RepresentationGroup

Alexandre Charland

March 20, 2025

Chapter 1

Module

Lemma 1 (HomAMisoM)**.** *Soit A un anneau unitaire et M un A-module.*

$$Hom_A(A, M) \cong M$$

Proof. Soit $m \in M$, $\psi_m : A \to M$ tq $\psi_m(a) = am$
Soit $\phi : M \to (A \to M)$ tq $\phi(m) = \psi_m$
Il faut montré que ψ_m est un homomorphisme.
Soit $a, b \in A$.

$$\psi_m(a + b) = (a + b)m = am + bm = \psi_m(a) + \psi_m(b)$$

On a que ϕ est un homomorphisme, car
$\phi(m + n) = \psi_{m+n}$.
$\forall a \in A$, $\psi_{m+n}(a) = a(m + n) = (am) + (an) = \psi_m(a) + \psi_n(a)$
Donc $\psi_{m+n} = \psi_m + \psi_n \Rightarrow \phi(m + n) = \phi(m) + \phi(n)$
Par le premier théorème d'isomorphisme de module, $\frac{M}{\ker(\phi)} \cong \mathrm{Im}(\phi)$
Seul $\phi(0)$ envoit à l'identité de $\mathrm{Hom}_A(A, M)$, donc le noyau est trivial. Il ne reste plus qu'a montré que ϕ atteint tous les homomorphismes de A à M.
Soit $\sigma \in \mathrm{Hom}_A(A, M)$ et $m \in M$, tq $\sigma(1) = m$.
Soit $a \in A$
$\sigma(a) = \sigma(a{\cdot}1) = a{\cdot}\sigma(1)$, car tous élément de l'algèbre agit comme un scalaire sur l'homomorphisme.
Donc $\forall a \in A, \sigma(a) = a \cdot \sigma(1) = a \cdot m$.
$\sigma = \psi_m$.
Donc ϕ est surjectif et on obtient le résultat voulu. □

Lemma 2 (MdirectSumIdemp)**.** *Soit A un algèbre et $e \in A$ un idempotant de A.*

$$A = Ae \oplus A(1 - e)$$

Proof. Il suffit de montré que $\forall m \in Ae$ et $\forall n \in A(1 - e)$ tq $m + n = 0 \Rightarrow m = n = 0$.
Soit m,n tq décris plus haut.
Comme $m \in Ae, \exists a \in A$ tq $ae = m$.
Comme $n \in A(1 - e), \exists b \in A$ tq $b(1 - e) = n$.

$$m + n = ae + b(1 - e) = 0 \Rightarrow ae^2 + be - be^2 = ae + be - be = 0e \Rightarrow m = ae = 0$$
$$0 + n = 0 \Rightarrow n = 0$$

□

Lemma 3 (HomAeM)**.** *Soit A un anneau unitaire, M un A-module et e un idempotant de A.*

$$\forall \phi \in Hom_A(Ae, M), \exists m \in eM, \phi(e) = m$$

Proof. Si e=0
On a que A0 = 0 donc $\forall a \in A$

$$\phi(0) = \phi(a0) = a\phi(0)$$

On conclue que la seul valeur de $\phi(0) = 0 \in$ 0M
Si e=1
Par le lemme HomAMisoM
Sinon $\exists n \in M$ tq $\phi(e) = n$

$$\phi(e) = n \Rightarrow e\phi(e) = \phi(e) = en \Rightarrow n = en$$

Il faut que n soit en mesure d'absorber $e \notin 0, 1$. On conclue que $n \in eM$

□

Lemma 4 (HomAeMisoeM)**.** *Soit A un anneau unitaire, M un A-module et e un idempotant de A.*

$$Hom_A(Ae, M) \cong eM$$

Proof. Soit $m \in eM$, $\psi_m : Ae \to M$ tq $\psi_m(a) = am$
Il faut montré que ψ_m est un homomorphisme.
Soit $a, b \in Ae$.

$$\psi_m(a + b) = (a + b)m = am + bm = \psi_m(a) + \psi_m(b)$$

Soit $\phi : eM \to (Ae \to M)$ tq $\phi(m) = \psi_m$
On a que ϕ est un homomorphisme, car
$\phi(m + n) = \psi_{m+n}$.
$\forall a \in A$, $\psi_{m+n}(a) = a(m + n) = (am) + (an) = \psi_m(a) + \psi_n(a)$
Donc $\psi_{m+n} = \psi_m + \psi_n \Rightarrow \phi(m + n) = \phi(m) + \phi(n)$
Par le premier théorème d'isomorphisme de module, $\frac{eM}{\ker(\phi)} \cong \mathrm{Im}(\phi)$
Seul $\phi(0)$ envoit à l'identité de $\mathrm{Hom}_A(A, M)$, donc le noyau est trivial.
Par le lemme HomAeM, on a que tous les homomorphismes de $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ sont atteint. □

Chapter 2

YoungTableau

Definition 5 (YoungTableau)**.** Un YoungTableau est une fonction des cellules d'un YoungDiagram de taille n et retourne un naturel de 0 à n-1

Lemma 6 (injYu)**.** *Un YoungTableau est injectif sur les entrés qui sont dans le YoungDiagram*

Proof. Par définition d'un YoungTableau □

Lemma 7 (bijYu)**.** *Un YoungTableau est une bijection entre les case de son YoungDiagram et les naturels de 0 à n-1*

Proof. Comme il est injectif et le domaine et codomaine sont fini et ont la même cardinalité. La fonction doit être bijective □

Lemma 8 (preImYu)**.** *Tous nombre de 0 à n-1 possède une unique case associé dans μ par Y_μ*

Proof. Trivial sachant que Y_μ est bijectif □

Definition 9 (Pu)**.** P_μ est un sous groupe de S_n, défini de la façon suivante:
Un élément de P_μ permute les entré du YoungDiagram si ils sont sur la même rangé.

Proof. Il y a trois choses à vérifier.
Le sous-groupe est fermé sous la composition de fonction
Preuve:
Soit $\alpha, \beta \in P_\mu$, mq $\alpha \circ \beta(Y_\mu(\text{i})) = Y_\mu(\text{j}) \to \text{i.y} = \text{j.y}$
Comme Y_μ est une bijection, $\exists k \in \mu$ tq $Y_\mu(\text{k}) = \beta(Y_\mu(\text{j}))$ Comme $\beta \in P_\mu$ on a que k.y = j.y
De plus on a que $\alpha(Y_\mu(\text{k})) = \alpha \circ \beta(Y_\mu(\text{i})) = Y_\mu(\text{j})$
On peut déduire que i.y = k.y = j.y

L'élement neutre est élément de P_μ
La preuve découle de l'injectivité de Y_μ

L'inverse est élément de P_μ
Soit $\alpha \in P_\mu$, mq $\alpha^{-1} \in P_\mu$
Comme alpha est une bijection, on a que $\alpha^{-1}(Y_\mu(\text{i})) = Y_\mu(\text{j}) \Leftrightarrow Y_\mu(\text{i}) = \alpha(Y_\mu(\text{j}))$ □

Definition 10 (PuCard)**.** Le nombre d'élément de P_μ est fini.

Proof. Comme P_μ est un sous-groupe d'un groupe fini, il a un nombre fini d'élément. □

Definition 11 (Qu)**.** Q_μ est un sous groupe de S_n, défini de la façon suivante:
Un élément de Q_μ permute les entré du YoungDiagram si ils sont sur la même colonne.

Proof. La même preuve que Pu □

Definition 12 (QuCard)**.** Le nombre d'élément de Q_μ est fini.

Proof. Comme Q_μ est un sous-groupe d'un groupe fini, il a un nombre fini d'élément. □

Lemma 13 (sectPuQu)**.** *Pour un même YoungTableau, l'intersection de P_μ et Q_μ est* 1

Proof. Il faut mq $P_\mu \cap Q_\mu \subseteq 1$
Soit $\alpha \in P_\mu \cap Q_\mu$ et i $\in \mu$
Comme Y_μ est bijectif, $\exists$ j $\in \mu$, $\alpha(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j)$
$\alpha \in P_\mu \cap Q_\mu$ donc i.x = j.x et i.y = j.y
Donc i=j $\rightarrow \alpha(Y_\mu(i)) = Y_\mu(i)$
Donc *alpha* est la fonction id. □

Definition 14 (PuQu)**.** $P_\mu Q_\mu := \{g : [0, n-1] \rightarrow [0, n-1] | \exists p \in P_\mu \wedge \exists q \in Q_\mu, g = pq\}$

Definition 15 (Gu)**.** G_μ est une permutation de [0, n-1] tq

$\forall i, j, k, l \in \mu, ((i \neq j) \wedge (G_\mu \circ Y_\mu(i) = Y_\mu(k)) \wedge (G_\mu \circ Y_\mu(j) = Y_\mu(l))) \rightarrow ((i.x \neq j.x) \vee (k.y \neq l.y))$

Definition 16 (YuInv)**.** Y_μ^{-1} est une l'inverse de Y_μ

Lemma 17 (staysInY)**.**

$$\forall m \in [0, n-1], (Y_\mu^{-1}(m).x, Y_\mu^{-1}(G_\mu(m)).y) \in \mu$$

Proof. No idea... TODO Figure it out □

Definition 18 (qu)**.** q_μ est une permutation de [0, n-1] défini comme

$$q_\mu(m) = Y_\mu((Y_\mu^{-1}(m)).x, (Y_\mu^{-1} \circ G_\mu(m)).y)$$

Proof. Par le lemme staysInY, on sait que la fonction q_μ est bien défini.
Il ne reste plus qu'a montré que q_μ est une bijection.
TODO □

Definition 19 (quInv)**.** q_μ^{-1} est la fonction inverse de q_μ

Lemma 20 (staysInX)**.**

$$\forall m \in [0, n-1], ((Y_\mu^{-1} \circ G_\mu \circ q_\mu^{-1}(m)).x, (Y_\mu^{-1}(m)).y) \in \mu$$

Proof. No idea... TODO Figure it out □

Definition 21 (pu)**.** p_μ est une permutation de [0,n-1] défini comme

$$q_\mu(m) = Y_\mu(Y_\mu^{-1}(m).x, Y_\mu^{-1}(G_\mu(m)).y)$$

Proof. TODO

□

Lemma 22 (No2FromSameColToSameRow)**.** *Soit* $g : [0, n-1] \to [0, n-1]$ *une fonction bijective et* Y_μ *un YoungTableau.*
Si $\forall i, j, k, l \in \mu, i \neq j, g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(k), g(Y_\mu(j)) = Y_\mu(l)$ *alors* $i.x \neq j.x \vee k.y \neq l.y$.
Alors $g \in P_\mu Q_\mu$

Proof. Posons $q(Y_\mu(i)) := Y_\mu(i.x, (Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i)).y)$.
Par le lemme qWellDefined, nous avons que q est bien définit.
Montrons que $q \in Q_\mu$
Si q n'est pas injectif alors $\exists k, l \in \mu$ tq $k \neq l, q(Y_\mu(k)) = q(Y_\mu(l))$.
Donc $Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(k)).x, k.y) = Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(l)).x, l.y)$.
Comme $Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu$ est bijectif, $\exists! i, j \in \mu$ tq $i \neq j, Y_\mu^{-1} \circ g Y_\mu(k) = i, Y_\mu^{-1} \circ g Y_\mu(l) = j$.
Donc $\exists i, j, k, l \in \mu, i \neq j, g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(k), g(Y_\mu(j)) = Y_\mu(l)$ et $i.x = j.x \wedge k.y = l.y$.
Contradiction d'hypothèse.
Donc q est injectif. De plus comme le domaine et codomaine sont finis et de même taille, on a que q est une bijection. Ainsi $q \in Q_\mu$.

Posons $p(Y_\mu(i)) := Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ q^{-1} \circ Y_\mu(i)).x, i.y)$.
On remarque $p \circ q = g$. Soit $i \in \mu$. $\exists j \in \mu$ tq $g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j)$.
Donc $Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i) = j$

$$p \circ q(Y_\mu(i)) = p(Y_\mu(i.x, (Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i)).y)) = p(Y_\mu(i.x, j.y))$$

$$Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ q^{-1} \circ Y_\mu(i.x, j.y)).x, j.y) = Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ Y_\mu(i)).x, j.y)$$
$$Y_\mu(j.x, j.y) = Y_\mu(j)$$

Donc p est bien définit, et $g \in P_\mu Q_\mu$ □

Definition 23 (IneqYoungDiagram)**.** Soit μ et λ deux YoungDiagram de même cardinalité. On dit que $\mu > \lambda$ si $\exists i \in \mathbb{N}$ tq $\mu_i > \lambda_i$ et $\forall j \in \mathbb{N}_{<i}$, $\mu_j = \lambda_j$.

Chapter 3

SpechtModules

Definition 24 (YoungProjectors)**.** Un Young projector est défini par un YoungDiagram μ

$$a_\mu := \frac{1}{|P_\mu|}\sum_{g\in P_\mu} g$$

$$b_\mu := \frac{1}{|Q_\mu|}\sum_{g\in Q_\mu} (-1)^g g$$

Où $(-1)^g$ est le signe de g

Definition 25 (YoungSymmetriser)**.** Un Young symmetriser est défini par un YoungDiagram μ
$c_\mu := a_\mu b_\mu$

Definition 26 (SpechtModules)**.** Soit μ un YoungDiagram.

$$V_\mu := \mathbb{C}[S_n]c_\mu$$

V_μ est appelé un Specht modules.
Il est un sous-espace de $\mathbb{C}[S_n]$.

Lemma 27 (LinearTransformation)**.** *$\exists l_\mu$ une fonction linéaire tq*
$\forall x \in \mathbb{C}[S_n]$, $a_\mu x b_\mu = l_\mu(x) c_\mu$

Proof. Soit x $\in \mathbb{C}[S_n]$.
x est de la forme $\sum_{g\in S_n} a_g g$. Examinons se qu'il se passe pour différent g.
Si g $\in P_\mu Q_\mu$, alors $\exists$ p $\in P_\mu$ et q $\in Q_\mu$ tq g=pq

$$a_\mu g b_\mu = \frac{1}{|P_\mu|}\sum_{g\in P_\mu} g\ pq \frac{1}{|Q_\mu|}\sum_{h\in Q_\mu}(-1)^h$$

$$\frac{1}{|P_\mu|}\sum_{g\in P_\mu} gp = \frac{1}{|P_\mu|}\sum_{g'\in P_\mu} g'$$

On peut faire le changement de variable en posant $g' = gp$ et en utilisant le fait que $\phi(g) = gp$ est un isomorphisme de groupe. Ainsi les deux sommes sont équivalantes à un réordenement près.

$$\frac{1}{|Q_\mu|}\sum_{h\in Q_\mu}(-1)^h qh = \frac{1}{|Q_\mu|}\sum_{h\in Q_\mu}(-1)^h qh = (-1)^{q^{-1}}\frac{1}{|Q_\mu|}\sum_{h'\in Q_\mu}(-1)^{h'} h'$$

$$a_\mu g b_\mu = (-1)^q c_\mu$$

Il ne reste plus à montrer que si g $\notin P_\mu Q_\mu$ alors $l_\mu(g)$=0, car g ne peut pas être exprimer par c_μ
Donc il faut mq $a_\mu g b_\mu$=0 ou de façon équivalente $a_\mu g b_\mu = -a_\mu g b_\mu$
Il suffit de trouver $t \in P_\mu$ tq $g^{-1}tg \in Q_\mu$ et $(-1)^t = -1$, car

$$a_\mu g b_\mu = a_\mu t g b_\mu = a_\mu (g g^{-1}) t g b_\mu = a_\mu g (g^{-1} t g) b_\mu = (-1)^{g^{-1}tg} a_\mu g b_\mu = -a_\mu g b_\mu$$

Plusieurs changements de variables ont été effectuer pour "faire apparaître et disparaître" des éléments. $(-1)^{g^{-1}tg} = (-1)^{g^{-1}} \cdot (-1)^t \cdot (-1)^g = (-1)^g \cdot (-1)^t \cdot (-1)^g = -1$
Par la contraposé du lemme No2FromSameColToSameRow, on a que
$\exists i, j, k, l \in \mu$ tq $i \neq j, g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(k), g(Y_\mu(j)) = Y_\mu(l), i.x = j.x$ et $k.y = l.y$.
Posons t : [0,n-1] $\rightarrow$ [0,n-1]

$$t(n) = \begin{cases} Y_\mu(k) & \text{si } n = Y_\mu(l) \\ Y_\mu(l) & \text{si } n = Y_\mu(k) \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

Par construction, $t \in P_\mu$ et $(-1)^t = -1$. Il suffit de montré que $g^{-1}tg \in Q_\mu$

$$g^{-1} \circ t \circ g(Y_\mu(i)) = g^{-1} \circ t(Y_\mu(k)) = g^{-1}(Y_\mu(l)) = Y_\mu(j)$$

$$g^{-1} \circ t \circ g(Y_\mu(j)) = g^{-1} \circ t(Y_\mu(l)) = g^{-1}(Y_\mu(k)) = Y_\mu(i)$$

On remarque que si $m \in \mu \backslash \{i, j\}, g(Y_\mu(m)) \notin \{Y_\mu(k), Y_\mu(l)\}$. Donc $t(g(Y_\mu(m)))$ se comporte comme la fonction identité. Ainsi $g^{-1}tg \in Q_\mu$.

□

Lemma 28 (SmallerImpZero). *Si $\mu > \lambda$, alors*

$$a_\mu \mathbb{C}[S_n] b_\lambda = 0$$

Proof. Comme $\mu > \lambda$
TODO montré que
Donc, il existe deux éléments de la même colonne que g envoit sur la même rangé
Ainsi un peut construire un t tq t $\in P_\mu$ et $g^{-1}tg \in Q_\lambda$.
Par le même argument que le dernier lemme, $a_\mu \mathbb{C}[S_n] b_\lambda = 0$ □

Lemma 29 (CuPropIdempotent). *c_μ est proportionel à un idempotent. De façon mathématique*

$$\exists a \in \mathbb{C}, c_\mu^2 = a \cdot c_\mu$$

Proof. On applique le lemme LinearTransformation avec $x = b_\mu a_\mu \in \mathbb{C}[S_n]$. □