Tri par Fusion

John von Neumann (https://fr.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann), 1945

Principe

On peut facilement fusionner deux listes triées en une seule en en extrayant itérativement le plus petit élément. Celui-ci est forcément aussi le plus petit de l'une des deux listes à fusionner.

Ce procédé est appelé fusion et est au cœur de l'algorithme de tri par fusion récursif.

- Si le tableau n'a qu'un élément, il est déjà trié.
- Sinon, séparer le tableau en deux parties à peu près égales.
- Trier récursivement les deux parties avec l'algorithme du tri fusion.
- Fusionner les deux parties triées en un seul tableau trié.

Ce tri a été illustré par Saturday Morning Breakfast Cereal (http://www.smbc-comics.com/?id=1989)

Fusion

Entrées:

les sous-tableaux `T[permier:limite]` et `T[limite:dernier]`, supposés triés.

Sortie:

le tableau `T[premier:dernier]` est trié

Algorithme:

- copier les deux sous-tableaux dans des tableaux annexes T1 et T2
- boucler par positions croissantes dans T, et y copier
  - `si` T1 est vide, min(T2)
  - `sinon, si` T2 est vide, min(T1)
  - `sinon`, le plus petit de min(T1),min(T2)
  - et supprimer l'élément copié de la liste T1 ou T2

Les listes `Tk` (`T1` et `T2`) étant triées,

- `ik` est l'indice du premier élément pas encore fusionné
- `min(Tk)` est `Tk[ik]`
- `ik += 1` supprime ce minimum de `Tk`.

In [2]:

```python
def fusion(T, premier, limite, dernier):
    asd1.affiche_entree_fusion(T,premier, limite, dernier)

    T1 = T[premier:limite].copy()
    T2 = T[limite:dernier].copy()
    i1 = i2 = 0

    for i in range(premier,dernier):
        if i2 < len(T2) and ( i1 >= len(T1) or
                              T2[i2] < T1[i1]):
            T[i] = T2[i2]; i2 += 1
        else:
            T[i] = T1[i1]; i1 += 1

    asd1.affiche_sortie_fusion(T,premier,limite,dernier)
```

In [3]:

```python
T = [ 3, 4, 5, 1, 2, 6 ]; fusion( T, 0, 3, 6 )
```

```
[3, 4, 5][1, 2, 6]  F(0,3,6)
[1, 2, 3, 4, 5, 6]
```

Récursion

Entrée:

le tableau `T[premier:dernier]` dans un ordre quelconque

Sortie:

`T[premier:dernier]` est trié

Cas trivial:

`T` a 0 ou 1 élément, ne rien faire

Cas général:

diviser `T` en deux, les trier récursivement, puis les fusionner

In [4]:
```
def recursion(T,premier,dernier):
    asd1.affiche_entree_tri_fusion(T,premier, dernier)

    N = dernier - premier
    if N >= 2:

        milieu = premier + N//2
        recursion(T,premier,milieu)
        recursion(T,milieu,dernier)
        fusion(T,premier,milieu,dernier)
```

In [5]:
```
def tri(T):
    recursion(T,0,len(T))
```

In [6]:
```
T = [5, 4, 3, 2, 6, 7, 1]; tri(T)
```

```
[5, 4, 3, 2, 6, 7, 1]  R(0,7)
[5, 4, 3]............    R(0,3)
[5]..................      R(0,1)
...[4, 3]............    R(1,3)
...[4]...............      R(1,2)
......[3]............      R(2,3)
...[4][3]............    F(1,2,3)
...[3, 4]............
[5][3, 4]............    F(0,1,3)
[3, 4, 5]............
.........[2, 6, 7, 1]  R(3,7)
.........[2, 6]......    R(3,5)
.........[2].........      R(3,4)
............[6]......      R(4,5)
.........[2][6]......    F(3,4,5)
.........[2, 6]......
...............[7, 1]    R(5,7)
...............[7]...      R(5,6)
..................[1]      R(6,7)
...............[7][1]    F(5,6,7)
...............[1, 7]
.........[2, 6][1, 7]  F(3,5,7)
.........[1, 2, 6, 7]
[3, 4, 5][1, 2, 6, 7]  F(0,3,7)
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
```

En résumé

In [7]:
```
def fusionner(T, premier, milieu, dernier,
              comparer = asd1.plus_petit):
    T1 = asd1.copier_tableau(T[premier:milieu]); i1 = 0
    T2 = asd1.copier_tableau(T[milieu:dernier]); i2 = 0
    for i in range(premier,dernier):
        if i2 < len(T2) and ( i1 >= len(T1) or
                              comparer(T2[i2],T1[i1])):
            T[i] = asd1.assigner(T2[i2]); i2 += 1;
        else:
            T[i] = asd1.assigner(T1[i1]); i1 += 1;
```

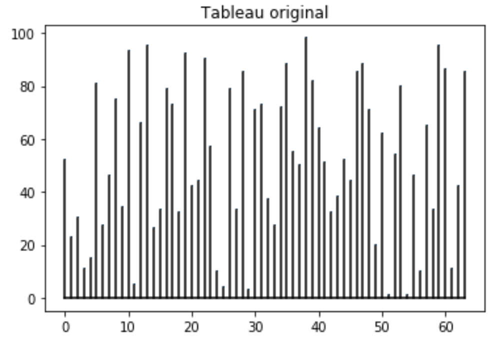
In [8]:
```
def tri_fusion_recursif(T,premier,dernier,
                        comparer = asd1.plus_petit):
    if dernier - premier >= 2:
        milieu = premier + (dernier - premier) // 2
        tri_fusion_recursif(T, premier, milieu, comparer)
        tri_fusion_recursif(T, milieu, dernier, comparer)
        fusionner(T,premier,milieu,dernier,comparer)
```

In [9]:
```
def tri_fusion(T, comparer = asd1.plus_petit ):
    tri_fusion_recursif(T,0,len(T),comparer)
```

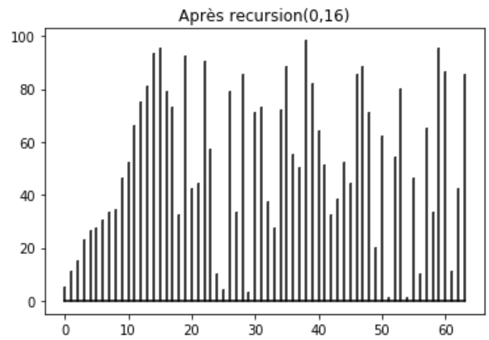
Visualisation

Trions un tableau de 64 entiers aléatoires entre 0 et 100. Nous affichons l'état du tableau aprés les étapes de fusion qui fusionnent 16 éléments ou plus.

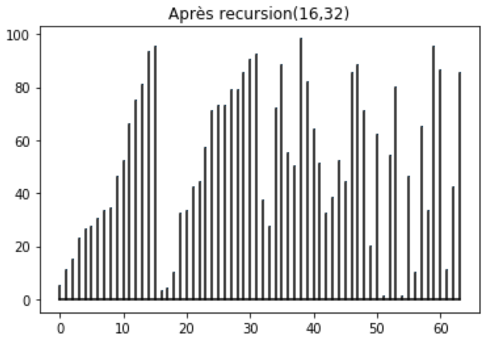
In [10]:
```
import numpy as np
T = np.random.randint(0,100,64)
asd1.afficheIteration(T,'Tableau original')
```



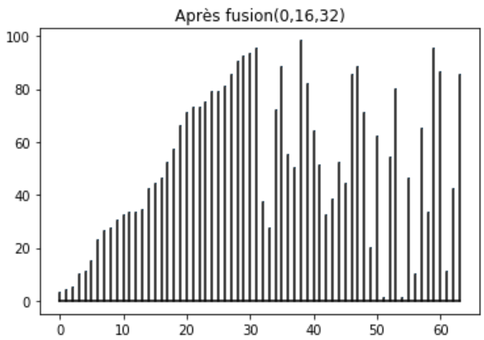
In [11]:
```
tri_fusion_recursif(T,0,16)
asd1.afficheIteration(T,'Après recursion(0,16)')
```



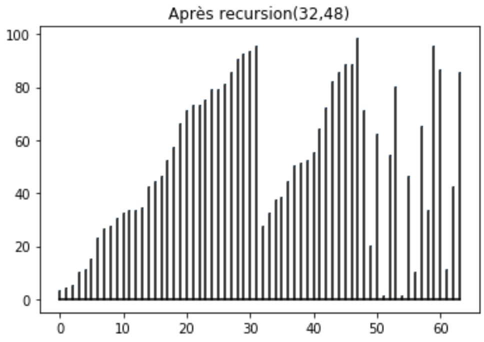
In [12]:
```
tri_fusion_recursif(T,16,32)
asd1.afficheIteration(T,'Après recursion(16,32)')
```



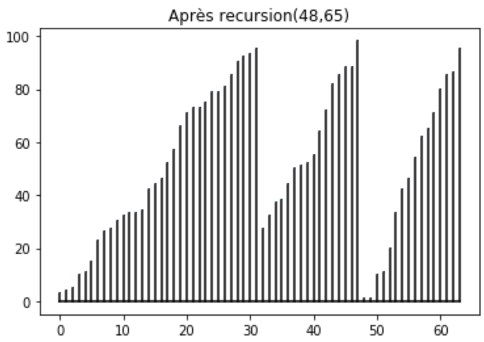
In [13]:
```
fusionner(T,0,16,32)
asd1.afficheIteration(T,'Après fusion(0,16,32)')
```



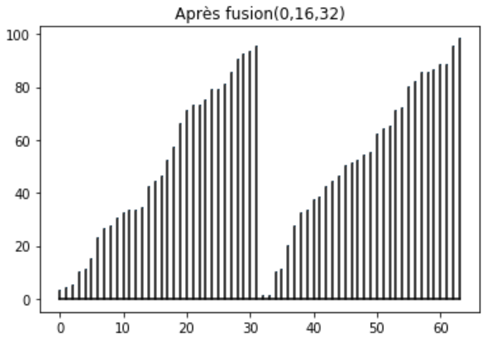
In [14]:
```
tri_fusion_recursif(T,32,48)
asd1.afficheIteration(T,'Après recursion(32,48)')
```



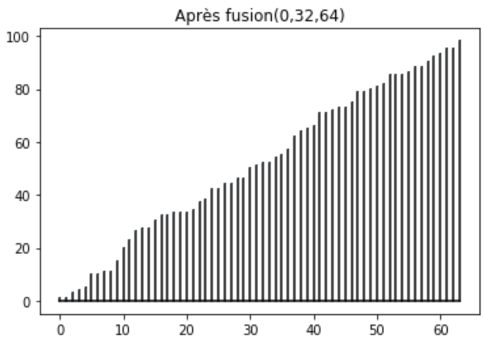
In [15]:
```
tri_fusion_recursif(T,48,64)
asd1.afficheIteration(T,'Après recursion(48,65)')
```



In [16]:
```
fusionner(T,32,48,64)
asd1.afficheIteration(T,'Après fusion(0,16,32)')
```



In [17]:
```
fusionner(T,0,32,64)
asd1.afficheIteration(T,'Après fusion(0,32,64)')
```



Stabilité

Le tri fusion est **stable**.

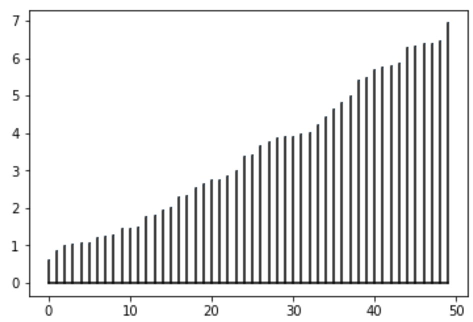
La ligne critique est le test `T2[i2] < T1[i1]`.

En cas d'égalité entre l'élément le plus petit de T1 ou de T2, il faut d'abord copier dans T celui de T1. En effet, il vient de la section `[premier:milieu]` qui est antérieure à la section `[milieu:dernier]`

Vérifions le en triant par parties fractionnaires puis par parties entières.

In [18]:
```
asd1.test_stabilite(tri_fusion)
```

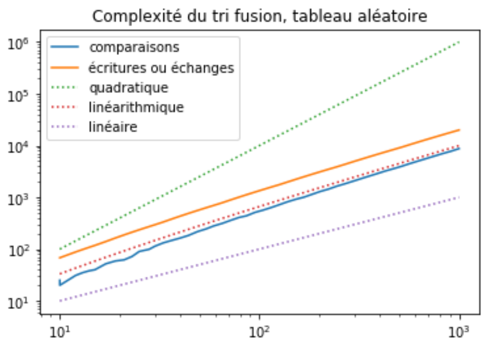
```
Le tri est stable
```



Complexité

Evaluons d'abord la complexité du tri d'un tableau au contenu généré aléatoirement.

In [19]:
```
asd1.evalue_complexite(tri_fusion, asd1.tableau_aleatoire,
                       "tri fusion, tableau aléatoire")
```



N	Comp.	Ecr.
10	25	68
19	59	164
37	150	390
71	354	880
138	818	1972
268	1826	4336
517	3992	9326
1000	8731	19952

La complexité du tri est **linéarithmique** en $\Theta(n\log(n))$.

- chaque appel récursif divise par deux la taille du tableau à traiter. La **profondeur de récursion** est donc de $\Theta(\log_2 n)$.
- Pour une profondeur de récursion k donnée, chaque élément est impliqué dans une et une seule des 2^k fusions.
- L'ensemble des fusions à une profondeur de récursion donnée a donc une complexité $\Theta(n)$
- La complexité pour toutes les profondeurs de récursion est donc $\Theta(n\log(n))$

Par ailleurs, le nombre d'opérations est indépendant du contenu de l'entrée. Il n'y a pas de meilleur ou de pire cas.

Réduire le nombre d’écritures

S'il est efficace pour le nombre de comparaisons, ce tri effectue un très grand nombre d'écritures dans le tableau. A chaque fusion, chaque élément est en effet copié 2 fois.

- du tableau T vers un des tableaux annexes T1 ou T2
- d'un tableau annexe vers T

Il est possible d'éviter la première de ces copies en utilisant toujours le même tableau annexe de la taille du tableau T original, et en échangeant le rôle des deux tableaux à chaque niveau de récursion

La fonction de fusion prend 2 tableaux en paramètres: `IN` et `OUT`

In [20]:
```
def fusionner2(OUT, IN, premier, milieu, dernier,
              comparer = asd1.plus_petit):

        i1 = premier; i2 = milieu
        for i in range(premier,dernier):
            if i2 < dernier and (
                i1 >= milieu or comparer(IN[i2],IN[i1]) ):
                OUT[i] = asd1.assigner(IN[i2]); i2 += 1;
            else:
                OUT[i] = asd1.assigner(IN[i1]); i1 += 1;
```

La fonction récursive prend les même deux tableaux en paramètre. Les appels récursifs en échangent le rôle.

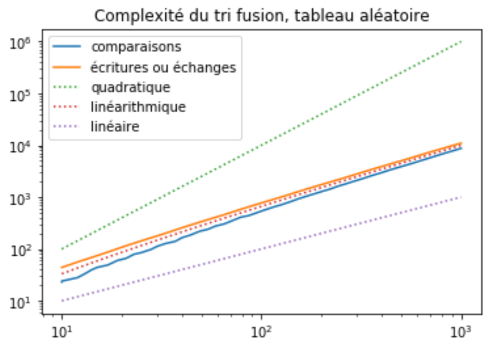
In [21]:
```
def tri_fusion_recursif2(OUT,IN,premier,dernier,comparer = asd1
.plus_petit):
    if dernier - premier >= 2:
        milieu = premier + int((dernier - premier)/2)
        tri_fusion_recursif2(IN,OUT, premier, milieu, comparer)
        tri_fusion_recursif2(IN,OUT, milieu, dernier, comparer)
        fusionner2(OUT,IN,premier,milieu,dernier,comparer)
```

La fonction d'appel originale crée le tableau annexe en copiant le tableau original.

In [22]:
```
def tri_fusion2(T, comparer = asd1.plus_petit ):
    TMP = asd1.copier_tableau(T)
    tri_fusion_recursif2(T,TMP,0,len(T),comparer)
```

Toutes les copies T → T1 et T → T2 sont remplacées par une seule copie de T → TMP. On passe donc d'environ $2 \cdot n \cdot \log n$ écritures à seulement $n \cdot \log n + n$.

```python
In [23]: asd1.evalue_complexite(tri_fusion2, asd1.tableau_aleatoire,
                                "tri fusion, tableau aléatoire")
```




```
   N |     Comp. |      Ecr.
------------------------------
  10 |        23 |        44
  19 |        60 |       101
  37 |       140 |       232
  71 |       348 |       511
 138 |       802 |      1124
 268 |      1830 |      2436
 517 |      4013 |      5180
1000 |      8721 |     10976
```

Complexité spatiale

Les deux versions de l'algorithme présentées demandent de copier tous les éléments dans un tableau annexe. La mémoire additionelle utilisée est donc $\Theta(n)$.

Si ce n'est pas acceptable, il existe des alternatives

- Dudzinki (https://doi.org/10.1016/0020-0190(81)90065-X) (1981) propose propose une fonction de fusion en place RECMERGE de complexité temporelle $\Theta(n \log n)$, ce qui donne une complexité $\Theta(n \log^2 n)$ pour le tri fusion. Elle est utilisée par `std::stable_sort` en C++ quand la mémoire est limitée.
- Katajainen (http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.22.8523) (1996) propose un tri fusion entièrement en place (complexité spatiale $\Theta(1)$) mais pas stable

Conclusion

Le tri fusion

- est **stable**
- a une **complexité temporelle** linéarithmique, en $\Theta(n \log n)$
- a une **complexité spatiale** linéaire, en $\Theta(n)$
- a des **variantes** moins gourmandes en mémoire mais plus difficiles à coder.

[ASD1 Notebooks on GitHub.io (https://ocuisenaire.github.io/ASD1-notebooks/)](https://ocuisenaire.github.io/ASD1-notebooks/)