Travaux dirigés 1 - Phénomènes de diffusion

L2 CUPGE PHYSIQUE

Semestre 4

1 Isolation thermique des maisons

1.1 Question de cours

On rappelle l'expression de la loi élémentaire de Fourier donnant le vecteur densité de courant de chaleur $\overrightarrow{J_Q}$.

$$\overrightarrow{J_Q} = -\kappa \vec{\nabla} T(M,t) \tag{1}$$

Dans notre situation on peut se ramener à une étude à une dimension, la température ne dépend alors que de x et t : $T(x,t)$. On obtient donc la relation suivante :

$$\overrightarrow{J_Q} = -\kappa \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \overrightarrow{u_x} \tag{2}$$

On réalise ensuite un bilan des échanges de chaleur pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$ sur un petit volume de section $\mathrm{d}S$ et d'épaisseur $\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\delta Q &= \delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}} \\
&= J_Q(x+\mathrm{d}x,t)\mathrm{d}S\mathrm{d}t - J_Q(x,t)\mathrm{d}S\mathrm{d}t \\
&= \left[J_Q(x+\mathrm{d}x,t) - J_Q(x,t)\right]\mathrm{d}S\mathrm{d}t \\
\delta Q &= \frac{\partial J_Q(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}S\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{3}$$

On cherche alors à monter que la température $T(x,t)$ vérifie l"quation de Fourier $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$. On utilise pour cela la chaleur spécifique par unité de volume C. On peut l'exprimer comme :

$$\begin{aligned}
C &= \frac{C_v}{V} \\
&= \frac{1}{V} \cdot \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} \\
C &= \frac{1}{V} \cdot \frac{\delta Q}{\mathrm{d}T} \text{ car dans notre cas } \delta W = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Ainsi on peut exprimer δQ avec cette nouvelle expression. On obtient :

$$\delta Q = C \mathrm{d}T \mathrm{d}x \mathrm{d}S \tag{5}$$

On obtient donc l'égalité suivante :

$$\delta Q = C \mathrm{d}T \mathrm{d}x \mathrm{d}S = \frac{\partial J_Q(x,t)}{\partial x} \mathrm{d}x \mathrm{d}S \mathrm{d}t \tag{6}$$

Or d'après la relation de Fourier, ici à une dimension, on sait que

$$\overrightarrow{J_Q} = -\kappa \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \overrightarrow{u_x} \tag{7}$$

En réinjectant ce résultat dans l'expression ci-dessus et en le simplifiant on obtient alors :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\kappa}{C} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{8}$$

En posant $D = -\frac{\kappa}{C}$ on obtient le résultat recherché.

Que devient cette équation en régime permanent ? En régime permanent le déséquilibre est créé en continu ainsi on a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \tag{9}$$

1.2 Le mur séprare un milieu à la température T_{int} (pour $x < 0$) d'un autre milieu à l'intérieur à la température T_{ext} (pour $x < e$).

On détermine, en régime permanent, la répartition de température $T(x)$ à l'intérieur du mur. On suppose T_{int} et T_{ext} constant, donc que le système est en déséquilibre de façon permanente. On a alors

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T(x) = Ax + B \tag{10}$$

Sachant $T(0) = T_{\text{int}}$ on a $B = T_{\text{int}}$. Ensuite on a $T(e) = T_{\text{ext}}$ donc on peut calculer A :

$$A = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e} \tag{11}$$

L'expression de $T(x)$ devient alors

$$T(x) = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e} x + T_{\text{int}} \tag{12}$$

On utilise finalement la loi élémentaire de Fourier :

$$J_Q(x) = -\kappa \frac{\partial T(x)}{\partial x} = -\kappa \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e} \tag{13}$$

On peut ensuite calculer la puissance qu'il faut fournir au milieu à la température T la plus élevée afin de compenser les pertes de chaleur à travers le mur. Pour cela on rappelle que la puissance est une énergie par unité de temps :

$$P = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta Q(t)}{\mathrm{d}t} = J_Q(x,t) \cdot S = -\kappa \frac{\frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e} \cdot S\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} \tag{14}$$

L'expression de la puissance est donc simplement

$$P = -\kappa \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e} \cdot S \tag{15}$$

Application numérique : $P = 1875\,\mathrm{W}$.

On peut montrer que les formules obtenues peuvent être comparées à celles que l'on obtiendrait en électricité avec le champ électrique $\vec{E}$, le champ de potentiel $\vec{\nabla} V$ et la conductivité électrique σ et ainsi définir une « résistance thermique » du mur.