Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

3ª Aula Teórica

Sumário:
Cap. 2 Movimento a uma dimensão:
Método de Euler de integração numérica. Erro de truncatura.

Bibliografia:
Cap. 2: Serway, cap. 2; Sørenssen, cap. 4; Villate, cap. 1

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea): $x(t)$

Velocidade instantânea: $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$

Aceleração instantânea: $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

Se se conhecer uma destas quantidades, saberemos as outras duas.

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea): $x(t)$

Velocidade instantânea: $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$

Aceleração instantânea: $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

E se souber a aceleração instantânea?

Cálculo integral: $a_x(t)$

$$v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\, dt$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\, dt$$

Calculado (i) por métodos analíticos ou (ii) por métodos numéricos.

Definição de derivada $\frac{d}{dt}$ deuma função

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{x(t+\delta t)-x(t)}{(t+\delta t)-t} = v_x(t)$$

Indica-se por $\frac{dx(t)}{dt} = v_x(t)$

Método de Euler (método numérico de integração)

Leonhard Euler 1707-1783

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t} = v_x(t)$$ aproximado por $$\frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t} \approx v_x(t)$$

Considere-se $v_x(0) = 0$, quando é largado e o movimento se inicia

Para δt pequenos espera-se que

$$\frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t} \approx v_x(t)$$

Ou $$x(t+\delta t) - x(t) \approx v_x(t) \times \delta t$$

$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x(t) \times \delta t$$

Se soubermos no mesmo instante, t,
a posição $x(t)$ e a velocidade $v_x(t) = \frac{d\,x(t)}{dt}$ (a sua derivada)
Pode-se calcular (aproximado) o valor da posição num instante posterior, $t + \delta t$.

Método de Euler (método numérico de integração)

$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\ (t) \times \delta t$$

Se se conhecer $x(0) = x_0$

Obtêm-se $x(\delta t) = x_0 + v_x(0)\ \times \delta t$

e de novo $x(\delta t + \delta t) = x(\delta t) + v_x(\delta t)\ \times \delta t$

e

$$x(2\delta t + \delta t) = x(2\delta t) + v_x(2\delta t)\ \times \delta t$$

Pode-se calcular a posição em qualquer instante posterior ao instante inicial.

Fácil de programar. Numa linguagem de programação pode-se usar o ciclo (loop) porque a expressão é sempre idêntica. **Tem-se de escolher o passo temporal δt de modo a conseguir a convergência da solução**

$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x(t)\ \times \delta t$$

Problema Implemente o método de Euler para calcular a posição instantânea, conhecendo a velocidade instantânea. Como conhecemos a solução exata (analítica), este problema serve como teste ao método de Euler e ao programa python.

O problema de movimento comum:

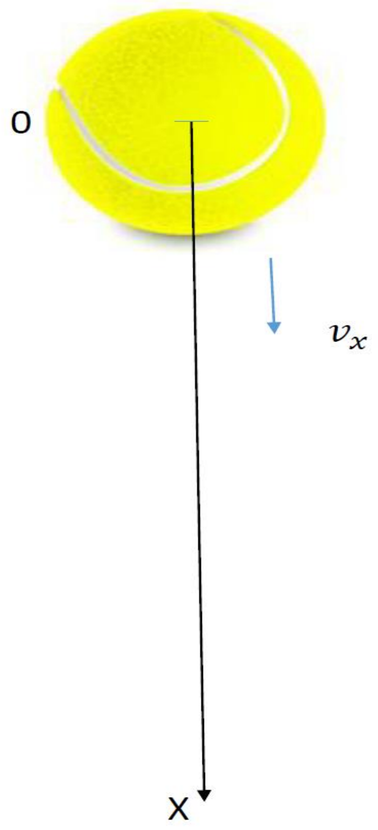
Conhece-se
- A direção do movimento
- a aceleração
- velocidade inicial
- posição inicial

Quer-se prever a lei de velocidade e a lei do movimento (da posição)!

O estudo começa por construir um esquema:

- Escolha do eixo onde se desenvolve o movimento.
- Escolha do sentido positivo do eixo (costuma ser o do movimento)
- Escolha da origem desse eixo (costuma ser a posição inicial)
- Nesse eixo, colocar a aceleração e o seu sentido.
- Nesse eixo colocar a velocidade e a posição inicial.
- Escolha do instante zero, origem dos tempos (costuma ser o instante inicial).

Exemplo: Queda livre de um objeto sem resistência do ar, quando largado ($v_x(t_0) = 0$).
A aceleração é constante.



$$t_0 = 0$$
$$x(0) = 0$$
$$v_x(t_0) = 0$$
$$a_x(t) = +g$$

Já resolvemos este problema por integração analítica. Tem-se movimento uniformemente acelerado.
Agora vamos encontrar a velocidade e a posição **por um método numérico: Método de Euler, como teste!**

Método de Euler (método numérico de integração)

$$x(0) = x_0$$

$$x(\delta t) \approx x_0 + v_x\ (0) \times \delta t$$

$$x(\delta t + \delta t) \approx x(\delta t) + v_x\ (\delta t) \times \delta t$$
$$x(2\delta t + \delta t) \approx x(2\delta t) + v_x\ (2\delta t) \times \delta t$$
...

$$x(N\delta t) \approx v_x((N-1)\delta t) + v_x\ ((N-1)\delta t) \times \delta t$$
$$x(N\delta t + \delta t) \approx x(N\delta t) + v_x\ (N\delta t) \times \delta t$$

δt = passo temporal
N número de passos

Para um tempo final t_f (t_0=instante inicial)

$N = \frac{t_f - t_0}{\delta t}$ ou $\delta t = \frac{t_f - t_0}{N}$

N e δt são inversamente proporcionais

Método de Euler (método numérico de integração)

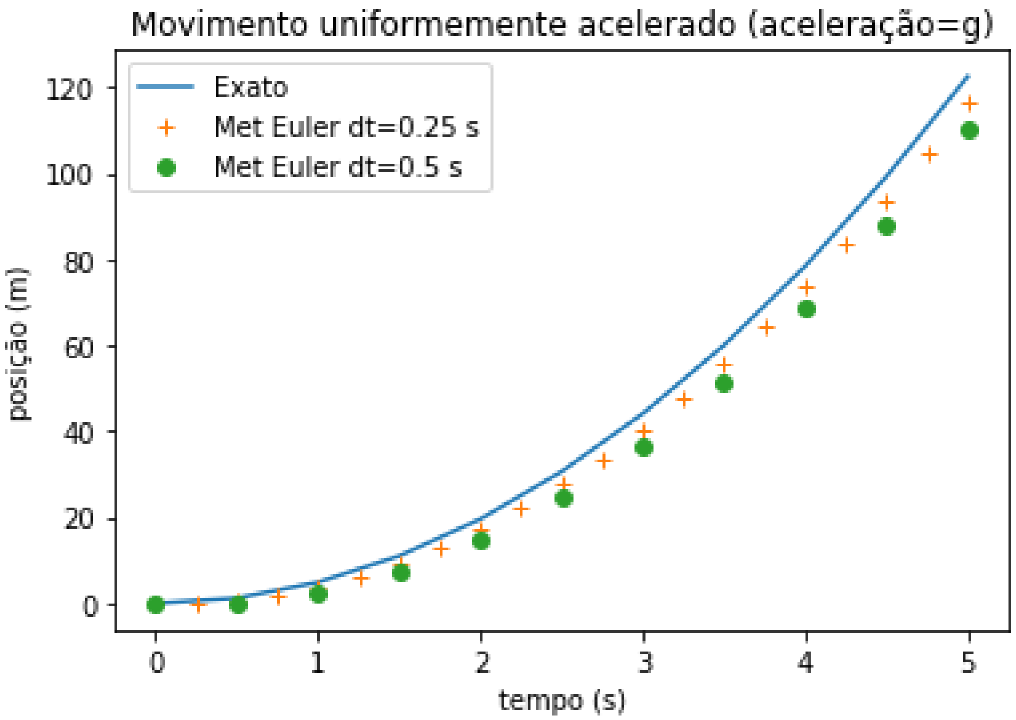
Escolha do passo temporal δt

δt = passo temporal
N número de passos

Para um tempo final t_f (t_0=instante inicial)

$$N = \frac{t_f - t_0}{\delta t} \quad \text{ou} \quad \delta t = \frac{t_f - t_0}{N}$$

N e δt são inversamente proporcionais



No problema da queda livre t=2 s
Cálculo da variação do erro com o passo δt.

A tabela e o gráfico seguinte mostra como este erro varia com o passo temporal:

δt (s)	$x(2)$ (m)	$\mathcal{E}_{global} = \lvert x(2)_{exato} - x(2)_{MetEuler} \rvert$
0.5	14.7	**4.9**
0.25	17.15	**2.45**
0.1	18.62	**0.98**
0.05	19.1	**0.50**
0.01	19.502	**0.10**
0.005	19.550	**0.05**
$x(2)_{exato}$	**19.60000**	

O erro global do método de Euler é linear no passo.
É proporcional ao passo, ou seja inversamente proporcional ao número de passos N.

Tarefa: Implementar em python o método de Euler para resolver a equação diferencial $\frac{dx(t)}{dt} = v_x(t)$,
no problema da queda da bola de ténis

$$x(0) = x_0$$
$$x(\delta t) \approx x_0 + v_x\,(0) \times \delta t$$
$$x(\delta t + \delta t) \approx x(\delta t) + v_x\,(\delta t) \times \delta t$$
$$x(2\delta t + \delta t) \approx x(2\delta t) + v_x\,(2\delta t) \times \delta t$$
...
$$x(N\delta t) \approx v_x((N-1)\delta t) + v_x\,((N-1)\delta t) \times \delta t$$
$$x(N\delta t + \delta t) \approx x(N\delta t) + v_x\,(N\delta t) \times \delta t$$

INPUT: δt = passo temporal
t_0=0 instante
t_f= instante final
$x_0 = 0$
$v_x(0) = 0$ e sabemos:

$N = \frac{t_f - t_0}{\delta t}$ número de passos
$v_x(t) = gt$

Tarefa: Implementar em python o método de Euler para o problema da queda da bola de ténis

$$x(0) = x_0$$
$$x(\delta t) \approx x_0 + v_x\ (0) \times \delta t$$
$$x(\delta t + \delta t) \approx x(\delta t) + v_x\ (\delta t) \times \delta t$$
$$x(2\delta t + \delta t) \approx x(2\delta t) + v_x\ (2\delta t) \times \delta t$$
$$\ldots$$
$$x(N\delta t) \approx v_x((N-1)\delta t) + v_x\ ((N-1)\delta t) \times \delta t$$
$$x(N\delta t + \delta t) \approx x(N\delta t) + v_x\ (N\delta t) \times \delta t$$

INPUT: δt = passo temporal
t_0=0 instante
t_f= instante final
$x_0 = 0$
$v_x(0) = 0$

e sabemos:

$N = \frac{t_f - t_0}{\delta t}$ número de passos
$v_x(t) = gt$

Cálculo Científico: Lida-se com números

Pacote numpy é conveniente: Usa 'arrays'

a=numpy.zeros(n+1)

b=numpy.array([1])

t=numpy.linscape(t0,tf,n+1)

Tarefa: Implementar em python o método de Euler para o problema da queda da bola de ténis

$x(0) = x_0 \quad \rightarrow \quad x[0]$ corresponde ao instante t[0]

$x(\delta t) \approx x_0 + v_x\,(0) \times \delta t \quad \rightarrow \quad x[1]$ corresponde ao instante t[1]

$x(\delta t + \delta t) \approx x(\delta t) + v_x\,(\delta t) \times \delta t \quad \rightarrow \quad x[2]$ corresponde ao instante t[2]

$x(2\delta t + \delta t) \approx x(2\delta t) + v_x\,(2\delta t) \times \delta t \quad \rightarrow \quad x[3]$ corresponde ao instante t[3]

…

$x(N\delta t) \approx v_x((N-1)\delta t) + v_x\,((N-1)\delta t) \times \delta t \rightarrow \quad x[n]$ corresponde ao instante t$[n]$

indexação: **de 0 a n**, num total de **n+1 elementos**

Cálculo Científico: Lida-se com números

Pacote numpy é conveniente: Usa ‘arrays’

```
a=numpy.zeros(n+1)
b=numpy.array([1, 2, 5 ])
t=numpy.linscape(t0,tf,n+1)
```

```
# Queda sem resistência do ar
# Integração numérica de dx/dt = vx, pelo Método de Euler
import numpy as np

dt=0.01
tf=4.0
t0=0
x0=0
v0x=0

g=9.80

n=np.int((tf-t0)/dt+0.1)
print('n',n)

t=np.zeros(n+1)                 # n+1 elementos; último índice n
x=np.zeros(n+1)
vx=np.zeros(n+1)

vx[0]=v0x
t[0]=t0
x[0]=x0
for i in range(n):              # Método de Euler (n elementos)
   t[i+1]=t[i]+dt
   vx[i]=g*t[i]
   x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt         # último x[n]= x[n-1]+vx[n-1]*dt
                                #    índice n : é o (n+1)º elemento
```

Método de Euler (método numérico de integração)


Leonhard Euler 1707-1783

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{v_x(t+\delta t)-v_x(t)}{\delta t} = a_x(t)$$

<u>aproximado por</u>

$$\frac{v_x(t+\delta t)-v_x(t)}{\delta t} \approx a_x(t)$$

Considere-se $v_x(0) = 0$, quando é largado e o movimento se inicia

Para <u>δt pequenos</u> espera-se que

$$\frac{v_x(t+\delta t)-v_x(t)}{\delta t} \approx a_x(t)$$

Ou $$v_x(t+\delta t) - v_x(t) \approx a_x\,(t) \times \delta t$$

$$v_x(t+\delta t) \approx v_x(t) + a_x\,(t) \times \delta t$$

Se soubermos no mesmo instante, t,
a velocidade $v_x(t)$ e a aceleração $a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}$ (a sua derivada)
Pode-se calcular (aproximado) o valor da velocidade num instante posterior, $t + \delta t$.

Método de Euler (método numérico de integração)

$$v_x(t+\delta t) \approx v_x(t) + a_x\,(t) \times \delta t$$

Se se conhecer $v_x(0) = v_{x0}$

Obtêm-se $v_x(\delta t) \approx v_{x0} + a_x\,(0) \times \delta t$

e de novo $v_x(\delta t + \delta t) \approx v_x(\delta t) + a_x\,(\delta t) \times \delta t$

e

$v_x(2\delta t + \delta t) \approx v_x(2\delta t) + a_x\,(2\delta t) \times \delta t$

Pode-se calcular a velocidade em qualquer instante posterior ao instante inicial.

$$v_x(t+\delta t) \approx v_x(t) + a_x\,(t) \times \delta t$$

Método de Euler (método numérico de integração)

$$v_x(t+\delta t) \approx v_x(t) + a_x\ (t) \times \delta t$$

$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x(t) \times \delta t$$

Se se conhecer

$$v_x(0) = v_{x0}$$

$$x(0) = x_0$$

Obtêm-se

$$v_x(\delta t) \approx v_{x0} + a_x\ (0) \times \delta t$$

$$x(\delta t) \approx x_0 + v_x\ (0) \times \delta t$$

e de novo

$$v_x(\delta t + \delta t) \approx v_x(\delta t) + a_x\ (\delta t) \times \delta t$$

$$x(\delta t + \delta t) \approx x(\delta t) + v_x\ (\delta t) \times \delta t$$

e

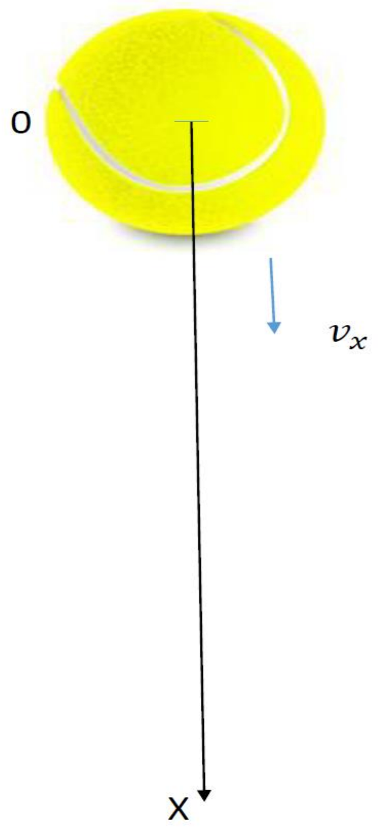
$$v_x(2\delta t + \delta t) \approx v_x(2\delta t) + a_x\ (2\delta t) \times \delta t$$

$$x(2\delta t + \delta t) \approx x(2\delta t) + v_x\ (2\delta t) \times \delta t$$

…

…

Exemplo: Queda livre de um objeto sem resistência do ar, quando largado ($v_x(t_0) = 0$).
A aceleração é constante.



$$t_0 = 0$$
$$x(0) = 0$$
$$v_x(t_0) = 0$$
$$a_x(t) = +g$$

Já resolvemos este problema por integração analítica. Tem-se movimento uniformemente acelerado.
Agora vamos encontrar a velocidade e a posição **por um método numérico: Método de Euler, como teste!**

Método de Euler (método numérico de integração)

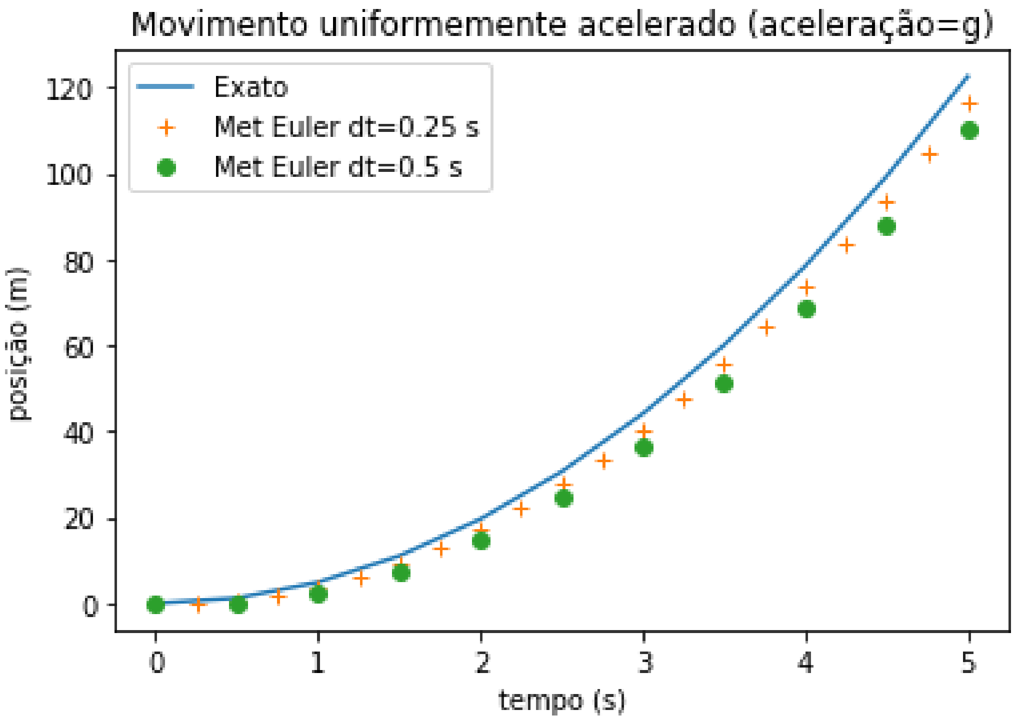
Escolha do passo temporal δt

δt = passo temporal
N número de passos

Para um tempo final t_f (t_0=instante inicial)

$$N = \frac{t_f - t_0}{\delta t} \quad \text{ou} \quad \delta t = \frac{t_f - t_0}{N}$$

N e δt são inversamente proporcionais



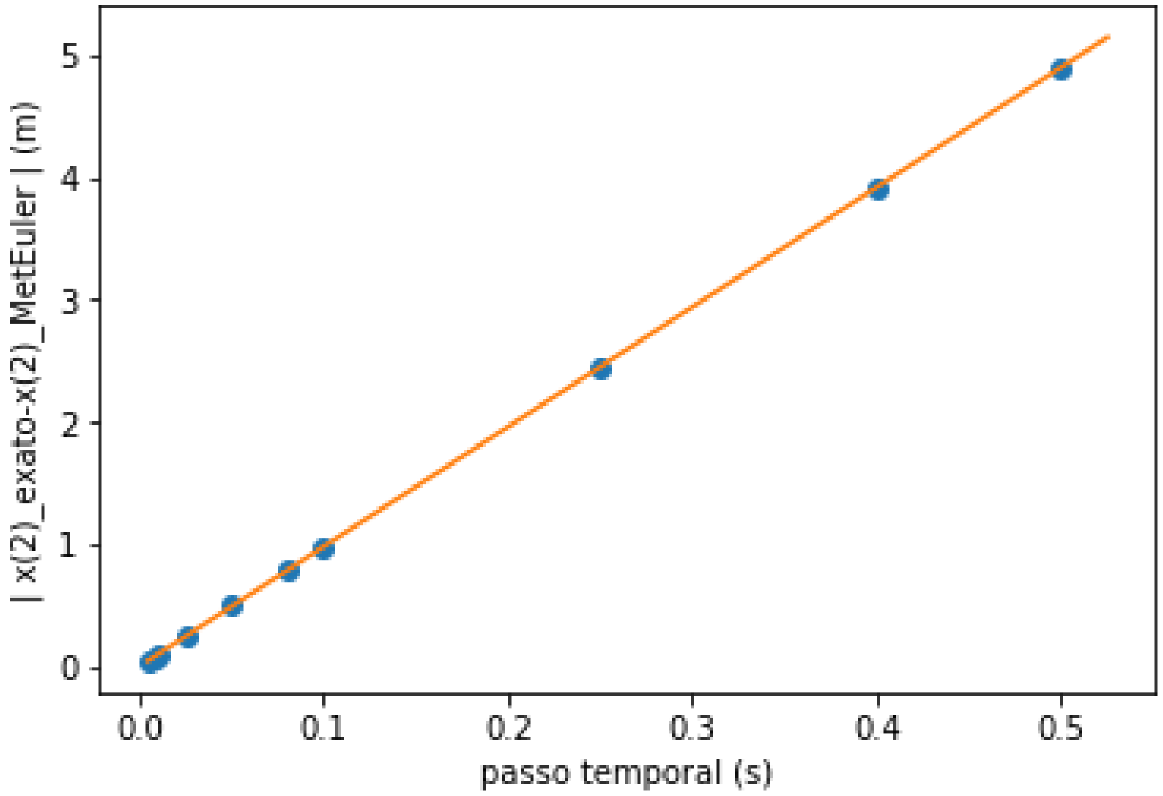
No problema da queda livre t=2 s
Cálculo da variação do erro com o passo δt.

A tabela e o gráfico seguinte mostra como este erro varia com o passo temporal:

δt (s)	$x(2)$ (m)	$\mathcal{E}_{global} = \lvert x(2)_{exato} - x(2)_{MetEuler} \rvert$
0.5	14.7	**4.9**
0.25	17.15	**2.45**
0.1	18.62	**0.98**
0.05	19.1	**0.50**
0.01	19.502	**0.10**
0.005	19.550	**0.05**
$x(2)_{exato}$	**19.60000**	

O erro global do método de Euler é linear no passo.
É proporcional ao passo, ou seja inversamente proporcional ao número de passos N.

No problema da queda livre t=2 s
Cálculo da variação do erro com o passo δt.
No gráfico está a diferença entre o valor calculado pelo método de Euler e o valor exato



O erro global do método de Euler é linear no passo.
É proporcional ao passo, ou seja inversamente proporcional ao número de passos N.

Erro cometido na aproximação de Euler?

$$\frac{v_x(t+\delta t) - v_x(t)}{\delta t} = a_x(t) + \text{erro cometido na aproximação de Euler}$$

Série de Taylor:

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_t \delta t + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 v_x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3 v_x}{dt^3}\right|_t \delta t^3 + \mathcal{O}(\delta t^4)$$

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta t^n}{n!} = 0$$

Método de Euler $\quad v_x(t+\delta t) = v_x(t) + a_x(t)\,\delta t$

Exato $\quad v_x(t+\delta t) = v_x(t) + a_x(t)\,\delta t + \underbrace{\frac{1}{2}\left.\frac{d^2 v_x}{dt^2}\right|_t \delta t^{\,2} + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3 v_x}{dt^3}\right|_t \delta t^{\,3} + \mathcal{O}(\delta t^4)}_{\text{erro (de truncatura)}}$

Método de Euler $v_x(t+\delta t) = v_x(t) + a_x(t)\,\delta t$

Exato $$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + a_x(t)\,\delta t + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{d^2 v_x}{dt^2}\bigg|_t \delta t^{\,2} + \frac{1}{3!}\frac{d^3 v_x}{dt^3}\bigg|_t \delta t^{\,3} + \mathcal{O}(\delta t^4)}_{\text{erro (de truncatura)}}$$

Erro de truncatura local proporcional a $\delta t^{\,2}$. O cálculo de $v_x(t_f)$ usou N passos temporais δt.

Como o erro de uma soma se acumula, o erro global ao fim de N passos é $N\,\delta t^{\,2}$ que é igual a $N\left(\frac{t_f - t_0}{N}\right)^2 = \frac{(t_f - t_0)^2}{N}$

O erro de truncatura é proporcional ao inverso do número de passos N,
e proporcional ao passo δt

Problema: Considere a queda de um objeto sem resistência do ar. Neste movimento a aceleração é constante durante todo o movimento. Se considerar no ciclo do seu programa quando calcula a velocidade em função do tempo usando o método de Euler, a solução numérica é exata. Porquê?