Tri par insertion

Principe

Pour un tableau de n éléments, le tri par insertion

- parcourt le tableau du 2^{ieme} au n^{ieme} élément.
- insère l'élément courant k dans la partie du tableau déjà triée $[0 : k-1]$

Pour insérer, il déplace d'une position vers la droite tous les éléments strictement plus grands que l'élément à insérer, ce qui libère une position pour l'insertion.

Boucle interne

Le coeur de l'algorithme consiste à insérer l'élément d'indice k dans le tableau supposé déjà trié des éléments d'indices 0 à $k-1$.

- copier l'élément `k` dans une variable temporaire `tmp`
- tant que `tmp` est plus petit que l'élément précédent
  - déplacer cet élément vers la droite
  - reculer d'une position dans le tableau
- écrire `tmp` dans l'emplacement libéré.

In [1]:
```
def inserer_un_element(T,k):
    tmp = T[k]
    i = k
    while i > 0 and tmp < T[i-1]:
        T[i] = T[i-1]
        i -= 1
    T[i] = tmp
```

Un tableau de 1 élément est toujours trié.

On commence donc par insérer le deuxième élément (d'indice 1) dans le tableau ne contenant que le premier élément

In [2]:
```
T = [ 5, 3, 8, 1, 4, 2, 7, 6 ]
inserer_un_element(T,1); print(T[:2],T[2:])
```

```
[3, 5] [8, 1, 4, 2, 7, 6]
```

Les deux premiers éléments sont maintenant triés. Insérons le troisième

In [3]:
```
inserer_un_element(T,2); print(T[:3],T[3:])
```

```
[3, 5, 8] [1, 4, 2, 7, 6]
```

Et ainsi de suite ...

In [4]:
```
inserer_un_element(T,3); print(T[:4],T[4:])
```

```
[1, 3, 5, 8] [4, 2, 7, 6]
```

In [5]:
```
inserer_un_element(T,4); print(T[:5],T[5:])
```

```
[1, 3, 4, 5, 8] [2, 7, 6]
```

In [6]:
```
inserer_un_element(T,5); print(T[:6],T[6:])
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 8] [7, 6]
```

In [7]:
```
inserer_un_element(T,6); print(T[:7],T[7:])
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 7, 8] [6]
```

In [8]:
```
inserer_un_element(T,7); print(T[:8],T[8:])
```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] []
```

Boucle externe

On répète donc l'insertion jusqu'à ce qu'on aie inséré tous les éléments

In [9]:
```
T = [ 5, 3, 8, 1, 4, 2, 7, 6 ]; N = len(T)
print(T[:1],T[1:])

for i in range(1,N):
    inserer_un_element(T,i)
    print(T[:i+1],T[i+1:])
```

```
[5] [3, 8, 1, 4, 2, 7, 6]
[3, 5] [8, 1, 4, 2, 7, 6]
[3, 5, 8] [1, 4, 2, 7, 6]
[1, 3, 5, 8] [4, 2, 7, 6]
[1, 3, 4, 5, 8] [2, 7, 6]
[1, 2, 3, 4, 5, 8] [7, 6]
[1, 2, 3, 4, 5, 7, 8] [6]
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] []
```

En résumé

Le tri par insertion effectue deux boucles imbiquées.

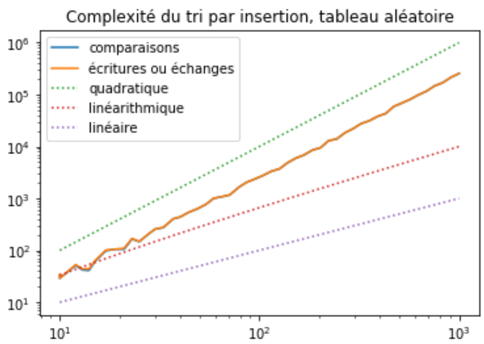
- La boucle interne insère l'élément d'indice k dans le sous-tableau le précédant.
- La boucle externe fait varier cet indice k de la deuxième à la dernière position.

In [11]:
```
def tri_par_insertion(T, comparer = asd1.plus_petit):
    N = len(T)
    for k in range(1,N):
        tmp = T[k]
        i = k
        while i > 0 and comparer(tmp,T[i-1]):
            T[i] = asd1.assigner(T[i-1])
            i -= 1
        T[i] = asd1.assigner(tmp)
```

Complexité

Pour évaluer la complexité de cet algorithme, évaluons d'abord la complexité du tri d'un tableau au contenu généré aléatoirement.

In [13]:
```
asd1.evalue_complexite(tri_par_insertion,
                       asd1.tableau_aleatoire,
                       "tri par insertion, tableau aléatoire")
```



N	Comp.	Ecr.
10	33	34
19	105	105
37	403	406
71	1167	1171
138	4828	4831
268	18327	18333
517	68577	68582
1000	254774	254779

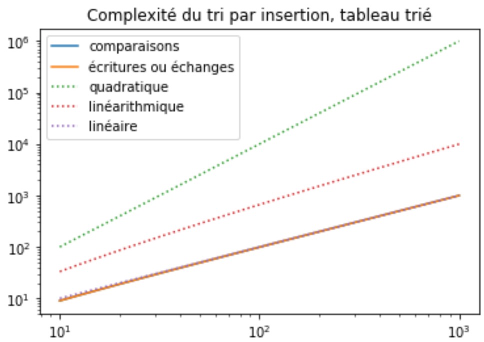
Notons que

- le nombre de comparaisons et d'écritures est quasiment égal (*).
- leur complexité est d'ordre **quadratique en $\Theta(n^2)$** pour trier n éléments.
- le nombre exact de comparaisons varie, sans doute en fonction du contenu du tableau

(*) *La seule différence provient des rares fois ou la boucle `while` s'arrête sur le test `i>0` et ne teste pas `comparer(tmp,T[i-1])` par court-circuit*

Vérifions cette dernière hypothèse en triant un **tableau déjà trié**

In [14]:
```
asd1.evalue_complexite(tri_par_insertion, asd1.tableau_trie,
                       "tri par insertion, tableau trié")
```

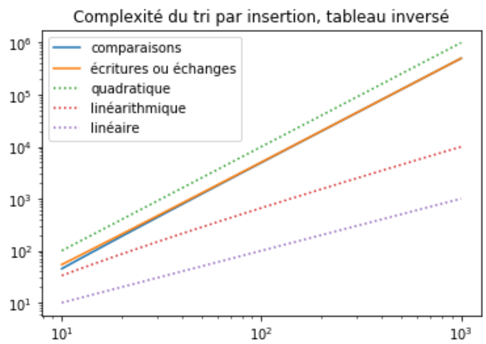


N	Comp.	Ecr.
10	9	9
19	18	18
37	36	36
71	70	70
138	137	137
268	267	267
517	516	516
1000	999	999

La complexité est **linéaire** en $\Theta(n)$. Le test `comparer(tmp,T[i-1])` renvoye toujours `False`. C'est **le meilleur cas** pour le tri par insertion.

Observons maintenant le cas inverse d'une entrée triée à l'envers

In [15]:
```
asd1.evalue_complexite(tri_par_insertion,
                       asd1.tableau_trie_inverse,
                       "tri par insertion, tableau inversé")
```

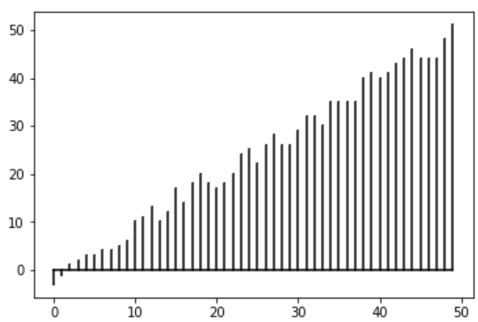


N	Comp.	Ecr.
10	45	54
19	171	189
37	666	702
71	2485	2555
138	9453	9590
268	35778	36045
517	133386	133902
1000	499500	500499

La complexité est ici **quadratique** en $\Theta(n^2)$. C'est **le pire cas**.

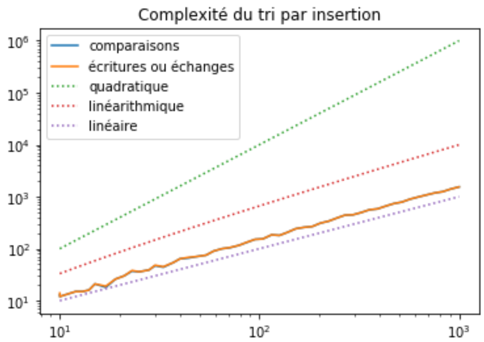
Regardons enfin un cas d'importance pratique, celui d'un tableau **presque trié**. Ecrivons d'abord une fonction générant un tel tableau.

In [16]:
```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt

def tableau_presque_trie(n):
    return [ i + np.random.randint(-3,3) for i in range(0,n) ]

plt.stem(tableau_presque_trie(50),markerfmt=',',linefmt='black'
,basefmt='black')
plt.show()
```



Utilisons cette fonction pour évaluer une dernière fois la complexité du tri par insertion

In [17]:
```
asd1.evalue_complexite(tri_par_insertion, tableau_presque_trie,
                       "tri par insertion")
```



N	Comp.	Ecr.
10	13	14
19	26	26
37	54	54
71	104	105
138	206	206
268	441	442
517	787	788
1000	1541	1541

La complexité est ici approximativement linéaire en $\Theta(n)$.

La fonction de génération de tableau presque trié utilisée ici garantit qu'aucun élément n'est à plus de 5 places de sa position finale.

La boucle interne itère au maximum 5 fois.

Le tri par insertion est remarquablement efficace pour trier un tableau *presque* trié.

A quel point il est efficace en pratique dépend évidemment de ce que l'on entend par *presque*

Stabilité

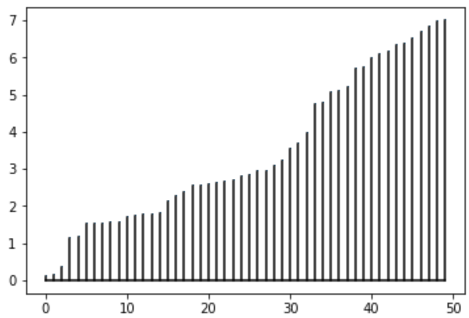
Le tri par insertion est **stable**.

En effet, le test `tmp < T[i-1]` garantit qu'on ne déplace pas vers la droite un élément égal à celui que l'on cherche à insérer. **L'ordre des éléments égaux est donc préservé**.

Vérifions le graphiquement en triant par parties fractionnaires puis entières.

In [19]:
```
asd1.test_stabilite(tri_par_insertion)
```

```
Le tri est stable
```

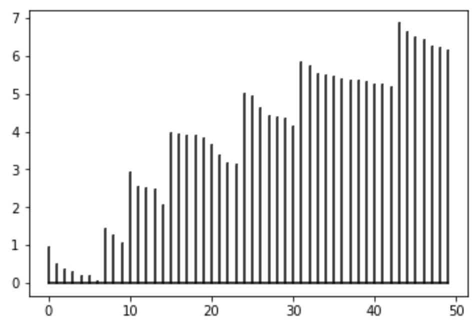


Notons que le test strict `tmp < T[i-1]` est essentiel à la stabilité. Remplacer le test `tmp <= T[i-1]`, ou `not( T[i-1] < tmp )` rend le tri instable

In [20]:
```
def tri_par_insertion_errone(T,plus_petit):
    N = len(T)
    for k in range(1,N):
        tmp = T[k]
        i = k
        while i > 0 and not plus_petit(T[i-1],tmp):
            T[i] = T[i-1]
            i -= 1
        T[i] = tmp
```

In [21]:
```
asd1.test_stabilite(tri_par_insertion_errone)
```

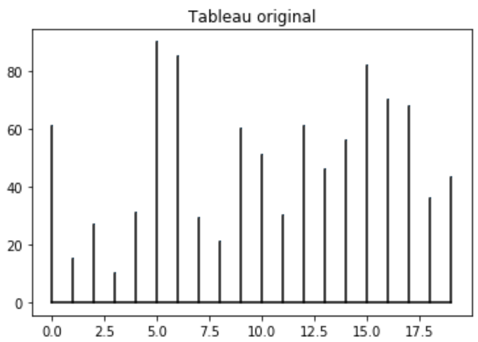
```
Le tri n'est pas stable
```



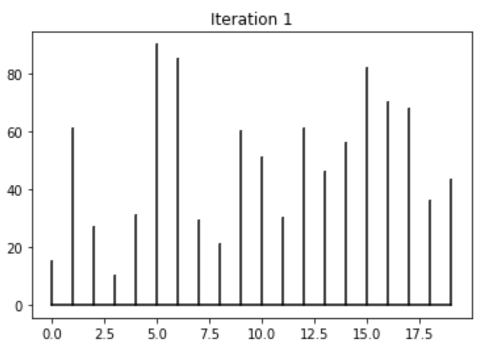
Visualisation

Finalement, visualisons graphiquement le tri d'un tableau de 20 entiers aléatoires entre 0 et 100

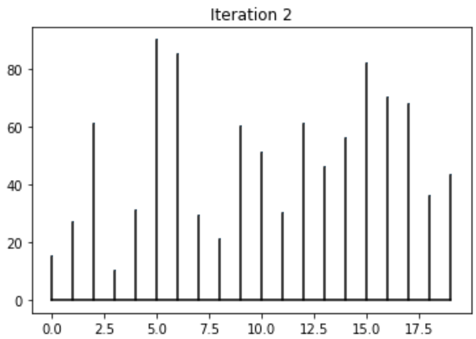
In [29]:
```
T = np.random.randint(0,100,20)
asd1.afficheIteration(T,'Tableau original')
```



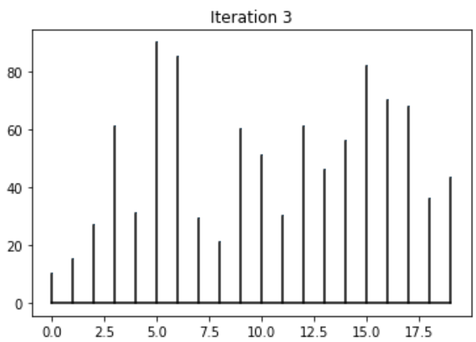
In [30]:
```
i = 1
inserer_un_element(T,i)
asd1.afficheIteration(T,'Iteration {0}'.format(i))
```



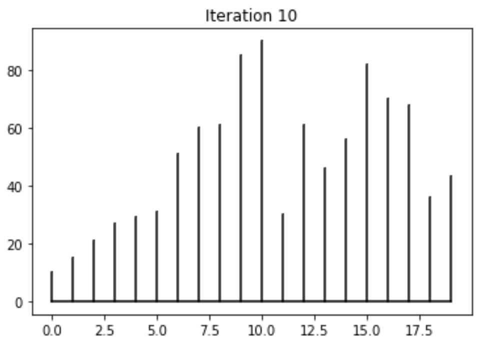
In [31]:
```
i += 1
inserer_un_element(T,i)
asd1.afficheIteration(T,'Iteration {0}'.format(i))
```



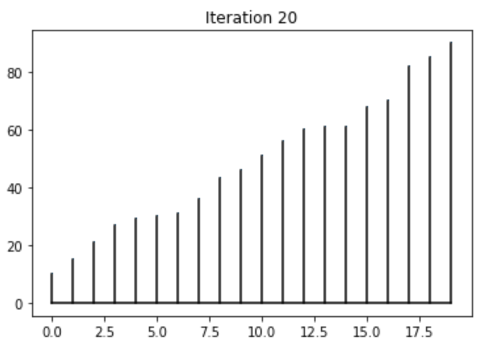
In [32]:
```
i += 1
inserer_un_element(T,i)
asd1.afficheIteration(T,'Iteration {0}'.format(i))
```



In [33]:
```python
for k in range(7):
    i += 1
    inserer_un_element(T,i)
asd1.afficheIteration(T,'Iteration {0}'.format(i))
```



In [34]:
```python
while i < len(T):
    inserer_un_element(T,i)
    i += 1
asd1.afficheIteration(T,'Iteration {0}'.format(i))
```



[ASD1 Notebooks on GitHub.io (https://ocuisenaire.github.io/ASD1-notebooks/)](https://ocuisenaire.github.io/ASD1-notebooks/)