Prático

Departamento de Eletrónica, Telecomunicações e Informática

Universidade de Aveiro

Sistemas Multimédia

2020/2021

Aula Prática 01

I. Funcionalidades do MATLAB

1. Crie os seguintes sinais no *workspace* do MATLAB, usando um período de amostragem $T_a = 0.01$ segundos. Step/Pas
   a) $x(t) = 2\sin(4\pi t)$, $t \in [0;5]$
   b) $y(t) = \cos(10\pi t)$, $t \in [0;5]$
   c) $z(t) = x(t)y(t)$
   d) $w(t) = 3\sin(\pi t) + 2\sin(6\pi t)$, $t \in [0;10]$
   e) $q(t_1,t_2) = 2\sin\big(2\pi(2t_1 + t_2)\big)$, $t_1, t_2 \in [0;5]$

2. Represente cada um dos sinais da alínea 1 através de um gráfico individual. Averigue o espaço de memória que cada sinal ocupa, e comente se o período de amostragem considerado se adequa a cada sinal. Veja as diferenças que obteria se considerasse $T_a = 0.1$ segundos.

3. Represente simultaneamente os quatro primeiros sinais da alínea 1 num único gráfico, atribuindo as seguintes características gráficas a cada sinal:
   $x(t)$ – traço contínuo e fino, de cor vermelha
   $y(t)$ – traço grosso a tracejado, de cor azul
   $z(t)$ – traço contínuo e fino, de cor verde, com pontos em cada amostra
   $w(t)$ – traço contínuo e grosso, de cor amarela

4. Represente o sinal $q(t_1,t_2)$ através de um gráfico onde o valor do sinal em cada ponto seja indicado através da cor, numa escala de cores. Averigue a forma de obter e controlar a escala de cores correspondente. Construa uma escala de cores de tons de cinzento e aplique-a ao gráfico que criou nesta alínea.

5. Considere agora o seguinte sinal dependente de duas variáveis, x_1 e x_2, sendo também dependente do tempo, t:
   $$r(x_1,x_2,t) = 2\sin\left(2\pi\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2\pi t\right), \qquad x_1, x_2 \in [-5;+5].$$
   Considerando o período de amostragem $T_a = 1/25$ segundos para a variável $t \in [0;5]$ segundos, elabore um pequeno script que apresente as sucessivas "imagens" 2D que $r\big(x_1,x_2,t(k)\big), k = 1,\dots,N$, apresenta (de forma semelhante ao efetuado na alínea 4) à medida que o tempo t vai progredindo.

1. Crie os seguintes sinais no *workspace* do MATLAB, usando um período de amostragem $T_a = 0.01$ segundos. Step/Pas
   a) $x(t) = 2\sin(4\pi t)$, $t \in [0; 5]$
   b) $y(t) = \cos(10\pi t)$, $t \in [0; 5]$
   c) $z(t) = x(t)y(t)$
   d) $w(t) = 3\sin(\pi t) + 2\sin(6\pi t)$, $t \in [0; 10]$
   e) $q(t_1, t_2) = 2\sin(2\pi(2t_1 + t_2))$, $t_1, t_2 \in [0; 5]$

```
%alinea (a)
Ta=0.01;
t=0:Ta:5;
x=2*sin(4*pi*t);

%alinea (b)
y=cos(10*pi*t);

%alinea (c)
z=x.*y;

%alinea (d)
tw=0:Ta:10;
w=3*sin(pi*tw) + 2*sin(6*pi*tw);

%alinea (e)
t1=0:Ta:5;
t2=0:Ta:5;
n1=length(t1);
n2=length(t2);
q=zeros(n1,n2);
for k1=1:n1 %k1=[1,10,20] or k1=linspace(0,5,N)
    q(k1,:)=2*sin(2*pi*(t1(k1)+t2)); %all columns of line k1 // q(k1,[2,3,7]) gives columns 2, 3 and 7 of line k1
end
```

Criar uma matriz/Array de n colunas e 1 linha
t = inicial : Intervalo : final
Quando o Intervalo é igual a 1 este pode ser omitido. (t=Inicial :Final)

1x501

Multiplicação ponto a ponto

Comprimento Da matriz

Cria uma matriz da dimensão que quisermos

qualquer elemento daquela linha

```
%or
[T1,T2]=meshgrid(t1,t2);
q=2*sin(2*pi*(T1(k1)+T2));
```

Whos Variavel -- lista atributos da variavel

```
>> whos x
  Name      Size            Bytes  Class     Attributes

  x         1x501            4008  double
```

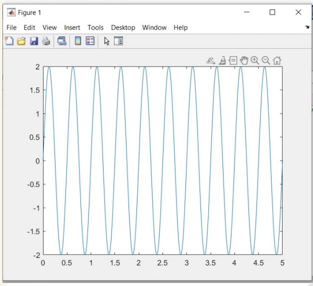
```
>> t=(0:0.01:5)'
```

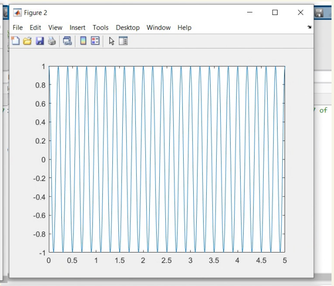
Simbolo da Transposta

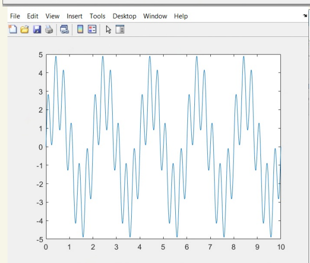
501x1

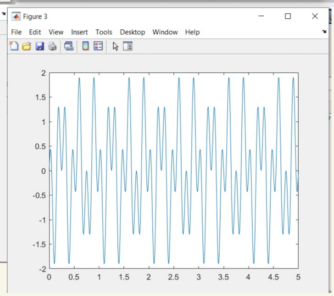
2. Represente cada um dos sinais da alínea 1 através de um gráfico individual. Averigue o espaço de memória que cada sinal ocupa, e comente se o período de amostragem considerado se adequa a cada sinal. Veja as diferenças que obteria se considerasse $T_a =$ 0.1 segundos.

```
figure;
plot(t,x);
figure;
plot(t,y);
figure;
plot(t,z);
figure;
plot(tw,w);
```

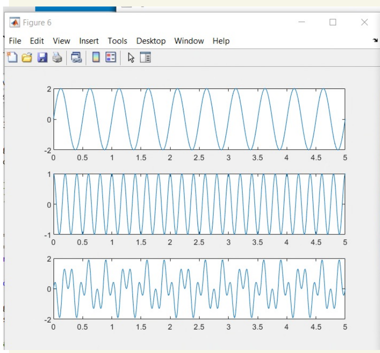


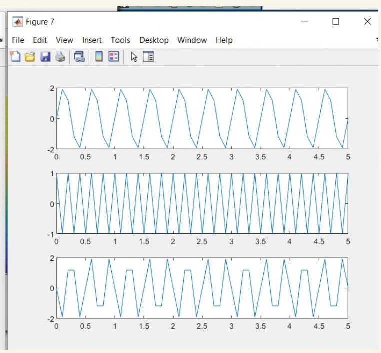







```
%parte 2
figure(6)
subplot(3,1,1), plot(t,x)
subplot(3,1,2), plot(t,y)
subplot(3,1,3), plot(t,z)


t2=0:0.1:5;
tw2=0:0.1:10;
x2=2*sin(4*pi*t2);
y2=cos(10*pi*t2);
z2=x2 .* y2

figure(7)
subplot(3,1,1), plot(t2,x2)
subplot(3,1,2), plot(t2,y2)
subplot(3,1,3), plot(t2,z2)
```





Maior tempo de amostragem:

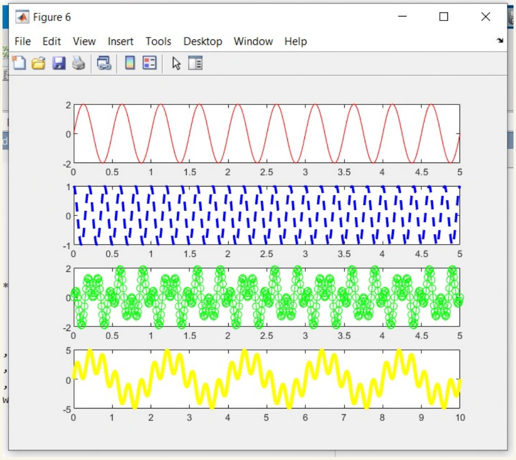
-representação menos exata accurate do sinal mas ocupa menos memória;

-É mais rápido.

0.1 segundos.

3. Represente simultaneamente os quatro primeiros sinais da alínea 1 num único gráfico, atribuindo as seguintes características gráficas a cada sinal:
   $x(t)$ – traço contínuo e fino, de cor vermelha
   $y(t)$ – traço grosso a tracejado, de cor azul
   $z(t)$ – traço contínuo e fino, de cor verde, com pontos em cada amostra
   $w(t)$ – traço contínuo e grosso, de cor amarela

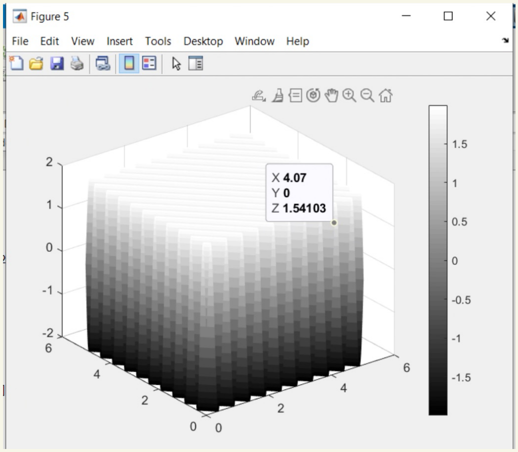
```
Ta=0.01;
t=0:Ta:5;
x=2*sin(4*pi*t);
y=cos(10*pi*t);
z=x.*y;

tw=0:Ta:10;
w=3*sin(pi*tw) + 2*sin(6*pi*tw);


figure(6)
subplot(4, 1, 1), plot(t, x, 'R-',LineWidth=0.5)
subplot(4, 1, 2), plot(t, y, 'B--',LineWidth=2)
subplot(4, 1, 3), plot(t, z, 'G-O')
subplot(4, 1, 4), plot(tw, w, 'Y-',LineWidth=3)
```



4. Represente o sinal $q(t_1, t_2)$ através de um gráfico onde o valor do sinal em cada ponto seja indicado através da cor, numa escala de cores. Averigue a forma de obter e controlar a escala de cores correspondente. Construa uma escala de cores de tons de cinzento e aplique-a ao gráfico que criou nesta alínea.

5. Considere agora o seguinte sinal dependente de duas variáveis x_1 e x_2, sendo também

```
figure(5);
mesh(t1,t2,q)

colorbar;
cmap = colormap;
cmap_gray = [[0:(1/64):1]' [0:(1/64):1]' [0:(1/64):1]'];
colormap(cmap_gray);
```



cinzento e aplique-a ao gráfico que criou nesta alínea.

5. Considere agora o seguinte sinal dependente de duas variáveis, x_1 e x_2, sendo também dependente do tempo, t:

$$r(x_1, x_2, t) = 2\sin\left(2\pi\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2\pi t\right), \qquad x_1, x_2 \in [-5; +5].$$

Considerando o período de amostragem $T_a = 1/25$ segundos para a variável $t \in [0; 5]$ segundos, elabore um pequeno script que apresente as sucessivas “imagens” 2D que $r\big(x_1, x_2, t(k)\big), k = 1, \ldots, N$, apresenta (de forma semelhante ao efetuado na alínea 4) à medida que o tempo t vai progredindo.

```
Ta = 1/25;
t = [0:Ta:5]';
x1 = [-5:Ta:5]';
x2 = [-5:Ta:5]';
N = length(t);
N1 = length(x1);
r = zeros(N1,N1);

for n=1:N;
  tic
  for i=1:N1
    r(i,:) = 2*sin(2*pi*sqrt(x1(i)^2+x2.^2)-2*pi*t(n));
  end
  mesh(x1,x2,r);
  view(2);        vista de cima do gráfico
  drawnow();
  pause(Ta-toc);
end
```

Departamento de Eletrónica, Telecomunicações e Informática

Universidade de Aveiro

Sistemas Multimédia

2020/2021

Aula Prática 02

I. Sinais Compostos por Sinusoides

1. Determine o período, a frequência e o valor máximo (valor de pico) de cada um dos seguintes sinais periódicos. Verifique visualmente no MATLAB.
   a) $x(t) = 2\sin(4\pi t)$
   b) $y(t) = \sin(10\pi t + \pi/2)$
   c) $z(t) = \sin(6\pi t) + \sin(8\pi t)$
   d) $w(t) = \sin(6\pi t) + \sin(8\pi t + 0.1)$
   e) $q(t) = \sin(6\pi t) + \sin(7\pi t) + \sin(8\pi t)$

2. Com base no que verificou na alínea 1, obtenha a relação que determina o período de um sinal genérico descrito por:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n \sin(2\pi f_n t + \phi_n).$$

3. Determine a potência associada a cada um dos sinais representados na alínea 1. Desenvolva uma função no MATLAB que, aceitando como argumentos de entrada o vetor de amostras de um sinal, x, o período de amostragem referente a esse sinal, T_a, e o período do sinal, T, retorna a potência associada ao sinal.

4. Considere um conjunto de sinais definidos pela expressão da alínea 2, onde $N = 3$, $A_1 = A_2 = A_3 = 1$, e $f_1 = 1.1 f_2 = 1.2 f_3 = 3\ kHz$. Testando diferentes valores para ϕ_n, $n = 1,2,3$, determinados aleatoriamente entre $]-\pi;\pi]$, mostre que as realizações obtidas para o sinal $x(t)$ são muito distintas entre si (e que o valor de pico varia notoriamente), mas que todas mantêm a mesma potência. Explique esta observação.

II. Revisão sobre Números Complexos

Resolvida en papel

1. Considere os números complexos $p = 2 + j3$ e $q = 2 - j3$.
   a) Represente-os na forma polar.
   b) Determine (e represente no plano complexo) o resultado das operações: $p + q$, $p - q$, $p * q$, p/q, $\sqrt{p}$, e $\sqrt{-p - q}$.

2. Efetue as seguintes operações, determinando o respetivo resultado final:
   a) $\frac{1-j}{2+j} + \frac{3+j}{4+j2}$
   b) $\frac{1-j}{2+j} + \frac{2+j}{2-j2}$

c) $2e^{j\frac{\pi}{2}} + 2e^{-j\frac{\pi}{2}}$

d) $1 + j + \sqrt{2}e^{j\frac{7\pi}{4}}$

3. Utilizando a relação de Euler, demonstre que:

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \qquad \text{e que} \qquad \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}.$$

4. Usando as relações apresentadas na alínea 2, mostre que

$$\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) = \frac{1}{2}\left[\cos\big((\omega_1 - \omega_2)t\big) + \cos\big((\omega_1 + \omega_2)t\big)\right]$$

5. Determine o conjunto de soluções da seguinte equação, de variável $x \in \mathbb{C}$ e coeficiente $a \in [-1; 1]$, e desenhe o lugar geométrico dessas soluções no plano complexo:

$$x^2 + 2ax + 1 = 0$$

6. Considere a equação geral de coeficientes reais:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

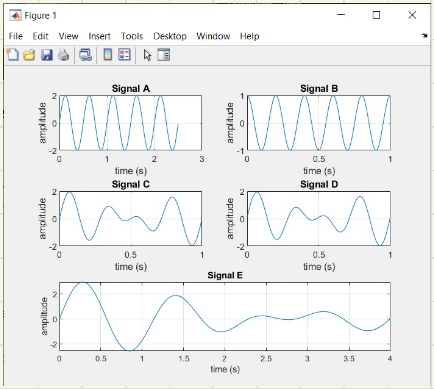
Que condições devem ser verificadas para que esta equação tenha como solução números imaginários puros?

7. Mostre que a multiplicação de um número complexo pelo seu conjugado é igual ao quadrado do seu módulo.

I. Sinais Compostos por Sinusoides

1. Determine o período, a frequência e o valor máximo (valor de pico) de cada um dos seguintes sinais periódicos. Verifique visualmente no MATLAB.
   a) $x(t) = 2\sin(4\pi t)$
   b) $y(t) = \sin(10\pi t + \pi/2)$
   c) $z(t) = \sin(6\pi t) + \sin(8\pi t)$
   d) $w(t) = \sin(6\pi t) + \sin(8\pi t + 0.1)$
   e) $q(t) = \sin(6\pi t) + \sin(7\pi t) + \sin(8\pi t)$

Resolução teórico feita em apontamentos escritos



3. Determine a potência associada a cada um dos sinais representados na alínea 1. Desenvolva uma função no MATLAB que, aceitando como argumentos de entrada o vetor de amostras de um sinal, x, o período de amostragem referente a esse sinal, T_a, e o período do sinal, T, retorna a potência associada ao sinal.

```
function potencia = Ex3F (x,Ta,T)
 %N = T/Ta;
 % soma = 0;

 % for n=1:N
 %   soma += (x(n))^2;
 % endfor

 % potencia = Ta/T * soma;

 %OR:

 N = length(x);
 potencia = (1/N) * x' * x;

 %OR:

 %potencia = (Ta/T) * x' * x;  %Assumindo que x contem apenas um periodo do sinal

end
```

```
a =

    2

b =

    0.5000

c =

    1.0000

d =

    1.0000

e =

    1.5000
```

Ver explicação teórica na próxima pagina.

4. Considere um conjunto de sinais definidos pela expressão da alínea 2, onde $N = 3$, $A_1 = A_2 = A_3 = 1$, e $f_1 = 1.1f_2 = 1.2f_3 = 3\ kHz$. Testando diferentes valores para ϕ_n, $n = 1,2,3$, determinados aleatoriamente entre $]-\pi;\pi]$, mostre que as realizações obtidas para o sinal $x(t)$ são muito distintas entre si (e que o valor de pico varia notoriamente), mas que todas mantêm a mesma potência. Explique esta observação.

$A_1 = A_2 = A_3 = 1$

$f_1 = 3\,KHz \quad f_2 = \frac{3}{1.2}\,KHz$

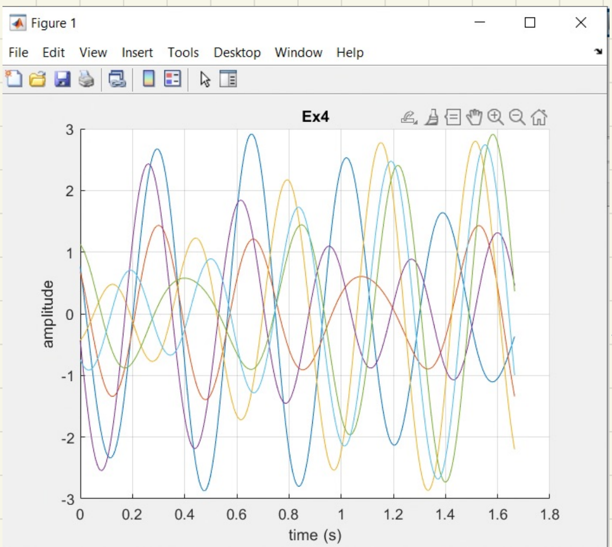
$f_3 = \frac{3}{1.1}\,KHz$

$\phi = randon(1,3) \cdot pi$

$$x(t) = \sum_{n=1}^{3} A_n \sin(2\pi f_n + \phi_n)$$

$\rightarrow \sin(2\pi f_1 t + \phi_1) = \sin(\frac{6\pi}{1.1} t + \phi_1)$

$\rightarrow \sin(\frac{6\pi}{1.2} t + \phi_2) \quad \rightarrow \sin(6\pi t + \phi_3)$



O valor da potência vai ser constante pois as amplitudes são sempre igual a 1.

$$P = \sum_{n=1}^{3} \frac{A_n^2}{2}$$

O valor de pico vai variar porém pois o valor do ângulo em n varia.

$= 0,5 + 0,5 + 0,5 = 1,5$

3. Determine a potência associada a cada um dos sinais representados na alínea 1. Desenvolva uma função no MATLAB que, aceitando como argumentos de entrada o vetor de amostras de um sinal, x, o período de amostragem referente a esse sinal, T_a, e o período do sinal, T, retorna a potência associada ao sinal.

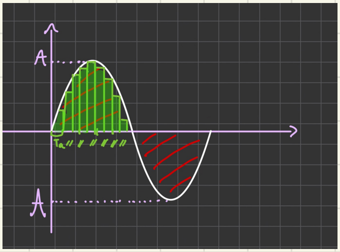
Sinal aperiódico

$$P = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 \, dt$$

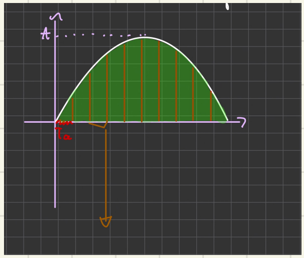
Sinal Periodico T

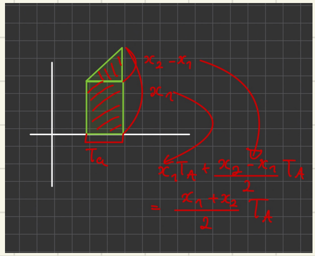
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 \, dt$$

Método dos retângulos



Método dos trapézios





$$x = A\sin(2\pi f t + y)$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2 \, dt = \frac{1}{T}\int_0^T A^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t + y\right)$$

$$\frac{1-\cos\left(\frac{4\pi}{T}t + 2y\right)}{2}$$

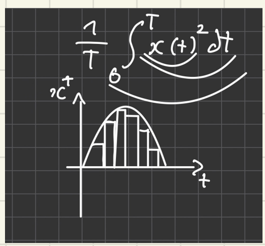
$$= \frac{A^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2} \, dt + \frac{A^2}{T}\int_0^T \cos\left(\frac{4\pi}{T}t + 2y\right)^2 dt =$$

$$= \frac{A^2}{T}\left[\frac{1}{2}t\right]_0^T + \frac{A^2}{\cancel{T}} \times \frac{\cancel{T}}{4\pi}\int_0^T \frac{4\pi}{T}\cos\left(\frac{4\pi}{T}t + 2y\right) dt =$$

$$= \frac{A^2}{2} - 0 + \frac{A^2}{4\pi}\underbrace{\left[\operatorname{Sen}\left(\frac{4\pi}{T}t + 2y\right)\right]_0^T}_{=0} =$$

$$= \frac{A^2}{2}$$

```
function potencia = Ex03P(x,Ta,T)

  x2 = x.^2
  area = x2 x Ta
  int = sum(area)
  P = int / T

end
```



Slides importantes para resolver a parte dois do guião -

4. Sinusoides e os Números Complexos

- Relembrando algumas relações envolvendo números complexos:

Representação Cartesiana — Representação Polar

$$\boldsymbol{y = a + jb = Ae^{j\varphi}}$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\varphi = \mathrm{atan}(b/a)$$
$$a = A\cos(\varphi)$$
$$b = A\sin(\varphi)$$

- Soma e subtração:

$$(a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

- Multiplicação:

$$(A_1 e^{j\varphi_1})(A_2 e^{j\varphi_2}) = A_1 A_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

- Conjugado:

$$(a + jb)^* = a - jb \qquad (Ae^{j\varphi})^* = Ae^{-j\varphi}$$

4. Sinusoides e os Números Complexos

- Relembrando algumas relações envolvendo números complexos:

Representação Cartesiana — Representação Polar

$$\boldsymbol{y = a + jb = Ae^{j\varphi}}$$

- Multiplicação pelo conjugado:

$$yy^* = (Ae^{j\varphi})(Ae^{j\varphi})^* = A^2 = a^2 + b^2$$

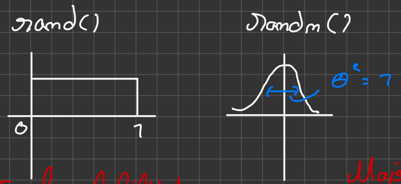
- Divisão:

$$(A_1 e^{j\varphi_1})/(A_2 e^{j\varphi_2}) = (A_1/A_2)e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \qquad \frac{a+jb}{c+jd} = \frac{(a+jb)(c-jd)}{c^2+d^2}$$

- Relação (fórmula) de Euler:

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

$$f_0 = mdc(f_1, f_2, \dots, f_K)$$ — Fórmula importante para exercíciol da parte 1



Igual probabilidade de qualquer valor entre 0 e 1

Mais provável ser 0, menos provável ser dos extremos.

"É o que temos de viver para chegar a novas alturas"

Teste P: Aula 1 e 2, talvez aula 3

Departamento de Eletrónica, Telecomunicações e Informática

Universidade de Aveiro

Sistemas Multimédia

2020/2021

Aula Prática 03

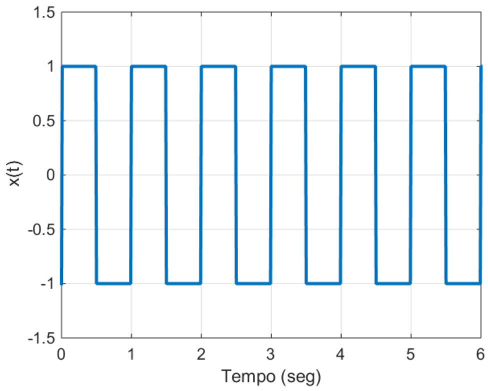
I. Decomposição de Sinais em Série de Fourier

1. Mostre que as seguintes decomposições de um sinal periódico (de frequência ω_0) em Série de Fourier são equivalentes:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) = \sum_{k=1}^{K} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

2. Determine as expressões de a_k e b_k correspondentes à representação do seguinte sinal em Série de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt$$



Relembra-se que, para $k > 0$:
$a_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt$ e $b_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt$, com $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

3. Desenvolva uma função em MATLAB que produza o sinal resultante da série de Fourier que é gerada a partir da seguinte informação:
- T_a: Período de amostragem, em segundos;
- f_0: Frequência do sinal composto, em Hz;
- N_p: Número de períodos a considerar para o sinal resultante;
- a_k: Vetor (Kx1) com os valores de a_k da série;
- b_k: Vetor (Kx1) com os valores de b_k da série.

Experimente esta função para os valores dos coeficientes da pergunta 2, e veja como progressivamente o resultado se vai aproximando do sinal representado nessa pergunta.

1. Mostre que as seguintes decomposições de um sinal periódico (de frequência ω_0) em Série de Fourier são equivalentes:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) = \sum_{k=1}^{K} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\operatorname{sen}(b) \mp \operatorname{sen}(a)\cos(b)$$

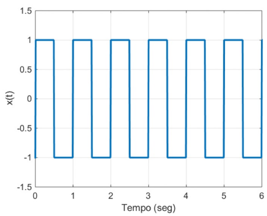
$$\sum_{K=1}^{K} A_K \cos(K\omega_0 t + \varphi_K) =$$

$$= \sum_{K=1}^{K} A_K \cos(K\omega_0 t)\operatorname{sen}(\varphi_K) - \sum_{K=1}^{K} A_K \cos(\varphi_K)\operatorname{sen}(K\omega_0 t) =$$

$$\Rightarrow \sum_{K=1}^{K} a_K \cos(K\omega_0 t) + \sum_{K=1}^{K} b_K \operatorname{sen}(\omega_0 t K)$$

$a_K = A_K \operatorname{sen}(\varphi_K)$ $\quad$ $b_K = -A_K \cos(\varphi_K)$

2. Determine as expressões de a_k e b_k correspondentes à representação do seguinte sinal em Série de Fourier:



Relembra-se que, para $k > 0$:
$a_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt$ e $b_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt$, com $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\frac{2\pi}{\omega_0} = T \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, T/2] \\ -1, & t \in]T/2; T[\end{cases}$$

A função dada é uma função ímpar, logo sabemos que $a_K = 0$.

$$a_K = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos\left(\frac{2\pi}{T}Kt\right)dt =$$

$$= \cancel{\frac{2}{T}}\frac{T}{2\pi K}\int_0^{T/2} + \frac{2\pi K}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}Kt\right)dt + \cancel{\frac{2}{T}}\frac{T}{2\pi K}\int_{T/2}^{T} -\frac{2\pi K}{T}\cos\left(\frac{2\pi}{T}Kt\right)dt =$$

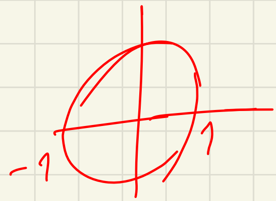
$$= \frac{+1}{\pi K}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}Kt\right)\right]_0^{T/2} + \frac{(-1)}{\pi K}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}Kt\right)\right]_{T/2}^{T} =$$

$$= \frac{1}{\pi K}\left[+\underbrace{\operatorname{sen}(\pi K)}_{=0} - 0 - \underbrace{\operatorname{sen}(2\pi K)}_{=0} + \underbrace{\operatorname{sen}(\pi K)}_{=0}\right] = 0$$

Como $K \in \mathbb{N}$ e $\operatorname{sen}(\pi) = \operatorname{sen}(2\pi) = 0$, sabemos que $\operatorname{sen}(K\pi) = 0$, $\operatorname{sen}(2\pi K) = 0$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) dt =$$

$$= \frac{-2\cancel{T}}{\cancel{T}\,\cancel{2}\pi k}\int_0^{T/2} -\frac{2\pi k}{T}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt + \frac{2\cancel{T}}{\cancel{T}\,\cancel{2}\pi k}\int_{T/2}^{T} -\frac{2\pi k}{T}\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)dt =$$



$$= \frac{-1}{\pi k}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\right]_0^{T/2} + \frac{1}{\pi k}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\right]_{T/2}^{T} =$$

$$= \frac{1}{\pi k}\left[\underbrace{-\cos(\pi k) + 1}_{\Downarrow}\right] + \frac{1}{\pi k}\left[\underbrace{\cos(2\pi k) - \cos(\pi k)}_{\Downarrow}\right] =$$

$$\begin{cases} 0, & k = 2n \\ 2, & k = 2n+1 \end{cases}, n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} 0, & k = 2n \\ 2, & k = 2n+1 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

$$= \begin{cases} 0 + 0, & k = 2n \\ -\frac{2}{\pi k} + \frac{2}{\pi k}, & k = 2n+1 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 2n \\ \frac{4}{\pi k}, & k = 2n+1 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

3. Desenvolva uma função em MATLAB que produza o sinal resultante da série de Fourier que é gerada a partir da seguinte informação:
   - T_a: Período de amostragem, em segundos;
   - f_0: Frequência do sinal composto, em Hz;
   - N_p: Número de períodos a considerar para o sinal resultante;
   - a_k: Vetor (Kx1) com os valores de a_k da série;
   - b_k: Vetor (Kx1) com os valores de b_k da série.

   Experimente esta função para os valores dos coeficientes da pergunta 2, e veja como progressivamente o resultado se vai aproximando do sinal representado nessa pergunta.

$K=100$

$T_0 = 1$ $\quad f_0 = 1$ $\quad T_a = 10^{-3} = 0{,}01$

$N_p = 6$

$[x, t] = \text{FourierSeries}(T_a, f_0, N_p, a_K, b_K)$

$\Rightarrow f_0, 2f_0, 3f_0, \dots, 100f_0 \Rightarrow F_a \geq 200\text{ Hz}$

3 periodos $\quad F_a = 1000\text{ Hz}$

$\shortparallel$

3 segundos $\Rightarrow N = 3000$

$D = N_p \times (1/f_0)$

$t = 0 : t_a : D - T_a$

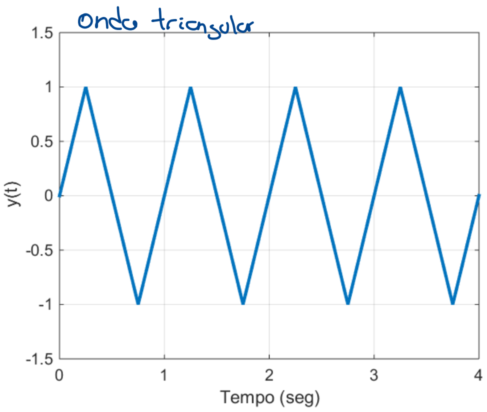
```matlab
Ta=10e-3; %periodo de amostragem
T=1;%periodo
f=1; %frequencia

Np=6; % numero de periodos

%vetores de valores de ak
%de acordo com o exercicio 2 ak é sempre zero.
ak=zeros(100,1);

%vetores de valores de bk
bk=zeros(100,1);

%de acordo com exercicio2
%quando k é par , bk é igual a zero,nao alterando nada no vetor de zeros de bk.
%Quando k é impar, bk é igual 4/(pi*k)
impares = 1:2:100;
bk(impares) = 4./(impares*pi);

%calculo de x(t)
[x,t] = seriefourier(Ta,f,Np,ak,bk);

%visualizaçao do grafico
figure(1);

plot(t,x, LineWidth=2);

xlabel('t');
ylabel('x(t)');
title("Grafico Onda Sinusoidal");
grid on;
```

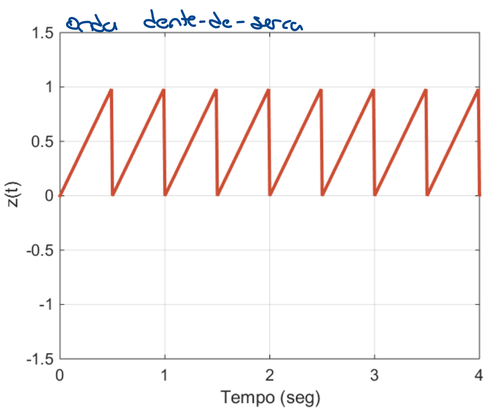
```matlab
function [x,t]= seriefourier(Ta,f,Np,a,b)
    Ttotal = Np * (1/f); %Numero de periodos * periodo
    t = [0:Ta:Ttotal]';

    SumA=0;%somatorio de ak
    SumB=0;%somatorio de bk

    for k=1:length(a)
        SumA = SumA + a(k)*cos(k*pi*2*f*t);
        SumB= SumB + b(k)*sin(k*pi*2*f*t);
    end

    x=SumB+SumB;
end
```

4. Use a função desenvolvida na pergunta 3 para verificar que um sinal periódico par (i.e., com simetria relativamente ao eixo das ordenadas) tem todos os coeficientes b_k nulos, e que um sinal periódico ímpar (i.e., simétrico relativamente à origem do referencial) tem todos os coeficientes a_k nulos.

5. Desenvolva uma função em MATLAB que calcule os coeficientes a_k e b_k de um sinal periódico $x(n)$. Essa função deverá receber como argumentos de entrada:
   - T_a: Período de amostragem, em segundos;
   - T_0: Período do sinal, em segundos;
   - x: Vetor (Nx1) com as amostras sucessivas do sinal a decompor (deverá ser passado um número inteiro de períodos deste sinal, não devendo o último período ficar truncado);
   - K: Número de harmónicas a considerar na decomposição.

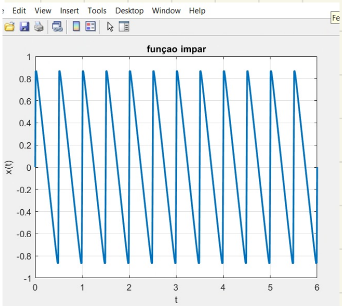
6. Teste a função desenvolvida na pergunta 5 para decompor os seguintes sinais (e, depois, reconstrua estes sinais usando a função desenvolvida na pergunta 3):



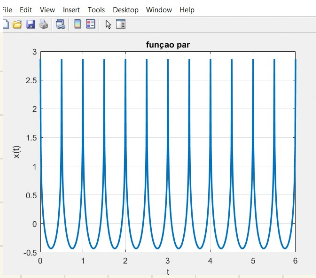


4. Use a função desenvolvida na pergunta 3 para verificar que um sinal periódico par (i.e., com simetria relativamente ao eixo das ordenadas) tem todos os coeficientes b_k nulos, e que um sinal periódico ímpar (i.e., simétrico relativamente à origem do referencial) tem todos os coeficientes a_k nulos.

```
Ta=10e-3; %periodo de amostragem
T=1;%periodo
f=1; %frequencia
Np=6; % numero de periodos

%vetores de valores de bk e ak
ak=zeros(100,1);
bk=zeros(100,1)

%%funçao impar:
%ak(n)=0
pares = 2:2:100;
bk(pares)= 4./(pares*pi);

%calculo de x(t)
[x,t] = seriefourier(Ta,f,Np,ak,bk);

%visualizaçao do grafico
figure(1);
plot(t,x, LineWidth=2);
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
title("funçao impar");
grid on;
```




```
%%funçao impar:
%ak(n)=0
bk=zeros(100,1);
ak=zeros(100,1);

pares = 2:2:100; %alterar valores graficos alteram mas nao modifica o tipo da funçao
ak(pares)= 4./(pares*pi);

%calculo de x(t)
[x,t] = seriefourier(Ta,f,Np,ak,bk);

%visualizaçao do grafico
figure(1);
plot(t,x, LineWidth=2);
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
title("funçao par");
grid on;
```



5. Desenvolva uma função em MATLAB que calcule os coeficientes a_k e b_k de um sinal periódico $x(n)$. Essa função deverá receber como argumentos de entrada:
- T_a: Período de amostragem, em segundos;
- T_0: Período do sinal, em segundos;
- x: Vetor (Nx1) com as amostras sucessivas do sinal a decompor (deverá ser passado um número inteiro de períodos deste sinal, não devendo o último período ficar truncado);
- K: Número de harmónicas a considerar na decomposição.

```
function [ak,bk]= coefientesA_B(Ta,T,x,k)
    N=T/Ta; %numero de periodos
    f=1/T;
    %vetores dos coeficientes ak, bk,a0
    ak=zeros(1,N);
    bk=zeros(1,N);
    for i = 1:k
        %somatorios das series associadas a ak, bk
        somcos = zeros(k,1);
        somsin = zeros(k,1);
        for j = 1:N
            somcos(j) = x(j)*cos(2*pi*k*f*j*Ta);
            somsin(j) = x(j)*sin(2*pi*k*f*j*Ta);
        end
        ak(i) = (2/N) * sum(somcos);
        bk(i) = (2/N) * sum(somsin);
    end
end
```

- Contudo, na maior parte dos casos, os sinais encontram-se discretizados no tempo (não são sinais contínuos).
- A Série de Fourier toma, neste caso, a seguinte forma:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{K} a_k \cos(2\pi k f n T_a) + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(2\pi k f n T_a) = \sum_{k=0}^{K} A_k \cos(2\pi k f n T_a + \varphi_k)$$

$= 0,1,2,\ldots,N$

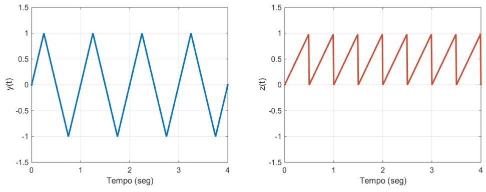
- E os coeficientes desta série podem ser determinados por:

$$a_k = \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N} x(n)\cos(2\pi k f n T_a); \quad b_k = \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N} x(n)\sin(2\pi k f n T_a); \quad \forall_{k>0}$$

$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x(n)$ (Valor médio do sinal) $b_0 = 0$ $N = \frac{T}{T_a}$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \varphi_k = -atan2\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

6. Teste a função desenvolvida na pergunta 5 para decompor os seguintes sinais (e, depois, reconstrua estes sinais usando a função desenvolvida na pergunta 3):



$F_a = 1000 \Rightarrow T_a = 1/F_a$

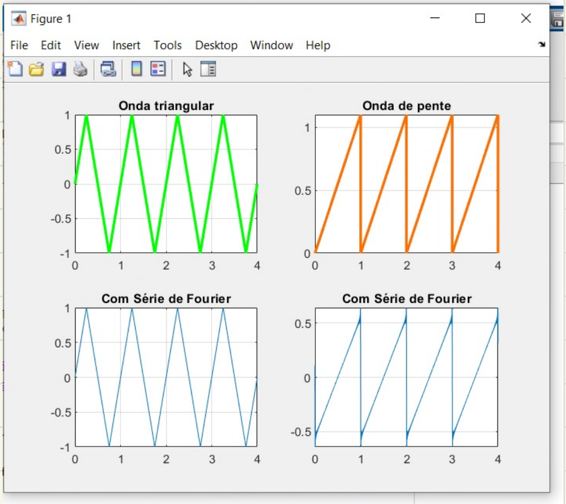
$N = 4000$

$y = \text{sawtooth}(2\pi f_0 t + \pi/2 ; 1/2)$

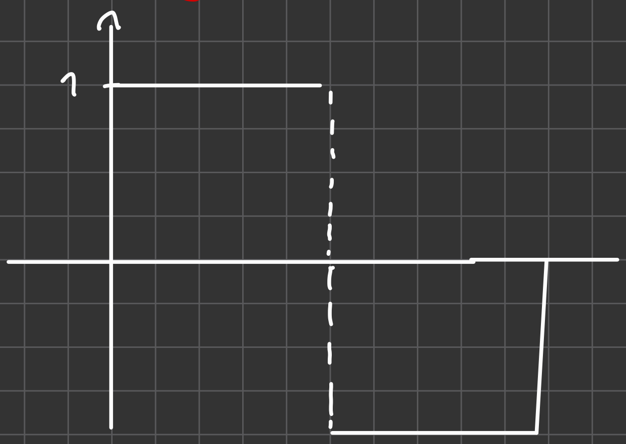
$z = 0,55 \times \text{sawtooth}(2\pi f_0 t) + 0,55$

```
t = 0:ta:4;
T = 1;
n_harmonic = 100;
%x = abs( 2 * (t/T - floor(t/T + 1/2)));
x = sawtooth(2*pi*T*t + pi/2 , 1/2);
subplot(2, 2, 1);
plot(t, x, "LineWidth", 2, "Color", "#00FF00");
title("Onda triangular");
grid on;

[a, b] = coeficientesA_B(ta, 1, x, n_harmonic);
display(a)
[time, f] = seriefourier(ta, 1, 4, a, b);
subplot(2, 2, 3);
plot(f,time);
title("Com Série de Fourier");
grid on;
```

```
x = 0.55 * sawtooth(2*pi*t) + 0.55;
subplot(2, 2, 2);
plot(t, x, "LineWidth", 2, "Color", "#fc6f03");
title("Onda de pente");
grid on;

[a, b] = coeficientesA_B(ta, 1, x, n_harmonic);
[time, f] = seriefourier(ta, 1, 4, a, b);
subplot(2, 2, 4);
plot(f,time);
title("Com Série de Fourier");
grid on;
```



Extra ...



$a_K = 0$

$b_K = \frac{2}{\pi K}(1 - \cos(\pi K))$

$$x = \begin{cases} 1, & t \in [0, T/2[\\ -1, & t \in [T/2, T[\end{cases}$$

$$x(1) = \sum_{K=1}^{K} a_K \cos(K w_0 t) + b_K \sin(K W_0 t)$$

$a_K = 0$

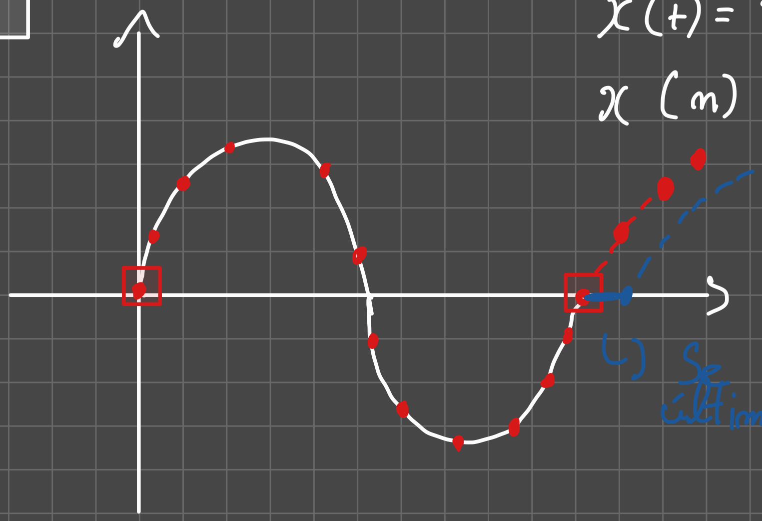
$$b_K = \frac{2}{\pi K}(1 - \cos(\pi K)) = \begin{cases} 0, & K \text{ par} \\ \frac{4}{\pi K}, & K \text{ ímpar} \end{cases}$$

Harmónicas ⇒ múltiplos da frequência fundamental

T - Ta

$x(t) = x(t + T)$

$x(n) = x(n + N)$



(·) Se guardarmos o último ponto

Departamento de Eletrónica, Telecomunicações e Informática

Universidade de Aveiro

Sistemas Multimédia

2020/2021

Aula Prática 04

I. Transformada Discreta de Fourier

1. Com base na função ***fft*(.)**, desenvolva uma função no MATLAB/Octave, denominada ***Espetro***, que retorna e apresenta o espetro (amplitude apenas) de um sinal (passado através do seu vetor de amostras, $\mathbf{x}$) amostrado com período de amostragem T_a. O gráfico do espetro deve apresentar no eixo das abcissas a frequência em Hz, desde $-f_a/2$ a $+f_a/2$, onde $f_a = 1/T_a$.
   ↳ fftshift
   $$\text{function } [\mathbf{X}, \mathrm{f}] = Espetro\,(\mathbf{x}, T_a)$$
   $\mathbf{X}$ – vetor da mesma dimensão de $\mathbf{x}$, com os coeficientes da DFT de $x(t)$.
   f – vetor da mesma dimensão de $\mathbf{x}$, com as frequências (em Hz) de cada componente de $\mathbf{X}$.

2. Teste a função desenvolvida no ponto anterior, representando o espectro dos seguintes sinais:
   a) $x(t) = \sin(2\pi t)$, registado durante 10 períodos.
   b) $y(t) = \sin(10\pi t) + \cos(12\pi t) + \cos(14\pi t - \pi/4)$, registado durante 5 seg.
   c) $z(t)$ – onda quadrada entre 0 e 1, de frequência 1 Hz, registada durante 5 seg.
   d) $q(t)$ - onda triangular entre -1 e 1, de frequência 1 Hz, registada durante 5 seg.

3. Acrescente a possibilidade de a função ***Espetro***, desenvolvida na pergunta 1, poder implementar ***windowing***, para analisar o conteúdo espetral de sequências de amostras não periódicas. Para tal, adicione um terceiro parâmetro de entrada, w, que, se for diferente de zero, aplica uma janela de Blackman à sequência de amostras antes de operar a ***fft***.

4. Teste a função da alínea anterior para criar o espetro de um sinal composto por:
   - 500 amostras;
   - período de amostragem igual a 1 ms;
   - o somatório de 20 sinais sinusoidais, cada um de amplitude unitária, cujas frequências são determinadas aleatoriamente entre 1 e 20 Hz (com distribuição de probabilidade uniforme);
   - a fase de cada sinusoide é também determinada aleatoriamente.

   Compare os espetros obtidos com e sem ***windowing***.

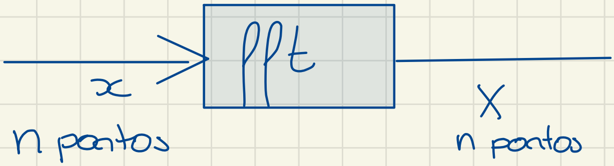
5. Desenvolva, agora, a função ***Reconstroi*** que efetua a operação inversa da função desenvolvida na pergunta 1 (i.e., recebendo o vetor $\mathbf{X}$ da representação em Fourier, reconstrói a sequência de amostras do sinal no domínio do tempo, $\mathbf{x}$, visualizando, depois, o sinal reconstruído). Teste a função com os dados obtidos nas perguntas anteriores.

6. Usando a função ***fft2***, determine o espetro (bidimensional) da imagem formada pelas seguintes expressões. Interprete o espetro observado quando confrontado com a imagem visualizada de cada expressão.

   a) $z(x, y) = \sin\big(2\pi(2x + y)\big)$, $\quad x, y \in [-5; +5]$.

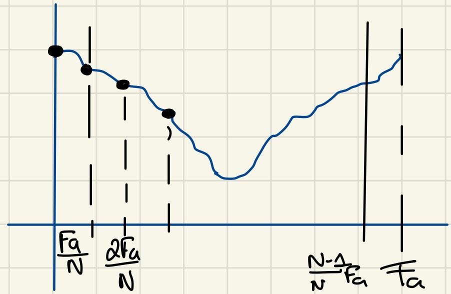
   b) $w(x, y) = \sin\left(2\pi\sqrt{x^2 + y^2}\right)$, $\quad x, y \in [-5; +5]$.

Não sei fazer
isto é uma
merda



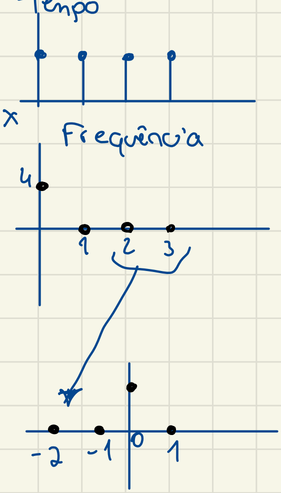
$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$$

$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$



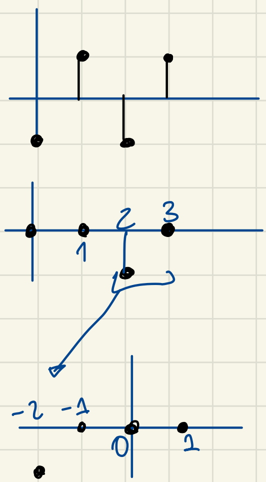
x = ones(1,4)
X = fft(x)
X_1 = fftshift(x)

Tempo



x = [-1, 1, -1; 1]

Tempo



Fa = 2Hz

Resolução: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5\text{Hz}$

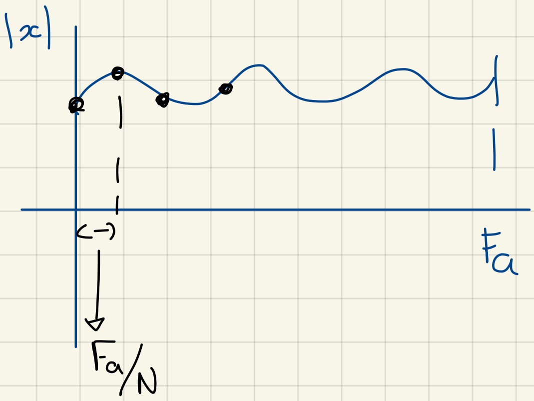
$F_a = 1/T_a$

$N = \text{length}(x)$

$X = \text{fftshift}(\text{fft}(x))$

if $\text{rem}(N, 2) == 0$

$f = (-N/2 : N/2 - 1) * (Fa/N)$



else

$f = \left(-(N+1)/2 : \frac{(N-1)}{2}\right) \times (Fa/N)$

stem (f, abs(x))

$x(t) = \text{sen}(2\pi t)$ np = nº de periodos pedidos

$f = 1\,Hz$ $Fa = 100\,Hz$ $Ta = 1/Fa$ $\boxed{t = [0 : Ta : (np \times T - Ta)]}$

$g(t) = \text{sen}(10\pi t) + \cos(12\pi t) + \cos(14\pi t - \pi/4)$

tdado = nº segundos

$f = \text{mdc}\{5, 6, 7\} = 1$ $Fa = 100$ $Ta = 1/Fa$

$\boxed{t = [0 : Ta : tdado - Ta]}$

função quadrada

square $(2\pi t)$

Reconstroi

$\text{ifft}(\text{fftshift}(x) \times \text{fft}(x)/N)$

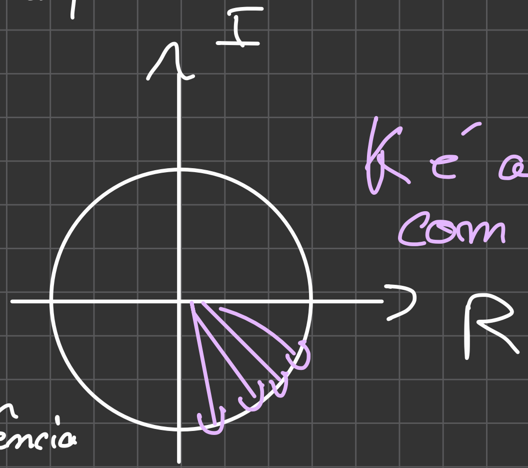
Unique (diff(f)) * N

Extra

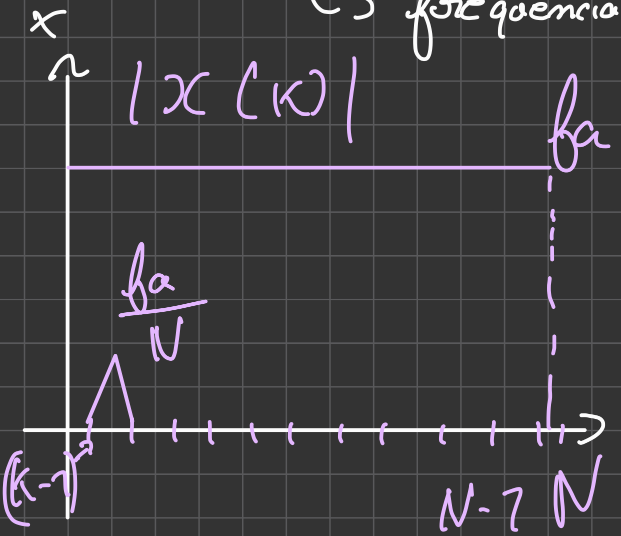
$$X(K) = \sum_{n=1}^{N} x(n)\, e^{j\pi \frac{(N-1)}{N}(K-1)}$$

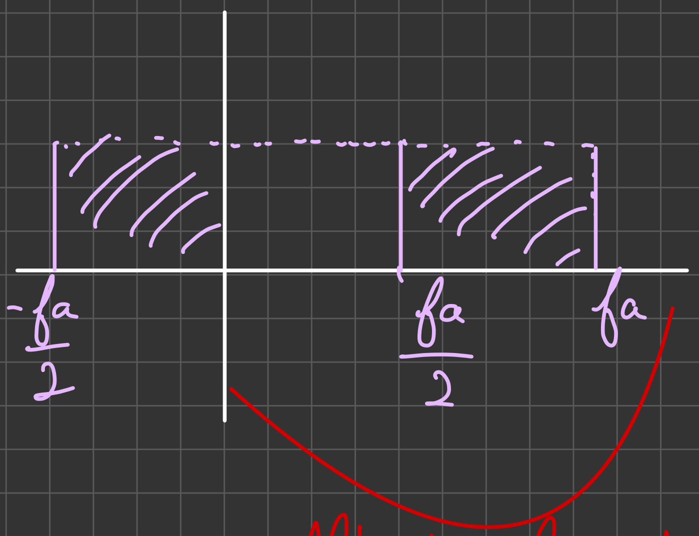
$$\boxed{\begin{array}{l} n = 1:N \\ t = (n-1) * T_a; \end{array}}$$ → tempo

$$\boxed{\begin{array}{l} K = (1:N) \\ f = (K-1) * \frac{f_a}{N} \end{array}}$$ ↪ frequência



K é a velocidade com que o vetor gira






```
function [X, f] = espectro (x, Ta)
  N = length(x)
  fa = 1/Ta
  X = fft(x)/N
  K = 1:N;
  f = (K-1)*fa/N;
  f = iffshift(f)
  f = f - f(1)
  f = fftshift(f);
  X = fftshift(X);
  figure (1),
  plot (f, abs(X));
end
```

fft devolve de 0 a fa

fftshift mapeia a parte negativa também

ou

$$f = \left(\frac{(0:N-1)}{N} - \frac{1}{2}\right) * f_a$$

I. Transformada Discreta de Fourier

1. Com base na função ***fft(.)***, desenvolva uma função no MATLAB/Octave, denominada ***Espetro***, que retorna e apresenta o espetro (amplitude apenas) de um sinal (passado através do seu vetor de amostras, **x**) amostrado com período de amostragem T_a. O gráfico do espetro deve apresentar no eixo das abcissas a frequência em Hz, desde $-f_a/2$ a $+f_a/2$, onde $f_a = 1/T_a$.

   ↳ fftshift

   function $[\mathbf{X}, \mathrm{f}] = Espetro\ (\mathbf{x}, T_a)$

   X – vetor da mesma dimensão de **x**, com os coeficientes da DFT de $x(t)$.

   f – vetor da mesma dimensão de **x**, com as frequências (em Hz) de cada componente de **X.**

- O algoritmo **FFT** (***Fast Fourier Transform***) implementa a DFT de uma forma muito eficiente.
- Seja **x** um vetor de N amostras consecutivas de um sinal, com período de amostragem T_a.
- $\gg \mathbf{X} = fft(\mathbf{x})/N;$
- O vetor **X** tem também N elementos: um coeficiente ($C_k \in \mathbb{C}$) para cada frequência da decomposição.
- O vetor de frequências (em Hz) correspondente a **X** é:
- $\gg f = [0 : df : (N-1) * df];$

Usar **fftshift(X)** para ordenar de $-f_a/2$ a $+f_a/2$.