TRAVAUX PRATIQUES VI
Méthode à pas multiples.
Méthode Prd́icteur-Correcteur.

Le but de ce TP est de programmer la Méthode Prédicteur-Correcteur permettant de calculer l'approximation de la solution du problème à valeurs intiales suivant :

$$\begin{cases} y' = f(t, y); \quad t \in [a, b] \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

aux $N + 1$ points équidistants discrétisant l'intervalle $[a, b)$.

Algorithme :

Données : les points a et b, l'entier N et la condition initiale α.
Sorties : les approximations w_i de la solution y au point $t_i = t_{i-1} + h$.
Etape 1 : Initialisation : $h = \dfrac{b-a}{N}$; $t(1) = a$; $w(1) = \alpha$;
et $(t(2), w(2))$ et $(t(3), w(3))$ sont obtenus par la Méthode de Runge-Kutta 4 (voir TP3).

Etape 2 : Calcul des approximations :

Pour i = 3 à N, faire :
$f_0 = f(t(i), w(i))$
$f_1 = f(t(i-1), w(i-1))$
$f_2 = f(t(i-2), w(i-2))$
$w_{approx} = w(i) + \dfrac{h}{12}(23f_0 - 16f_1 + 5f_2)$
$t(i+1) = t(i) + h$
$f_3 = f(t(i+1), w_{approx})$
$w(i+1) = w(i) + \dfrac{h}{12}(5f_3 + 8f_0 - f_1)$

Etape 3 : Impression des résultats:
Tracer la solution exacte et la solution approchée en fonction du temps sur un même graphique.
Tracer l'erreur en fonction du temps sur un autre graphique.

Applications

Soit le problème à valeurs initiales suivant :

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y}{t} + t^2 e^t; \quad t \in [1, 2] \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

1) Calculer la solution exacte du problème.
2) Appliquer la Méthode Prédicteur-Correcteur avec $N = 10$.
3) Tracer la solution exacte fonction du temps, et la solution approchée en fonction du temps, sur un même graphique.
4) Calculer les erreurs $E(i) = |w(i) - y(i)|$.
5) Tracer l'erreur en fonction du temps, sur un autre graphique.
6) En renouvelant les questions 2) à 5) avec N=20; N=40, puis N=80, en déduire l'ordre de précision du schéma.
7) Réaliser un programme principal qui appelle la Méthode d'Euler, la Méthode Runge-Kutta 2, la Méthode Runge-Kutta 4, la Méthode d'Adams-Bashforth, et la Méthode Prédicteur-Correcteur, sur cet exemple.
8) Tracer les différentes erreurs obtenues avec chacun des schémas numériques en fonction du temps, pour N=40, sur un autre graphique.