) est (à une phase ± 1 près)

$$\boxed{j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi} \quad (2.3)$$

Solution. Soit la transformation interne infinitésimale

$$\psi \rightarrow (1 - i\theta)\psi \quad (2.4)$$

La transformation infinitésimale du spineur de Dirac est donc

$$\delta\psi = -i\psi \quad (2.5)$$

Il suit de la définition du courant de Noether que

$$\begin{aligned} j^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta\psi \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \psi)} \bar{\psi}(i\gamma^\nu \partial_\nu - m)\psi \right) \delta\psi \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu \delta\psi \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \end{aligned}$$

\square

b)

On considère le Lagrangien de Dirac avec masse nulle, $m = 0$. On utilise la représentation de Weyl (ou représentation chirale) pour représenter les spineurs, soit

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

et

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \bar{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

où σ^i sont les matrices de Pauli et $\bar{\sigma} = -\sigma^i$. Dans ce cas, une symétrie du Lagrangien émerge du fait que les représentations chirales se découpent dans l'équation de Dirac. En effet, on obtient les équations de Weyl

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = \begin{pmatrix} i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R \\ i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L \end{pmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

De ce fait, le Lagrangien se découple en deux termes

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \\ &= i \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger \\ \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \gamma^0 \begin{pmatrix} \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R \\ \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \psi_R^\dagger \\ \psi_L^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R \\ \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{L} = i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R. \quad (2.9)$$

Ainsi, pour des particules de masses nulles, le Lagrangien a maintenant deux symétries internes, soit $U(1) \times U(1)$, donc deux courants de Noether

$$j_s^\mu = \bar{\psi}_s \sigma_s^\mu \psi_s, \quad (2.10)$$

où $\sigma_R^\mu = \sigma^\mu$ et $\sigma_L^\mu = \bar{\sigma}^\mu$. Ces courants sont valides strictement lorsque les représentations chirales sont strictement indépendantes, et n'est donc pas valide dans une limite ultra relativiste.

En effet, la symétrie du Lagrangien dans la limite où $m \rightarrow 0$, soit une limite ultra relativiste, est légèrement différente. Dans ce cas, on peut construire la symétrie axiale

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\theta\gamma^5} \psi(x), \quad (2.11)$$

où, dans la représentation de Weyl,

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i \begin{pmatrix} -\sigma^1\sigma^2\sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^1\sigma^2\sigma^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

On peut montrer que cette transformation est une symétrie du Lagrangien de Dirac en utilisant le fait que $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$, $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}$ et la formule d'Euler qui résulte de ce fait

$$e^{i\theta\gamma^5} = \cos(\theta) + i\gamma^5 \sin(\theta) \quad (2.13)$$

On utilise aussi la relation d'anti-commutation

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (2.14)$$

de sortes que $e^{i\theta\gamma^5} \gamma^\mu = \gamma^\mu e^{-i\theta\gamma^5}$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \psi^\dagger e^{-i\theta\gamma^5} \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) e^{i\theta\gamma^5} \psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 e^{i\theta\gamma^5} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) e^{i\theta\gamma^5} \psi \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m e^{2i\theta\gamma^5}) \psi \end{aligned}$$

Ainsi, dans la limite $m \rightarrow 0$, la transformation axiale (2.11) est une symétrie du Lagrangien, qui correspond effectivement à deux symétries $U(1)$ où les paramètres des transformations correspondent à $\theta_R = -\theta_L$. On peut calculer le courant de Noether qui correspond à cette symétrie. On considère la transformation infinitésimale

$$\psi(x) \rightarrow (1 - i\theta\gamma^5) \psi(x), \quad (2.15)$$

d'où

$$\delta\psi = -i\gamma^5 \psi \quad (2.16)$$

et

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \quad (2.17)$$

3 Invariance d'échelle

On considère le champ de Dirac avec $d = 3$ dimensions spatiales. On considère la transformation d'échelle

$$\begin{aligned} x &\rightarrow bx \\ \psi(x) &\rightarrow b^{-\Delta}\psi(x) \end{aligned} \quad (3.1)$$

où $b \in \mathbb{R}_{>0}$ et $\Delta \in \mathbb{R}$.

a)

Quelle sont les conditions pour que (3.1) soit une symétrie de la théorie? Appelons l'action de cette théorie S_* . Quel est le courant de Noether associé?

On ne considère que le cas avec $d = 3$ dimensions spatiales. La transformation (3.1) est une symétrie de la théorie si l'action

$$S_* = \int d^4x \bar{\psi}(x)(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) \quad (3.2)$$

est invariante sous l'application de la transformation. Puisque l'élément de volume devient

$$d^4x \rightarrow b^4(d^4x), \quad (3.3)$$

et que l'opérateur $\cancel{\partial} \rightarrow b^{-1}\cancel{\partial}$ possède un facteur d'échelle $\Delta_{\cancel{\partial}} = 1$, alors la transformation d'échelle est une symétrie du Lagrangien si et seulement si

$$\boxed{\begin{aligned} m &= 0 \\ \Delta_{\psi} &= \frac{3}{2} \end{aligned}} \quad (3.4)$$

On pose $b = 1 - \epsilon$, où $|\epsilon| \ll 1$. Ainsi,

$$\psi(x) \rightarrow (1 + \epsilon\Delta)\psi(x) \quad (3.5)$$

On prend le point de vue d'une transformation active du champ

$$\delta\psi = \psi'(x) - \psi(x). \quad (3.6)$$

On doit donc déterminer la quantité

$$\psi'(x) = (1 + \epsilon\Delta)\psi(x + \epsilon x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Or, pour simplifier ce terme, on doit déterminer la dérivée de Lie du champs spineur $\psi(x)$, ce qui est non-trivial.

4 Théorie Yukawa classique

Soit la densité lagrangienne pour un champ scalaire réel ϕ et un spineur de Dirac ψ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \lambda\phi^4 + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - M)\psi - g\phi\bar{\psi}\psi \quad (4.1)$$

où m, M sont des masses et λ, g sont des constantes de couplage.

a)

Est-ce une théorie relativiste?

Réponse 4.1. *La théorie de Yukawa classique est une théorie relativiste.*

Solution. Soit une transformation de Lorentz $\Lambda \in SO(3,1)$. La théorie de Yukawa classique est relativiste si la densité lagrangienne est un scalaire de Lorentz. Par l'étude des densité lagrangienne de Klein-Gordon, on sait que les trois premiers termes sont des scalaires de Lorents. En effet, le champ scalaire ϕ est un invariant de Lorentz et, puisque $\Lambda^\rho{}_\nu \Lambda_\rho{}^\mu = \delta_\nu^\mu$,

$$\begin{aligned} \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi &\rightarrow \Lambda_\mu{}^\rho\partial_\rho\phi\Lambda^\mu{}_\sigma\partial^\sigma\phi \\ &\rightarrow \delta_\sigma^\rho\partial_\rho\phi\partial^\sigma\phi \\ &\rightarrow \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \end{aligned}$$

La densité lagrangienne de Dirac est aussi un invariant de Lorentz, sachant que

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \Lambda_D \psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} \Lambda_D^{-1}\end{aligned}\tag{4.2}$$

où $\Lambda_D \in SO(3,1)$ est une transformation de Lorentz dans la représentation de Dirac $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$

$$(\Lambda_D)^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\tag{4.3}$$

$$\mathcal{L}_D \rightarrow \mathcal{L}'_D = \bar{\psi}(i\not{\partial} - M)\psi$$

□

5 Opérateurs qui anti-commutent

6 Fermions Majorana (Peskins & Schroeder 3.4)