Sélection rapide

C.A.R. Hoare, « Algorithm 65: find », Communications of the ACM, vol. 4, no 7, 1961, p. 321-322

Etant donné un tableau T de n éléments,
quel est le $(k+1)^{ieme}$ par ordre croissant ?

Solution 1: trier

- appliquer le tri rapide sur T avec une complexité $\Theta(n \log n)$
- retourner `T[k]`

Cas particuliers

- pour $k = 0$, retourner le minimum en $\Theta(n)$
- pour $k = n - 1$, retourner le maximum en $\Theta(n)$

Quelle est la complexité du problème?

$\Theta(n \log n)$ ou $\Theta(n)$?

Hoare propose un algorithme proche du tri rapide, de complexité moyenne $\Theta(n)$.

- Choisir un pivot
- Partitionner autour de ce pivot
- Soit p la position du pivot partitionné
  - si `p < k`, répéter sur la partie droite
  - si `p > k`, répéter sur la partie gauche
  - sinon (`p==k`), sortir
- jusqu'à ce que la partition n'aie qu'un seul élément

Le résultat est un tableau partiellement trié.

- L'élément d'indice k est le bon
- le reste du tableau est partitionné autour de lui.

Mise en oeuvre

On reprend l'algorithme de partition du tri rapide.

In [2]:
```
def partition(T,premier,dernier,comparer = asd1.plus_petit):

    pivot = dernier-1; i = premier; j = pivot-1

    while True:
        while i < pivot    and comparer(T[i],T[pivot]): i += 1
        while j >= premier and comparer(T[pivot],T[j]): j -= 1
        if j < i: break
        asd1.echanger(T,i,j)
        i += 1; j -= 1

    asd1.echanger(T,i,pivot)
    return i
```

La sélection rapide n'ayant qu'un appel récursif, il est plus simple de l'écrire itérativement

In [3]:
```
def selection_rapide(T,k,comparer = asd1.plus_petit):
    premier = 0
    dernier = len(T)

    while premier < dernier-1:
        pivot = choix_du_pivot(T,premier,dernier)
        T[pivot],T[dernier-1] = T[dernier-1],T[pivot]

        pivot = partition(T,premier,dernier,comparer)

        if pivot < k:
            premier = pivot+1
        elif pivot > k:
            dernier = pivot
        else:
            break;

    return T[k]
```

Testons l'algorithme

In [5]:
```
T = [ 1, 4, 3, 8, 5, 7, 2, 6 ]
k = 4
print(selection_rapide(T,k))
print(T[:k],T[k],T[k+1:])
```

```
5
[1, 4, 3, 2] 5 [6, 8, 7]
```

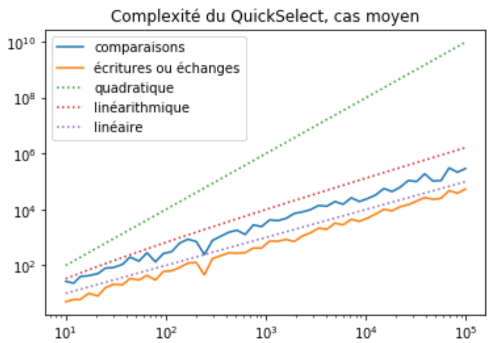
On voit que le contenu du tableau a bougé

L'élément d'indice k est à sa place triée et le reste du tableau est partitionné

Complexité

Cherchons la medianne de 10 à 100000 nombres aléatoires

In [6]:
```
asd1.evalue_complexite_selection(selection_rapide,
    asd1.tableau_aleatoire, "QuickSelect, cas moyen",1,5)
```



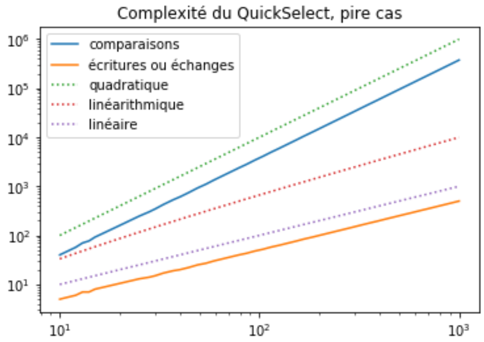
N	Comp.	Ecr.
10	27	5
37	109	20
138	630	84
517	1821	273
1930	7223	721
7196	26387	4489
26826	111037	15096
100000	294684	54748

La complexité est **linéaire en moyenne**.

Attention, un mauvais choix de pivot ou une grande malchance peut conduire au pire cas, de complexité quadratique.

Par exemple, avec une entrée triée et un pivot en dernière position...

In [7]:
```
asd1.evalue_complexite_selection(selection_rapide,
    asd1.tableau_trie, "QuickSelect, pire cas",1,3)
```



N	Comp.	Ecr.
10	40	5
19	145	10
37	532	19
71	1926	36
138	7176	69
268	27001	134
517	100492	259
1000	375250	500

Conclusion

L'algorithme de **sélection rapide de Hoare** permet de trouver le k^{ieme} élément d'un tableau selon un ordre donné.

Il utilise le même algorithme de **partition** que le tri rapide

Il ne continue que sur **un seul côté** de la partition, contrairement au tri rapide.

Sa complexité moyenne est **linéaire** en $\Theta(n)$

Sa complexité dans le **pire des cas** est quadratique en $\Theta(n^2)$

[ASD1 Notebooks on GitHub.io (https://ocuisenaire.github.io/ASD1-notebooks/)](https://ocuisenaire.github.io/ASD1-notebooks/)

© Olivier Cuisenaire, 2018