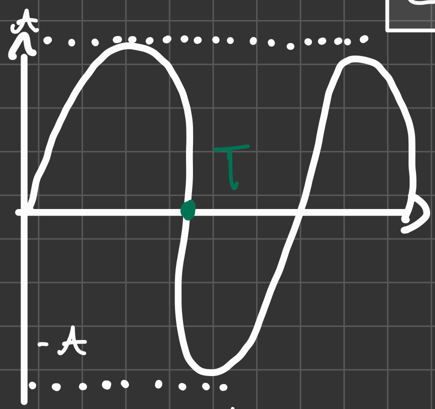
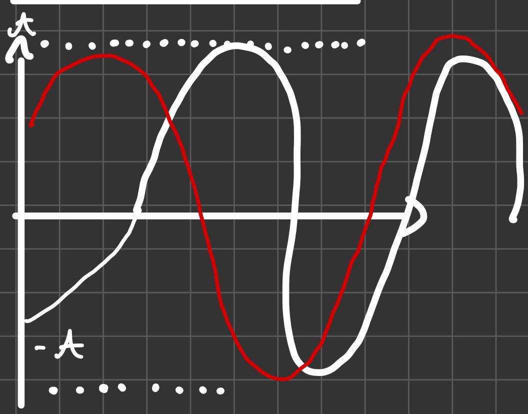
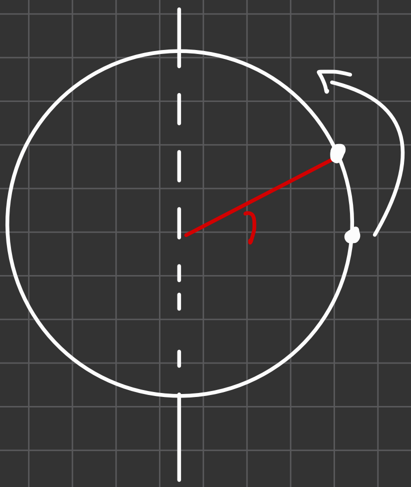
Sistemas Lineares

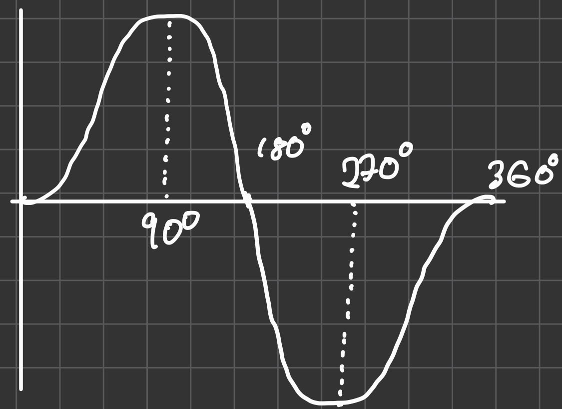
Fase, mede-se em graus

$x(t) = A \sin(w_0 t)$ → Sistema Linear → $y(t) = B \sin(w_0 T + \varphi)$









$$f_0 = \frac{1}{T} \quad (Hz)$$

$A \sin(wt)$ → Sistema Linear → $B \sin(wt + \phi)$

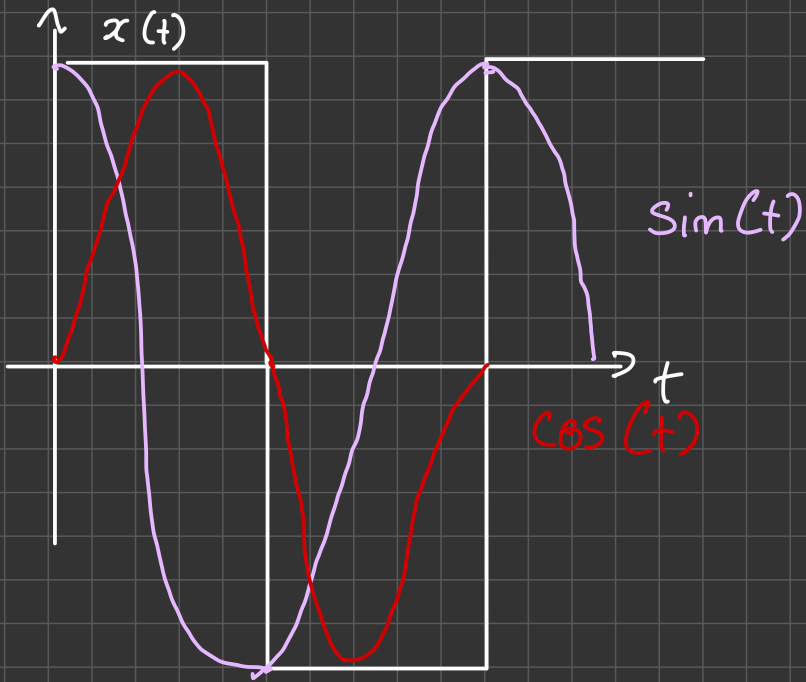
$$f_0 = \frac{1}{T}$$

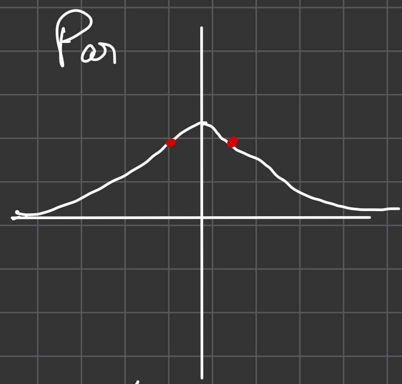
$$x(t) = \sum_{K=1}^{K} A_K \underset{\cos}{\sin}(2\pi K f_0 t + \underset{\phi_K}{\varphi_K}) + A_0$$

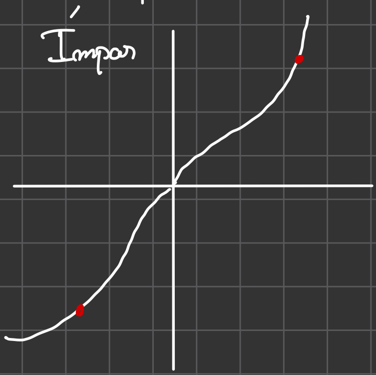
$\boxed{K = 0}$ Somar A_0 ou igualar K a 0.

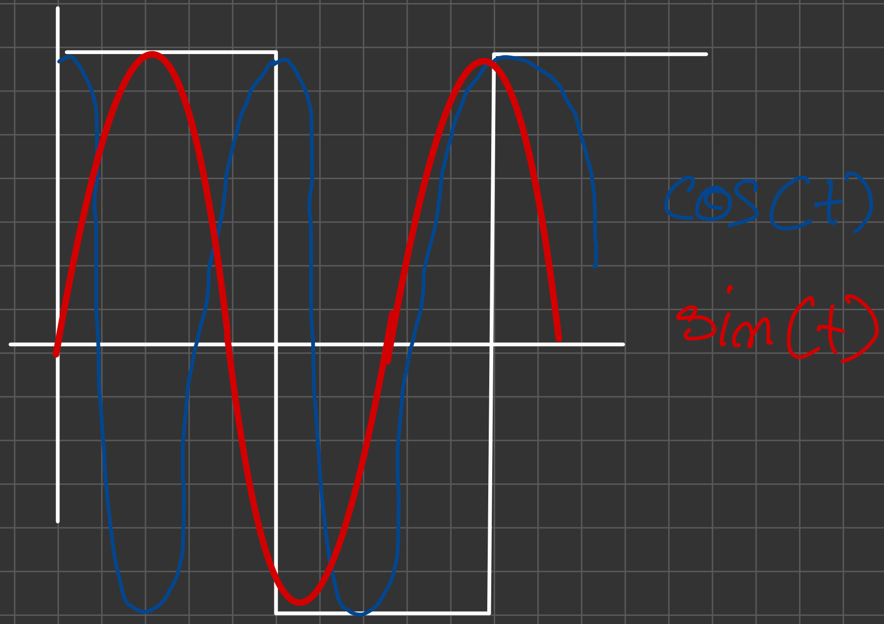
$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

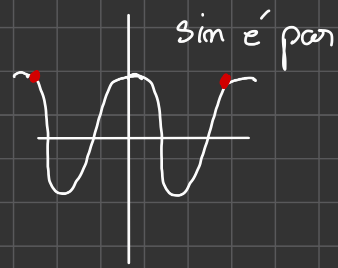
$a = 2\pi K f_0 t$, $b = \phi_K$

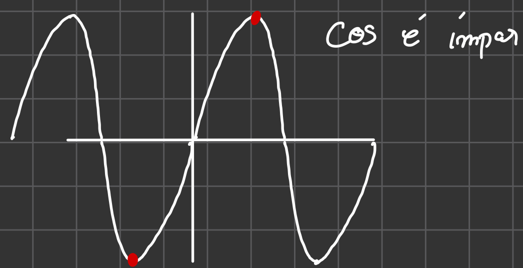


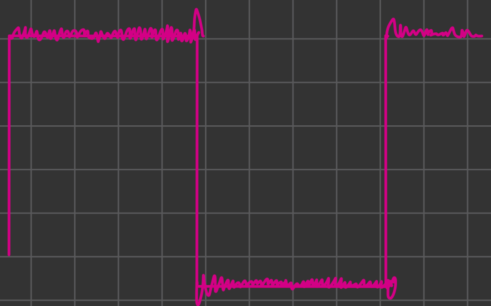












$f_1 = 1\ Hz$

$f_2 = 1{,}5\ Hz$ $\pi\ Hz$

$f_3 = 1{,}2\ Hz$

Sinais não relacionados harmonicamente

Se $f_2 = \pi\ Hz$, então é aperiódico

$$\begin{cases} f_1 = n_1 f_0 \\ f_2 = n_2 f_0 \\ f_3 = n_3 f_0 \end{cases}, \quad n_{1,2,3} \in \mathbb{N}$$

Se este sistema tiver solução, o sinal $f_1 + f_2 + f_3$ é periódico

$n_1 = 1 \Leftrightarrow f_0 = f_1$

$n_1 = 2 \Leftrightarrow f_0 = f_1/2$

...

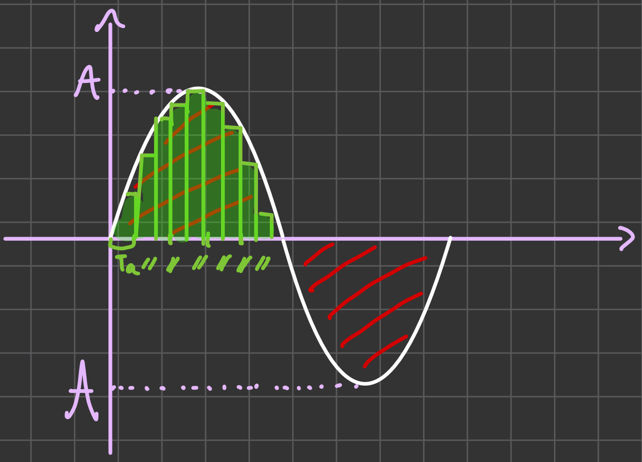
$n_1 = 10 \Leftrightarrow \boxed{f_0 = 0.1\ Hz}$

Prática 3

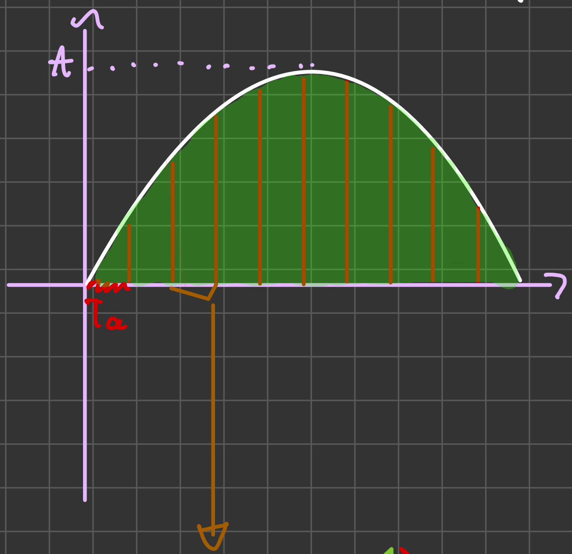
$$P = \underbrace{\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 \, dt}_{\text{Sinal aperiódico}}$$

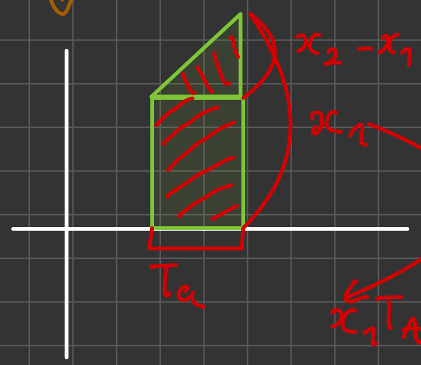
$$P = \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 \, dt}_{\text{Sinal de período } T}$$

Método dos Retângulos



Método dos Trapézios





$$x_1 T_A + \frac{x_2 - x_1}{2} T_A$$
$$= \frac{x_1 + x_2}{2} T_A$$

$$x = A \sin(2\pi f t + \phi)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \boxed{\sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t + \phi\right)}$$

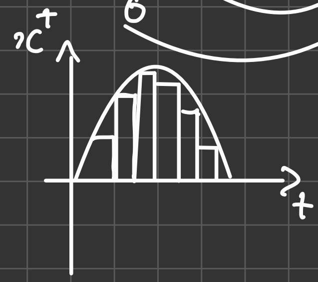
$$\hookrightarrow \frac{1 - \cos\left(\frac{4\pi}{T} t + 2\phi\right)}{2}$$

$$= \frac{A^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \, dt + \underbrace{\frac{A^2}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{4\pi}{T} + 2\phi\right)}_{=0}$$

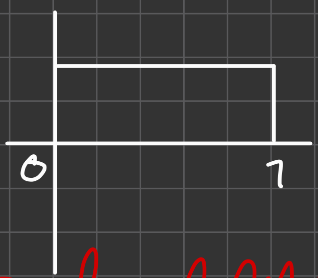
$$= \frac{A^2}{2}$$

```
function  p = power_sig(x, Ta, T)
          x2 = x.^2
          area = x2 * Ta
          int = sum(area)
          P = int / T;
end
```

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2\,dt$$

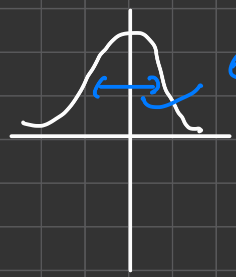


rand()



Igual probabilidade de qualquer valor entre 0 e 1

randn()



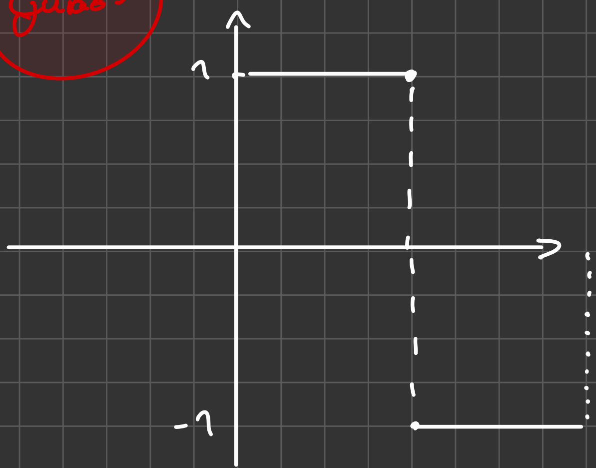
$\sigma^2 = 1$

Mais provável ser 0 menos provável ser dos extremos.

"É o que temos de viver para chegar a novos alturas"

$$\cos(2\pi f t + \phi) = \cos(2\pi f t)\cos\phi + \sin(2\pi f t)\sin(\phi)$$

Guião 3



$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\,w t)\,dt$$

$$w = \frac{2\pi}{T}$$

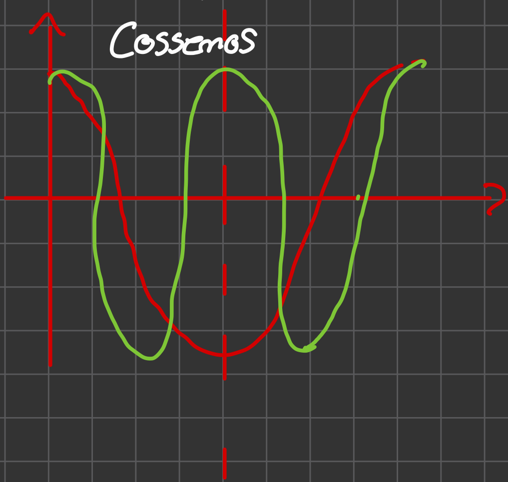
$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T/2] \\ -1, & t \in \,]T/2, T[\end{cases}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\left(\underbrace{\left[\sin(k w t)\right]_0^{T/2}}_{\cancel{\sin}(k\pi) - \cancel{\sin(0)} = 0} - \underbrace{\left[\sin(k w t)\right]_{T/2}^{T}}_{\cancel{\sin}(k2\pi) - \cancel{\sin}(k\pi) = 0}\right)$$

$\Leftrightarrow a_k = 0$

$$a_K = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(K w t) = 0$$

$$w = \frac{2\pi}{T}$$



$$b_K = \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} \sin(K w t)\,dt - \int_{T/2}^{T} \sin(K w t)\,dt\right)$$

$$= \frac{2}{TKw}\left(\left[-\cos(K w t)\right]_0^{T/2} - \left[-\cos(K w t)\right]_{T/2}^{T}\right)$$

$$\left[-\cos(K w t)\right]_0^{T/2} = -\cos(K\pi) + \cos(0) =$$

$$\left[-\cos(K w t)\right]_{T/2}^{T} = -\cos(2K\pi) + \cos(K\pi)$$

$$= -1 + \cos(K\pi)$$

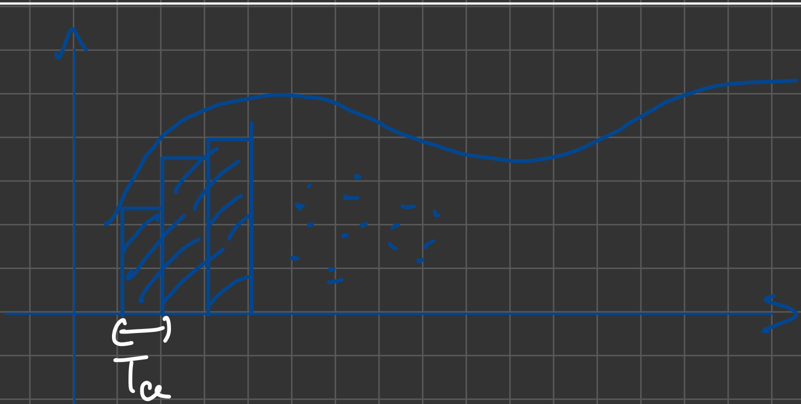
$$b_K = \frac{4}{TKw}\left(1 - \cos(K\pi)\right) = \frac{2}{\pi K}\left(1 - \cos(K\pi)\right)$$

$$\cos(K\pi) = -1^K$$

T.P.

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt$$

$$a_K = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(2\pi K f_0 t)\,dt$$



$a_K \cos(w_k t) + b_K \sin(w_k t)$

$$y(t) = \sum_{K=1}^{\infty} A_K \left(\underbrace{2\pi K f_0}_{f_K} + \phi_K\right) =$$

Euler

$$\cos(wt) = \frac{e^{jwt} + e^{-jwt}}{2}$$

$$e^{jwt} = \cos(wt) + j\sin(wt)$$

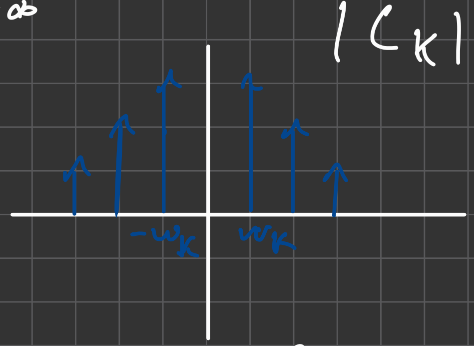
$$\sum_{K=1}^{\infty} A_K \frac{e^{j(2\pi K f_0 t + \phi_K)} + e^{-j(2\pi K f_0 t + \phi_K)}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{K=1}^{\infty} A_K \left(e^{j2\pi K f_0 t}\, e^{j\phi_K} + e^{-j2\pi K f_0 t}\, e^{-j\phi_K}\right.$$

$$=$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{A_k e^{j\phi_k}}_{C_k} e^{j2\pi \overbrace{k f_0}^{f_k} t} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{A_k e^{-j\phi_k}}_{C_k} e^{-j2\pi \overbrace{k f_0}^{f_k} t}$$

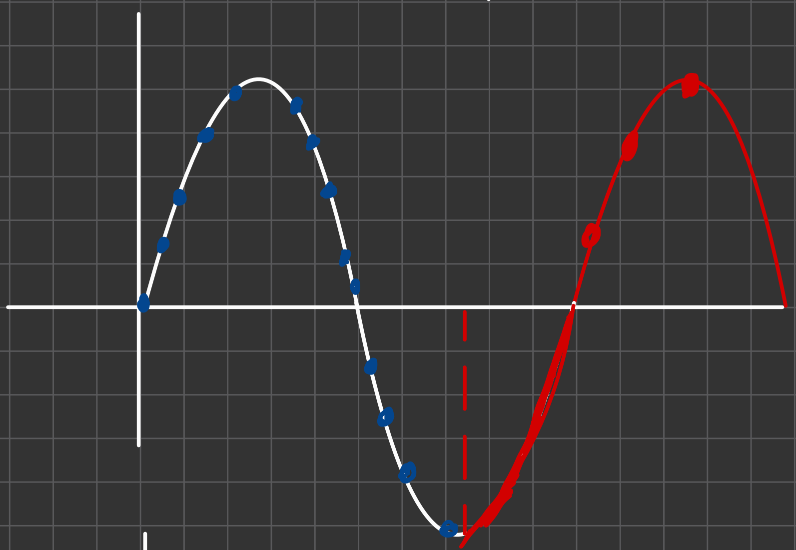
$$x(k) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \, e^{j \underbrace{2\pi k f_0}_{\omega_k} t}$$

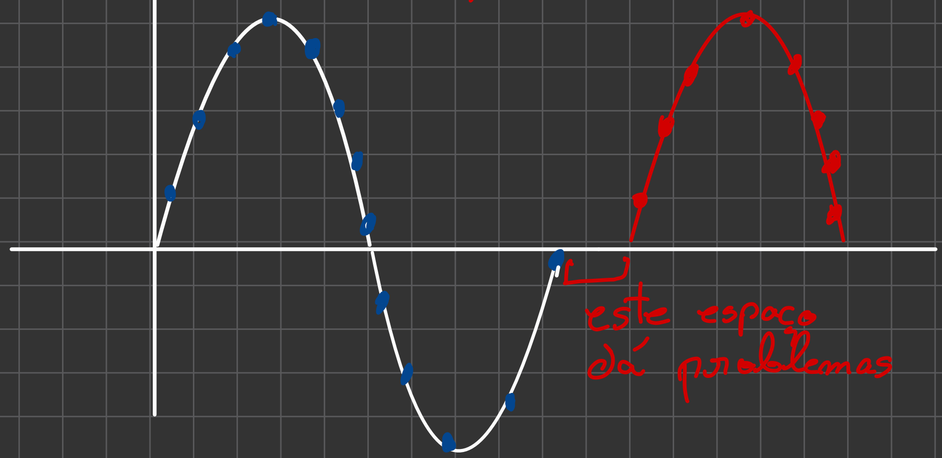


$$C_{-k} = C_k^{*}$$

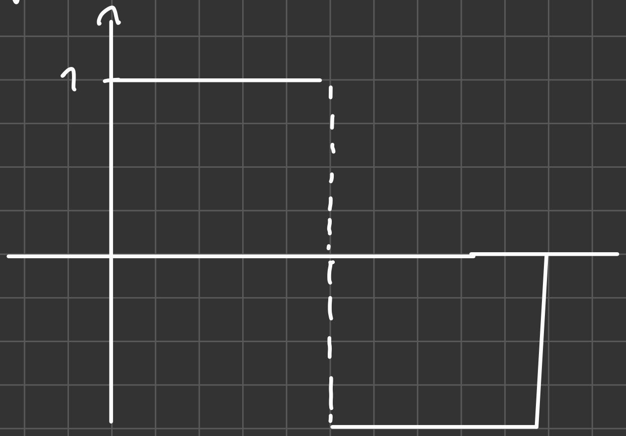
$*$ → conjugad

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt = \sum_{k=-K}^{K} |C_k|^2$$





P4



$a_K = 0$

$b_K = \frac{2}{\pi K}\left(1 - \cos(\pi K)\right)$

$$x = \begin{cases} 1, & t \in [0, T/2[\\ -1, & t \in [T/2, T[\end{cases}$$

$$x(1) = \sum_{K=1}^{K} a_K \cos(K w_0 t) + b_K \sin(K w_0 t)$$

$a_K = 0$

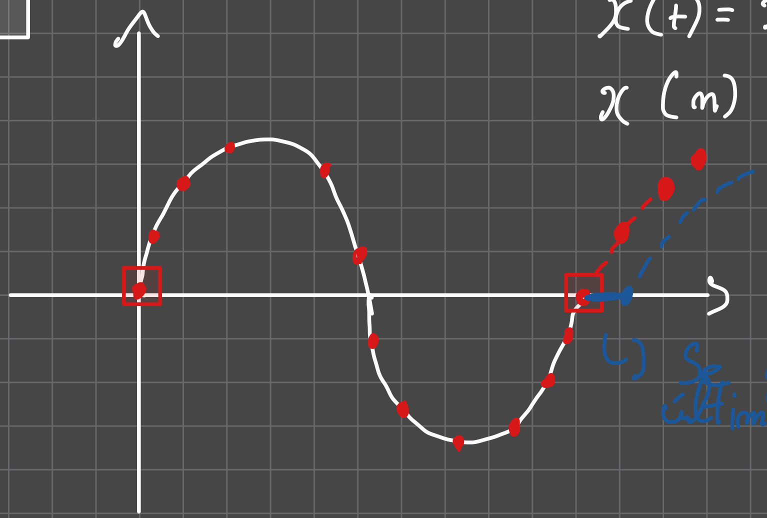
$$b_K = \frac{2}{\pi K}\left(1 - \cos(\pi K)\right) = \begin{cases} 0, & K \text{ par} \\ \frac{4}{\pi K}, & K \text{ impar} \end{cases}$$

Harmónicas $\Rightarrow$ múltiplos da frequência fundamental

T - Ta

$x(t) = x(t+T)$

$x(n) = x(n+N)$



(-) Se guardarmos o último ponto

TP

$$y(t) = \frac{1}{2} \sum_{K=-K}^{K} C_K \, e^{j2\pi K f_0 n T_a} = \sum_{K=-K}^{K} C_K \, e^{j2\pi K f_0}$$

faz parte do C_K

$\boxed{\text{DFT}}$

- O algoritmo **FFT** (***Fast Fourier Transform***) implementa a DFT de uma forma muito eficiente.
- Seja $\mathbf{x}$ um vetor de N amostras consecutivas de um sinal, com período de amostragem T_a.

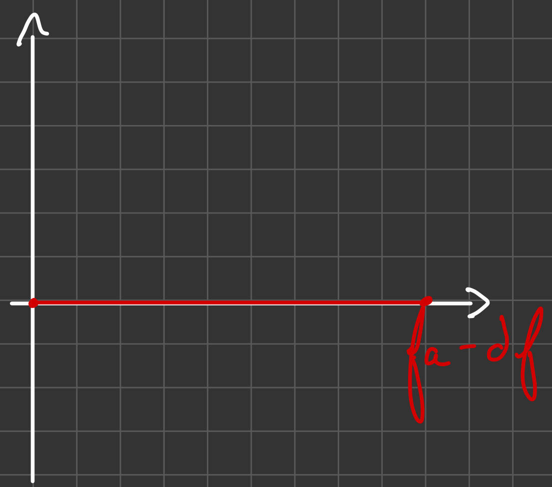
  length(x)

- $\gg \mathbf{X} = fft(\mathbf{x})/N;$
- O vetor $\mathbf{X}$ tem também N elementos: um coeficiente ($C_k \in \mathbb{C}$) para cada frequência da decomposição.

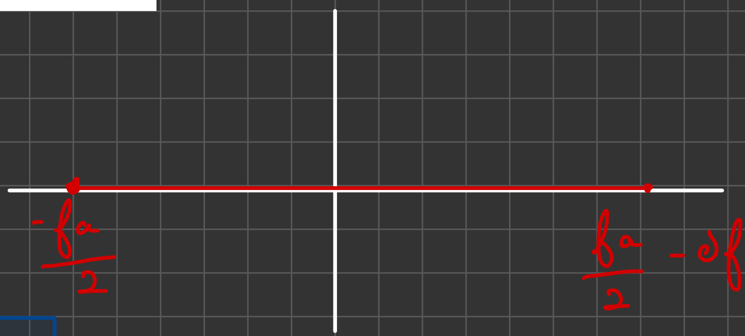
  $\rightarrow C_K$

- O vetor de frequências (em Hz) correspondente a $\mathbf{X}$ é:
- $\gg f = [0 : df : (N-1) * df];$

Usar **fftshift(X)** para ordenar de $-f_a/2$ a $+f_a/2$.



$$df = \frac{1}{N * T_a} \quad \hookrightarrow \quad T_a = \frac{1}{f_a}$$

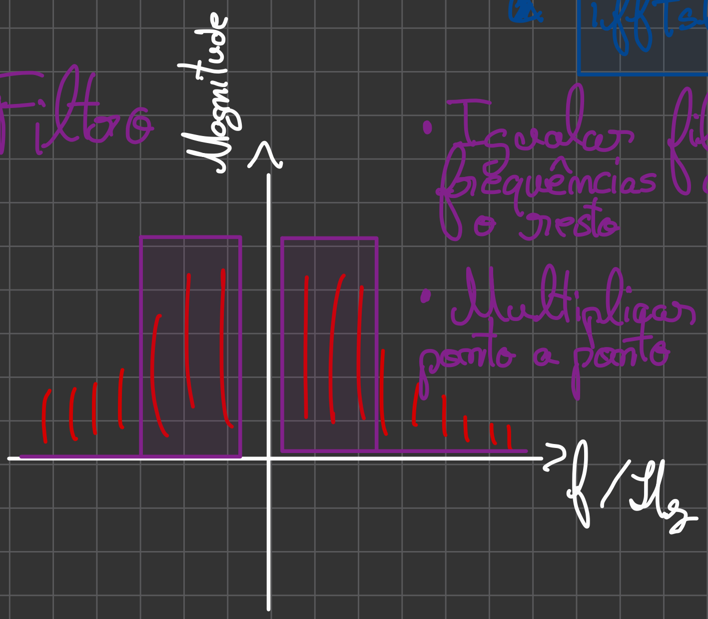


$$\boxed{C_K = C_{-K}^{*}}$$

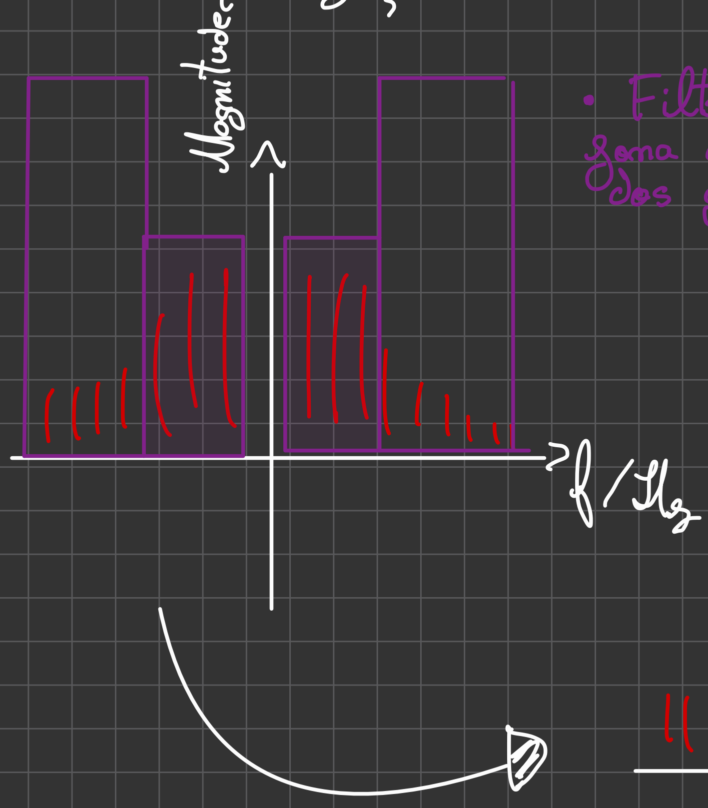
ifft
ifftshift

Filtro

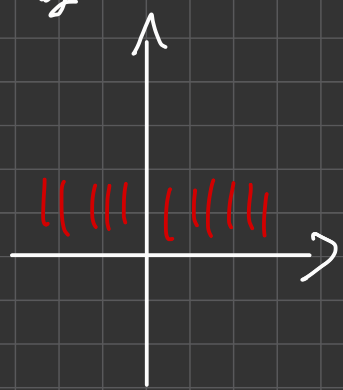
- Igualar filtro a 1 para as frequências desejadas e 0 para o resto
- Multiplicar o sinal pelo filtro, ponto a ponto



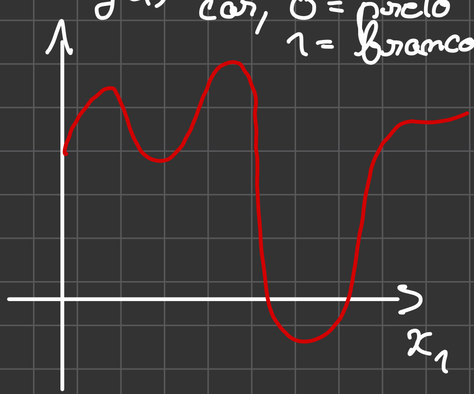
Filtro de equalização

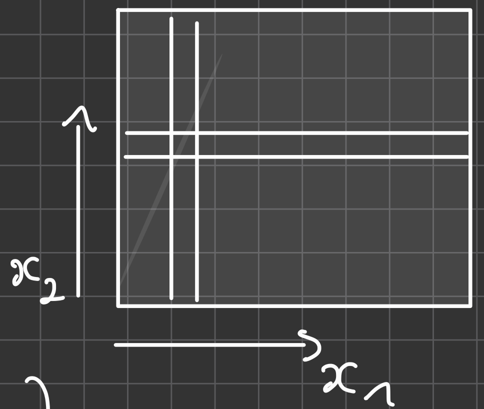


- Filtro com valor maior na zona aguda e menor na zona dos graves



DFT em imagens





$y(x_1, x_2)$

fft2 ⇒ DFT em 2 dimensões (como em imagens)
ifft2

- Aplicar filtros elimina detalhe, porque píxeis com cores similares têm uma frequência baixa de variação (cortados pelo filtro). Aumentar nº de frequências captadas ⇒ aumenta detalhe.

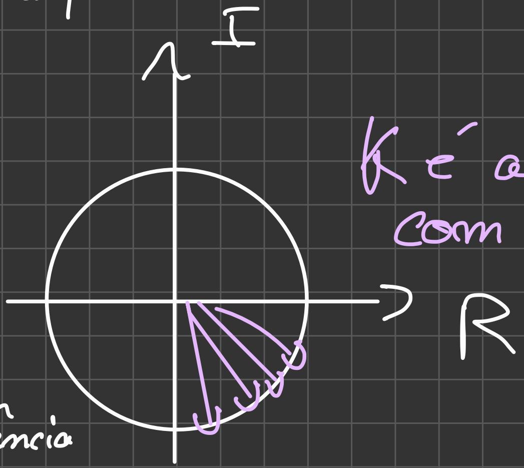
↳ $\boxed{\text{filtro oposto dá o contorno}}$

P5

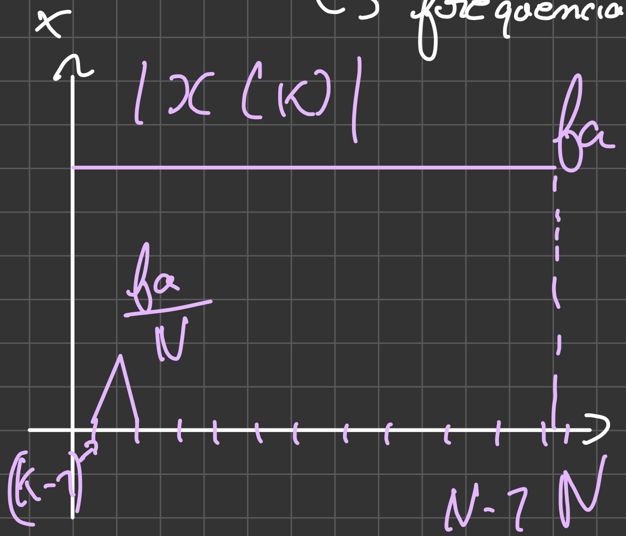
$$X(K) = \sum_{n=1}^{N} x(n)\, e^{j\pi \frac{(N-1)}{N}(K-1)}$$

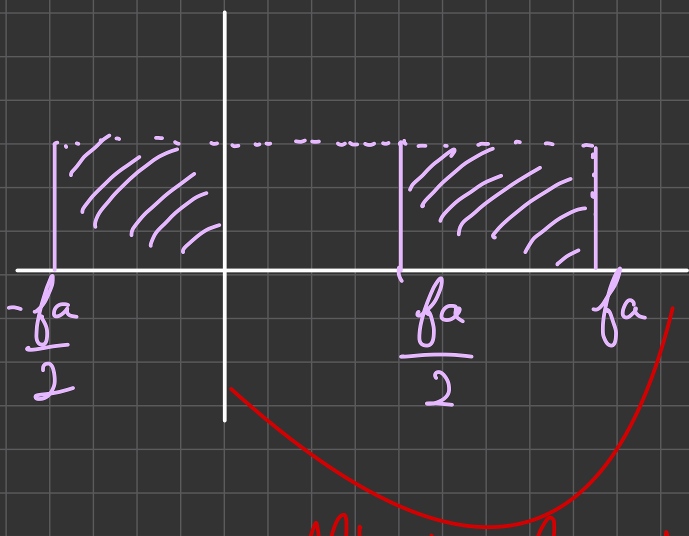
$$\boxed{\begin{aligned} n &= 1:N \\ t &= (n-1) * T_a; \end{aligned}}$$ → tempo

$$\boxed{\begin{aligned} K &= (1:N) \\ f &= (K-1) * \frac{f_a}{N} \end{aligned}}$$ ↳ frequência



K é a velocidade com que o vetor gira





fft devolve de 0 a fa

fftshift mapeia a parte negativa também

```
function [X,f] = espectro(x,Ta)
  N= length(x)
  fa= 1/Ta
  X= fft(x)/N
  K= 1:N;

  f= (K-1)*fa/N;
  f= iffshift(f)
  f= f-f(1)
  f= fftshift(f);
  X= fftshift(X);
  figure(1);
  plot(f,abs(X));
end
```

ou

$$f = \left((0:N-1)/N - \frac{1}{2}\right) * fa$$

1

Grupo I

Em cada uma das seguintes perguntas, indique a opção correta (só há uma por pergunta).
Cada resposta correta vale 1.0 valores, e cada errada desconta 0.4 valores.

1. Relativamente ao sinal $y(t) = 2\cos(20\pi t + \pi/3) + 3\sin(100\pi t - \pi/4)$:

A) A sua potência é nula pois o seu valor médio é nulo.

B) A sua potência é igual à soma da potência de cada uma das suas parcelas.

C) A sua potência é igual à raiz quadrada da soma dos quadrados das potências das suas parcelas.

D) Não se pode estimar a potência deste sinal pois não é periódico.

Pela função potência

Ex. 3 da aula 2

```
function p = potencia(x,Ta,T)
  N = T/Ta;
  soma = 0;
  for n=1:N
    soma =soma+ (x(n))^2;
  end
  p = Ta/T * soma;
end
```

tentativa e erro

2. O sinal $y(t) = \frac{1}{2}\cos(\omega t + \pi) + \sqrt{2}\cos(\omega t + \pi/4) + A\cos(\omega t + \varphi)$ é igual a $\frac{3}{2}\cos(\omega t)$ se:

A) $A = 2; \varphi = -\pi$ **B)** $A = \sqrt{2}; \varphi = -\pi/4$

C) $A = 2; \varphi = 0$ **D)** $A = \sqrt{2}; \varphi = -\pi$

```
`Ta = 0.001;
t = 0 : Ta : 5-Ta;
A = sqrt(2);
fase = -pi/4;
x = 0.5*cos(2*pi*t + pi) +
sqrt(2)*cos(2*pi*t + pi/4)
+ A*cos(2*pi*t + fase);
y = 3/2 * cos(2*pi*t);
hold on
plot(t, x)
plot(t, y)
```

Tentativa e erro

OU

$$y(t) = \frac{1}{2}\cos(wt + \pi) + \sqrt{2}\cos\left(wt + \frac{\pi}{4}\right) + A\cos(wt + \varphi) = \frac{3}{2}\cos(wt)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{j(\pi)} + \sqrt{2}e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)} + Ae^{j(\varphi)} = \frac{3}{2}e^{j}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos(\pi) - \sin(\pi)j) + \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)j\right) + A(\cos(\varphi) + \operatorname{sen}(\varphi)j) = \frac{3}{2}(\cos(0) + \sin(0)j)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j\right) + Ae^{j\varphi} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow Ae^{j\varphi} = 1 + j$$

$$\begin{cases} A\cos(\varphi) = 1 \\ A\operatorname{sen}(\varphi) = 1 \end{cases} \quad A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \cos(\varphi) = \operatorname{sen}(\varphi) \qquad \varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

3. O período do sinal $x(t) = \cos(10\pi t + \pi/2) + \cos(14\pi t + \pi/4) + \cos(18\pi t + \pi/3)$ é:

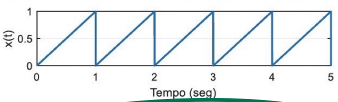
A) 1 *seg.* **B)** 0.5 *seg.* **C)** 2 *seg.* **D)** 0.2 *seg.*

$\Rightarrow$ 3. $f_1 = \frac{10\pi}{2\pi} = 5 \qquad f_2 = \frac{14\pi}{2\pi} = 7$

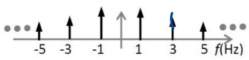
$f_3 = \frac{18\pi}{2\pi} = 9$

m.d.c $(5, 7, 9) = 1$.

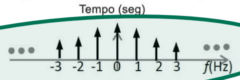
4. Qual é o espetro (em magnitude apenas) que pode representar o sinal à direita:



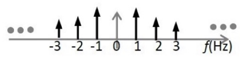
A)



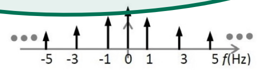
B)



C)



D)



4

T = 1

```
w = 0.5*sawtooth(2*pi*T*t)+ 0.5;
```

Contrai o y

avança 0.5

Função Espectro disto

5. Relativamente à composição de sinais por soma de sinusoides de frequências distintas, qual das afirmações seguintes é correta?

A) O valor máximo do sinal composto apenas depende das amplitudes das sinusoides.

B) A fase de cada sinusoide não contribui para o valor máximo do sinal composto.

A fase também entra

C) É possível criar um sinal permanentemente nulo com sinusoides de amplitude unitária, através do ajuste da fase de cada sinusoide.

D) É possível criar um sinal composto cujo valor máximo seja menor que o simétrico do seu valor mínimo.

não sei?????

tipo a C acho que é impossível but okay

6. Qual seria a frequência de amostragem mais adequada para representar o sinal $z(t) = \cos(40\pi t) + \cos(60\pi t + \pi/3) + \cos(100\pi t + \pi/4)$?

A) $f_a = 100\ Hz$ **B)** $f_a = 40\ Hz$

C) $f_a = 1\ kHz$ **D)** $f_a = 50\ Hz$

$f_a = 2 \times$ a maior f.

pelo menos

$f_1 = 20$

$f_2 = 30$

$f_3 = 50$

$f_a = 2 \times 50 = 100$

Grupo II

Complete o conteúdo dos retângulos com a linha de código MATLAB (apenas um comando) adequada. Cada pergunta vale 2.0 valores.

1. No MATLAB, pretende-se visualizar três períodos completos de uma onda sinusoidal. O código a implementar é:

```
>>
>> x = sin(4*pi*t);
>> plot(t,x);
```

t = 0:0.01:1.5-0.01

$\frac{1}{\frac{4\pi}{2\pi}} = \frac{1}{2}$

nº per. x T

3

2. Pretende-se visualizar no MATLAB o sinal $z(t) = \cos(x(t)y(t))$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são dois sinais amostrados sincronamente com período de amostragem T_a, cujas amostras se encontram armazenadas nos vetores **x** e **y** (ambos de dimensão $(N \times 1)$). O código a implementar é:

```
>> N = length(x);
>> t = [0 : (N-1)]'*Ta;
>> z= cos(x.*y)
>> plot(t,z);
```

→ aula 1 ex 1 alínea com x e y

Diferença com Reconstrói

1. Desenvolva uma função que, recebendo um vetor (Ck) dos coeficientes c_k da decomposição em série exponencial de Fourier (i.e., $x(t) = \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{j2\pi k f_o t}$), devolve o sinal correspondente no domínio do tempo (i.e., $x(t)$). A função recebe, também, o valor de f_o, e também devolve o vetor t de instantes de tempo do sinal x.

function [x,t] = **CalcSignal** (Ck , fo)

estamos na merda.

```
function [x, t] = CalcSignal(Ck, f0)

    N = length(Ck);
    fa = 2*f0;
    Ta = 1/fa;      %pois..
    t = 0:Ta:((N-1)*Ta);
    x = ifft(ifftshift(Ck))*N;

    plot(t,x);
    xlabel("Tempo (seg)");
    ylabel("Sinal x(t)");

end
```

CalcSignal.m | coefsF.m | Reconstruct.m | Spectre.m | teste.m

```
function [x, t] = CalcSignal(Ck, f0)

    N = length(Ck);
    fa = 2*f0;
    Ta = 1/fa;      %pois..
    t = 0:Ta:((N-1)*Ta);
    x = ifft(ifftshift(Ck))*N;

    plot(t,x);
    xlabel("Tempo (seg)");
    ylabel("Sinal x(t)");

end
```

```
function [x, Ta] = Reconstruct(X, f)

    N = length(X);
    fa = -f(1)*2;
    Ta = 1/fa;
    t = [0: (N-1)]'*Ta;
    x = ifft(ifftshift(X))*N;

    plot(t,x);
    xlabel("Tempo (seg)");
    ylabel("Sinal x(t)");

end
```

2. Desenvolva a função **MainComponent** que retorna a principal componente sinusoidal, $c(t)$, (i.e., a que apresenta maior energia) na composição do sinal $x(t)$. A função recebe o vetor **x** $(N \times 1)$ com as amostras do sinal $x(t)$ e o período de amostragem correspondente, T_a. A função devolve o vetor **c** $(N \times 1)$ com as amostras da componente sinusoidal, $c(t)$.

function c=**MainComponent** (x , Ta)

função espectro, só o X (talvez)

5. Desenvolva uma função em MATLAB que calcule os coeficientes a_k e b_k de um sinal periódico $x(n)$. Essa função deverá receber como argumentos de entrada:
- T_a: Período de amostragem, em segundos;
- T_0: Período do sinal, em segundos;
- x: Vetor (Nx1) com as amostras sucessivas do sinal a decompor (deverá ser passado um número inteiro de períodos deste sinal, não devendo o último período ficar truncado);
- K: Número de harmónicas a considerar na decomposição.

```
function [ak,bk]= coefientesA_B(Ta,T,x,k)
    N=T/Ta; %numero de periodos
    f=1/T;
    %vetores dos coeficientes ak, bk,a0
    ak=zeros(1,N);
    bk=zeros(1,N);
    for i = 1:k
        %somatorios das series associadas a ak, bk
        somcos = zeros(k,1);
        somsin = zeros(k,1);
        for j = 1:N
            somcos(j) = x(j)*cos(2*pi*k*f*j*Ta);
            somsin(j) = x(j)*sin(2*pi*k*f*j*Ta);
        end
        ak(i) = (2/N) * sum(somcos);
        bk(i) = (2/N) * sum(somsin);
    end
end
```

- Contudo, na maior parte dos casos, os sinais encontram-se discretizados no tempo (não são sinais contínuos).
- A Série de Fourier toma, neste caso, a seguinte forma:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{K} a_k \cos(2\pi k f n T_a) + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(2\pi k f n T_a) = \sum_{k=0}^{K} A_k \cos(2\pi k f n T_a + \varphi_k)$$

$= 0,1,2,\dots,N$

- E os coeficientes desta série podem ser determinados por:

$$a_k = \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N} x(n)\cos(2\pi k f n T_a); \quad b_k = \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N} x(n)\sin(2\pi k f n T_a); \quad \forall_{k>0}$$

$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x(n)$ (Valor médio do sinal) $b_0 = 0$ $N = \frac{T}{T_a}$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \varphi_k = -atan2\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

Merdismos importantes

- Se não houver máximo divisor comum, o sinal não é periódico

  Ex: $\cos(7\pi t)$

- Funções elevadas a índices pares têm metade do período e as elevadas a índices ímpares têm o mesmo período

  Ex: y(t) = 2*sin(20*pi*t + pi/3)

  $T_{y(t)} = 0.1$

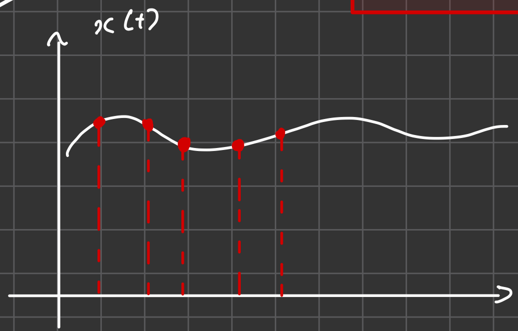
  $T_{y(t)^2} = 0.05$

  $T_{y(t)^3} = 0.1$

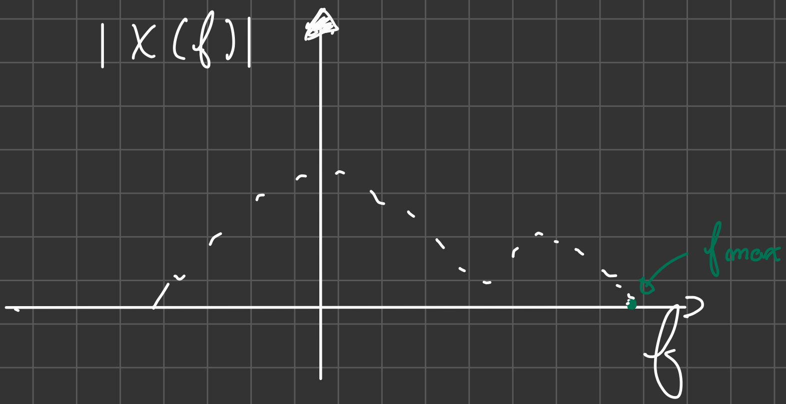
  ...

TP

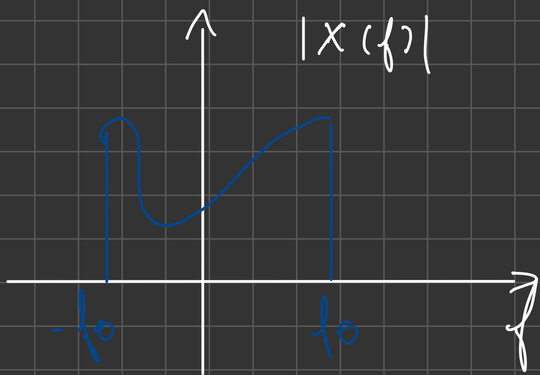
ay - lee - uh - singh



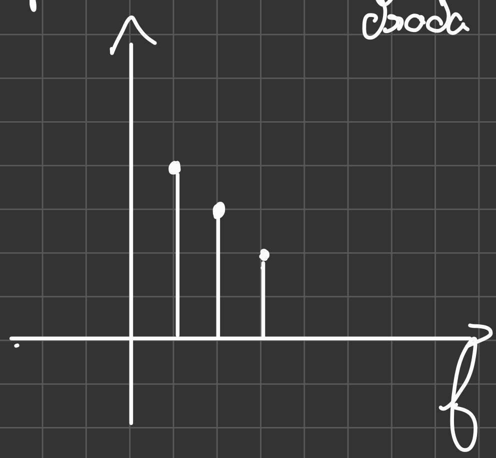
Critério de Nyquist ⇒ Não se perde informação usando apenas as amostras

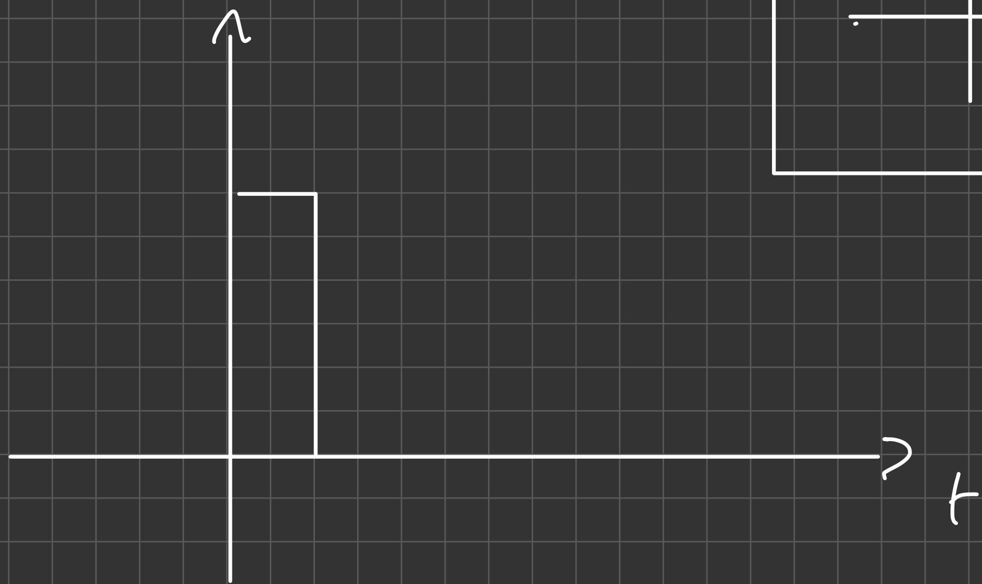


Critério de Nyquist: $f_a > 2 \times f_{max}$

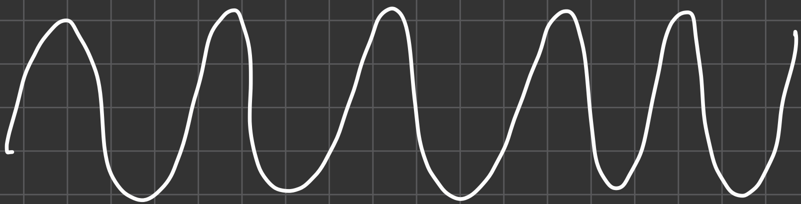


Espetro da Onda Quadrada





Derivada Pequena $\Rightarrow$ Frequência Baixa



Derivada Grande $\Rightarrow$ Frequência Elevada