RepresentationGroup

Alexandre Charland

February 20, 2025

Chapter 1

YoungTableau

Definition 1 (YoungTableau)**.** Un YoungTableau est une fonction des cellules d'un YoungDiagram de taille n et retourne un naturel de 0 à n-1

Lemma 2 (injYu)**.** *Un YoungTableau est injectif sur les entrés qui sont dans le YoungDiagram*

Proof. Par définition d'un YoungTableau □

Lemma 3 (bijYu)**.** *Un YoungTableau est une bijection entre les case de son YoungDiagram et les naturels de 0 à n-1*

Proof. Comme il est injectif et le domaine et codomaine sont fini et ont la même cardinalité. La fonction doit être bijective □

Definition 4 (Pu)**.** Pu est un sous groupe de S_n, défini de la façon suivante:
Un élément de Pu permute les entré du YoungDiagram si ils sont sur la même rangé.

Proof. Il y a trois choses à vérifier.
Le sous-groupe est fermé sous la composition de fonction
Preuve:
Soit $\alpha, \beta \in P_\mu$, mq $\alpha \circ \beta(Y_\mu(\text{i})) = Y_\mu(\text{j}) \rightarrow$ i.y = j.y
Comme Y_μ est une bijection, $\exists k \in \mu$ tq $Y_\mu(\text{k}) = \beta(Y_\mu(\text{j}))$ Comme $\beta \in P_\mu$ on a que k.y = j.y
De plus on a que $\alpha(Y_\mu(\text{k})) = \alpha \circ \beta(Y_\mu(\text{i})) = Y_\mu(\text{j})$
On peut déduire que i.y = k.y = j.y

L'élement neutre est élément de P_μ
La preuve découle de l'injectivité de Y_μ

L'inverse est élément de P_μ
Soit $\alpha \in P_\mu$, mq $\alpha^{-1} \in P_\mu$
Comme alpha est une bijection, on a que $\alpha^{-1}(Y_\mu(\text{i})) = Y_\mu(\text{j}) \Leftrightarrow Y_\mu(\text{i}) = \alpha(Y_\mu(\text{j}))$ □

Definition 5 (Qu)**.** Pu est un sous groupe de S_n, défini de la façon suivante:
Un élément de Pu permute les entré du YoungDiagram si ils sont sur la même colonne.

Proof. La même preuve que Pu □

Lemma 6 (sectPuQu)**.** *Pour un même YoungTableau, l'intersection de P_μ et Q_μ est* 1

Proof. Il faut mq $P_\mu \cap Q_\mu \subseteq 1$
Soit $\alpha \in P_\mu \cap Q_\mu$ et i $\in \mu$
Comme Y_μ est bijectif, $\exists$ j $\in \mu$, $\alpha(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j)$
$\alpha \in P_\mu \cap Q_\mu$ donc i.x = j.x et i.y = j.y
Donc i=j $\rightarrow \alpha(Y_\mu(i)) = Y_\mu(i)$
Donc alpha est la fonction identité. $\square$

Definition 7 (YoungProjectors)**.** Un Young projector est défini par un YoungDiagram μ

$$a_\mu := \frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g \in P_\mu} g$$

$$b_\mu := \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{g \in Q_\mu} (-1)^g$$

Où $(-1)^g$ est le signe de g

Definition 8 (YoungSymmetriser)**.** Un Young symmetriser est défini par un YoungDiagram μ
$c_\mu := a_\mu b_\mu$

Chapter 2

SpechtModules

Definition 9 (SpechtModules)**.** Soit μ un YoungDiagram.

$$V_\mu := \mathbb{C}[S_n]c_\mu$$

V_μ est appelé un Specht modules.
Il est un sous-espace de $\mathbb{C}[S_n]$.