

---

# Mesure de $H_0$ avec le quasar lentillé RXJ1131-1231

---

ALEXANDRE ADAM, CHARLES WILSON

PHY6669 – Cosmologie

Département de physique

Université de Montréal

## Résumé

L'étude multi-domaines du quasar quadruplement RXJ1131-1231 permet de déterminer la constante de Hubble à partir du formalisme de la cosmographie et des délais temporels. Dans cette étude, on analyse les données provenant du télescope de Hubble avec l'instrument ACS dans le filtre F814w pour estimer la distribution de masse du déflecteur du système et la distribution de la brillance de la source. Ces estimés, combiné avec la cosmologie  $\Lambda$ CDM nous permet de contraindre la constante de Hubble à  $H_0 = 91.07^{+5.56}_{-5.26}$ , soit une précision de 6%.

## 1 Introduction

La mesure du taux d'expansion de l'Univers  $H_0$  nommé en l'honneur d'Edwin Hubble pour sa découverte (HUBBLE (1929)) est un projet central à la cosmologie moderne. En effet, cette quantité nous informe autant sur la taille de l'Univers que sur l'abondance des éléments dans l'Univers primordial.

Les vingt dernières années ont vu la quantité et la qualité des données cosmologiques grandir au point où les différentes expériences sont en mesure de déterminer la valeur de cette constante avec une précision de quelques pourcentages (RIESS, CASERTANO et al. (2019), RIESS, MACRI et al. (2016) et Kenneth C. WONG et al. (2020)), voir moins dans le cas de la COLLABORATION PLANCK (2018).

Les mesures faites dans l'Univers local (relation période-luminosité des Céphéides, luminosité de supernovæ de type Ia et cosmographie à partir de lentilles gravitationnelles) sont en tension de façon significative  $\sim 5\sigma$  avec les mesures faites dans l'univers jeune avec le fond diffus cosmologique (CMB). Cette crise de la cosmologie moderne est sujet de plusieurs spéculations et hypothèses sur la nature de cette tension. Ceci motive la recherche pour améliorer la précision statistique des mesures de  $H_0$  local.

Cette étude se concentre donc sur la cosmographie basé sur les lentilles gravitationnelles, soit l'étude des déformations géométriques d'un système source-lentille pour déterminer l'échelle physique du système et la masse contenue dans la lentille. On s'intéresse en particulier au système RXJ1131-1231 qui fait partie de l'en-

semble des lentilles utilisés pour faire la détermination de Kenneth C. WONG et al. (2020). Cette lentille est intéressante car elle ajoute un biais statistique sur  $H_0$  dû la valeur de la constante de Hubble qui est généralement élevé par rapport à l'estimé de la moyenne statistique d'une population de lentilles (voir SUYU et al. (2013), BIRRER, AMARA et REFREGIER (2016)).

Notre étude se concentre sur la détermination des potentiels de Fermat via la modélisation de la lentille et de la source avec les données provenant du télescope Hubble. Les délais temporels sont déterminés indépendamment par Charles Wilson à partir des données photométriques collectées par la collaboration COSMOGRAIL (TEWES et al. (2013)).

Les sections 2 et 3 se concentrent sur la théorie des lentilles gravitationnelles pour établir le formalisme qui nous permet de mesurer  $H_0$ . Ensuite, on discute des données prises par le télescope Hubble du système RXJ1131-1231 et de la réduction des données *a posteriori* à la section 4 pour faire l'inférence des paramètres qu'on introduit à la section 5. Finalement, les résultats finaux sont présentés et discutés à la section 6.

## 2 Lentilles Gravitationnelles

### 2.1 Formalisme

Dans cette section, on révisé la théorie des lentilles gravitationnelles. Plus de détails peuvent être trouvés dans l'excellente revue de TREU (2010).

Une distribution de matière projeté sur le plan normal à la ligne de visée d'un observateur forme ce qu'on appelle un champ de convergence  $\kappa(\boldsymbol{\theta})$ , où  $\boldsymbol{\theta}$  sont les coordonnées angulaires du plan de la lentille. Ce champ génère un potentiel effectif  $\psi(\boldsymbol{\theta})$  lié à  $\kappa$  via une équation de Poisson

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}}^2 \psi = 2\kappa(\boldsymbol{\theta}). \quad (1)$$

Cette équation est résolue en introduisant la fonction de Green appropriée

$$\psi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\boldsymbol{\theta}') \ln(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}') d^2\boldsymbol{\theta}'. \quad (2)$$

Il est pratique de rendre adimensionnel les quantités d'intérêts :

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\Sigma(\boldsymbol{\theta})}{\Sigma_{\text{cr}}}, \quad (3)$$

où on a introduit la densité de surface critique  $\Sigma_{\text{cr}}$

$$\Sigma_{\text{cr}} \equiv \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_\ell D_{\ell s}}. \quad (4)$$

On distingue 3 distances de diamètres angulaires  $D_s$ ,  $D_\ell$  et  $D_{\ell s}$ , soit la distance de l'observateur à la source, à la lentille et la distance entre la lentille et la source respectivement. Ces distances préservent les relations trigonométriques entre le plan source et le plan de la lentille, ce qui donne lieu à l'équation de la lentille :

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}). \quad (5)$$

$\boldsymbol{\beta}$  représente les coordonnées angulaire dans le plan de la lentille et  $\boldsymbol{\alpha}$  représente l'angle de deflection. Comme  $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \psi$ , alors

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \kappa(\boldsymbol{\theta}') \frac{\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'}{|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}'|} d^2\boldsymbol{\theta}'. \quad (6)$$

On note au passage que l'équation de la lentille est linéaire par rapport à  $\boldsymbol{\beta}$ , mais non-linéaire par rapport à  $\boldsymbol{\theta}$ . Cet aspect devient important lorsqu'on cherche à optimiser la complexité numérique de la procédure d'optimisation des paramètres de la lentille.

L'équation de la lentille introduit deux effets de distortions, soit la magnification de l'image de la source et le cisaillement. Ces distortions sont décrites par la Jacobienne de l'équation de la lentille

$$A \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \left( \mathbb{1} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right). \quad (7)$$

Le cisaillement est un pseudo-vecteur  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  dans le plan de la lentille qui correspond à la partie antisymétrique et sans trace de la Jacobienne :

$$\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} (\psi_{11} - \psi_{22}); \quad (8)$$

$$\gamma_2(\boldsymbol{\theta}) = \psi_{12} = \psi_{21}. \quad (9)$$

Ainsi, on peut modéliser les perturbations extrinsèques au déflecteur principal de la lentille via l'effet de cisaillement en introduisant le potentiel extrinsèques qui correspond à un cisaillement constant :

$$\psi_{\text{ext}} = \frac{1}{2} \gamma_{\text{ext}} \theta^2 \cos 2(\varphi - \phi_{\text{ext}}). \quad (10)$$

$\psi_{\text{ext}}$  est exprimé en terme des coordonnées polaires du plan de la lentille  $\boldsymbol{\theta} = (\theta, \varphi)$ .

La magnification correspond à l'inverse du déterminant de la Jacobienne.

$$\mu \equiv \det\{A\}^{-1}. \quad (11)$$

Cette quantité peut être utilisée pour contraindre la luminosité de noyau actif de la galaxie source (AGN) via le ratio du flux des 4 images de l'AGN.

## 2.2 Paramétrisation

On paramétrise la densité surfacique de la lentille par un profil elliptique avec une loi de puissance adoucie :

$$\kappa(\boldsymbol{\theta}) = \frac{3 - \gamma'}{2} \left( \frac{\theta_E}{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2/q^2 + \theta_c^2}} \right)^{\gamma' - 1}. \quad (12)$$

$\gamma'$  est la pente logarithmique radiale du profil,  $q$  est le ratio des axes et  $\theta_E$  est le rayon d'Einstein de la lentille. On introduit le rayon du coeur du profil  $\theta_c$  pour éviter l'instabilité numérique du profil à l'origine du système de coordonnées. Il est pratique de fixer sa valeur à un angle plus petit que la taille angulaire d'un pixel de l'image (dans notre cas  $\theta_c < 0.04''$ ).

Les intégrales (2) et (6) ont une solution analytique seulement lorsque  $\gamma' = 2$  (profil isotherme elliptique) ainsi que certains autres cas détaillés par KEETON (2001). En première approximation, ce paramètre peut être fixé à 2 sachant que la plupart des systèmes de lentilles sont bien modélisés par ce profil. Laisser ce paramètre complètement libre requiert de procéder avec le traitement de BARKANA (1998) ou TESSORE et BENTON METCALF (2015), où les intégrales pour le potentiel  $\psi$  et les angles de déflexions  $\alpha$  sont simplifiées en intégrales unidimensionnelles.

On choisit une solution intermédiaire valide lorsque l'ellipticité de la lentille est petite (voir BARKANA (1998)). Le profil SPEP suppose que la forme du potentiel  $\psi$  est identique à celle d'un profil isotrope (où les intégrales ont des solutions analytiques). Cette approche a l'avantage d'être plus rapide numériquement, au prix de développer des isocontours dans le potentiel  $\psi$  en forme d'haltères lorsque l'ellipticité s'éloigne du domaine de validité.

Le cisaillement extrinsèque est aussi ajusté lors de l'étape d'inférence. Le centre du champ de distortions est fixé au centre de l'image ACS, ce qui laisse les paramètres  $\gamma_{\text{ext}}$  et  $\phi_{\text{ext}}$  de l'équation (10) à déterminer.

### 3 Délai temporel

Le délai temporel est une mesure de la différence entre le temps d'arrivée d'une image  $i$  et une image  $j$  de l'AGN. Le formalisme des délais temporels introduit par une lentille gravitationnelle fut initialement introduit par REFSDAL et BONDY (1964). La même année, SHAPIRO (1964) introduisait l'effet de dilation temporelle expérimenté par un photon traversant un champ gravitationnel. Les deux effets sont combinés pour former le potentiel de Fermat :

$$\Psi_{\text{Fermat}} = \frac{(\theta - \beta)^2}{2} - \psi(\theta). \quad (13)$$

Le délai entre deux images ( $i$  et  $j$ ) est donc mesuré par l'équation

$$c\Delta t_{ij} = D_{\Delta t} (\Psi_{\text{Fermat},i} - \Psi_{\text{Fermat},j}), \quad (14)$$

où  $D_{\Delta t}$  est la distance caractéristique du délai temporel

$$D_{\Delta t} \equiv (1 + z_\ell) \frac{D_\ell D_s}{D_{\ell s}} \propto H_0^{-1}. \quad (15)$$

La dégénérescence de masse peut affecter les valeurs mesurées de  $D_{\Delta t}$  : une surdensité de halos de matière noire dans la ligne de visée produit une distance caractéristique plus petite que la *vrai* distance  $D_{\Delta t}$

$$D_{\Delta t} = \frac{D_{\Delta t}^{\text{modèle}}}{1 - \kappa_{\text{ext}}}. \quad (16)$$

où  $D_{\Delta t}^{\text{modèle}}$  est estimé directement à partir de l'équation (14). Un estimé indépendant de la densité de masse extrinsèque au plan de la lentille  $\kappa_{\text{ext}}$  permet de lever cette dégénérescence.

TEWES et al. (2013) ont mesuré le flux photométrique des 4 images du quasar à tous les 4-5 jours en moyenne durant 9 ans avec 3 télescopes terrestres de 1-2 mètres d'ouverture. Comme ces courbes de lumières sont générées par un même objet (AGN), les sursauts intrinsèque de luminosités sont clairement identifiables dans chaque courbe, de sorte que les délais temporels propre à la lentille peuvent être mesurés indépendamment.

Pour notre analyse, on utilise les résultats obtenus par Charles Wilson avec le module `PyCS3` (MILLON et al. (2020)). On réfère à son rapport pour une explication plus détaillée de la méthode employée.

$\Delta t_{\text{BA}}$	$0.5 \pm 5.7$ jours
$\Delta t_{\text{BC}}$	$-0.3 \pm 5.5$ jours
$\Delta t_{\text{BD}}$	$92.3 \pm 7.4$ jours

Table 1: Mesure des délais temporels.

### 4 Observations de RXJ1131-1231

La lentille gravitationnelle RXJ1131-1231 a été découverte par SLUSE et al. (2003). Des mesures spectroscopiques ont permis de déterminer le décalage vers le rouge de la source  $z_s = 0.658$  et de la lentille  $z_\ell = 0.295$  (SLUSE et al. (2003)). Dans les prochaines sections, on détail la prise de mesure et le traitement *a posteriori* des mesures pour extraire les données pertinentes à l'inférence.

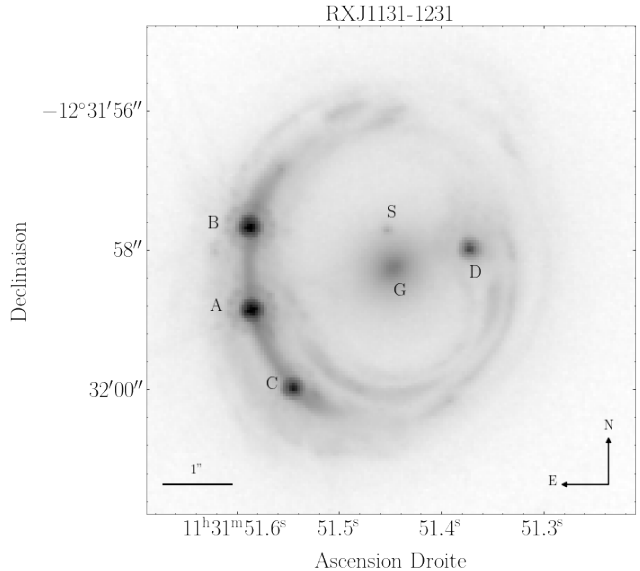


Figure 1: Image ACS *drizzled* du système RXJ1131-1231 avec le filtre F814w obtenu à partir de l'archive du télescope Hubble. Les 4 images du quasar sont identifiées par les lettres A à D. Le déflecteur principal (G) et son satellite (S) sont aussi identifiés. Les axes sont étiquetés par le système de coordonnées céleste J2000.

#### 4.1 Traitement de l'image

La prise de mesure consiste en 5 expositions de 1980.0 secondes avec l'instrument ACS du télescope Hubble et le filtre F814w. Ces expositions sont combinées par l'algorithme `MultiDrizzle` (voir MASSEY et al. (2010) et KOEKEMOER et al. (2007)) à une taille angulaire par pixel de  $0.04''$ . L'image de RXJ1131-1231 (figure 1) est une découpe de 175 pixels de côté

centré autour de la position J2000 :  $11^{\text{h}}31^{\text{m}}51.45^{\text{s}}$ ,  $-12^{\circ}31'58.28''$ .

	$\theta_x [']$	$\theta_y [']$
B	2.10	0.56
A	2.07	-0.62
C	1.47	-1.74
D	-1.12	0.25

**Table 2:** Positions des images du quasar relatives au centre de l'image ACS avec une incertitude commune égale à la taille angulaire d'un pixel :  $0.04''$ .

Le bruit du compte d'électron dans chaque pixel est modélisé à partir de l'image ACS et l'image de poids  $w_i = 1/\sigma_i^2$ . Ces poids sont calculé lors du processus de *drizzling* pour tenir compte de la corrélation du bruit de chaque pixel avec ses voisins (voir par exemple CASERTANO et al. (2000)). Ces poids tiennent compte du fond noir du ciel, du courant noir du détecteur et des pixels saturés durant l'exposition (ainsi que des masques appliqués aux rayons cosmiques et traces laissées par des satellites). Le bruit effectif est donc l'addition en quadrature du bruit de Poisson de l'image ACS et des poids ( $\sigma_{\text{ACS},i} = \sqrt{d_{\text{ACS},i} + \sigma_i^2}$ ).

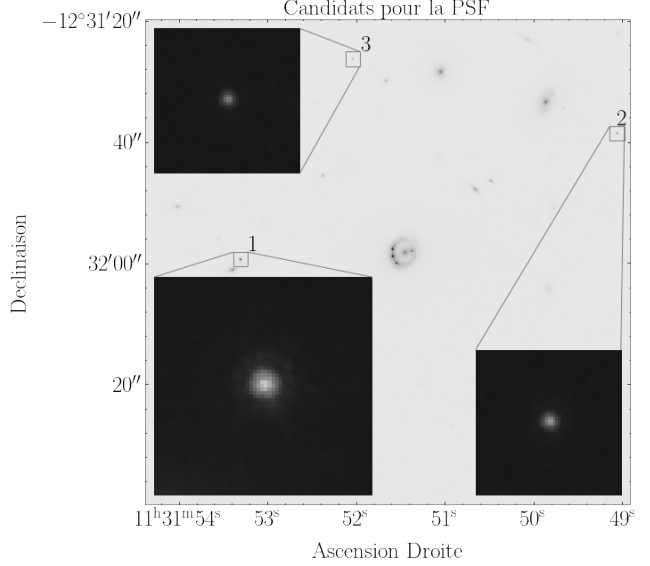
La lumière des galaxies G et S est décomposé de l'image ACS pour isoler le système lentillé. Pour ce faire, on utilise le logiciel *GalFit* (PENG et al. (2002, 2010)). On trouve que la galaxie G est bien modélisé par deux profils de Sérsic elliptique (SÉRSIC (1968)) :

$$\Sigma(\theta_1, \theta_2) = \Sigma_e \exp \left\{ -\kappa \left[ \left( \frac{\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2/q^2}}{R_e} \right)^{1/n} - 1 \right] \right\}, \quad (17)$$

où  $\Sigma_e$  est la brillance de surface,  $n$  est la pente logarithmique et  $R_e$  est le rayon effectif du profil. Cette procédure est commune (voir par exemple SUYU et al. (2013)) pour une galaxie elliptique avec bulbe *classique*, modélisée par un profil de de Vaucouleurs ( $n = 4$ , DE VAUCOULEURS (1948)). Similairement, un disque *classique* est modélisé par un profil exponentiel ( $n = 1$ ). La taille du satellite S est suffisamment petite qu'on choisit d'utiliser la fonction d'étalement du point (PSF) pour la modéliser.

La fonction d'étalement du point est extraite des objets non-résolus dans le champ d'étoile avoisinant ( $\simeq 2'$ ) au système RXJ1131-1231. On identifie 3 candidats potentiels (voir figure 3). Le candidat numéro 1 exhibe un anneau secondaire typique d'une tache d'Airy et est donc choisit pour les analyses subséquentes. On extrait

une image de 39 pixels de côté centré autour de l'objet 1, qu'on normalize après avoir multiplié par une fenêtre de Hann (aussi connue comme *Hanning window*) pour mitiger les effets de bord du découpage.



**Figure 3:** Sélection d'une PSF pour la reconstruction d'image dans le champs d'étoile avoisinant le système RXJ1131-1231 (visible au centre de l'image). Le candidat 1 (coin sud-est de l'image) exhibe un anneau secondaire typique d'une tache d'Airy.

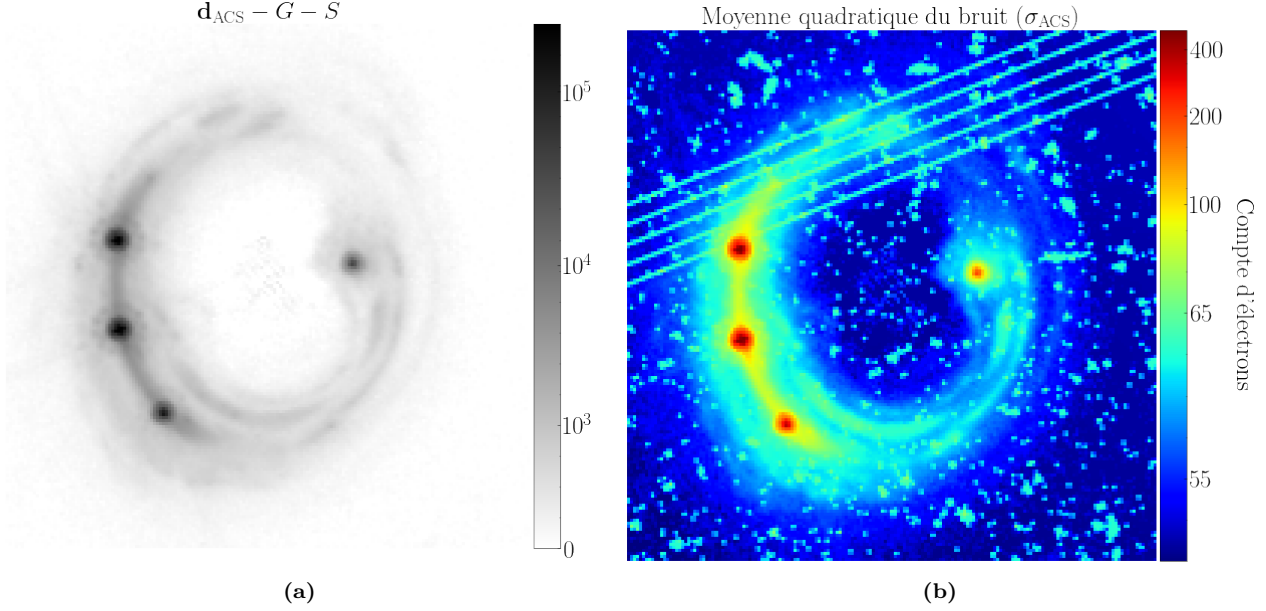
## 4.2 Convergence extrinsèque

SUYU et al. (2013) ont observé RXJ1131-1231 avec le *Low-Resolution Imaging Spectrometer* (OKE et al. (1995)) installé sur Keck I pour estimer la vitesse de dispersion de la galaxie lentille G projetée selon la ligne de visée. Les deux premiers moments de la vitesse de dispersion sont estimés via une simulation MCMC du spectre de la galaxie et un ajustement aux observations.

Cette observation, combinée à un compte statistique des galaxies avoisinant le système lentillé (FASNACHT, KOOPMANS et K. C. WONG (2011)), permet d'estimer la convergence extrinsèque au plan de la lentille. On estime ses trois premiers moments à partir des résultats de SUYU et al. (2013) (figure 6 de l'article), soit la moyenne  $\mu_\kappa = 0.1$ , la déviation standard  $\sigma_\kappa = 0.042$  et l'asymétrie  $\gamma_\kappa = 0.8$ .

## 5 Inférence

Pour l'inférence des paramètres de la lentille, de la source et de la distance caractéristique du délai temporel, on choisit d'utiliser le module *open-source*



**Figure 2:** Prétraitement de l'image et modélisation du bruit.

**Lenstronomy** (BIRRER et AMARA, 2018). Dans la section suivante, on résume la théorie de probabilité sur laquelle la modélisation est basée, les stratégies de modélisations employées et les résultats intermédiaires de l'inférence jointe.

### 5.1 Inférence jointe

L'inférence jointe des paramètres du modèle de la lentille  $\mathcal{M}$ , du modèle de la source  $\mathcal{S}$  et de la distance caractéristique du délai temporel  $D_{\Delta t}$  est fait à partir d'un échantillonnage de la distribution *a posteriori*  $P(D_{\Delta t}, \mathcal{M}, \mathcal{S} \mid \Delta t_{1:3}, \mathbf{d}_{\text{ACS}}, \boldsymbol{\theta}_{1:4}^{\text{AGN}})$ . On adopte le point de vue de Bayes pour estimer cette distribution à partir de 3 termes de vraisemblances ainsi que des distributions *a priori* des paramètres qu'on suppose indépendantes (donc séparable) :

$$\begin{aligned}
 P(D_{\Delta t}, \mathcal{M}, \mathcal{S} \mid \Delta t_{1:3}, \mathbf{d}_{\text{ACS}}, \boldsymbol{\theta}_{1:4}^{\text{AGN}}) &\propto \\
 P(\boldsymbol{\theta}_{1:4}^{\text{AGN}} \mid \mathcal{M}, \boldsymbol{\beta}^{\text{AGN}}) &P(\mathbf{d}_{\text{ACS}} \mid \mathcal{M}, \mathcal{S}) \\
 P(\Delta t_{1:3} \mid D_{\Delta t}, \mathcal{M}) &P(\mathcal{M})P(\mathcal{S})P(D_{\Delta t})P(\boldsymbol{\theta}_{1:4}^{\text{AGN}})
 \end{aligned}
 \quad (18)$$

où  $\boldsymbol{\beta}^{\text{AGN}} \in \mathcal{S}$ .

Cette approche nous permet d'adopter l'algorithme MCMC, implémenté dans EMCEE (FOREMAN-MACKEY et al. (2013)) avec la proposition invariante affine de GOODMAN et WEARE (2010), pour estimer la distribution *a posteriori* autour d'un maximum qu'on doit déterminer auparavant à l'aide d'un algorithme

de recherche de maximum comme le *Particle Swarm Optimizer* (PSO, EBERHART et KENNEDY (1995)) implémenté dans **Lenstronomy**.

On doit aussi, avec plusieurs essais-erreurs, estimer le point de départ des paramètres pour l'algorithme PSO qui n'est pas garanti de converger au maximum absolu. On note que le choix du point de départ pour les paramètres a pour effet de régulariser indirectement (ajout d'une distribution *a priori* sur les paramètres) la distribution *a posteriori*. Le choix final est rapporté dans la table 4.

Cette approche est préférée au *Nested Sampling* implémentée dans **Dynesty** (SKILLING (2006), HIGSON et al. (2017)) adoptée précédemment pour un modèle plus simple. Bien que cette seconde méthode est plus précise en principe, elle requiert beaucoup plus d'évaluation des vraisemblances pour explorer tout le volume de la distribution *a priori* pour estimer l'évidence  $\mathcal{Z}$ .

Une fois le maximum trouvé, l'algorithme MCMC est exécuté pour un nombre d'itérations suffisamment élevé pour permettre aux marcheurs aléatoires d'atteindre un état ergodique. Cette analyse requiert en principe un estimé du temps d'autocorrélations des chaînes pour chaque paramètres (GOODMAN et WEARE, 2010). On rapporte cette valeur seulement pour  $D_{\Delta t}$  dans la figure 5.



## 5.2 Vraisemblances

Par supposition, les 4 images du quasar proviennent de la même position dans le plan source jusqu'à une certaine tolérance  $\sigma_\beta$  qu'on définit comme un dixième de la taille d'un pixel dans l'image ACS. Ceci motive le terme de vraisemblance

$$\log P(\beta^{\text{AGN}} | \mathcal{M}, \theta_{1:4}^{\text{AGN}}) \propto -\frac{1}{2} \sum_{i < j}^4 \frac{(\beta(\theta_i^{\text{AGN}}) - \beta(\theta_j^{\text{AGN}}))^2}{\sigma_\beta^2}. \quad (19)$$

où on note l'ensemble des paramètres de la lentille  $\mathcal{M} = \{\theta_E, \gamma', q, \phi, \theta_0, \gamma_{\text{ext}}, \phi_{\text{ext}}\}$  où  $\phi$  et  $\theta_0$  correspondent à l'orientation de l'axe principale et au centre du champ de convergence respectivement. Cette vraisemblance ne contraint pas la position de la source  $\beta^{\text{AGN}} = \beta(\theta_{1:4}^{\text{AGN}})$  à correspondre à un point intérieur à la caustique tangentielle du modèle de la lentille. On doit donc vérifier *a posteriori* que la position du quasar prédite par le modèle produit 4 images dans le plan de la lentille.

Comme la position des 4 images du quasar est incertaine, on doit introduire un paramètre de nuisance  $\epsilon_{1:4} \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{1} d\theta^2)$  qui perturbe les positions  $\theta_{1:4}^{\text{AGN}}$  autour de leur valeurs mesurés (avec DAOSTARFINDER de STETSON (1987)) durant l'inférence. Ce paramètre est marginalisé lors de l'extraction des résultats.

Les données provenant de l'image  $\mathbf{d}_{\text{ACS}}$  apportent un ensemble de contraintes supplémentaires aux paramètres de la lentille  $\mathcal{M}$  via la forme de l'anneau d'Einstein. Ces données permettent aussi d'ajuster un modèle formel pour la source (deux profils de Sérsic et un quasar qui partagent la même position) qu'on note par l'ensemble  $\mathcal{S}$ . Comme le compte d'électron dans chaque pixel considéré atteint une valeur suffisamment élevé, le bruit de Poisson tend à être distribué selon une distribution gaussienne et donc

$$\log P(\underbrace{\mathbf{d}_{\text{ACS}}}_{\mathcal{D}} | \mathcal{M}, \mathcal{S}) \propto -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} \frac{(d_{\text{ACS},i} - d_i(\mathcal{M}, \mathcal{S}))^2}{\sigma_{\text{ACS},i}^2}, \quad (20)$$

où

$$\mathbf{d}(\mathcal{M}, \mathcal{S}) = \Pi * \mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\mathcal{S}) + \Pi * \sum_{i=1}^4 \mathbf{a}_i(\theta_i^{\text{AGN}}). \quad (21)$$

On a défini l'opérateur de la lentille comme  $\mathbf{L}_{\mathcal{M}}$  et la fonction d'étalement du point comme  $\Pi$ . Pour accélérer cette partie de l'inférence, on applique un masque aux

données pour ne sélectionner que les pixels qui ont un signal-sur-bruit d'au moins 2. On sélectionne ainsi  $|\mathcal{D}| = 10523$  pixels sur les  $175^2$  pixels de l'image ACS.

Comme  $\mathcal{S}$  est un modèle analytique, la stratégie pour calculer l'intensité  $\mathbf{L}_{\mathcal{M}}(\mathcal{S})$  est de performer l'équation (5) pour une grille de points  $\theta_{:|\mathcal{D}|}$  et calculer la réponse du modèle directement à partir des points  $\beta_{:|\mathcal{D}|}$  obtenus. Cette approche est beaucoup plus rapide et stable que de performer le tracé des rayons lumineux dans la direction inverse.

Le terme de vraisemblance des délai temporels fait utilisation de l'équation (14) et des résultats de la table 1 :

$$\log P(\Delta t_{1:3} | D_{\Delta t}, \mathcal{M}) \propto -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{(\Delta t_i - \Delta t(D_{\Delta t}, \Delta \Psi_{\text{Fermat},i}))^2}{\sigma_{\Delta t,i}^2}. \quad (22)$$

## 6 Résultats et discussion

Les contraintes estimées lors de l'estimate MCMC des distribution *a posteriori* ou durant l'optimisation avec Galfit sont présentés dans la table 4. On ne présente que les résultats lié à géographie de la lentille. Pour une analyse de la photométrie du système, le lecteur peut se référer au travail de SUYU et al. (2013) et TEWES et al. (2013).

Pour ce travail, on utilise un point de référence différent de celui utilisé par SUYU et al. (2013), ainsi les paramètres comparés dans la table 4 sont seulement ceux qui ne dépendent pas du système de coordonnées.

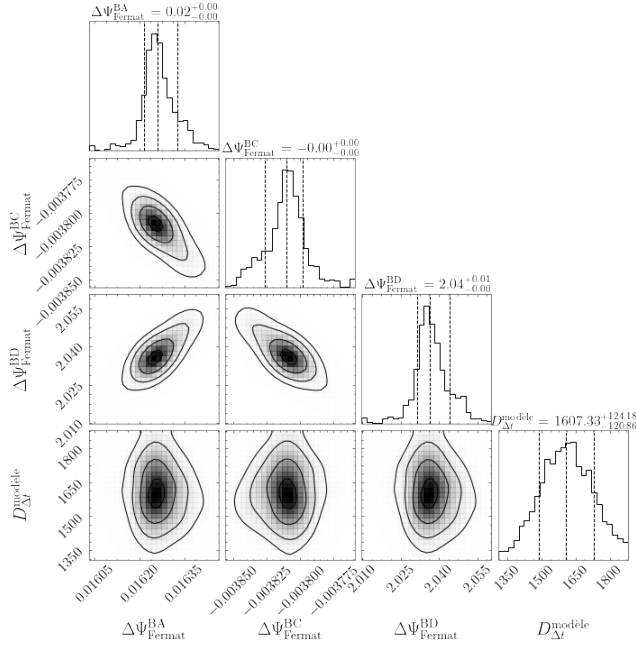
On doit noter la valeur du rayon d'Einstein qui diffère largement de celle reporté par SUYU et al. (2013). En principe, ce paramètre est assez indépendant et bien ajusté par l'anneau d'Einstein du système. Notre valeur est en accord avec le travail plus récent de BIRRER, AMARA et REFREGIER (2016) qui utilise le même module pour ajuster les paramètres de la lentille sur les données. Cette analyse note que la taille angulaire du bulbe de la source joue un rôle important sur les paramètres estimés et leurs biais statistique. Notre analyse diffère de façon cruciale de celle de SUYU et al. (2013) au niveau de la forme assumée pour la source. Où nous utilisons un modèle paramétrique, SUYU et al. (2013) utilisent une reconstruction pixelisée (non-paramétrique) de la source.

Les potentiels de Fermat et la distance caractéristique  $D_{\Delta t}^{\text{modèle}}$  sont marginalisés de l'ensemble de paramètres et présentés dans la figure 4. On rapporte les trois premiers moments de la distribution des potentiels de Fermat dans la table 3. Ces résultats sont

utilisés pour faire abstraction des modèles  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{S}$  et permettre à Charles Wilson de reproduire nos résultats.

(arcsec <sup>2</sup> )	Moyenne	Déviation standard	Asymétrie
$\Delta\Psi_{\text{Fermat}}^{\text{BA}}$	0.01626	$7.05 \times 10^{-5}$	0.0385
$\Delta\Psi_{\text{Fermat}}^{\text{BC}}$	-0.00381	$1.70 \times 10^{-5}$	-0.0673
$\Delta\Psi_{\text{Fermat}}^{\text{BD}}$	2.0371	0.00824	0.0334

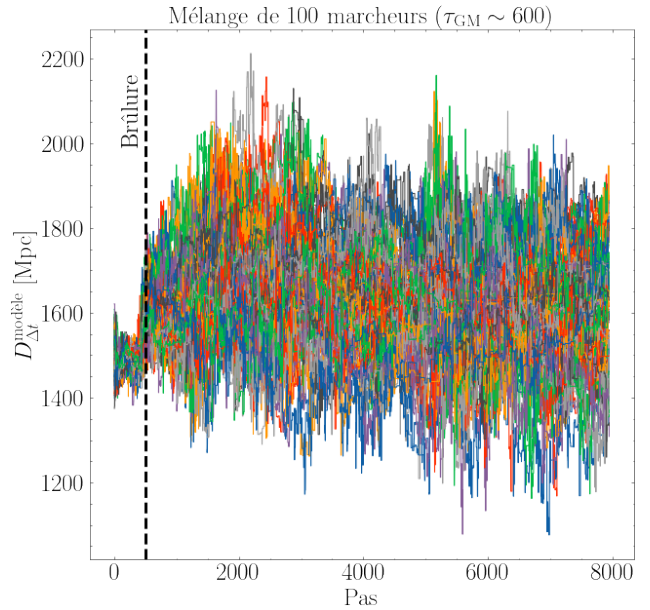
**Table 3:** Trois premier moments de la distribution marginalisée des potentiels de Fermat mesurés (voir figure 4).



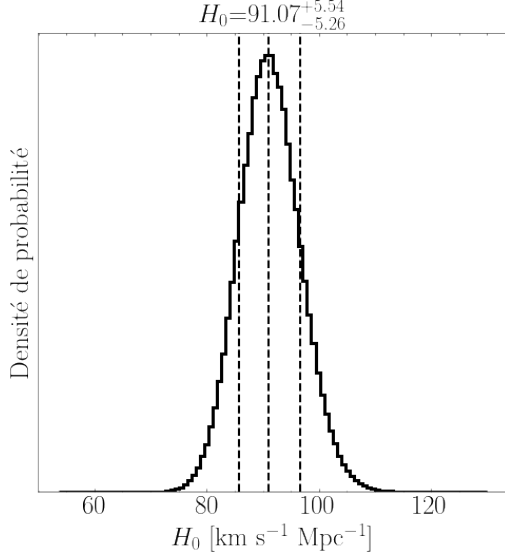
**Figure 4:** Contraintes cosmographiques sur le système RXJ1131-1231. L’ajustement d’un KDE est adoucie par un facteur de bande  $h = 2$ . Les contours équivalents aux 16<sup>e</sup>, 50<sup>e</sup> et 84<sup>e</sup> quantiles sont affichés sur 98% de la masse des distributions jointes. Ces ajustements sont fait pour adoucir les modes *pirates* provenant de chaînes MCMC qui n’ont pas atteint l’état ergodique.

On approxime la distribution postérieure de  $D_{\Delta t}^{\text{modèle}}$  par ses trois premiers moments pour estimer  $D_{\Delta t}$  par l’équation (16). C’est-à-dire qu’on pèse les échantillons MCMC de  $D_{\Delta t}^{\text{modèle}}$  et les échantillons simulés de  $\kappa_{\text{ext}}$  par le produit de leur distribution respective (Pearson type III). Les paramètres cosmologiques  $\Omega_m$  et  $\Omega_\Lambda$  utilisés pour calculer les distances de diamètres angulaires (équation (15)) sont pris comme étant fixent et égal à leur valeur estimé par la COLLABORATION PLANCK (2018). L’incertitude sur leur valeur n’a qu’un impact minimal sur la valeur de  $H_0$  obtenu. Une étude plus détaillé de l’impact de la cosmologie sur la valeur de

la constante de Hubble obtenu peut être trouvée dans l’article de SUYU et al. (2013) ainsi que la revue de TREU (2010). La distribution obtenue est présentée dans la figure 6.



**Figure 5:** Chaînes MCMC des marcheurs projeté sur le paramètre  $D_{\Delta t}^{\text{modèle}}$ . La brûlure réfère au pas où les données sont enregistrées pour déterminer la distribution *a posteriori*. Les chaînes sont bien mélangées comme en témoigne l’inspection visuelle. Toutefois l’analyse de convergence échoue car les chaînes ne sont pas assez longues pour estimer le temps d’autocorrélation avec l’estimateur de GOODMAN et WEARE (2010).



**Figure 6:** Distribution *a posteriori* de la constante de Hubble estimé avec  $D_{\Delta t}$  et les paramètres cosmologiques de la COLLABORATION PLANCK (2018). Les lignes verticales correspondes aux 16<sup>e</sup>, 50<sup>e</sup> et 84<sup>e</sup> quantiles.

Les distributions jointes et marginalisées des paramètres de la lentilles sont présentés dans la figure 7. La médiane des distributions marginalisée et les incertitudes correspondant à 68% de la masse sont présentées et comparées dans la table 4.

On note la différence de  $2.1\sigma$  entre la valeur  $D_{\Delta t}^{\text{modèle}}$  qu'on rapporte et celle rapportée par SUYU et al. (2013) (table 4). Bien que cette différence ne soit pas statistiquement significative, il est intéressant de soulever que le biais observé par notre analyse pousse la distance caractéristique vers des valeurs plus petites (et donc inversement  $H_0$  vers des valeurs plus grandes). Ce biais est aussi représenté par l'asymétrie positive de la distribution marginalisée de  $H_0$  (figure 6).

On formule notre hypothèse sur la nature de ce biais en suivant l'analyse poussé de BIRRER, AMARA et REFREGIER (2016) sur la dégénérescence de masse et l'importance de la modélisation de la cinématique stellaire. Les auteurs estiment que la distribution *a priori* sur les paramètres du profil de HERNQUIST (1990) est responsable d'environ 7.5% du budget d'erreur sur  $H_0$ , soit environ la taille du biais que nous observons entre la valeur déterminée par cette étude et la valeur rapportée par SUYU et al. (2013).

Notre estimé de la constante de Hubble  $91.07^{+5.54}_{-5.26}$  (figure 6) atteint une précision de 6% similaire à celle rapportée par SUYU et al. (2013), soit 4.0% pour leur estimé avec un univers  $\Lambda$ CDM. Puisqu'on fait des hypothèses simplificatrices pour le modèle du champ de convergence et le modèle de la source, on s'attend à ce

que notre estimé de l'incertitude soit plus grand que celui rapporté par SUYU et al. (2013). Il est très probable que notre étude surestime la précision puisque la vraisemblance modélisant la cinématique stellaire n'est pas prise en compte durant l'inférence des paramètres.

## 7 Conclusion

Nous avons performé une reconstruction paramétrique des profils de lumières des galaxies G et S et de la source lentillé, ainsi qu'une reconstruction paramétrique d'un champ de convergence elliptique à loi de puissance adoucie pour estimer les potentiels de Fermat qui donnent lieu aux 4 images du quasar dans l'image du télescope Hubble du système RXJ1131-1231.

Combiné avec l'estimé des délais temporels et de la masse dans la ligne de visée  $\kappa_{\text{ext}}$ , nous avons fourni un estimé de la constante de Hubble  $H_0 = 91.07^{+5.54}_{-5.26}$  avec une incertitude statistique estimé à 6%. La valeur rapportée diffère de celle rapportée par SUYU et al. (2013) par  $2.1\sigma$ , ce qui soulève le besoin d'estimer les incertitudes systématiques dans notre analyse et de modéliser la cinématique stellaire du système.

## Références

- BARKANA, Rennan (1998). « Fast Calculation of a Family of Elliptical Gravitational Lens Models ». Dans : *The Astrophysical Journal* 502.2, p. 531-537. ISSN : 0004-637X. DOI : [10.1086/305950](https://doi.org/10.1086/305950). arXiv : [9802002](https://arxiv.org/abs/9802002) [[astro-ph](#)].
- BIRRER, Simon et Adam AMARA (2018). « lenstronomy : Multi-purpose gravitational lens modelling software package ». Dans : *Physics of the Dark Universe* 22, p. 189-201. ISSN : 22126864. DOI : [10.1016/j.dark.2018.11.002](https://doi.org/10.1016/j.dark.2018.11.002). arXiv : [1803.09746](https://arxiv.org/abs/1803.09746).
- BIRRER, Simon, Adam AMARA et Alexandre REFREGIER (nov. 2016). « The mass-sheet degeneracy and time-delay cosmography : Analysis of the strong lens RXJ1131-1231 ». Dans : *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2016.8. ISSN : 14757516. DOI : [10.1088/1475-7516/2016/08/020](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2016/08/020). arXiv : [1511.03662](https://arxiv.org/abs/1511.03662).
- CASERTANO, Stefano et al. (2000). « WFPC2 Observations of the Hubble Deep Field South ». Dans : *The Astronomical Journal* 120.6, p. 2747-2824. ISSN : 00046256. DOI : [10.1086/316851](https://doi.org/10.1086/316851).
- COLLABORATION PLANCK (2018). « Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck ». Dans : arXiv : [1807.06205](https://arxiv.org/abs/1807.06205).
- DE VAUCOULEURS, Gerard (1948). « Recherches sur les Nébuleuses Extragalactiques ». Dans : *Annales d'Astrophysique* 11, p. 247. ISSN : 0365-0499.



- EBERHART, Russell et James KENNEDY (1995). « New optimizer using particle swarm theory ». Dans : *Proceedings of the International Symposium on Micro Machine and Human Science*. IEEE, p. 39-43. DOI : [10.1109/mhs.1995.494215](#).
- FASSNACHT, C. D., L. V.E. KOOPMANS et K. C. WONG (fév. 2011). « Galaxy number counts and implications for strong lensing ». Dans : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 410.4, p. 2167-2179. ISSN : 00358711. DOI : [10.1111/j.1365-2966.2010.17591.x](#).
- FOREMAN-MACKEY, Daniel et al. (2013). *emcee : The MCMC Hammer*. Rapp. tech. arXiv : [1202.3665v4](#).
- GOODMAN, Jonathan et Jonathan WEARE (jan. 2010). « Ensemble samplers with affine invariance ». Dans : *Communications in Applied Mathematics and Computational Science* 5.1, p. 65-80. ISSN : 21575452. DOI : [10.2140/camcos.2010.5.65](#).
- HERNQUIST, Lars (1990). « An analytical model for spherical galaxies and bulges ». Dans : *The Astrophysical Journal* 356, p. 359. ISSN : 0004-637X. DOI : [10.1086/168845](#).
- HIGSON, Edward et al. (2017). *Dynamic nested sampling : An improved algorithm for parameter estimation and evidence calculation*. Rapp. tech. arXiv : [1704.03459v4](#).
- HUBBLE, E. P. (mar. 1929). « A spiral nebula as a stellar system, Messier 31. » Dans : *The Astrophysical Journal* 69, p. 103-158. DOI : [10.1086/143167](#).
- KEETON, Charles R (2001). « A Catalog of Mass Models for Gravitational Lensing ». Dans : arXiv : [0102341 \[astro-ph\]](#).
- KOEKEMOER, A M et al. (2007). « The COSMOS Survey : Hubble Space Telescope Advanced Camera for Surveys Observations and Data Processing ». Dans : *The Astrophysical Journal Supplement Series* 172.1, p. 196-202. ISSN : 0067-0049. DOI : [10.1086/520086](#). arXiv : [0703095 \[astro-ph\]](#).
- MASSEY, Richard et al. (jan. 2010). « Pixel-based correction for Charge Transfer Inefficiency in the Hubble Space Telescope Advanced Camera for Surveys ». Dans : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 401.1, p. 371-384. ISSN : 00358711. DOI : [10.1111/j.1365-2966.2009.15638.x](#).
- MILLON, Martin et al. (sept. 2020). « PyCS3 : A Python toolbox for time-delay measurements in lensed quasars ». Dans : *Journal of Open Source Software* 5.53, p. 2654. ISSN : 2475-9066. DOI : [10.21105/joss.02654](#).
- OKE, J. B. et al. (avr. 1995). « The Keck Low-Resolution Imaging Spectrometer ». Dans : *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 107.710, p. 375. ISSN : 0004-6280. DOI : [10.1086/133562](#).
- PENG, Chien Y. et al. (juil. 2002). « Detailed Structural Decomposition of Galaxy Images ». Dans : *The Astrophysical Journal* 124.1, p. 266-293. ISSN : 00046256. DOI : [10.1086/340952](#). arXiv : [0204182 \[astro-ph\]](#).
- (2010). « Detailed decomposition of galaxy images. II. beyond axisymmetric models ». Dans : *Astronomical Journal* 139.6, p. 2097-2129. ISSN : 00046256. DOI : [10.1088/0004-6256/139/6/2097](#). arXiv : [0912.0731](#).
- REFSDAL, S. et H. BONDI (1964). « The Gravitational Lens Effect ». Dans : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 128.4, p. 295-306. ISSN : 0035-8711. DOI : [10.1093/mnras/128.4.295](#).
- RIESS, Adam G., Stefano CASERTANO et al. (2019). « Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond  $\Lambda$ CDM ». Dans : *The Astrophysical Journal* 876, p. 85. DOI : [10.3847/1538-4357/ab1422](#).
- RIESS, Adam G., Lucas M. MACRI et al. (juil. 2016). « A 2.4% DETERMINATION OF THE LOCAL VALUE OF THE HUBBLE CONSTANT ». Dans : *The Astrophysical Journal* 826.1, p. 56. ISSN : 1538-4357. DOI : [10.3847/0004-637x/826/1/56](#). arXiv : [1604.01424](#).
- SÉRSIC, Jose Luis (1968). *Atlas de galaxias australes*.
- SHAPIRO, Irwin I (1964). « Fourth test of general relativity ». Dans : *Physical Review Letters* 13.26, p. 789-791. ISSN : 00319007. DOI : [10.1103/PhysRevLett.13.789](#).
- SKILLING, John (déc. 2006). « Nested sampling for general Bayesian computation ». Dans : *Bayesian Analysis* 1.4, p. 833-860. ISSN : 19360975. DOI : [10.1214/06-BA127](#).
- SLUSE, D. et al. (août 2003). « A quadruply imaged quasar with an optical Einstein ring candidate : 1RXS J113155.4-123155 ». Dans : *Astronomy & Astrophysics* 406.2, p. L43-L46. ISSN : 0004-6361. DOI : [10.1051/0004-6361:20030904](#).
- STETSON, Peter B. (mar. 1987). « DAOPHOT - A computer program for crowded-field stellar photometry ». Dans : *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 99, p. 191. ISSN : 0004-6280. DOI : [10.1086/131977](#).
- SUYU, S. H. et al. (2013). « Two accurate time-delay distances from strong lensing : Implications for cosmology ». Dans : *Astrophysical Journal* 766.2, p. 70. ISSN : 15384357. DOI : [10.1088/0004-637X/766/2/70](#). arXiv : [1208.6010](#).
- TESSORE, Nicolas et R. BENTON METCALF (août 2015). « The elliptical power law profile lens ». Dans : *Astronomy and Astrophysics* 580, p. 79. ISSN : 14320746. DOI : [10.1051/0004-6361/201526773](#). arXiv : [1507.01819](#).
- TEWES, M. et al. (2013). « COSMOGRAIL : The COSmological MONitoring of GRAvItational Lenses : Me delays and 9-yr optical monitoring of the lensed quasar RX J1131-1231 ». Dans : *Astronomy and Astrophysics* 556. ISSN : 00046361. DOI : [10.1051/0004-6361/201220352](#). arXiv : [1208.6009](#).
- TREU, Tommaso (2010). « Strong lensing by galaxies ». Dans : *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 48, p. 87-125. ISSN : 00664146. DOI : [10.1146/annurev-astro-081309-130924](#). arXiv : [1003.5567](#).
- WONG, Kenneth C. et al. (2020). « H0LiCOW-XIII. A 2.4 per cent measurement of  $H_0$  from lensed quasars : 5.3 $\sigma$  tension between early-and late-Universe probes ». Dans : *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 498.1, p. 1420-1439. ISSN : 13652966. DOI : [10.1093/mnras/stz3094](#). arXiv : [1907.04869v2](#).

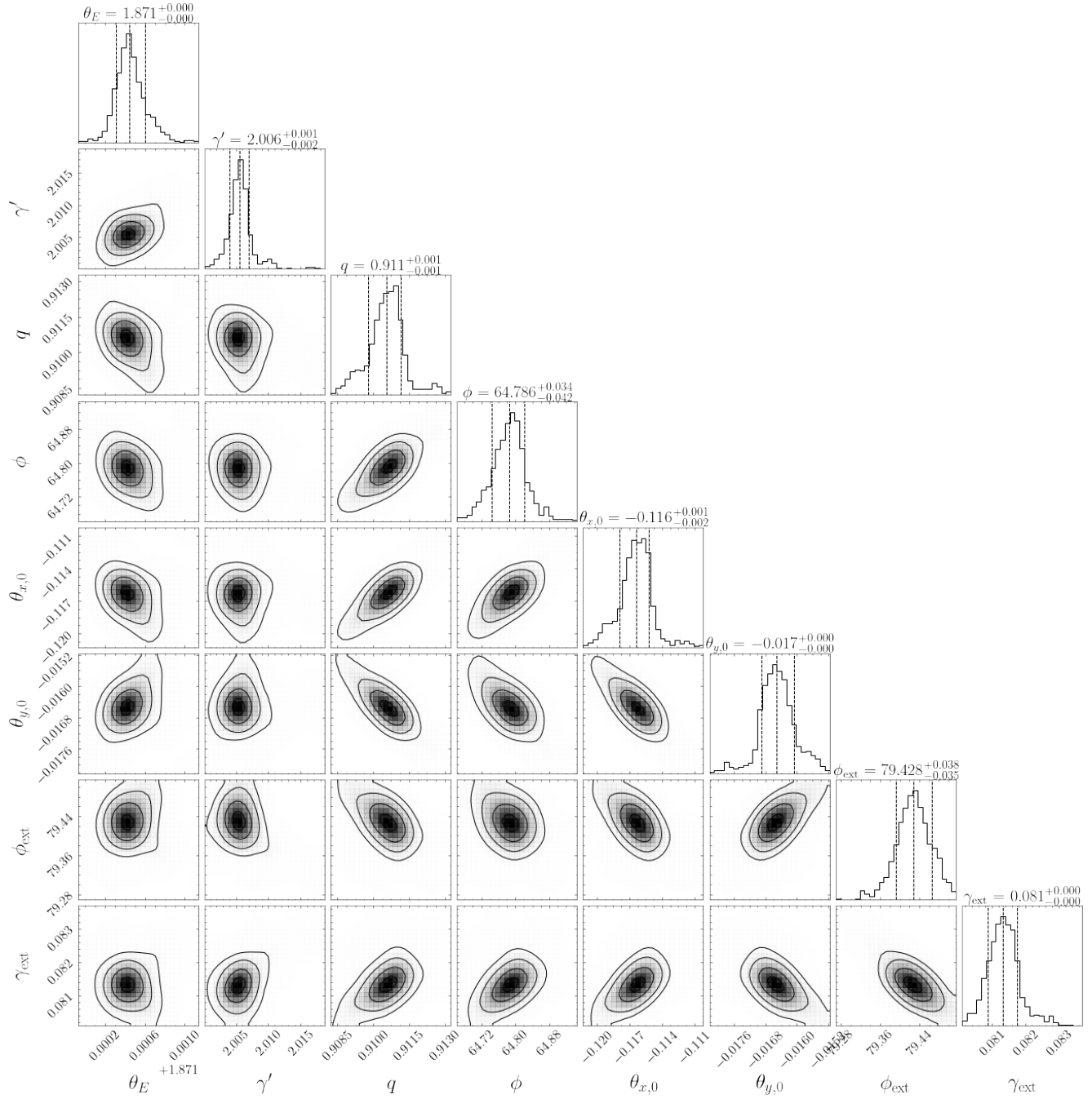


Figure 7

Description	Paramètre	Population initiale (100 particules)	Contrainte marginalisée ou optimisée	SUYU et al. (2013)
Distribution de masse la lentille				
Rayon d'Einstein [arcsec]	$\theta_E$	$\mathcal{N}(1.5, 0.3)$	$1.8714^{+0.0002}_{-0.0001}$	$1.64^{+0.01}_{-0.02}$
Pente logarithmique	$\gamma'$	$\mathcal{N}(2, 0.2)$	$2.005^{+0.002}_{-0.002}$	$1.95^{+0.01}_{-0.04}$
Ratio d'axe	$q$	$\mathcal{N}_{e_i}(0.1, 0.1)$	$0.9106^{+0.0006}_{-0.0008}$	$0.763^{+0.005}_{-0.008}$
Orientation de l'axe principal [°]	$\phi$	$\mathcal{U}(0, 360)$	$64.78^{+0.03}_{-0.04}$	
Centre de masse en $\theta_x$ [arcsec]	$\theta_{x,0}$	$\mathcal{N}(0, 0.1)$	$-0.116^{+0.001}_{-0.002}$	
Centre de masse en $\theta_y$ [arcsec]	$\theta_{y,0}$	$\mathcal{N}(0, 0.1)$	$-0.0165^{+0.0004}_{-0.0004}$	
Magnitude du cisaillement	$\gamma_{\text{ext}}$	$\mathcal{N}_{\gamma_i}(0.01, 0.1)$	$0.0813^{+0.0004}_{-0.0005}$	$0.089^{+0.006}_{-0.006}$
Orientation du cisaillement [°]	$\phi_{\text{ext}}$	$\mathcal{U}(0, 360)$	$79.428^{+0.038}_{-0.035}$	
Profils de Sérsic de G (Optimisé avec <b>GalFit</b> , $\chi^2 = 3.83$ )				
Ratio d'axe du disque	$q_{G1}$	—	$0.752 \pm 0.001$	$0.878^{+0.004}_{-0.003}$
Orientation du disque [°]	$\phi_{G1}$	—	$-65.9 \pm 0.3$	
Indice de Sérsic du disque	$n_{G1}$	—	$3.94 \pm 0.03$	$0.93^{+0.03}_{-0.03}$
Rayon effectif du disque [arcsec]	$R_{\text{eff},G1}$	—	$5.27 \pm 0.09$	$2.49 \pm 0.01$
Ratio d'axe du bulbe	$q_{G2}$	—	$0.856 \pm 0.004$	$0.849^{+0.004}_{-0.004}$
Orientation du bulbe [°]	$\phi_{G2}$	—	$5.21 \pm 1.4$	
Indice de Sérsic du bulbe	$n_{G2}$	—	$1.29 \pm 0.01$	$1.59^{+0.03}_{-0.03}$
Rayon effectif du bulbe [arcsec]	$R_{\text{eff},G2}$	—	$0.212 \pm 0.002$	$0.362 \pm 0.009$
Paramètres de la source				
Position du quasar en $\theta_x$ [arcsec]	$\beta_x^{\text{AGN}}$	—	$0.505^{+0.04}_{-0.04}$	—
Position du quasar en $\theta_y$ [arcsec]	$\beta_y^{\text{AGN}}$	—	$-0.182^{+0.001}_{-0.001}$	—
Rayon effectif du disque [arcsec]	$R_{\text{eff},S1}$	$\mathcal{N}(1, 0.1)$	$0.105^{+0.001}_{-0.001}$	—
Indice de Sérsic du disque	$n_{S1}$	$\mathcal{N}(1, 0.5)$	$0.562^{+0.01}_{-0.009}$	—
Ratio d'axe du disque	$q_{S1}$	$\mathcal{N}_{e_i}(0, 0.2)$	$0.791^{+0.005}_{-0.005}$	—
Orientation du disque [°]	$\phi_{S1}$	$\mathcal{U}(0, 360)$	$-14.9^{+1}_{-0.8}$	—
Rayon effectif du bulbe [arcsec]	$R_{\text{eff},S2}$	$\mathcal{N}(1, 0.1)$	$0.838^{+0.007}_{-0.007}$	—
Indice de Sérsic du bulbe	$n_{S2}$	$\mathcal{N}(1, 0.5)$	0.5	—
Ratio d'axe du bulbe	$q_{S2}$	$\mathcal{N}_{e_i}(0, 0.2)$	$0.461^{+0.003}_{-0.003}$	—
Orientation du bulbe [°]	$\phi_{S2}$	$\mathcal{U}(0, 360)$	$-32.6^{+0.1}_{-0.1}$	—
Paramètre cosmographique				
Distance caractéristique du délai temporel [Mpc]	$D_{\Delta t}^{\text{modèle}}$	$\mathcal{U}(500, 10^4)$	$1631^{+116}_{-115}$	$1883^{+89}_{-85}$

**Table 4:** Paramètres optimisées et marginalisés du système RXJ1131-1231.