

RepresentationGroup

Alexandre Charland

April 1, 2025

Chapter 1

Module

Lemma 1 (MdirectSumIdemp). *Soit A un anneau unitaire et $e \in A$ un idempotent de A .*

$$A = eA \oplus (1 - e)A$$

Proof. Il suffit de montré que $\forall m \in eA$ et $\forall n \in (1 - e)A$ tq $m + n = 0 \Rightarrow m = n = 0$.

Soit m, n tq décrits plus haut.

Comme $m \in eA, \exists a \in A$ tq $ea = m$.

Comme $n \in (1 - e)A, \exists b \in A$ tq $(1 - e)b = n$.

$$m + n = ea + (1 - e)b = 0$$

$$e \cdot (ea + (1 - e)b) = e^2a + (e - e^2)b = ea = e0 \Rightarrow m = 0$$

$$0 + n = 0 \Rightarrow n = 0$$

□

Lemma 2 (HomAeM). *Soit A un anneau unitaire, M un A -module et e un idempotent de A .*

$$\forall \phi \in \text{Hom}_A(Ae, M), \exists m \in eM, \phi(e) = m$$

Proof. Soit $n \in M$ tq $\phi(e) = n$

$$\phi(e) = n \Rightarrow e\phi(e) = \phi(e) = en \Rightarrow n = en$$

Par le lemme MdirectSumIdemp, on a que $A = eA \oplus (1 - e)A$

$\exists! m, a \in A$ tq $n = em + (1 - e)b$.

$$em + (1 - e)b = n = en = e \cdot (em + (1 - e)b) = e^2m + (e - e^2)b = em$$

Donc $b = 0 \Rightarrow n = em \Rightarrow n \in eM$.

□

Lemma 3 (HomAeMisoem). *Soit A un anneau unitaire, M un A -module et e un idempotent de A .*

$$\text{Hom}_A(Ae, M) \cong eM$$

Proof. Soit $m \in eM, \psi_m : Ae \rightarrow M$ tq $\psi_m(a) = am$

Il faut montré que ψ_m est un homomorphisme.

Soit $a, b \in Ae$.

$$\psi_m(a + b) = (a + b)m = am + bm = \psi_m(a) + \psi_m(b)$$

Soit $\phi : eM \rightarrow (Ae \rightarrow M)$ tq $\phi(m) = \psi_m$

On a que ϕ est un homomorphisme, car

$$\phi(m+n) = \psi_{m+n}.$$

$$\forall a \in A, \psi_{m+n}(a) = a(m+n) = (am) + (an) = \psi_m(a) + \psi_n(a)$$

$$\text{Donc } \psi_{m+n} = \psi_m + \psi_n \Rightarrow \phi(m+n) = \phi(m) + \phi(n)$$

Par le premier théorème d'isomorphisme de module, $\frac{eM}{\ker(\phi)} \cong \text{Im}(\phi)$

Seul $\phi(0)$ envoie à l'identité de $\text{Hom}_A(A, M)$, donc le noyau est trivial.

La dernière chose à montrer est que l'image de ϕ est $\text{Hom}_A(Ae, M)$.

Soit $\sigma \in \text{Hom}_A(Ae, M)$.

Par le lemme HomAeM, $\exists m \in eM$ tq $\sigma(e) = m$.

Montrons que $\sigma = \phi(m) = \psi_m$

Soit $a \in Ae$ et $b \in A$ tq $a = be$

$$\sigma(a) = \sigma(be) = \sigma(be^2) = be \cdot \sigma(e) = bem = am = \psi_m(a)$$

Donc $\sigma \in \text{Im}(\phi)$ □

Lemma 4 (HomAeMisoeM'). Soit A un anneau unitaire, M un A -module et e un idempotent de A .

$$\text{Hom}_A(Ae, M) \cong eM$$

Proof. Soit $\phi : \text{Hom}_A(Ae, M) \rightarrow M$ tq $\phi(\psi) = \psi(e)$

Il faut mq ϕ est un homomorphisme.

Soit $\psi, \sigma \in \text{Hom}_A(Ae, M)$.

$$\phi(\psi + \sigma) = (\psi + \sigma)(e) = \psi(e) + \sigma(e) = \phi(\psi) + \phi(\sigma)$$

Soit $a \in A$

$$a \cdot \phi(\psi) = a \cdot \psi(e) = \phi(a \cdot \psi)$$

Comme $\text{Hom}_A(Ae, M)$ est un module, par le premier théorème d'isomorphisme,

$$\frac{\text{Hom}_A(Ae, M)}{\ker(\phi)} \cong \text{Im}(\phi)$$

Le noyau de ϕ est trivial, car un unique homomorphisme peut être défini tq $\sigma(e) = 0$, car tous éléments du domaine sont de la forme ae .

Il ne reste plus qu'à montrer que l'image est eM .

Par le lemme HomAeM, on a que $\text{Im}(\phi) \subset eM$.

Soit $m \in eM$. Considérons $\psi(e) = m$ tq $\psi(ae) = am$.

Il s'agit d'un homomorphisme de $Ae \rightarrow M$.

Donc $\text{Im}(\phi) = eM$ □

Chapter 2

YoungTableau

Definition 5 (YoungTableau). Un YoungTableau est une fonction des cellules d'un YoungDiagram de taille n et retourne un naturel de 0 à $n-1$

Lemma 6 (injYu). *Un YoungTableau est injectif sur les entrées qui sont dans le YoungDiagram*

Proof. Par définition d'un YoungTableau □

Lemma 7 (bijYu). *Un YoungTableau est une bijection entre les cases de son YoungDiagram et les naturels de 0 à $n-1$*

Proof. Comme il est injectif et le domaine et codomaine sont finis et ont la même cardinalité. La fonction doit être bijective □

Lemma 8 (preImYu). *Tous nombres de 0 à $n-1$ possèdent une unique case associée dans μ par Y_μ*

Proof. Trivial sachant que Y_μ est bijectif □

Definition 9 (Pu). P_μ est un sous-groupe de S_n , défini de la façon suivante:
Un élément de P_μ permute les entrées du YoungDiagram si ils sont sur la même rangée.

Proof. Il y a trois choses à vérifier.

Le sous-groupe est fermé sous la composition de fonction

Preuve:

Soit $\alpha, \beta \in P_\mu$, mq $\alpha \circ \beta(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j) \rightarrow i.y = j.y$

Comme Y_μ est une bijection, $\exists k \in \mu$ tq $Y_\mu(k) = \beta(Y_\mu(j))$ Comme $\beta \in P_\mu$ on a que $k.y = j.y$

De plus on a que $\alpha(Y_\mu(k)) = \alpha \circ \beta(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j)$

On peut déduire que $i.y = k.y = j.y$

L'élément neutre est élément de P_μ

La preuve découle de l'injectivité de Y_μ

L'inverse est élément de P_μ

Soit $\alpha \in P_\mu$, mq $\alpha^{-1} \in P_\mu$

Comme α est une bijection, on a que $\alpha^{-1}(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j) \Leftrightarrow Y_\mu(i) = \alpha(Y_\mu(j))$ □

Definition 10 (PuCard). Le nombre d'éléments de P_μ est fini.

Proof. Comme P_μ est un sous-groupe d'un groupe fini, il a un nombre fini d'éléments. □

Definition 11 (Qu). Q_μ est un sous groupe de S_n , défini de la façon suivante:
Un élément de Q_μ permute les entré du YoungDiagram si ils sont sur la même colonne.

Proof. La même preuve que Pu □

Definition 12 (QuCard). Le nombre d'élément de Q_μ est fini.

Proof. Comme Q_μ est un sous-groupe d'un groupe fini, il a un nombre fini d'élément. □

Lemma 13 (sectPuQu). Pour un même YoungTableau, l'intersection de P_μ et Q_μ est 1

Proof. Il faut mq $P_\mu \cap Q_\mu \subseteq 1$

Soit $\alpha \in P_\mu \cap Q_\mu$ et $i \in \mu$

Comme Y_μ est bijectif, $\exists j \in \mu, \alpha(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j)$

$\alpha \in P_\mu \cap Q_\mu$ donc $i.x = j.x$ et $i.y = j.y$

Donc $i=j \rightarrow \alpha(Y_\mu(i)) = Y_\mu(i)$

Donc α est la fonction id. □

Definition 14 (PuQu). $P_\mu Q_\mu := \{g : [0, n-1] \rightarrow [0, n-1] | \exists p \in P_\mu \wedge \exists q \in Q_\mu, g = pq\}$

Definition 15 (Gu). G_μ est une permutation de $[0, n-1]$ tq

$\forall i, j, k, l \in \mu, ((i \neq j) \wedge (G_\mu \circ Y_\mu(i) = Y_\mu(k)) \wedge (G_\mu \circ Y_\mu(j) = Y_\mu(l))) \rightarrow ((i.x \neq j.x) \vee (k.y \neq l.y))$

Definition 16 (YuInv). Y_μ^{-1} est une l'inverse de Y_μ

Lemma 17 (staysInY).

$$\forall m \in [0, n-1], (Y_\mu^{-1}(m).x, Y_\mu^{-1}(G_\mu(m)).y) \in \mu$$

Proof. No idea... TODO Figure it out □

Definition 18 (qu). q_μ est une permutation de $[0, n-1]$ défini comme

$$q_\mu(m) = Y_\mu((Y_\mu^{-1}(m)).x, (Y_\mu^{-1} \circ G_\mu(m)).y)$$

Proof. Par le lemme staysInY, on sait que la fonction q_μ est bien défini.

Il ne reste plus qu'a montré que q_μ est une bijection.

TODO □

Definition 19 (quInv). q_μ^{-1} est la fonction inverse de q_μ

Lemma 20 (staysInX).

$$\forall m \in [0, n-1], ((Y_\mu^{-1} \circ G_\mu \circ q_\mu^{-1}(m)).x, (Y_\mu^{-1}(m)).y) \in \mu$$

Proof. No idea... TODO Figure it out □

Definition 21 (pu). p_μ est une permutation de $[0, n-1]$ défini comme

$$q_\mu(m) = Y_\mu(Y_\mu^{-1}(m).x, Y_\mu^{-1}(G_\mu(m)).y)$$

Proof. TODO □

Lemma 22 (No2FromSameColToSameRow). Soit $g : [0, n-1] \rightarrow [0, n-1]$ une fonction bijective et Y_μ un YoungTableau.

Si $\forall i, j, k, l \in \mu, i \neq j, g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(k), g(Y_\mu(j)) = Y_\mu(l)$ alors $i.x \neq j.x \vee k.y \neq l.y$.

Alors $g \in P_\mu Q_\mu$

Proof. Posons $q(Y_\mu(i)) := Y_\mu(i.x, (Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i)).y)$.

Par le lemme qWellDefined, nous avons que q est bien défini.

Montrons que $q \in Q_\mu$

Si q n'est pas injectif alors $\exists k, l \in \mu$ tq $k \neq l, q(Y_\mu(k)) = q(Y_\mu(l))$.

Donc $Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(k)).x, k.y) = Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(l)).x, l.y)$.

Comme $Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu$ est bijectif, $\exists i, j \in \mu$ tq $i \neq j, Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(k) = i, Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(l) = j$.

Donc $\exists i, j, k, l \in \mu, i \neq j, g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(k), g(Y_\mu(j)) = Y_\mu(l)$ et $i.x = j.x \wedge k.y = l.y$.

Contradiction d'hypothèse.

Donc q est injectif. De plus comme le domaine et codomaine sont finis et de même taille, on a que q est une bijection. Ainsi $q \in Q_\mu$.

Posons $p(Y_\mu(i)) := Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ q^{-1} \circ Y_\mu(i)).x, i.y)$.

On remarque $p \circ q = g$. Soit $i \in \mu$. $\exists j \in \mu$ tq $g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j)$.

Donc $Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i) = j$

$$p \circ q(Y_\mu(i)) = p(Y_\mu(i.x, (Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i)).y)) = p(Y_\mu(i.x, j.y))$$

$$Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ q^{-1} \circ Y_\mu(i.x, j.y)).x, j.y) = Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i)).x, j.y)$$

$$Y_\mu(j.x, j.y) = Y_\mu(j)$$

Donc p est bien défini, et $g \in P_\mu Q_\mu$ □

Definition 23 (IneqYoungDiagram). Soit μ et λ deux YoungDiagram de même cardinalité.

On dit que $\mu > \lambda$ si $\exists i \in \mathbb{N}$ tq $\mu_i > \lambda_i$ et $\forall j \in \mathbb{N}_{<i}, \mu_j = \lambda_j$.

Chapter 3

SpechtModules

Definition 24 (YoungProjectors). Un Young projector est défini par un YoungDiagram μ

$$a_\mu := \frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g \in P_\mu} g$$

$$b_\mu := \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{g \in Q_\mu} (-1)^g g$$

Où $(-1)^g$ est le signe de g

Definition 25 (YoungSymmetriser). Un Young symmetriser est défini par un YoungDiagram μ
 $c_\mu := a_\mu b_\mu$

Definition 26 (SpechtModules). Soit μ un YoungDiagram.

$$V_\mu := \mathbb{C}[S_n]c_\mu$$

V_μ est appelé un Specht modules.

Il est un sous-espace de $\mathbb{C}[S_n]$.

Lemma 27 (LinearTransformation). $\exists l_\mu$ une fonction linéaire tq

$$\forall x \in \mathbb{C}[S_n], a_\mu x b_\mu = l_\mu(x) c_\mu$$

Proof. Soit $x \in \mathbb{C}[S_n]$.

x est de la forme $\sum_{g \in S_n} a_g g$. Examinons se qu'il se passe pour différent g .

Si $g \in P_\mu Q_\mu$, alors $\exists p \in P_\mu$ et $q \in Q_\mu$ tq $g = pq$

$$a_\mu g b_\mu = \frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g \in P_\mu} g p q \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h \in Q_\mu} (-1)^h$$

$$\frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g \in P_\mu} g p = \frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g' \in P_\mu} g'$$

On peut faire le changement de variable en posant $g' = gp$ et en utilisant le fait que $\phi(g) = gp$ est un isomorphisme de groupe. Ainsi les deux sommes sont équivalentes à un réordonnement près.

$$\frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h \in Q_\mu} (-1)^h q h = \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h \in Q_\mu} (-1)^h q h = (-1)^{q^{-1}} \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h' \in Q_\mu} (-1)^{h'} h'$$

$$a_\mu g b_\mu = (-1)^q c_\mu$$

Il ne reste plus à montrer que si $g \notin P_\mu Q_\mu$ alors $l_\mu(g)=0$, car g ne peut pas être exprimé par c_μ .
Donc il faut mq $a_\mu g b_\mu=0$ ou de façon équivalente $a_\mu g b_\mu = -a_\mu g b_\mu$

Il suffit de trouver $t \in P_\mu$ tq $g^{-1}tg \in Q_\mu$ et $(-1)^t = -1$, car

$$a_\mu g b_\mu = a_\mu t g b_\mu = a_\mu (g g^{-1}) t g b_\mu = a_\mu g (g^{-1} t g) b_\mu = (-1)^{g^{-1} t g} a_\mu g b_\mu = -a_\mu g b_\mu$$

Plusieurs changements de variables ont été effectués pour "faire apparaître et disparaître" des éléments. $(-1)^{g^{-1} t g} = (-1)^{g^{-1}} \cdot (-1)^t \cdot (-1)^g = (-1)^g \cdot (-1)^t \cdot (-1)^g = -1$

Par la contraposée du lemme No2FromSameColToSameRow, on a que

$\exists i, j, k, l \in \mu$ tq $i \neq j, g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(k), g(Y_\mu(j)) = Y_\mu(l), i.x = j.x$ et $k.y = l.y$.

Posons $t : [0, n-1] \rightarrow [0, n-1]$

$$t(n) = \begin{cases} Y_\mu(k) & \text{si } n = Y_\mu(l) \\ Y_\mu(l) & \text{si } n = Y_\mu(k) \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

Par construction, $t \in P_\mu$ et $(-1)^t = -1$. Il suffit de montrer que $g^{-1}tg \in Q_\mu$

$$g^{-1} \circ t \circ g(Y_\mu(i)) = g^{-1} \circ t(Y_\mu(k)) = g^{-1}(Y_\mu(l)) = Y_\mu(j)$$

$$g^{-1} \circ t \circ g(Y_\mu(j)) = g^{-1} \circ t(Y_\mu(l)) = g^{-1}(Y_\mu(k)) = Y_\mu(i)$$

On remarque que si $m \in \mu \setminus \{i, j\}, g(Y_\mu(m)) \notin \{Y_\mu(k), Y_\mu(l)\}$. Donc $t(g(Y_\mu(m)))$ se comporte comme la fonction identité. Ainsi $g^{-1}tg \in Q_\mu$. □

Lemma 28 (SmallerImpZero). Si $\mu > \lambda$, alors

$$a_\mu \mathbb{C}[S_n] b_\lambda = 0$$

Proof. Comme $\mu > \lambda$

TODO montré que

Donc, il existe deux éléments de la même colonne que g envoient sur la même rangée

Ainsi on peut construire un t tq $t \in P_\mu$ et $g^{-1}tg \in Q_\lambda$.

Par le même argument que le dernier lemme, $a_\mu \mathbb{C}[S_n] b_\lambda = 0$ □

Lemma 29 (CuPropIdempotent). c_μ est proportionnel à un idempotent. De façon mathématique

$$\exists a \in \mathbb{C}, c_\mu^2 = a \cdot c_\mu$$

Proof. On applique le lemme LinearTransformation avec $x = b_\mu a_\mu \in \mathbb{C}[S_n]$. □

Theorem 30 (IrreducibleRepresentationSn). $\forall \mu$ partition de n , V_μ est toute les représentations irréductibles de S_n

Proof. Soit μ, λ deux partitions de n et sans perte de généralité, $\mu \geq \lambda$

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}[S_n]}(V_\mu, V_\lambda) = \text{Hom}_{\mathbb{C}[S_n]}(\mathbb{C}[S_n]c_\mu, \mathbb{C}[S_n]c_\lambda) \cong c_\mu \mathbb{C}[S_n]c_\lambda$$

Si $\mu > \lambda$ alors $c_\mu \mathbb{C}[S_n]c_\lambda = 0$

Sinon $\mu = \lambda$ et on a une représentation de dimension 1.

Comme le nombre de partition de n est égale au nombre de classe de conjugaison de S_n on a que tous les représentations de S_n sont atteintes par V_μ . □