# RepresentationGroup

Alexandre Charland

March 6, 2025

# Chapter 1

# YoungTableau

**Definition 1** (YoungTableau)**.** Un YoungTableau est une fonction des cellules d'un YoungDiagram de taille n et retourne un naturel de 0 à n-1

**Lemma 2** (injYu)**.** *Un YoungTableau est injectif sur les entrés qui sont dans le YoungDiagram*

*Proof.* Par définition d'un YoungTableau □

**Lemma 3** (bijYu)**.** *Un YoungTableau est une bijection entre les case de son YoungDiagram et les naturels de 0 à n-1*

*Proof.* Comme il est injectif et le domaine et codomaine sont fini et ont la même cardinalité. La fonction doit être bijective □

**Definition 4** (Pu)**.** $P_\mu$ est un sous groupe de $S_n$, défini de la façon suivante:
Un élément de $P_\mu$ permute les entré du YoungDiagram si ils sont sur la même rangé.

*Proof.* Il y a trois choses à vérifier.
Le sous-groupe est fermé sous la composition de fonction
Preuve:
Soit $\alpha, \beta \in P_\mu$, mq $\alpha \circ \beta(Y_\mu(\text{i})) = Y_\mu(\text{j}) \to$ i.y = j.y
Comme $Y_\mu$ est une bijection, $\exists k \in \mu$ tq $Y_\mu(\text{k}) = \beta(Y_\mu(\text{j}))$ Comme $\beta \in P_\mu$ on a que k.y = j.y
De plus on a que $\alpha(Y_\mu(\text{k})) = \alpha \circ \beta(Y_\mu(\text{i})) = Y_\mu(\text{j})$
On peut déduire que i.y = k.y = j.y

L'élement neutre est élément de $P_\mu$
La preuve découle de l'injectivité de $Y_\mu$

L'inverse est élément de $P_\mu$
Soit $\alpha \in P_\mu$, mq $\alpha^{-1} \in P_\mu$
Comme alpha est une bijection, on a que $\alpha^{-1}(Y_\mu(\text{i})) = Y_\mu(\text{j}) \Leftrightarrow Y_\mu(\text{i}) = \alpha(Y_\mu(\text{j}))$ □

**Definition 5** (Qu)**.** $Q_\mu$ est un sous groupe de $S_n$, défini de la façon suivante:
Un élément de $Q_\mu$ permute les entré du YoungDiagram si ils sont sur la même colonne.

*Proof.* La même preuve que Pu □

**Lemma 6** (sectPuQu)**.** *Pour un même YoungTableau, l'intersection de $P_\mu$ et $Q_\mu$ est* 1

*Proof.* Il faut mq $P_\mu \cap Q_\mu \subseteq 1$
Soit $\alpha \in P_\mu \cap Q_\mu$ et i $\in \mu$
Comme $Y_\mu$ est bijectif, $\exists$ j $\in \mu$, $\alpha(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j)$
$\alpha \in P_\mu \cap Q_\mu$ donc i.x = j.x et i.y = j.y
Donc i=j $\rightarrow \alpha(Y_\mu(i)) = Y_\mu(i)$
Donc *alpha* est la fonction id. $\square$

**Definition 7** (PuQu)**.** $P_\mu Q_\mu := \{g : [0, n-1] \rightarrow [0, n-1] | \exists p \in P_\mu \wedge \exists q \in Q_\mu, g = pq\}$

**Lemma 8** (qWellDefined)**.** *Soit* $g : [0, n-1] \rightarrow [0, n-1]$ *une fonction bijective et* $Y_\mu$ *un YoungTableau.*
*Si* $\forall i, j, k, l \in \mu, i \neq j, g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(k), g(Y_\mu(j)) = Y_\mu(l)$ *alors* $i.x \neq j.x \vee k.y \neq l.y$*.*
$q : [0, n-1] \rightarrow [0, n-1]$*,* $q(Y_\mu(i)) = Y_\mu(i.x, Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i).y)$ *est bien défini*

*Proof.* Il suffit de montré que $(i.x, Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i).y) \in \mu$.
TODO Figure it out $\square$

**Lemma 9** (No2FromSameColToSameRow)**.** *Soit* $g : [0, n-1] \rightarrow [0, n-1]$ *une fonction bijective et* $Y_\mu$ *un YoungTableau.*
*Si* $\forall i, j, k, l \in \mu, i \neq j, g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(k), g(Y_\mu(j)) = Y_\mu(l)$ *alors* $i.x \neq j.x \vee k.y \neq l.y$*.*
*Alors* $g \in P_\mu Q_\mu$

*Proof.* Posons $q(Y_\mu(i)) := Y_\mu(i.x, (Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i)).y)$.
Par le lemme qWellDefined, nous avons que q est bien définit.
Montrons que $q \in Q_\mu$
Si q n'est pas injectif alors $\exists k, l \in \mu$ tq $k \neq l, q(Y_\mu(k)) = q(Y_\mu(l))$.
Donc $Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(k)).x, k.y) = Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(l)).x, l.y)$.
Comme $Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu$ est bijectif, $\exists! i, j \in \mu$ tq $i \neq j, Y_\mu^{-1} \circ g Y_\mu(k) = i, Y_\mu^{-1} \circ g Y_\mu(l) = j$.
Donc $\exists i, j, k, l \in \mu, i \neq j, g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(k), g(Y_\mu(j)) = Y_\mu(l)$ et $i.x = j.x \wedge k.y = l.y$.
Contradiction d'hypothèse.
Donc $q$ est injectif. De plus comme le domaine et codomaine sont finis et de même taille, on a que $q$ est une bijection. Ainsi $q \in Q_\mu$.

Posons $p(Y_\mu(i)) := Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ q^{-1} \circ Y_\mu(i)).x, i.y)$.
On remarque $p \circ q = g$. Soit $i \in \mu$. $\exists j \in \mu$ tq $g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j)$.
Donc $Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i) = j$

$$p \circ q(Y_\mu(i)) = p(Y_\mu(i.x, (Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i)).y)) = p(Y_\mu(i.x, j.y))$$

$$Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ q^{-1} \circ Y_\mu(i.x, j.y)).x, j.y) = Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i)).x, j.y)$$
$$Y_\mu(j.x, j.y) = Y_\mu(j)$$

Donc $p$ est bien définit, et $g \in P_\mu Q_\mu$ $\square$

# Chapter 2

# SpechtModules

**Definition 10** (YoungProjectors)**.** Un Young projector est défini par un YoungDiagram $\mu$

$$a_\mu := \frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g \in P_\mu} g$$

$$b_\mu := \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{g \in Q_\mu} (-1)^g g$$

Où $(-1)^g$ est le signe de g

**Definition 11** (YoungSymmetriser)**.** Un Young symmetriser est défini par un YoungDiagram $\mu$
$c_\mu := a_\mu b_\mu$

**Definition 12** (SpechtModules)**.** Soit $\mu$ un YoungDiagram.

$$V_\mu := \mathbb{C}[S_n] c_\mu$$

$V_\mu$ est appelé un Specht modules.
Il est un sous-espace de $\mathbb{C}[S_n]$.

**Lemma 13** (LinearTransformation)**.** *$\exists l_\mu$ une fonction linéaire tq*
*$\forall x \in \mathbb{C}[S_n]$, $a_\mu x b_\mu = l_\mu(x) c_\mu$*

*Proof.* Soit x $\in \mathbb{C}[S_n]$.
x est de la forme $\sum_{g \in S_n} a_g g$. Examinons se qu'il se passe pour différent g.
Si g $\in P_\mu Q_\mu$, alors $\exists$ p $\in P_\mu$ et q $\in Q_\mu$ tq g=pq

$$a_\mu g b_\mu = \frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g \in P_\mu} g\ pq \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h \in Q_\mu} (-1)^h$$

$$\frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g \in P_\mu} gp = \frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g' \in P_\mu} g'$$

On peut faire le changement de variable en posant $g' = gp$ et en utilisant le fait que $\phi(g) = gp$ est un isomorphisme de groupe. Ainsi les deux sommes sont équivalantes à un réordenement près.

$$\frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h \in Q_\mu} (-1)^h qh = \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h \in Q_\mu} (-1)^h qh = (-1)^{q^{-1}} \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h' \in Q_\mu} (-1)^{h'} h'$$

$$a_\mu g b_\mu = (-1)^q c_\mu$$

Il ne reste plus à montrer que si g $\notin P_\mu Q_\mu$ alors $l_\mu(g)$=0, car g ne peut pas être exprimer par $c_\mu$
Donc il faut mq $a_\mu g b_\mu$=0 ou de façon équivalente $a_\mu g b_\mu = -a_\mu g b_\mu$
Il suffit de trouver $t \in P_\mu$ tq $g^{-1}tg \in Q_\mu$ et $(-1)^t = -1$, car

$$a_\mu g b_\mu = a_\mu t g b_\mu = a_\mu (g g^{-1}) t g b_\mu = a_\mu g (g^{-1} t g) b_\mu = (-1)^{g^{-1}tg} a_\mu g b_\mu = -a_\mu g b_\mu$$

Plusieurs changements de variables ont été effectuer pour "faire apparaître et disparaître" des éléments. $(-1)^{g^{-1}tg} = (-1)^{g^{-1}} \cdot (-1)^t \cdot (-1)^g = (-1)^g \cdot (-1)^t \cdot (-1)^g = -1$
Par la contraposé du lemme No2FromSameColToSameRow, on a que
$\exists i, j, k, l \in \mu$ tq $i \neq j, g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(k), g(Y_\mu(j)) = Y_\mu(l), i.x = j.x$ et $k.y = l.y.$
Posons t : [0,n-1] $\rightarrow$ [0,n-1]

$$t(n) = \begin{cases} Y_\mu(k) & \text{si } n = Y_\mu(l) \\ Y_\mu(l) & \text{si } n = Y_\mu(k) \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

Par construction, $t \in P_\mu$ et $(-1)^t = -1$. Il suffit de montré que $g^{-1}tg \in Q_\mu$

$$g^{-1} \circ t \circ g(Y_\mu(i)) = g^{-1} \circ t(Y_\mu(k)) = g^{-1}(Y_\mu(l)) = Y_\mu(j)$$

$$g^{-1} \circ t \circ g(Y_\mu(j)) = g^{-1} \circ t(Y_\mu(l)) = g^{-1}(Y_\mu(k)) = Y_\mu(i)$$

On remarque que si $m \in \mu \backslash \{i, j\}, g(Y_\mu(m)) \notin \{Y_\mu(k), Y_\mu(l)\}$. Donc $t(g(Y_\mu(m)))$ se comporte comme la fonction identité. Ainsi $g^{-1}tg \in Q_\mu$.

□

**Definition 14** (IneqYoungDiagram)**.** Soit $\mu$ et $\lambda$ deux YoungDiagram de même cardinalité. On dit que $\mu > \lambda$ si $\exists i \in \mathbb{N}$ tq $\mu_i > \lambda_i$ et $\forall j \in \mathbb{N}_{<i}$, $\mu_j = \lambda_j$.