

RepresentationGroup

Alexandre Charland

March 11, 2025

Chapter 1

YoungTableau

Definition 1 (YoungTableau). Un YoungTableau est une fonction des cellules d'un YoungDiagram de taille n et retourne un naturel de 0 à $n-1$

Lemma 2 (injYu). *Un YoungTableau est injectif sur les entrées qui sont dans le YoungDiagram*

Proof. Par définition d'un YoungTableau □

Lemma 3 (bijYu). *Un YoungTableau est une bijection entre les cases de son YoungDiagram et les naturels de 0 à $n-1$*

Proof. Comme il est injectif et le domaine et codomaine sont finis et ont la même cardinalité. La fonction doit être bijective □

Definition 4 (Pu). P_μ est un sous groupe de S_n , défini de la façon suivante:
Un élément de P_μ permute les entrées du YoungDiagram si ils sont sur la même rangée.

Proof. Il y a trois choses à vérifier.

Le sous-groupe est fermé sous la composition de fonction

Preuve:

Soit $\alpha, \beta \in P_\mu$, mq $\alpha \circ \beta(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j) \rightarrow i.y = j.y$

Comme Y_μ est une bijection, $\exists k \in \mu$ tq $Y_\mu(k) = \beta(Y_\mu(j))$ Comme $\beta \in P_\mu$ on a que $k.y = j.y$

De plus on a que $\alpha(Y_\mu(k)) = \alpha \circ \beta(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j)$

On peut déduire que $i.y = k.y = j.y$

L'élément neutre est élément de P_μ

La preuve découle de l'injectivité de Y_μ

L'inverse est élément de P_μ

Soit $\alpha \in P_\mu$, mq $\alpha^{-1} \in P_\mu$

Comme α est une bijection, on a que $\alpha^{-1}(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j) \Leftrightarrow Y_\mu(i) = \alpha(Y_\mu(j))$ □

Definition 5 (PuCard). Le nombre d'éléments de P_μ est fini.

Proof. Comme P_μ est un sous-groupe d'un groupe fini, il a un nombre fini d'éléments. □

Definition 6 (Qu). Q_μ est un sous groupe de S_n , défini de la façon suivante:

Un élément de Q_μ permute les entrées du YoungDiagram si ils sont sur la même colonne.

Proof. La même preuve que Pu □

Definition 7 (QuCard). Le nombre d'élément de Q_μ est fini.

Proof. Comme Q_μ est un sous-groupe d'un groupe fini, il a un nombre fini d'élément. □

Lemma 8 (sectPuQu). Pour un même YoungTableau, l'intersection de P_μ et Q_μ est 1

Proof. Il faut mq $P_\mu \cap Q_\mu \subseteq 1$

Soit $\alpha \in P_\mu \cap Q_\mu$ et $i \in \mu$

Comme Y_μ est bijectif, $\exists j \in \mu, \alpha(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j)$

$\alpha \in P_\mu \cap Q_\mu$ donc $i.x = j.x$ et $i.y = j.y$

Donc $i=j \rightarrow \alpha(Y_\mu(i)) = Y_\mu(i)$

Donc α est la fonction id. □

Definition 9 (PuQu). $P_\mu Q_\mu := \{g : [0, n-1] \rightarrow [0, n-1] \mid \exists p \in P_\mu \wedge \exists q \in Q_\mu, g = pq\}$

Lemma 10 (qWellDefined). Soit $g : [0, n-1] \rightarrow [0, n-1]$ une fonction bijective et Y_μ un YoungTableau.

Si $\forall i, j, k, l \in \mu, i \neq j, g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(k), g(Y_\mu(j)) = Y_\mu(l)$ alors $i.x \neq j.x \vee k.y \neq l.y$.

$q : [0, n-1] \rightarrow [0, n-1], q(Y_\mu(i)) = Y_\mu(i.x, Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i).y)$ est bien défini

Proof. Il suffit de montré que $(i.x, Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i).y) \in \mu$.

TODO Figure it out □

Lemma 11 (No2FromSameColToSameRow). Soit $g : [0, n-1] \rightarrow [0, n-1]$ une fonction bijective et Y_μ un YoungTableau.

Si $\forall i, j, k, l \in \mu, i \neq j, g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(k), g(Y_\mu(j)) = Y_\mu(l)$ alors $i.x \neq j.x \vee k.y \neq l.y$.

Alors $g \in P_\mu Q_\mu$

Proof. Posons $q(Y_\mu(i)) := Y_\mu(i.x, (Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i)).y)$.

Par le lemme qWellDefined, nous avons que q est bien définit.

Montrons que $q \in Q_\mu$

Si q n'est pas injectif alors $\exists k, l \in \mu$ tq $k \neq l, q(Y_\mu(k)) = q(Y_\mu(l))$.

Donc $Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(k)).x, k.y) = Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(l)).x, l.y)$.

Comme $Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu$ est bijectif, $\exists i, j \in \mu$ tq $i \neq j, Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(k) = i, Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(l) = j$.

Donc $\exists i, j, k, l \in \mu, i \neq j, g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(k), g(Y_\mu(j)) = Y_\mu(l)$ et $i.x = j.x \wedge k.y = l.y$.

Contradiction d'hypothèse.

Donc q est injectif. De plus comme le domaine et codomaine sont finis et de même taille, on a que q est une bijection. Ainsi $q \in Q_\mu$.

Posons $p(Y_\mu(i)) := Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ q^{-1} \circ Y_\mu(i)).x, i.y)$.

On remarque $p \circ q = g$. Soit $i \in \mu$. $\exists j \in \mu$ tq $g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j)$.

Donc $Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i) = j$

$$p \circ q(Y_\mu(i)) = p(Y_\mu(i.x, (Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i)).y)) = p(Y_\mu(i.x, j.y))$$

$$Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ q^{-1} \circ Y_\mu(i.x, j.y)).x, j.y) = Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i)).x, j.y)$$

$$Y_\mu(j.x, j.y) = Y_\mu(j)$$

Donc p est bien définit, et $g \in P_\mu Q_\mu$ □

Chapter 2

SpechtModules

Definition 12 (YoungProjectors). Un Young projector est défini par un YoungDiagram μ

$$a_\mu := \frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g \in P_\mu} g$$

$$b_\mu := \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{g \in Q_\mu} (-1)^g g$$

Où $(-1)^g$ est le signe de g

Definition 13 (YoungSymmetriser). Un Young symmetriser est défini par un YoungDiagram μ
 $c_\mu := a_\mu b_\mu$

Definition 14 (SpechtModules). Soit μ un YoungDiagram.

$$V_\mu := \mathbb{C}[S_n]c_\mu$$

V_μ est appelé un Specht modules.
 Il est un sous-espace de $\mathbb{C}[S_n]$.

Lemma 15 (LinearTransformation). $\exists l_\mu$ une fonction linéaire tq
 $\forall x \in \mathbb{C}[S_n], a_\mu x b_\mu = l_\mu(x) c_\mu$

Proof. Soit $x \in \mathbb{C}[S_n]$.

x est de la forme $\sum_{g \in S_n} a_g g$. Examinons se qu'il se passe pour différent g .

Si $g \in P_\mu Q_\mu$, alors $\exists p \in P_\mu$ et $q \in Q_\mu$ tq $g = pq$

$$a_\mu g b_\mu = \frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g \in P_\mu} g p q \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h \in Q_\mu} (-1)^h$$

$$\frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g \in P_\mu} g p = \frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g' \in P_\mu} g'$$

On peut faire le changement de variable en posant $g' = gp$ et en utilisant le fait que $\phi(g) = gp$ est un isomorphisme de groupe. Ainsi les deux sommes sont équivalentes à un réordonnement près.

$$\frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h \in Q_\mu} (-1)^h q h = \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h \in Q_\mu} (-1)^h q h = (-1)^{q^{-1}} \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h' \in Q_\mu} (-1)^{h'} h'$$

$$a_\mu g b_\mu = (-1)^q c_\mu$$

Il ne reste plus à montrer que si $g \notin P_\mu Q_\mu$ alors $l_\mu(g)=0$, car g ne peut pas être exprimé par c_μ .
Donc il faut mq $a_\mu g b_\mu=0$ ou de façon équivalente $a_\mu g b_\mu = -a_\mu g b_\mu$
Il suffit de trouver $t \in P_\mu$ tq $g^{-1}tg \in Q_\mu$ et $(-1)^t = -1$, car

$$a_\mu g b_\mu = a_\mu t g b_\mu = a_\mu (g g^{-1}) t g b_\mu = a_\mu g (g^{-1} t g) b_\mu = (-1)^{g^{-1} t g} a_\mu g b_\mu = -a_\mu g b_\mu$$

Plusieurs changements de variables ont été effectués pour "faire apparaître et disparaître" des éléments. $(-1)^{g^{-1} t g} = (-1)^{g^{-1}} \cdot (-1)^t \cdot (-1)^g = (-1)^g \cdot (-1)^t \cdot (-1)^g = -1$

Par la contraposée du lemme No2FromSameColToSameRow, on a que

$\exists i, j, k, l \in \mu$ tq $i \neq j, g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(k), g(Y_\mu(j)) = Y_\mu(l), i.x = j.x$ et $k.y = l.y$.

Posons $t : [0, n-1] \rightarrow [0, n-1]$

$$t(n) = \begin{cases} Y_\mu(k) & \text{si } n = Y_\mu(l) \\ Y_\mu(l) & \text{si } n = Y_\mu(k) \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

Par construction, $t \in P_\mu$ et $(-1)^t = -1$. Il suffit de montrer que $g^{-1}tg \in Q_\mu$

$$g^{-1} \circ t \circ g(Y_\mu(i)) = g^{-1} \circ t(Y_\mu(k)) = g^{-1}(Y_\mu(l)) = Y_\mu(j)$$

$$g^{-1} \circ t \circ g(Y_\mu(j)) = g^{-1} \circ t(Y_\mu(l)) = g^{-1}(Y_\mu(k)) = Y_\mu(i)$$

On remarque que si $m \in \mu \setminus \{i, j\}, g(Y_\mu(m)) \notin \{Y_\mu(k), Y_\mu(l)\}$. Donc $t(g(Y_\mu(m)))$ se comporte comme la fonction identité. Ainsi $g^{-1}tg \in Q_\mu$. □

Definition 16 (IneqYoungDiagram). Soit μ et λ deux YoungDiagram de même cardinalité.

On dit que $\mu > \lambda$ si $\exists i \in \mathbb{N}$ tq $\mu_i > \lambda_i$ et $\forall j \in \mathbb{N}_{< i}, \mu_j = \lambda_j$.