Devoir 1 : Théorie des champs I (PHY 6812)

Prof. W. Witczak-Krempa

À remettre : vendredi 14 octobre à 13h00 (endroit à spécifier).
Valeur : les questions ont le même poids.

1. **Un peu de relativité**. Justifiez toutes vos réponses. Travaillez en 3+1 dimensions.
   a) Classiquement, un photon se propageant dans le vide peut-il se désintégrer en une paire électron-positron ? Expliquez votre résultat mathématique de manière heuristique. Que ce passera-t-il en théorie quantique des champs (QFT) ?
   b) Quelle est la condition pour qu'un tenseur soit invariant sous transformations de Lorentz ?
   c) Les tenseurs δ^ν_μ et $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ (Levi-Civita) sont-ils invariants de Lorentz ?
2. **Invariance d'échelle**. Soit un champ scalaire Klein-Gordon ϕ de masse m en d dimensions spatiales. Considérons une transformation continue :
$$x' = bx \tag{1}$$
$$\phi'(bx) = b^{-\Delta}\phi(x) \tag{2}$$
   où $b > 0$ et Δ sont réels.
   a) Quelle sont les conditions pour que (1) soit une symétrie de la théorie ? Appelons l'action de cette théorie $S_\star$. Quel est le courant de Noether associé ?
   b) Soit une quantité $\mathcal{O}(x)$ qui dépend du champ et ses dérivées au point x. Posons que $\mathcal{O}$ transforme comme ϕ sous (1), mais avec Δ remplacé par $\Delta_\mathcal{O}$, appelé la dimension d'échelle de $\mathcal{O}$. Pour les conditions trouvées en (a), déterminez la dimension d'échelle de la densité Lagrangienne $\mathcal{L}_\star$ et de ϕ^n, où $n > 0$ est un entier.
   c) Considérons la densité Lagrangienne avec un terme d'intéraction :
$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \mathcal{L}_\star - \lambda\phi^{2n} \tag{3}$$
   avec $n > 1$ entier. Quel doit être le signe de λ pour que la théorie soit physiquement raisonnable ? Trouvez l'équation du mouvement pour cette théorie *intéragissante*. Quelle est la nouvelle difficulté ?
   d) En $d = 1, 2, 3$, trouvez les conditions pour que la théorie intéragissante soit invariante sous une transformation d'échelle (1).
3. **Champs de jauge** Soit l'action de Maxwell $S = \int d^{d+1}x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, avec $d \geq 1$.
   a) Montrez que l'action est invariante sous transformations de jauge : $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu f(x)$, où f est une fonction scalaire suffisamment lisse.
   b) Montrez que l'action est invariante sous transformations de Lorentz. Est-ce qu'il existe un terme de masse pour le champ A_μ qui serait invariant de jauge et invariant de Lorentz ?
   c) Déterminez les équations du mouvement de la théorie. Est-ce qu'elles correspondent aux équations classiques de Maxwell ? Si oui, sous quelles conditions ?
   d) Est-ce que la théorie de Maxwell est invariante sous une transformation d'échelle ? Si oui, trouvez les conditions appropriées, ainsi que les dimensions d'échelle du champ de jauge et du champ électrique.
   e) Trouvez le champ canoniquement conjugué à A_μ. Est-ce qu'il y a quelque chose de bizarre avec votre réponse ?

4. **Phonons en 2+1 et 3+1 dimensions**.

   a) En vous basant sur l'analyse faite en classe en 1+1 dimensions, obtenez la théorie classique des champs décrivant les vibrations d'un cristal cubique en 2 et 3 dimensions spatiales. Utilisez l'approche "vache sphérique" : posez une forme simple pour l'énergie potentielle d'élongation-compression qui généralise le cas en $d = 1$. Le vrai cas des phonons est plus difficile à traiter...

   b) Quelles sont les symétries continues de cette théorie en 2+1 et 3+1 dimensions ? Travaillez avec les symétries internes seulement, c'est-à-dire les symétries ne faisant pas intervenir d'opération sur l'espace-temps. Déterminez les courants de Noether associés.

5. **Quantification 101**. Considérons la chaîne harmonique classique en 1 dimension spatiale, telle que vue en classe.

   a) Faites la quantification canonique de la chaîne discrète. Vous aurez alors un système quantique non-relativiste avec un nombre infini, mais *discret*, de degrés de libertés quantiques. Nous sommes donc encore dans le contexte de la mécanique quantique habituelle. Rappel : $\{A, B\} \to -i[\hat{A}, \hat{B}]$, avec $\hbar = 1$. Utilisez le point de vue de Schrödinger.

   b) Prenez ensuite la limite du continu de cette théorie. Donnez toutes les relations de commutation entre les opérateurs de champ issus des opérateurs $\hat{\phi}_I$ et $\hat{p}_I$. Ces commutateurs respectent-ils la causalité ? Ne vous inquiétez pas trop de la rigueur mathématique de l'expansion de Taylor pour des opérateurs.

   c) Évaluez $\partial_t^2 \langle \hat{\phi}(\mathrm{x}) \rangle_t$ à l'aide de la théorie discrète. Passez au continu à la fin du calcul. Votre résultat est-il relié à l'équation de Klein-Gordon ? Expliquez.