1 Fonction de corrélation pour QFT scalaire interagissante ϕ^4

Réponse. *La fonction de corrélation à trois points est nulle dans la théorie interagissante* ϕ^4

$$\langle\Omega|T\left\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\right\}|\Omega\rangle = 0\,, \tag{1.1}$$

où $\phi(x)$ *est un opérateur de champs Klein-Gordon dans le point de vue d'Heisenberg.*

Solution. Par définition, la fonction de corrélation à trois points dans la théorie interagissante ϕ^4 en $(d+1)$ dimensions prend la forme

$$\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)|\Omega\}\rangle = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0|T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\exp\left(-i\int_{-T}^{T}dt\int d^3\mathbf{z}\,\frac{\lambda}{4!}\phi_I^4(t,\mathbf{z})\right)\}|0\rangle}{\langle 0|T\{\exp\left(-i\int_{-T}^{T}dt\int d^3\mathbf{z}\,\frac{\lambda}{4!}\phi_I^4(t,\mathbf{z})\right)\}|0\rangle}\,, \tag{1.2}$$

où $\phi_I(x)$ est dans la représentation d'interaction. On se concentre maintenant sur le numérateur. Dans la dérivation, la limite sur T est implicitement définie dans les bornes de l'intégrale sur l'espace-temps $\int d^4z$. Le développement de la série de Dyson nous permet d'écrire

$$\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)|\Omega\} \propto \langle 0|T\left\{\begin{aligned}&\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\\ &+\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\frac{(-i)\lambda}{4!}\int d^4z\,\phi_I^4(z)\\ &+\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\frac{(-i)^2\lambda^2}{2!4!}\int d^4z\,\phi_I^4(z)\int d^4w\,\phi_I^4(w)\\ &+\dots\end{aligned}\right\}|0\rangle \tag{1.3}$$

On peut évaluer chaque terme à l'aide du théorème de Wick. Le premier terme devient

$$\begin{aligned}\langle 0|T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\}|0\rangle &= \langle 0|:\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3) + \begin{pmatrix}\text{Toutes les}\\ \text{contractions possibles}\end{pmatrix}:|0\rangle \qquad (1.4)\\ &= 0 \qquad (1.5)\end{aligned}$$

En effet, il n'est pas possible de faire une contraction complète pour un nombre impaire d'opérateurs. On peut démontrer explicitement ce fait pour le cas $m=3$

$$:\begin{pmatrix}\text{Toutes les}\\ \text{contractions possibles}\end{pmatrix}: = :\overbrace{\phi_I(x_1)\phi_I}(x_2)\phi_I(x_3) + \overbrace{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I}(x_3) + \phi_I(x_1)\overbrace{\phi_I(x_2)\phi_I}(x_3):$$

Dans tous les cas, il reste au moins un opérateur $\phi_I(x)$ tels que $\langle 0|:\phi_I(x):|0\rangle = 0$. Comme chaque terme dans le développement de la série de Dyson du numérateur possède strictement un nombre impaire d'opérateur ($m = 3+4n$, $n\in\mathbb{N}_0$), alors

$$\langle 0|T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\exp\left(-i\int d^4z\,\frac{\lambda}{4!}\phi_I^4(z)\right)\}|0\rangle = 0 \tag{1.6}$$

D'un autre côté, le dénominateur possède toujours un nombre paire d'opérateurs ($m=4n$, $n\in\mathbb{N}_0$). Donc,

$$\langle 0|T\{\exp\left(-i\int d^4z\,\frac{\lambda}{4!}\phi_I^4(z)\right)\}|0\rangle \neq 0 \tag{1.7}$$

Ainsi,

$$\langle\Omega|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)|\Omega\} = 0 \tag{1.8}$$

□

2 Fonction de corrélation pour QFT scalaire interagissante ϕ^3

On considère le terme d'interaction

$$\hat{H}_{\text{int}} = \int d^3\mathbf{x}\, \frac{\lambda}{3!}\hat{\phi}^3(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

a)

On cherche à déterminer

$$\mathcal{A}(x,y) = \lim_{T\to\infty(1-i\epsilon)} \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\exp\left(-i\int_{-T}^{T} dt\, \hat{H}_{\text{int}}(t)\right)\}|0\rangle\,, \tag{2.2}$$

à l'ordre λ^2 inclusivement, où $\phi(x)$ est un opérateur de champs Klein-Gordon dans la représentation d'interaction. Le développement de la série de Dyson à l'ordre λ^2 est

$$\mathcal{A}(x,y) = \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}0\rangle + \frac{1}{2!}\left(\frac{-i\lambda}{3!}\right)^2 \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\int d^4z\, \phi^3(z)\int d^4w\, \phi^3(w)\}|0\rangle + \mathcal{O}(\lambda^4)\,. \tag{2.3}$$

Les termes d'ordre λ^{2n+1}, $n\in\mathbb{Z}_0$, s'annulent puisqu'ils contiennent un nombre impaire de champs ϕ. Le premier terme est simplement $D_F(x-y)$. Le second terme, par le théorème de Wick, est la somme des contractions complètes de $m=8$ opérateurs de champs. Au total, il y a $(m-1)!!=105$ contractions complètes possibles. Or la plupart de ces contractions sont redondantes.

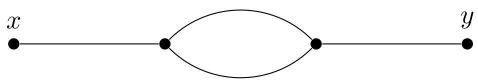
Les graphes connectés à 4 sommets On commence par énumérer les graphes connectés à 4 sommets, soit deux sommets qui correspondent aux points externes x et y, et deux sommets qui correspondent aux points internes z et w. Chacun de ces graphes possède 4 liens, ou propagateurs, correspondants à 4 contractions de 8 opérateurs. On peut énumérer les graphes connectés à 4 sommets uniques à partir des symétries des contractions. Pour simplifier la notation, on va simplement écrire

$$\phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(w)\phi(w)\phi(w) = \phi\phi\ \phi\phi\phi\ \phi\phi\phi \tag{2.4}$$

Les sommets z et w sont symétriques, de sortes que certains graphes sont équivalents par échange des sommets. Par exemple, les contractions suivantes sont congruentes

$$\phi\phi\ \phi\phi\phi\ \phi\phi\phi \cong \phi\phi\ \phi\phi\phi\ \phi\phi\phi \tag{2.5}$$

puisqu'elles correspondent à l'échange de deux sommets internes du graphe



Ce graphe possède un facteur de symétrie $S=2$ puisqu'il est possible d'échanger les deux liens entre z et w.

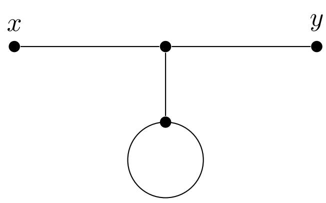
En effet, par le théorème de Wick, on peut compter le nombre de contractions congruentes à $\phi\phi\ \phi\phi\phi\ \phi\phi\phi$ de la façon suivante:

$$\underbrace{2!}_{\substack{\text{Échange des}\\ \text{sommets internes}}} \times \underbrace{3!}_{\substack{\text{Placement des}\\ \text{contractions pour } z}} \times \underbrace{3}_{\substack{\text{Placement des}\\ \text{contractions pour } w}} \tag{2.6}$$

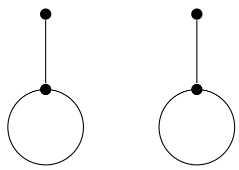
Ainsi, le préfacteur de ce graphe dans le développement de la série de Dyson sera

$$\frac{2!\cdot 3!\cdot 3}{2!\cdot 3!\cdot 3!} = \frac{1}{2} = \frac{1}{S} \tag{2.7}$$

Dans ce qui suit, on déduit simplement le facteur de symétrie par la structure du graphe. On peut ensuite construire le graphe suivant



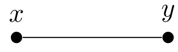
Ce graphe est associé aux contractions congruentes à $\phi\phi\;\phi\phi\phi\;\phi\phi\phi$. Ce graphe possède un facteur de symétrie $S = 2$, soit un facter 2 qui correspond à la boucle fermée. Finalement, on peut construire un dernier graphe où x et y sont déconnectés l'un de l'autre, mais qui est tout de même considérés comme *connecté* puisqu'il ne contient pas de boucle du vide fermée et déconnectée des points externes.



Ce graphe correspond aux contractions congruentes avec $\phi\phi\;\phi\phi\phi\;\phi\phi\phi$, et possède un facteur de symétrie $S = 4$, qui correspond à la présence de deux boucles fermées.

Les graphes connectés à 3 sommets On considère maintenant les graphes avec 3 sommets, soit deux points externes et un point interne. Dans une théorie ϕ^3, il n'y a pas de graphes connectés à 3 sommets. En effet, une boucle du vide simple pour un terme à trois champs, par exemple $\phi\phi\phi$, doit toujours inclure une contraction avec un champ associé à un autre point, donc il n'est pas possible d'isoler un sommet du graphe.

Les graphes connectés à 2 sommets On considère maintenant les graphes avec 2 sommets, soit deux points externes. Trivialement, il n'y a qu'un seul graphe avec deux sommets externes, soit

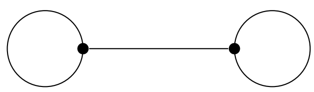


qui correspond à la contraction $\phi\phi$, avec un facteur de symétrie $S = 1$.

Les graphes déconnectés On énumère finalement les graphes déconnectés. Tels que mentionné précédemment, il ne peut pas y avoir de graphe déconnecté à 1 sommet. À l'ordre λ^2, on a seulement les boucles fermées avec 2 sommets internes et 3 liens.

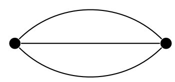
$\phi\phi\phi\;\phi\phi\phi$

$S = 4$



$\phi\phi\phi\;\phi\phi\phi$

$S = 3!$



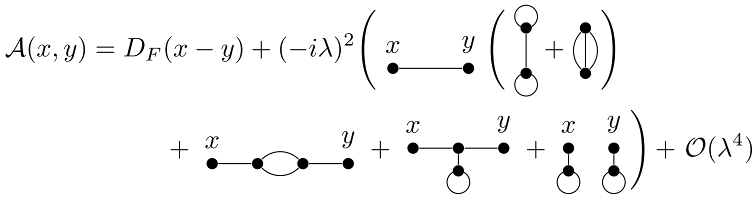
L'échange possibles de 3 liens entre z et w produit un facteur de symétrie $S = 3!$. En effet, par le théorème de Wick on a que le nombre de contractions congruentes à $\phi\phi\phi\;\phi\phi\phi$ est

$$\underbrace{2!}_{\substack{\text{Échange des}\\ \text{sommets internes}}} \times \underbrace{3!}_{\substack{\text{Placement des}\\ \text{contractions pour } w}} \tag{2.8}$$

d'où le préfacteur

$$\frac{2!\cdot 3!}{2!\cdot 3!\cdot 3!} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{S} \tag{2.9}$$

En collectant tous ces graphes, on obtient le terme suivant



(2.10)

En collectant les facteur de symétrie pour chaque graphe, on obtient finalement l'amplitude en terme des propagateurs de Feynman

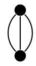
$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{A}(x,y) = D_F(x-y) + (-i\lambda)^2 \int d^4z \int d^4w \bigg(&\frac{1}{4} D_F(x-y) D_F(z) D_F(w) D_F(z-w) \\ &+ \frac{1}{3!} D_F(x-y) D_F^3(z-w) + \frac{1}{2} D_F(x-z) D_F^2(z-w) D_F(y-w) \\ &+ \frac{1}{2} D_F(x-z) D_F(z-w) D_F(w) D_F(y-z) + \frac{1}{4} D_F(x-z) D_F(z) D_F(w) D_F(y-w) \bigg) + \mathcal{O}(\lambda^4)\end{aligned}} \tag{2.11}$$

b)

On cherche à déterminer

$$\mathcal{B} = \langle 0 | T\{\exp\left(-i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_{\text{int}}(t) dt\right)\} | 0 \rangle \tag{2.12}$$

à l'ordre λ^2. On a déjà trouver les bulles du vides qui contribuent à ce processus à l'ordre λ^2. Il n'y a pas graphes à l'ordre λ pour une théorie ϕ^3. Ainsi,

$$\mathcal{B} = 1 + (-i\lambda)^2 \Bigg($$  $$+$$  $$\Bigg) + \mathcal{O}(\lambda^4) \tag{2.13}$$

D'où

$$\boxed{\mathcal{B} = 1 + (-i\lambda)^2 \int d^4z \int d^4w \left(\frac{1}{4} D_F(z-w) D_F(z) D_F(w) + \frac{1}{3!} D_F^3(z-w) \right)} \tag{2.14}$$

c)

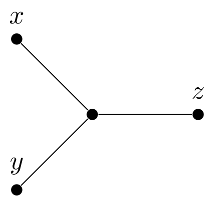
On cherche à calculer

$$\mathcal{C}(x,y,z) = \langle \Omega | T\{\phi(x)\phi(y)\phi(z)\} | \Omega \rangle \tag{2.15}$$

à l'ordre λ inclusivement. On commence par utiliser la représentation d'interactions pour l'Hamiltonien de Klein-Gordon avec un terme d'interaction ϕ^3, $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}$. On assume, sans perte de généralité, que $x^0 > y^0 > z^0$. Le terme λ^0 ne contribue pas à $\mathcal{C}$. Pour le terme à l'ordre λ, on a les graphes suivants qui contribuent

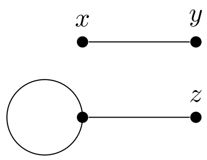
$\phi\phi\phi\ \phi\phi\phi$

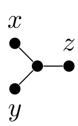
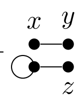
$S = 1$



$\phi\phi\phi\ \phi\phi\phi$

$S = 2$



$$\mathcal{C}(x,y,z) = -i\lambda \Bigg($$  $$+$$  $$\Bigg)$$

$$= -i\lambda \left(D_F(x-w) D_F(y-w) D_F(z-w) + \frac{1}{2} D_F(x-y) D_F(z-w) D_F(w) \right) \tag{2.16}$$

En effet, le dénominateur de cette expression à l'ordre λ devient simplement l'unité puisque le terme à l'ordre λ contient 3 champs ϕ.

3