RepresentationGroup

Alexandre Charland

April 27, 2025

Chapter 1

Module

Lemma 1 (HomAeM)**.** *Soit A un anneau unitaire, M un A-module et e un idempotant de A.*

$$\forall \phi \in Hom_A(Ae, M), \exists m \in eM, \phi(e) = m$$

Proof. Soit $n \in M$ tq $\phi(e) = n$

$$\phi(e) = n \Rightarrow e\phi(e) = \phi(e) = en \Rightarrow n = en$$

Donc $n \in eM$ $\square$

Lemma 2 (HomAeMisoeM)**.** *Soit A un anneau unitaire, M un A-module et e un idempotant de A.*

$$Hom_A(Ae, M) \cong eM$$

Proof. Soit $\phi : \mathrm{Hom}_A(Ae, M) \to M$ tq $\phi(\psi) = \psi(e)$
Il faut mq ϕ est un homomorphisme.
Soit $\psi, \sigma \in \mathrm{Hom}_A(Ae, M)$.

$$\phi(\psi + \sigma) = (\psi + \sigma)(e) = \psi(e) + \sigma(e) = \phi(\psi) + \phi(\sigma)$$

Soit $a \in A$

$$a \cdot \phi(\psi) = a \cdot \psi(e) = \phi(a \cdot \psi)$$

Comme $\mathrm{Hom}_A(Ae, M)$ est un module, par le premier théorème d'isomorphisme,
$\frac{\mathrm{Hom}_A(Ae,M)}{\ker(\phi)} \cong \mathrm{Im}(\phi)$
Le noyau de ϕ est trivial, car un unique homomorphisme peut être défini tq $\sigma(e) = 0$, car tous éléments du domaine sont de la forme ae.
Il ne reste plus qu'a montré que l'image est eM.
Par le lemme HomAeM, on a que $\mathrm{Im}(\phi) \subset eM$.
Soit $m \in eM$. Considérons $\psi(e) = m$ tq $\psi(ae) = am$.
Il s'agit d'un homomorphisme de $Ae \to M$.
Donc $\mathrm{Im}(\phi) = eM$ $\square$

Chapter 2

YoungTableau

Definition 3 (YoungTableau)**.** Un YoungTableau est une fonction des cellules d'un YoungDiagram de taille n et retourne un naturel de 0 à n-1

Lemma 4 (injYu)**.** *Un YoungTableau est injectif sur les entrés qui sont dans le YoungDiagram*

Proof. Par définition d'un YoungTableau □

Lemma 5 (bijYu)**.** *Un YoungTableau est une bijection entre les case de son YoungDiagram et les naturels de 0 à n-1*

Proof. Comme il est injectif et le domaine et codomaine sont fini et ont la même cardinalité. La fonction doit être bijective □

Lemma 6 (preImYu)**.** *Tous nombre de 0 à n-1 possède une unique case associé dans μ par Y_μ*

Proof. Trivial sachant que Y_μ est bijectif □

Definition 7 (Pu)**.** P_μ est un sous groupe de S_n, défini de la façon suivante:
Un élément de P_μ permute les entré du YoungDiagram s'ils sont sur la même rangé.

Proof. Il y a trois choses à vérifier.
Le sous-groupe est fermé sous la composition de fonction
Preuve:
Soit $\alpha, \beta \in P_\mu$, mq $\alpha \circ \beta(Y_\mu(\mathrm{i})) = Y_\mu(\mathrm{j}) \to$ i.y = j.y
Comme Y_μ est une bijection, $\exists k \in \mu$ tq $Y_\mu(\mathrm{k}) = \beta(Y_\mu(\mathrm{j}))$ Comme $\beta \in P_\mu$ on a que k.y = j.y
De plus on a que $\alpha(Y_\mu(\mathrm{k})) = \alpha \circ \beta(Y_\mu(\mathrm{i})) = Y_\mu(\mathrm{j})$
On peut déduire que i.y = k.y = j.y

L'élement neutre est élément de P_μ
La preuve découle de l'injectivité de Y_μ

L'inverse est élément de P_μ
Soit $\alpha \in P_\mu$, mq $\alpha^{-1} \in P_\mu$
Comme alpha est une bijection, on a que $\alpha^{-1}(Y_\mu(\mathrm{i})) = Y_\mu(\mathrm{j}) \Leftrightarrow Y_\mu(\mathrm{i}) = \alpha(Y_\mu(\mathrm{j}))$ □

Definition 8 (PuCard)**.** Le nombre d'élément de P_μ est fini.

Proof. Comme P_μ est un sous-groupe d'un groupe fini, il a un nombre fini d'élément. □

Definition 9 (Qu)**.** Q_μ est un sous groupe de S_n, défini de la façon suivante:
Un élément de Q_μ permute les entré du YoungDiagram s'ils sont sur la même colonne.

Proof. La même preuve que Pu □

Definition 10 (QuCard)**.** Le nombre d'élément de Q_μ est fini.

Proof. Comme Q_μ est un sous-groupe d'un groupe fini, il a un nombre fini d'élément. □

Lemma 11 (sectPuQu)**.** *Pour un même YoungTableau, l'intersection de P_μ et Q_μ est* 1

Proof. Il faut mq $P_\mu \cap Q_\mu \subseteq 1$
Soit $\alpha \in P_\mu \cap Q_\mu$ et i $\in \mu$
Comme Y_μ est bijectif, $\exists$ j $\in \mu$, $\alpha(Y_\mu(i)) = Y_\mu(j)$
$\alpha \in P_\mu \cap Q_\mu$ donc i.x = j.x et i.y = j.y
Donc i=j $\rightarrow \alpha(Y_\mu(i)) = Y_\mu(i)$
Donc *alpha* est la fonction id. □

Definition 12 (PuQu)**.** $P_\mu Q_\mu := \{g : [0, n-1] \rightarrow [0, n-1] | \exists p \in P_\mu \wedge \exists q \in Q_\mu, g = pq\}$

Definition 13 (rowToCol)**.** Soit g est une permutation de [0, n-1]. Elle est rowToCol si

$$\forall i, j, k, l \in \mu, ((i \neq j) \wedge (g \circ Y_\mu(i) = Y_\mu(k)) \wedge (g \circ Y_\mu(j) = Y_\mu(l))) \rightarrow ((i.x \neq j.x) \vee (k.y \neq l.y))$$

Definition 14 (YuInv)**.** Y_μ^{-1} est une l'inverse de Y_μ

Lemma 15 (staysInY)**.** *Soit g une permutation rowToCol,*

$$\forall m \in [0, n-1], (Y_\mu^{-1}(m).x, Y_\mu^{-1}(g(m)).y) \in \mu$$

Proof. No idea... TODO Figure it out □

Definition 16 (qu)**.** Soit g une permutation rowToCol,
q_μ est une permutation de [0, n-1] défini comme

$$q_\mu(m) = Y_\mu((Y_\mu^{-1}(m)).x, (Y_\mu^{-1} \circ g(m)).y)$$

Proof. Par le lemme staysInY, on sait que la fonction q_μ est bien défini.
Il ne reste plus qu'a montré que q_μ est une bijection.
Comme le domaine et codomaine sont de même taille, il suffit de montrer que q_μ est injectif.
Supposons le contraire, $\exists m, m' \in [0, n-1]$ tq $q_\mu(m) = q_\mu(m') \wedge m \neq m'$.
$\exists i, j \in \mu$, tq $Y_\mu(i) = m$ et $Y_\mu(j) = m'$.
Comme Y_μ est injective, on a que $i \neq j$.
$\exists k, l \in \mu$, tq $Y_\mu(k) = g(Y_\mu(i))$ et $Y_\mu(l) = g(Y_\mu(j))$.

$$q_\mu(Y_\mu(i)) = q_\mu(Y_\mu(j)) \Rightarrow$$
$$Y_\mu((Y_\mu^{-1}(Y_\mu(i))).x, (Y_\mu^{-1} \circ g(Y_\mu(i))).y) = Y_\mu((Y_\mu^{-1}(Y_\mu(j))).x, (Y_\mu^{-1} \circ g(Y_\mu(j))).y)$$
$$i.x = j.x \wedge Y_\mu^{-1} \circ g(Y_\mu(i)).y = Y_\mu^{-1} \circ g(Y_\mu(j)).y \Rightarrow Y_\mu^{-1} \circ Y_\mu(k).y = Y_\mu^{-1} \circ Y_\mu(l).y$$
$$i.x = j.x \wedge k.y = l.y$$

Donc comme g est rowToCol $i \neq j \wedge Y_\mu(k) = g(Y_\mu(i)) \wedge Y_\mu(l) = g(Y_\mu(j))$ on a que $i.x \neq j.x \vee k.y \neq l.y$.
Contradiction, donc q_μ est injectif et donc bijectif. □

Lemma 17 (quInQu)**.**

$$q_\mu \in Q_\mu$$

Proof. Par construction de q_μ, la valeur en x ne change pas après l'application. □

Definition 18 (quInv)**.** q_μ^{-1} est la fonction inverse de q_μ

Lemma 19 (staysInX)**.** *Soit g une permutation rowToCol,*

$$\forall m \in [0, n-1], ((Y_\mu^{-1} \circ g \circ q_\mu^{-1}(m)).x, (Y_\mu^{-1}(m)).y) \in \mu$$

Proof. No idea... TODO Figure it out □

Definition 20 (pu)**.** Soit g une permutation rowToCol,
p_μ est une permutation de [0, n-1] défini comme

$$p_\mu(m) = Y_\mu((Y_\mu^{-1} \circ g \circ q^{-1}(m)).x, (Y_\mu^{-1}(m)).y)$$

Proof. La preuve de la bijection requiert un lemme avant □

Lemma 21 (puqug)**.** *Soit g une permutation rowToCol,*

$$g = p_\mu \circ q_\mu$$

Proof. Soit $m \in [0, n-1]$, on cherche a montré que $p_\mu \circ q_\mu(m) = g(m)$
Soit $i, j \in \mu$ tq $Y_\mu(i) = m$ et $Y_\mu(j) = g(Y_\mu(i))$

$$q_\mu(Y_\mu(i)) = Y_\mu((Y_\mu^{-1}(Y_\mu(i))).x, (Y_\mu^{-1} \circ g(Y_\mu(i))).y) = Y_\mu(i.x, Y_\mu^{-1}(Y_\mu(j)).y) = Y_\mu(i.x, j.y)$$

On a donc

$$p_\mu \circ q_\mu(Y_\mu(i)) = Y_\mu(Y_\mu^{-1}(g \circ q_\mu^{-1} \circ q_\mu \circ Y_\mu(i)).x, Y_\mu^{-1}(q_\mu(Y_\mu(i))).y)$$

$$Y_\mu(Y_\mu^{-1}(g \circ Y_\mu(i)).x, Y_\mu^{-1}(Y_\mu(i.x, j.y)).y) = Y_\mu(Y_\mu^{-1}(Y_\mu(j)).x, j.y) = Y_\mu(j.x, j.y) = Y_\mu(j) = g(Y_\mu(i))$$

□

Lemma 22 (bijpu)**.** *Soit g une permutation rowToCol, p_μ est une bijection*

Proof. Par puqug, on a $p_\mu \circ q_\mu = g \Rightarrow p_\mu = g \circ q_\mu^{-1}$
Comme g et q_μ^{-1} sont des bijections, p_μ en est une aussi. □

Lemma 23 (puInPu)**.**

$$p_\mu \in P_\mu$$

Proof. Par construction de p_μ, la valeur en y ne change pas après l'application. □

Lemma 24 (gInPuQu)**.** *Soit g une permutation rowToCol*

$$g \in P_\mu Q_\mu$$

Proof. Il s'agit d'une conséquence directe des lemmes: puqug, puInPu et quInQu □

Definition 25 (IneqYoungDiagram)**.** Soit μ et λ deux YoungDiagram de même cardinalité.
On dit que $\mu > \lambda$ si $\exists i \in \mathbb{N}$ tq $\mu_i > \lambda_i$ et $\forall j \in \mathbb{N}_{<i}$, $\mu_j = \lambda_j$.

Chapter 3

SpechtModules

Definition 26 (YoungProjectors)**.** Un Young projector est défini par un YoungDiagram μ

$$a_\mu := \frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g \in P_\mu} g$$

$$b_\mu := \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{g \in Q_\mu} (-1)^g g$$

Où $(-1)^g$ est le signe de g

Definition 27 (YoungSymmetriser)**.** Un Young symmetriser est défini par un YoungDiagram μ
$c_\mu := a_\mu b_\mu$

Definition 28 (SpechtModules)**.** Soit μ un YoungDiagram.

$$V_\mu := \mathbb{C}[S_n] c_\mu$$

V_μ est appelé un Specht modules.
Il est un sous-espace de $\mathbb{C}[S_n]$.

Lemma 29 (LinearTransformation)**.** *$\exists l_\mu$ une fonction linéaire tq*
$\forall x \in \mathbb{C}[S_n]$, $a_\mu x b_\mu = l_\mu(x) c_\mu$

Proof. Soit x $\in \mathbb{C}[S_n]$.
x est de la forme $\sum_{g \in S_n} a_g g$. Examinons se qu'il se passe pour différent g.
Si g $\in P_\mu Q_\mu$, alors $\exists$ p $\in P_\mu$ et q $\in Q_\mu$ tq g=pq

$$a_\mu g b_\mu = \frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g \in P_\mu} g \; pq \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h \in Q_\mu} (-1)^h$$

$$\frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g \in P_\mu} gp = \frac{1}{|P_\mu|} \sum_{g' \in P_\mu} g'$$

On peut faire le changement de variable en posant $g' = gp$ et en utilisant le fait que $\phi(g) = gp$ est un isomorphisme de groupe. Ainsi les deux sommes sont équivalantes à un réordenement près.

$$\frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h \in Q_\mu} (-1)^h qh = \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h \in Q_\mu} (-1)^h qh = (-1)^{q^{-1}} \frac{1}{|Q_\mu|} \sum_{h' \in Q_\mu} (-1)^{h'} h'$$

$$a_\mu g b_\mu = (-1)^q c_\mu$$

Il ne reste plus à montrer que si g $\notin P_\mu Q_\mu$ alors $l_\mu(g)$=0, car g ne peut pas être exprimer par c_μ
Donc il faut mq $a_\mu g b_\mu$=0 ou de façon équivalente $a_\mu g b_\mu = -a_\mu g b_\mu$
Il suffit de trouver $t \in P_\mu$ tq $g^{-1}tg \in Q_\mu$ et $(-1)^t = -1$, car

$$a_\mu g b_\mu = a_\mu t g b_\mu = a_\mu (g g^{-1}) t g b_\mu = a_\mu g (g^{-1} t g) b_\mu = (-1)^{g^{-1}tg} a_\mu g b_\mu = -a_\mu g b_\mu$$

Plusieurs changements de variables ont été effectuer pour "faire apparaître et disparaître" des éléments. $(-1)^{g^{-1}tg} = (-1)^{g^{-1}} \cdot (-1)^t \cdot (-1)^g = (-1)^g \cdot (-1)^t \cdot (-1)^g = -1$
Par la contraposé du lemme No2FromSameColToSameRow, on a que
$\exists i, j, k, l \in \mu$ tq $i \neq j, g(Y_\mu(i)) = Y_\mu(k), g(Y_\mu(j)) = Y_\mu(l), i.x = j.x$ et $k.y = l.y$.
Posons t : [0,n-1] $\to$ [0,n-1]

$$t(n) = \begin{cases} Y_\mu(k) & \text{si } n = Y_\mu(l) \\ Y_\mu(l) & \text{si } n = Y_\mu(k) \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

Par construction, $t \in P_\mu$ et $(-1)^t = -1$. Il suffit de montré que $g^{-1}tg \in Q_\mu$

$$g^{-1} \circ t \circ g(Y_\mu(i)) = g^{-1} \circ t(Y_\mu(k)) = g^{-1}(Y_\mu(l)) = Y_\mu(j)$$

$$g^{-1} \circ t \circ g(Y_\mu(j)) = g^{-1} \circ t(Y_\mu(l)) = g^{-1}(Y_\mu(k)) = Y_\mu(i)$$

On remarque que si $m \in \mu \backslash \{i, j\}, g(Y_\mu(m)) \notin \{Y_\mu(k), Y_\mu(l)\}$. Donc $t(g(Y_\mu(m)))$ se comporte comme la fonction identité. Ainsi $g^{-1}tg \in Q_\mu$.

□

Lemma 30 (SmallerImpZero). *Si $\mu > \lambda$, alors*

$$a_\mu \mathbb{C}[S_n] b_\lambda = 0$$

Proof. Comme $\mu > \lambda$
TODO montré que
Donc, il existe deux éléments de la même colonne que g envoit sur la même rangé
Ainsi un peut construire un t tq t $\in P_\mu$ et $g^{-1}tg \in Q_\lambda$.
Par le même argument que le dernier lemme, $a_\mu \mathbb{C}[S_n] b_\lambda = 0$ □

Lemma 31 (CuPropIdempotent). *c_μ est proportionel à un idempotent. De façon mathématique*

$$\exists a \in \mathbb{C}, c_\mu^2 = a \cdot c_\mu$$

Proof. On applique le lemme LinearTransformation avec $x = b_\mu a_\mu \in \mathbb{C}[S_n]$. □

Theorem 32 (IrreductibleRepresentationSn). *$\forall \mu$ partition de n, V_μ est toute les représentations irréductibles de S_n*

Proof. Soit μ, λ deux partitions de n et sans perte de généralité, $\mu \geq \lambda$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[S_n]}(V_\mu, V_\lambda) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[S_n]}(\mathbb{C}[S_n]c_\mu, \mathbb{C}[S_n]c_\lambda) \cong c_\mu \mathbb{C}[S_n] c_\lambda$$

Si $\mu > \lambda$ alors $c_\mu \mathbb{C}[S_n] c_\lambda = 0$
Sinon $\mu = \lambda$ et on a une représentation de dimension 1.
Comme le nombre de partition de n est égale au nombre de classe de conjugaison de S_n on a que tous les représentations de S_n sont atteintes par V_μ. □