

# RepresentationGroup

Alexandre Charland

February 27, 2025

# Chapter 1

## YoungTableau

**Definition 1** (YoungTableau). Un YoungTableau est une fonction des cellules d'un YoungDiagram de taille  $n$  et retourne un naturel de  $0$  à  $n-1$

**Lemma 2** (injYu). *Un YoungTableau est injectif sur les entrées qui sont dans le YoungDiagram*

*Proof.* Par définition d'un YoungTableau □

**Lemma 3** (bijYu). *Un YoungTableau est une bijection entre les cases de son YoungDiagram et les naturels de  $0$  à  $n-1$*

*Proof.* Comme il est injectif et le domaine et codomaine sont finis et ont la même cardinalité. La fonction doit être bijective □

**Definition 4** (Pu).  $P_\mu$  est un sous groupe de  $S_n$ , défini de la façon suivante:  
Un élément de  $P_\mu$  permute les entrées du YoungDiagram si ils sont sur la même rangée.

*Proof.* Il y a trois choses à vérifier.

Le sous-groupe est fermé sous la composition de fonction

Preuve:

Soit  $\alpha, \beta \in P_\mu$ , mq  $\alpha \circ \beta(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j) \rightarrow i.y = j.y$

Comme  $Y_\mu$  est une bijection,  $\exists k \in \mu$  tq  $Y_\mu(k) = \beta(Y_\mu(j))$  Comme  $\beta \in P_\mu$  on a que  $k.y = j.y$

De plus on a que  $\alpha(Y_\mu(k)) = \alpha \circ \beta(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j)$

On peut déduire que  $i.y = k.y = j.y$

L'élément neutre est élément de  $P_\mu$

La preuve découle de l'injectivité de  $Y_\mu$

L'inverse est élément de  $P_\mu$

Soit  $\alpha \in P_\mu$ , mq  $\alpha^{-1} \in P_\mu$

Comme  $\alpha$  est une bijection, on a que  $\alpha^{-1}(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j) \Leftrightarrow Y_\mu(i) = \alpha(Y_\mu(j))$  □

**Definition 5** (Qu).  $Q_\mu$  est un sous groupe de  $S_n$ , défini de la façon suivante:

Un élément de  $Q_\mu$  permute les entrées du YoungDiagram si ils sont sur la même colonne.

*Proof.* La même preuve que Pu □

**Lemma 6** (sectPuQu). *Pour un même YoungTableau, l'intersection de  $P_\mu$  et  $Q_\mu$  est  $1$*

*Proof.* Il faut mq  $P_\mu \cap Q_\mu \subseteq 1$

Soit  $\alpha \in P_\mu \cap Q_\mu$  et  $i \in \mu$

Comme  $Y_\mu$  est bijectif,  $\exists j \in \mu, \alpha(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j)$

$\alpha \in P_\mu \cap Q_\mu$  donc  $i.x = j.x$  et  $i.y = j.y$

Donc  $i=j \rightarrow \alpha(Y_\mu(i)) = Y_\mu(i)$

Donc  $\alpha$  est la fonction id. □

**Definition 7** (PuQu).  $P_\mu Q_\mu := \{g : [0, n-1] \rightarrow [0, n-1] \mid \exists p \in P_\mu \wedge \exists q \in Q_\mu, g = pq\}$

**Lemma 8** (qWellDefined). Soit  $g : [0, n-1] \rightarrow [0, n-1]$  une fonction bijective et  $Y_\mu$  un YoungTableau.

Si  $\forall i, j, k, l \in \mu, i \neq j, g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(k), g(Y_\mu(j)) = Y_\mu(l)$  alors  $i.x \neq j.x \vee k.y \neq l.y$ .

$q : [0, n-1] \rightarrow [0, n-1], q(Y_\mu(i)) = Y_\mu(i.x, Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i).y)$  est bien défini

*Proof.* Il suffit de montré que  $(i.x, Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i).y) \in \mu$ .

TODO Figure it out □

**Lemma 9** (No2FromSameColToSameRow). Soit  $g : [0, n-1] \rightarrow [0, n-1]$  une fonction bijective et  $Y_\mu$  un YoungTableau.

Si  $\forall i, j, k, l \in \mu, i \neq j, g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(k), g(Y_\mu(j)) = Y_\mu(l)$  alors  $i.x \neq j.x \vee k.y \neq l.y$ .

Alors  $g \in P_\mu Q_\mu$

*Proof.* Posons  $q(Y_\mu(i)) := Y_\mu(i.x, (Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i)).y)$ .

Par le lemme qWellDefined, nous avons que  $q$  est bien définit.

Montrons que  $q \in Q_\mu$

Si  $q$  n'est pas injectif alors  $\exists k, l \in \mu$  tq  $k \neq l, q(Y_\mu(k)) = q(Y_\mu(l))$ .

Donc  $Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(k)).x, k.y) = Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(l)).x, l.y)$ .

Comme  $Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu$  est bijectif,  $\exists i, j \in \mu$  tq  $i \neq j, Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(k) = i, Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(l) = j$ .

Donc  $\exists i, j, k, l \in \mu, i \neq j, g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(k), g(Y_\mu(j)) = Y_\mu(l)$  et  $i.x = j.x \wedge k.y = l.y$ .

Contradiction d'hypothèse.

Donc  $q$  est injectif. De plus comme le domaine et codomaine sont finis et de même taille, on a que  $q$  est une bijection. Ainsi  $q \in Q_\mu$ .

Posons  $p(Y_\mu(i)) := Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ q^{-1} \circ Y_\mu(i)).x, i.y)$ .

On remarque  $p \circ q = g$ . Soit  $i \in \mu$ .  $\exists j \in \mu$  tq  $g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j)$ .

Donc  $Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i) = j$

$$p \circ q(Y_\mu(i)) = p(Y_\mu(i.x, (Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i)).y)) = p(Y_\mu(i.x, j.y))$$

$$Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ q^{-1} \circ Y_\mu(i.x, j.y)).x, j.y) = Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i)).x, j.y)$$

$$Y_\mu(j.x, j.y) = Y_\mu(j)$$

Donc  $p$  est bien définit, et  $g \in P_\mu Q_\mu$  □

## Chapter 2

# SpechtModules

**Definition 10** (YoungProjectors). Un Young projector est défini par un YoungDiagram  $\mu$

$$a_\mu := \frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g \in P_\mu} g$$
$$b_\mu := \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{g \in Q_\mu} (-1)^g g$$

Où  $(-1)^g$  est le signe de  $g$

**Definition 11** (YoungSymmetriser). Un Young symmetriser est défini par un YoungDiagram  $\mu$   
 $c_\mu := a_\mu b_\mu$

**Definition 12** (SpechtModules). Soit  $\mu$  un YoungDiagram.

$$V_\mu := \mathbb{C}[S_n]c_\mu$$

$V_\mu$  est appelé un Specht modules.  
Il est un sous-espace de  $\mathbb{C}[S_n]$ .

**Lemma 13** (LinearTransformation).  $\exists l_\mu$  une fonction linéaire tq  
 $\forall g \in \mathbb{C}[S_n], a_\mu g b_\mu = l_\mu(g) c_\mu$

*Proof.* Soit  $g \in \mathbb{C}[S_n]$ .

Si  $g \in P_\mu Q_\mu$ , alors  $\exists p \in P_\mu$  et  $q \in Q_\mu$  tq  $g = pq$

$$a_\mu g b_\mu = \frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g \in P_\mu} g p q \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h \in Q_\mu} (-1)^h$$
$$\frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g \in P_\mu} g p = \frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g' \in P_\mu} g'$$

On peut faire le changement de variable en posant  $g' = gp$  et en utilisant le fait que  $\phi(g) = gp$  est un isomorphisme de groupe. Ainsi les deux sommes sont équivalentes à un réordonnement près.

$$\frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h \in Q_\mu} (-1)^h q h = \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h \in Q_\mu} (-1)^h q h = (-1)^{q^{-1}} \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h' \in Q_\mu} (-1)^{h'} h'$$

$$a_\mu g b_\mu = (-1)^q c_\mu$$

Il ne reste plus à montrer que si  $g \notin P_\mu Q_\mu$  alors  $l_\mu(g)=0$ , car  $g$  ne peut pas être exprimé par  $c_\mu$ .  
Donc il faut mq  $a_\mu g b_\mu=0$  ou de façon équivalente  $a_\mu g b_\mu = -a_\mu g b_\mu$   
Il suffit de trouver  $t \in P_\mu$  tq  $g^{-1}tg \in Q_\mu$  et  $(-1)^t = -1$ , car

$$a_\mu g b_\mu = a_\mu t g b_\mu = a_\mu (g g^{-1}) t g b_\mu = a_\mu g (g^{-1} t g) b_\mu = (-1)^{g^{-1}tg} a_\mu g b_\mu = -a_\mu g b_\mu$$

Plusieurs changements de variables ont été effectués pour "faire apparaître et disparaître" des éléments.  $(-1)^{g^{-1}tg} = (-1)^{g^{-1}} \cdot (-1)^t \cdot (-1)^g = (-1)^g \cdot (-1)^t \cdot (-1)^g = -1$

Par la contraposé du lemme No2FromSameColToSameRow, on a que

$\exists i, j, k, l \in \mu$  tq  $i \neq j, g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(k), g(Y_\mu(j)) = Y_\mu(l), i.x = j.x$  et  $k.y = l.y$ .

Posons  $t : [0, n-1] \rightarrow [0, n-1]$

$$t(n) = \begin{cases} Y_\mu(k) & \text{si } n = Y_\mu(l) \\ Y_\mu(l) & \text{si } n = Y_\mu(k) \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

Par construction,  $t \in P_\mu$  et  $(-1)^t = -1$ . Il suffit de montré que  $g^{-1}tg \in Q_\mu$

$$g^{-1} \circ t \circ g(Y_\mu(i)) = g^{-1} \circ t(Y_\mu(k)) = g^{-1}(Y_\mu(l)) = Y_\mu(j)$$

$$g^{-1} \circ t \circ g(Y_\mu(j)) = g^{-1} \circ t(Y_\mu(l)) = g^{-1}(Y_\mu(k)) = Y_\mu(i)$$

On remarque que si  $m \in \mu \setminus \{i, j\}, g(Y_\mu(m)) \notin \{Y_\mu(k), Y_\mu(l)\}$ . Donc  $t(g(Y_\mu(m)))$  se comporte comme la fonction identité. Ainsi  $g^{-1}tg \in Q_\mu$ . □