Lista Markov

Nome: Alexandre de Araújo

Email: alexandre.araujo@dtel.inatel.br

1- **a) Diagrama de transição de estados**

Primeiro, identificamos as salas e suas conexões com base na descrição do labirinto. O rato começa na sala 0 e pode mover-se para as salas vizinhas com igual probabilidade. A sala 5 é absorvente (o rato não sai mais de lá uma vez que entra).

O diagrama de transição de estados é representado da seguinte forma:

Sala 0: pode ir para as salas 1 e 2.

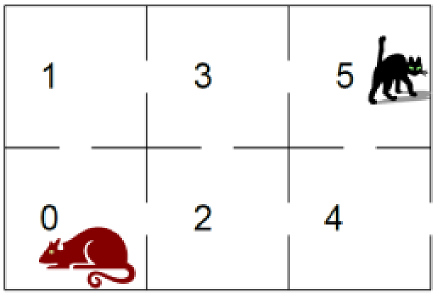
Sala 1: pode ir para as salas 0 e 3.

Sala 2: pode ir para as salas 0, 3 e 4.

Sala 3: pode ir para as salas 1, 2 e 5.

Sala 4: pode ir para as salas 2, 5 e saída.

Sala 5: pode ir para as salas 3, 4.



b) Matriz de transição de 1 passo

A matriz P é uma matriz 6 x 6.

$$\boldsymbol{P} = \begin{matrix} \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{0} \end{matrix}$$

c) Probabilidade de o rato morrer após 3 horas

Para encontrar a probabilidade de o rato estar na sala 5 (onde morre) após 3 horas, precisamos elevar a matriz de transição *P* à terceira potência, P^3, e então observar o elemento correspondente à transição do estado 0 (sala inicial) para o estado 5 (sala de absorção).

Primeiro, calculamos P^3:

$$P^3 = P \cdot P \cdot P$$

Depois de calcular P^3, encontramos a entrada $P\frac{3}{05}$, que é a probabilidade de transição do estado 0 para o estado 5 após 3 passos.

d) Número médio de passos para a absorção

Para encontrar o número médio de passos até a absorção, precisamos calcular o vetor de tempo esperado até a absorção ***t*** . O vetor ***t*** satisfaz o sistema de equações lineares:

$$\boldsymbol{t} = 1 + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{t}$$

Onde ***Q*** é a submatriz de *P* correspondente aos estados transitórios (removendo os estados absorventes).

Nesse caso, removemos a linha e a coluna correspondente ao estado 5 de *P*, resultando em:

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

O vetor **1** é um vetor coluna de uns com o mesmo tamanho de ***t***:

$$1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Resolvendo para ***t***:

$$\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q})^{-1}\, \mathbf{1}$$

Vamos calcular cada passo detalhadamente. Primeiro, calculamos $\boldsymbol{P^3}$:

$$P^3 = \begin{vmatrix} 0{,}17 & 0{,}17 & 0{,}22 & 0{,}06 & 0{,}22 & 0{,}17 \\ 0{,}22 & 0{,}06 & 0{,}06 & 0{,}22 & 0{,}06 & 0{,}39 \\ 0{,}11 & 0{,}11 & 0{,}06 & 0{,}17 & 0{,}28 & 0{,}28 \\ 0{,}06 & 0{,}17 & 0{,}17 & 0{,}11 & 0{,}06 & 0{,}44 \\ 0{,}06 & 0{,}11 & 0{,}22 & 0{,}17 & 0{,}11 & 0{,}33 \\ 0{,}11 & 0{,}22 & 0{,}22 & 0{,}17 & 0{,}17 & 0{,}11 \end{vmatrix}$$

A probabilidade de o rato estar na sala 5 após 3 horas é $P\frac{3}{05}$:

Então, a probabilidade de o rato morrer após 3 horas é 17%.

Para o tempo médio até a absorção, calculamos:

$$\mathrm{I} - \mathrm{Q} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Inverso de ***I*–*Q***:

$$(\mathrm{I} - \mathrm{Q})-^{1} = \begin{vmatrix} 3{,}75 & 2{,}5 & 2{,}5 & 1{,}25 & 1{,}250 \\ 2{,}5 & 3{,}75 & 1{,}25 & 2{,}5 & 1{,}25 \\ 2{,}5 & 1{,}25 & 3{,}75 & 2{,}5 & 2{,}5 \\ 1{,}25 & 2{,}5 & 2{,}5 & 3{,}75 & 1{,}25 \\ 1{,}25 & 1{,}25 & 2{,}5 & 1{,}25 & 3{,}75 \end{vmatrix}$$

Multiplicando por 1:

$$\boldsymbol{t} = \begin{vmatrix} 11{,}25 \\ 11{,}25 \\ 12{,}25 \\ 11{,}25 \\ 11{,}25 \end{vmatrix}$$

O tempo médio até a absorção a partir da sala 0 é 11.25 horas.

---

a) Diagrama de transição de estados

C_0 representa o compartimento 0.

C_1 representa o compartimento 1.

C_2 representa o compartimento 2.

C_3 representa o compartimento 3.

A transição entre os estados é governada pelas seguintes regras:

- A probabilidade de a mosca ficar no mesmo compartimento é 0.4.
- A probabilidade de a mosca ir para um compartimento vizinho é 0.3 para cada vizinho.

Para facilitar a visualização, o diagrama de transição dos estados é como segue:

```
 S0      S1      S2      S3
(A) <->  1  <->  2  <->  (A)
```

b) Matriz de transição

A matriz de transição *P* é dada pelas probabilidades de transição entre os estados. Cada entrada *Pij* representa a probabilidade de transição do estado ***i*** para o estado ***j***:

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

c) Probabilidade de cair em uma teia exatamente no terceiro minuto

Para encontrar a probabilidade de a mosca cair em uma teia exatamente no terceiro minuto, dado que ela começou no estado C_1, devemos calcular a probabilidade de transição de C_1 para C_0 ou C_3 em 3 passos.

Vamos usar a matriz de transição para calcular isso. Primeiro, precisamos elevar a matriz de transição *P* à terceira potência P^3:

$$P^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}423 & 0{,}361 & 0{,}177 & 0{,}039 \\ 0{,}039 & 0{,}177 & 0{,}361 & 0{,}423 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Agora, encontramos a probabilidade de a mosca estar em C_0 ou C_3 no terceiro minuto, dado que começou em C_1:

$$P(X_3 = C_0|X_0 = C_1) + P(X_3 = C_3|X_0 = C_1) = P\frac{3}{10} + P\frac{3}{10} = 0{,}423 + 0{,}039$$
$$= 0{,}462$$

d) Número médio de passos para a absorção

Para encontrar o número médio de passos para a absorção, podemos usar o conceito de tempo de absorção esperado em uma cadeia de Markov. Considerando que C_1 e C_2 são estados transitórios, precisamos calcular o inverso da matriz de fundamental *(I−Q)*, onde *Q* é a submatriz de *P* correspondente aos estados transitórios:

$$Q = \begin{vmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{vmatrix}$$

A matriz identidade *I* para estados transitórios é:

$$I = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

Então, *(I−Q)*:

$$I - Q = \begin{matrix} 0,6 & -0,3 \\ -0,3 & 0,6 \end{matrix}$$

A inversa de *I−Q*:

$$(I - Q) - {}^{1} = \begin{matrix} 2,0 & 1,0 \\ 1,0 & 2,0 \end{matrix}$$

A soma das entradas na coluna correspondente ao estado C_1 (primeira coluna) nos dá o número esperado de passos para absorção quando a mosca começa em C_1:

$$E(S_1) = 2,0 + 1,0 = 3,0\, passos$$

e) A probabilidade de ser absorvido associada a cada estado

Para encontrar as probabilidades de absorção associadas a cada estado, usamos a matriz de absorção R, que é a submatriz de P que corresponde às transições dos estados transitórios para os estados absorventes. Considerando C_1 e C_2 como estados transitórios e C_0 e C_3 como estados absorventes:

$$R = \begin{matrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{matrix}$$

A matriz fundamental F = *(I−Q)*−1:

$$F = \begin{matrix} 2,0 & 1 \\ 1 & 2,0 \end{matrix}$$

A matriz de absorção B = FR:

$$B = \begin{matrix} 2,0 & 1,0 \\ 1,0 & 2,0 \end{matrix} \begin{matrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{matrix} = \begin{matrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,3 & 0,6 \end{matrix}$$

As probabilidades de absorção, dado que a mosca começou em C_1:

$$P_{abs}(C_1) = 0,6 \quad 0,3$$

Ou seja, se a mosca começa no compartimento 1:

- A probabilidade de ser absorvida pelo compartimento 0 (teia) é 0.6.
- A probabilidade de ser absorvida pelo compartimento 3 (teia) é 0.3.