

RepresentationGroup

Alexandre Charland

February 14, 2025

Chapter 1

Specht modules

Definition 1 (YoungTableau). Un YoungTableau est une fonction des cellules d'un YoungDiagram de taille n et retourne un naturel de 0 à $n-1$

Lemma 2 (injYu). *Un YoungTableau est injectif sur les entrées qui sont dans le YoungDiagram*

Proof. Par définition d'un YoungTableau □

Lemma 3 (bijYu). *Un YoungTableau est une bijection entre les cases de son YoungDiagram et les naturels de 0 à $n-1$*

Proof. Comme il est injectif et le domaine et codomaine sont finis et ont la même cardinalité. La fonction doit être bijective □

Definition 4 (Pu). P_μ est un sous groupe de S_n , défini de la façon suivante:
Un élément de P_μ permute les entrées du YoungDiagram si ils sont sur la même rangée.

Proof. Il y a trois choses à vérifier.

Le sous-groupe est fermé sous la composition de fonction

Preuve:

Soit $\alpha, \beta \in P_\mu$, mq $\alpha \circ \beta(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j) \rightarrow i.y = j.y$

Comme Y_μ est une bijection, $\exists k \in \mu$ tq $Y_\mu(k) = \beta(Y_\mu(j))$ Comme $\beta \in P_\mu$ on a que $k.y = j.y$

De plus on a que $\alpha(Y_\mu(k)) = \alpha \circ \beta(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j)$

On peut déduire que $i.y = k.y = j.y$

L'élément neutre est élément de P_μ

La preuve découle de l'injectivité de Y_μ

L'inverse est élément de P_μ

Soit $\alpha \in P_\mu$, mq $\alpha^{-1} \in P_\mu$

Comme α est une bijection, on a que $\alpha^{-1}(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j) \Leftrightarrow Y_\mu(i) = \alpha(Y_\mu(j))$ □

Definition 5 (Qu). P_μ est un sous groupe de S_n , défini de la façon suivante:

Un élément de P_μ permute les entrées du YoungDiagram si ils sont sur la même colonne.

Proof. La même preuve que P_μ □

Lemma 6 (sectPuQu). *Pour un même YoungTableau, l'intersection de P_μ et Q_μ est 1*

Proof. Il faut mq $P_\mu \cap Q_\mu \subseteq 1$

Soit $\alpha \in P_\mu \cap Q_\mu$ et $i \in \mu$

Comme Y_μ est bijectif, $\exists j \in \mu, \alpha(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j)$

$\alpha \in P_\mu \cap Q_\mu$ donc $i.x = j.x$ et $i.y = j.y$

Donc $i=j \rightarrow \alpha(Y_\mu(i)) = Y_\mu(i)$

Donc α est la fonction identité. □