1 Algèbre du moment cinétique total

On cherche les relations de commutations pour l'opérateur de moment cinétique

$$\hat{\mathbf{J}} = \int_{\mathbf{x}} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})(\mathbf{x} \times (-i\boldsymbol{\nabla}) + \mathbf{L})\hat{\psi}(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

Soit,

$$\begin{aligned}
[\hat{\mathbf{J}}_i, \hat{\mathbf{J}}_j] &= \int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} [\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})(\mathbf{x} \times (-i\boldsymbol{\nabla}) + \mathbf{L})_i\hat{\psi}(\mathbf{x}),\, \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y})(\mathbf{y} \times (-i\boldsymbol{\nabla}) + \mathbf{L})_j\hat{\psi}(\mathbf{y})] \\
&= \int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} [\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})\mathbf{L}_i\hat{\psi}(\mathbf{x}),\, \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y})(\mathbf{y} \times (-i\boldsymbol{\nabla}))_j\hat{\psi}(\mathbf{y})] \\
&\quad + [\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})(\mathbf{x} \times (-i\boldsymbol{\nabla}))_i\hat{\psi}(\mathbf{x}),\, \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y})(\mathbf{y} \times (-i\boldsymbol{\nabla}))_j\hat{\psi}(\mathbf{y})] \\
&\quad + [\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})(\mathbf{x} \times (-i\boldsymbol{\nabla}))_i\hat{\psi}(\mathbf{x}),\, \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y})\mathbf{L}_j\hat{\psi}(\mathbf{y})] \\
&\quad + [\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})\mathbf{L}_i\hat{\psi}(\mathbf{x}),\, \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{y})\mathbf{L}_j\hat{\psi}(\mathbf{y})]
\end{aligned}$$

En appliquant la règle $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$ à répétition, on peut utiliser la relation de commutation canonique

$$[\psi(\mathbf{x}), \psi^\dagger(\mathbf{y})] = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbb{1} \tag{1.2}$$

pour simplifier l'intégrale. De plus,

$$[\mathbf{x} \times (-i\boldsymbol{\nabla}), \mathbf{L}_i] = 0 \tag{1.3}$$

puisque $\mathbf{L}$ ne dépend pas de la position $\mathbf{x}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
[\hat{\mathbf{J}}_i, \hat{\mathbf{J}}_j] &= \int_{\mathbf{x}} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})\big([(\mathbf{x} \times (-i\boldsymbol{\nabla}))_i, (\mathbf{x} \times (-i\boldsymbol{\nabla})_j] + [\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j]\big)\hat{\psi}(\mathbf{x}) \\
&= \int_{\mathbf{x}} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{x})\big([(\mathbf{x} \times (-i\boldsymbol{\nabla}))_i, (\mathbf{x} \times (-i\boldsymbol{\nabla})_k] + \epsilon_{ijk}\mathbf{L}_k\big)\hat{\psi}(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

On calcule maintenant le dernier commutateur

$$\begin{aligned}
[(\mathbf{x} \times (-i\boldsymbol{\nabla}))_i, (\mathbf{x} \times (-i\boldsymbol{\nabla}))_k] &= i^2(\epsilon_{i\ell m}\mathbf{x}_\ell\partial_m\epsilon_{jnp}\mathbf{x}_n\partial_p - \epsilon_{jnp}\mathbf{x}_n\partial_p\epsilon_{i\ell m}\mathbf{x}_\ell\partial_m) \\
&= -\epsilon_{i\ell m}\epsilon_{jnp}\mathbf{x}_\ell\delta_{mn}\partial_p + \epsilon_{jnp}\epsilon_{i\ell m}\mathbf{x}_n\delta_{p\ell}\partial_m \\
&= -\epsilon_{i\ell m}\epsilon_{jmp}\mathbf{x}_\ell\partial_p + \epsilon_{jn\ell}\epsilon_{i\ell m}\mathbf{x}_n\partial_m
\end{aligned}$$

On sait que

$$\epsilon_{abc}\epsilon_{efg} = \delta_{bf}\delta_{cg} - \delta_{bg}\delta_{cf} \tag{1.4}$$

donc, en permutant les indices i et j à la seconde position du tenseur de Levi-Civita pour utiliser l'identité, et en permutant le premier tenseur une seconde fois pour conserver la somme sur l'indice de $\mathbf{x}$, on obtient

$$\begin{aligned}
[(\mathbf{x} \times (-i\boldsymbol{\nabla}))_i, (\mathbf{x} \times (-i\boldsymbol{\nabla}))_k] &= \epsilon_{mi\ell}\epsilon_{mjp}\mathbf{x}_\ell\partial_p - \epsilon_{\ell jn}\epsilon_{\ell im}\mathbf{x}_n\partial_m \\
&= (\delta_{ij}\delta_{\ell p} - \delta_{ip}\delta_{\ell j})\mathbf{x}_\ell\partial_p - (\delta_{ij}\delta_{nm} - \delta_{jm}\delta_{ni})\mathbf{x}_n\partial_m \\
&= -\delta_{ip}\delta_{\ell j}\mathbf{x}_\ell\partial_p + \delta_{jm}\delta_{ni}\mathbf{x}_n\partial_m \\
&= -\mathbf{x}_j\partial_i + \mathbf{x}_i\partial_j \\
&= -\epsilon_{ijk}\mathbf{x}_i\partial_j \\
&= -(\mathbf{x} \times \boldsymbol{\nabla})_k
\end{aligned}$$

On obtient finalement (si on peut retrouver le facteur i manquant),

$$\boxed{[\hat{\mathbf{J}}_i, \hat{\mathbf{J}}_j] = \epsilon_{ijk}\hat{\mathbf{J}}_k} \tag{1.5}$$

2 Représentations du groupe de Lorentz $SO(2, 1)$

a) Représentations irréductibles de $SO(2, 1)$

Le groupe $SO(2, 1)$ est le groupe de Lorentz dans l'espace de Minkowsky $(2 + 1)$-dimensionel avec la signature de la métrique $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -)$. Ce groupe est définit comme l'ensemble des actions $g \in SO(2, 1)$ avec déterminant $\det(g) = 1$ qui préservent le produit intérieur pour deux vecteurs dans l'espace de Minkowsky $x, y \in \mathbb{R}^{2+1}$

$$\langle x|y\rangle = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 \,. \tag{2.1}$$

Le représentation définissante du groupe $SO(2,1)$ agit sur l'espace des vecteurs $\mathbb{R}^{2+1}$ et est définit comme l'ensemble des matrices réelles 3×3 de déterminant 1 qui laisse la métrique η invariante

$$SO(2,1) = \left\{ \Lambda^\mu{}_\nu \in \mathbb{M}^{2+1}(\mathbb{R}) \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta,\, \det(\Lambda) = 1 \right\} \tag{2.2}$$

Si on ne considère que le sous-groupe $SO^+(2,1)$ connecté de façon continu à l'identité, alors on peut construire 3 générateurs pour l'algèbre de Lie. On considère la transformation infinitésimale

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \tag{2.3}$$

où $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ est un générateur de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2,1)$. Puisque, Λ doit laisser la métrique invariante, alors $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ doit être antisymétrique ($\mathcal{J}^{\mu\nu} = -\mathcal{J}^{\nu\mu}$), ce qui ne laisse que 3 éléments indépendants: les générateurs de boost, $\mathcal{J}^{01}$ et $\mathcal{J}^{02}$, et le générateur de rotation $\mathcal{J}^{12}$. On peut construire ces générateurs à partir de la métrique

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^{\alpha\beta} = i(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta}) \,. \tag{2.4}$$

On obtient la forme bilinéaire en appliquant la métrique sur le tenseur $(\mathcal{J}^{\mu\nu})^{\alpha\beta}$

$$(\mathcal{J}^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta = i(\eta^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\beta - \eta^{\nu\alpha}\delta^\mu{}_\beta) \,, \tag{2.5}$$

d'où on obtient

$$\mathcal{J}^{01} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{J}^{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{J}^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2,1)$ est donc définit par les commutateurs

$$[\mathcal{J}^{01}, \mathcal{J}^{12}] = i\mathcal{J}^{02} \tag{2.7}$$
$$[\mathcal{J}^{02}, \mathcal{J}^{12}] = -i\mathcal{J}^{01} \tag{2.8}$$
$$[\mathcal{J}^{01}, \mathcal{J}^{02}] = i\mathcal{J}^{12} \tag{2.9}$$

ce qui peut être vérifié explicitement avec les générateurs exprimées dans la représentation définissante (2.6)

$$\begin{aligned}
[\mathcal{J}^{01}, \mathcal{J}^{12}] &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= i\mathcal{J}^{02} \\
[\mathcal{J}^{02}, \mathcal{J}^{12}] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -i\mathcal{J}^{01} \\
[\mathcal{J}^{01}, \mathcal{J}^{02}] &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= i\mathcal{J}^{12}
\end{aligned}$$

On procède ensuite à la complexification de l'algèbre de Lie. On introduit les générateurs de boosts $K_\pm$ et le générateur de rotation L

$$\begin{aligned} K_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{J}^{01} \mp i\mathcal{J}^{02}) \\ L &= \sqrt{2}\mathcal{J}^{12} \end{aligned}$$

Les commutateurs dans ce nouvel espace sont

$$[K_-, K_+] = L \tag{2.10}$$
$$[K_\pm, L] = \mp K_\pm\,, \tag{2.11}$$

ce qui peut être déduit des relation de commutations pour les matrices $\mathcal{J}^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} [K_\pm, L] &= [\mathcal{J}^{01} \mp i\mathcal{J}^{02}, \mathcal{J}^{12}] \\ &= (i\mathcal{J}^{02} \mp i(-i)\mathcal{J}^{01}) \\ &= \mp K_\pm \\ [K_-, K_+] &= \frac{1}{2}[\mathcal{J}^{01} + i\mathcal{J}^{02}, \mathcal{J}^{01} - i\mathcal{J}^{02}] \\ &= \frac{1}{2}(-i^2\mathcal{J}^{12} - i^2\mathcal{J}^{12}) \\ &= L \end{aligned}$$

Ces relations de commutations rendent claire l'isomorphisme

$$\mathfrak{so}(2,1) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \tag{2.12}$$

Le groupe $SL(2,\mathbb{R})$ est définit comme

$$SL(2,\mathbb{R}) = \big\{ M \in \mathbb{M}^2(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1 \big\} \tag{2.13}$$

et l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ possède les générateurs

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad h = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

avec les relations de commutations

$$[e, f] = h \tag{2.15}$$
$$[f, h] = f \tag{2.16}$$
$$[e, h] = -e \tag{2.17}$$

Ces relations soit identiques aux relations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2,1)$ complexifiée.

On peut donc construire une classification des représentations finies de $\mathfrak{so}(2,1)$ à partir de la classification connue des représentations finies de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, qui est très similaires à $\mathfrak{su}(2)$. On doit simplement se rappeler qu'on obtiendra seulement les actions du groupes $SO^+(2,1)$ de cette façon, et non le groupe complet $SO(2,1)$ qui n'est pas simplement connecté.

Posons $v \in V$ un élément de l'espace vectoriel de la représentation et un vecteur propre de L avec comme valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. On remarque que

$$\begin{aligned} L(K_+ v) &= (K_+ L + [L, K_+])v \\ &= (\lambda + 2)K_+ v \\ L(K_- v) &= (K_- L + [L, K_-])v \\ &= (\lambda - 2)K_- v \end{aligned}$$

Ainsi, les opérateurs $K_\pm$ agissent comme des opérateurs d'échelles.

On peut montrer par induction qu'il existe un vecteur propre $v_j = K_+^j v$ tels que

$$L v_j = (\lambda + 2j)v_j \tag{2.18}$$

Pour une représentation irréductible de dimension finie, il ne peut exister qu'un nombre fini de vecteur propres. Supposons dans ce cas que λ est la dernière valeur propre de L. Dans ce cas, on doit avoir que $K_+ v_m = 0$

pour un $m \in \mathbb{N}$ quelconque et $v_m \neq 0$, autrement v_{m+1} serait un vecteur propre de L avec une valeur propre $\lambda+2$. Dans ca cas, $\lambda = m$, et on obtient une représentation de dimension de finie qui est construite par l'espace vectoriel de dimension $\dim_{\mathbb{C}}(V) = m+1$ des vecteurs propres de L

$$V = \mathrm{span}(\{v_0, v_1, \dots, v_m\}) \tag{2.19}$$

En terme de l'indice spinoriel $\ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$, on a

$$m = 2\ell \tag{2.20}$$

et $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 2\ell + 1$.

b) Première représentation non-triviale de $SO(2,1)$

Puisque $\ell = 0$ est une représentation triviale, on considère plutôt le premier cas non-trivial $\ell = \frac{1}{2}$. Posons $\psi \in V$ un élément de l'espace vectoriel de dimension $\dim_{\mathbb{C}}(V) = 2$. Dans cette représentation, les générateurs de l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(2,1)$ sont les matrices e, f et h

$$K_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

La transformation de Lorentz d'un spineur $\psi \in V$ devient

$$\psi(x) \to \exp\left(-\frac{i}{2}\beta_1 K_- - \frac{i}{2}\beta_2 K_+ - \frac{i}{2}\theta L \right)\psi(x) \tag{2.22}$$

c)