Travaux dirigés 1 - Phénomènes de diffusion

L2 CUPGE PHYSIQUE

Semestre 4

1 Isolation thermique des maisons

1.1 Question de cours

On rappelle l'expression de la loi élémentaire de Fourier donnant le vecteur densité de courant de chaleur $\overrightarrow{J_Q}$.

$$\overrightarrow{J_Q} = -\kappa \vec{\nabla} T(M,t) \tag{1}$$

Dans notre situation on peut se ramener à une étude à une dimension, la température ne dépend alors que de x et t : $T(x,t)$. On obtient donc la relation suivante :

$$\overrightarrow{J_Q} = -\kappa \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \overrightarrow{u_x} \tag{2}$$

On réalise ensuite un bilan des échanges de chaleur pendant un intervalle de temps dt sur un petit volume de section dS et d'épaisseur dx.

$$\begin{aligned}
\delta Q &= \delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}} \\
&= J_Q(x+\mathrm{d}x,t)\mathrm{d}S\mathrm{d}t - J_Q(x,t)\mathrm{d}S\mathrm{d}t \\
&= \left[J_Q(x+\mathrm{d}x,t) - J_Q(x,t)\right]\mathrm{d}S\mathrm{d}t \\
\delta Q &= \frac{\partial J_Q(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}S\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{3}$$

On cherche alors à monter que la température $T(x,t)$ vérifie l"quation de Fourier $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$. On utilise pour cela la chaleur spécifique par unité de volume C. On peut l'exprimer comme :

$$\begin{aligned}
C &= \frac{C_v}{V} \\
&= \frac{1}{V} \cdot \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} \\
C &= \frac{1}{V} \cdot \frac{\delta Q}{\mathrm{d}T} \text{ car dans notre cas } \delta W = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Ainsi on peut exprimer δQ avec cette nouvelle expression. On obtient :

$$\delta Q = C\mathrm{d}T\mathrm{d}x\mathrm{d}S \tag{5}$$

On obtient donc l'égalité suivante :

$$\delta Q = C\mathrm{d}T\mathrm{d}x\mathrm{d}S = \frac{\partial J_Q(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}S\mathrm{d}t \tag{6}$$

Or d'après la relation de Fourier, ici à une dimension, on sait que

$$\overrightarrow{J_Q} = -\kappa\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\overrightarrow{u_x} \tag{7}$$

En réinjectant ce résultat dans l'expression ci-dessus et en le simplifiant on obtient alors :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\kappa}{C}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{8}$$

En posant $D = -\frac{\kappa}{C}$ on obtient le résultat recherché.

Que devient cette équation en régime permanent ? En régime permanent le déséquilibre est créé en continu ainsi on a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \tag{9}$$

1.2 Le mur séprare un milieu à la température T_{int} (pour $x < 0$) d'un autre milieu à l'intérieur à la température T_{ext} (pour $x < e$).

On détermine, en régime permanent, la répartition de température $T(x)$ à l'intérieur du mur. On suppose T_{int} et T_{ext} constant, donc que le système est en déséquilibre de façon permanente. On a alors

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T(x) = Ax + B \tag{10}$$

Sachant $T(0) = T_{\mathrm{int}}$ on a $B = T_{\mathrm{int}}$. Ensuite on a $T(e) = T_{\mathrm{ext}}$ donc on peut calculer A :

$$A = \frac{T_{\mathrm{ext}} - T_{\mathrm{int}}}{e} \tag{11}$$

L'expression de $T(x)$ devient alors

$$T(x) = \frac{T_{\mathrm{ext}} - T_{\mathrm{int}}}{e}x + T_{\mathrm{int}} \tag{12}$$

On utilise finalement la loi élémentaire de Fourier :

$$J_Q(x) = -\kappa \frac{\partial T(x)}{\partial x} = -\kappa \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e} \tag{13}$$

On peut ensuite calculer la puissance qu'il faut fournir au milieu à la température T la plus élevée afin de compenser les pertes de chaleur à travers le mur. Pour cela on rappelle que la puissance est une énergie par unité de temps :

$$P = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta Q(t)}{\mathrm{d}t} = J_Q(x,t) \cdot S = -\kappa \frac{\frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e} \cdot S\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} \tag{14}$$

L'expression de la puissance est donc simplement

$$P = -\kappa \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e} \cdot S \tag{15}$$

Application numérique : $P = 1875\,\mathrm{W}$.

On peut montrer que les formules obtenues peuvent être comparées à celles que l'on obtiendrait en électricité avec le champ électrique $\vec{E}$, le champ de potentiel $\vec{\nabla} V$ et la conductivité électrique σ et ainsi définir une « résistance thermique » du mur.

En électricité on connait la très célèbre relatio $U = RI$. On définit I comme

$$I = \int_S \vec{J}.\vec{n}\mathrm{d}S = JS \tag{16}$$

avec

$$J = -\sigma \vec{E} = \sigma \vec{\nabla} V \tag{17}$$

On a ici une analogie entre J_Q et J, avec σ la conductivité électrique, κ la conductivité thermique, $\vec{E}$ ou $-\vec{\nabla} V$ le champ de potentiel. Ainsi la loi d'ohm peut être utilisé par analogie pour définir R_{th} la résistance thermique. La différence de potentiel analogue à U dans notre cas peut se noter sous la forme d'une différence de température ΔT. Ainsi on obtient :

$$R_{\text{th}} = \frac{\Delta T}{I_Q} = \frac{\Delta T}{J_Q S} = \frac{\Delta T}{\kappa \frac{\Delta T}{e} S} = \frac{e}{\kappa S} \tag{18}$$

On vérifie la dimension de notre expression. On devrait trouver la dimension

$$[R] = \mathrm{K}[P]^{-1} = \mathrm{K}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^{-2}\mathrm{T}^{3} \tag{19}$$

$$[R] = \frac{[e]}{[\kappa][S]} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}\mathrm{L}^{1}\mathrm{T}^{-3}\mathrm{K}^{-1}\mathrm{L}^{2}} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}\mathrm{L}^{3}\mathrm{T}^{-3}\mathrm{K}^{-1}} = \mathrm{K}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^{-2}\mathrm{T}^{3} \tag{20}$$

Application numérique : $R_{\text{th}} = 8 \times 10^{-3}\,\mathrm{K\,W^{-1}}$.

1.3 Application au double vitrage

On détermine maintenant la valeur numérique de la résistance thermique pour une plaque de verre de surface $S = 1\,\mathrm{m}^2$ d'épaisseur $e = 4\,\mathrm{mm}$ et de conductivité thermique $\kappa = 0.8\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$.
Application numérique : $R_{\mathrm{th}} = 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{K\,W^{-1}}$.

Si l'air extérieur est porté à la température de $T_{\mathrm{ext}} = 20\,°\mathrm{C}$ et s'il règne une température $T_{\mathrm{int}} = 0\,°\mathrm{C}$ à l'extérieur, on peut évaluer la puissance thermique perdu par cette même vitre. Celle-ci correspond à la chaleur qui traverse la section S de la vitre par unité de temps. On a

$$P = J_Q S = -\kappa \Delta T e \cdot S \tag{21}$$

On remarque alors que l'on peut réécrire cette équation avec le terme de résistance thermique et on obtient alors :

$$P = \frac{\Delta T}{R_{\mathrm{th}}} \tag{22}$$

Application numérique : $P_{\mathrm{perdue}} = 4\,\mathrm{kW}$.

On peut ensuite déterminer la valeur numérique de la résistance thermique d'un double vitrage constitué de deux vitres identiques à celle définie précedemment mais d'épaisseur $e_2 = 2\,\mathrm{mm}$ chacune et d'une épaisseur e_2 d'air sec de conductivité thermique $\kappa_2 = 2.6 \times 10^{-2}\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$. Pour cela, toujours par analogie avec l'électrocinétique on, on additionne les résistances, comme s'il s'agissait de résistances électriques en séries. On obtient alors une résistance équivalentes $R_{\mathrm{éq}}$

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{éq}} &= 2R_{\mathrm{vitre}} + R_{\mathrm{air}} \\ &= 2\left(\frac{e_2}{S\kappa}\right) + \frac{e_2}{S\kappa_2} \\ R_{\mathrm{éq}} &= \frac{2e_2}{S\kappa} + \frac{e_2}{S\kappa_2} \end{aligned} \tag{23}$$

Application numérique : $R_{\mathrm{éq}} = 8 \times 10^{-2}\,\mathrm{K\,W^{-1}}$. On peut alors facilement en déduire la puissance thermique perdue : $P_{\mathrm{perdue}} = 244\,\mathrm{W}$. On en conclut donc qu'il est plus utile de réduire la conductivité thermique que d'augmenter l'épaisseur. Ainsi le double vitrage est nettement plus effectif (environ 20 fois) qu'une vitre de la même épaisseur.

2 Diffusion de neutrons dans un barreau d'Uranium

2.1 Bilan des échanges de neutrons et équation aux dérivées partielles

On commence par écrire le bilan des échanges de neutrons. On comprend que le problème traite d'une diffusion de densité volumique (une concentration donc) et qu'il produit également des neutrons. On peut donc écrire le bilan des échanges de neutrons de la manière suivante :

$$\delta N = \delta N_{\text{entrant}} - \delta N_{\text{sortant}} + \delta N_{\text{créé}} \tag{24}$$

Or on sait d'après le cours que le nombre de neutrons entrant dans le volume élémentaire cylindrique de section S pendant un temps $\mathrm{d}t$ est

$$\delta_{\text{entrant}} = j_c(x,t)S\mathrm{d}t \tag{25}$$

et de manière analogue on a également le nombre de neutrons sortant

$$\delta_{\text{sortant}} = j_c(x+\mathrm{d}x,t)S\mathrm{d}t \tag{26}$$

alors que le nombre de neutrons créés dans le volume élémentaire cylindrique nous est donné par la relation $Kc(x,t)S\mathrm{d}x\mathrm{d}T$. On obtient ainsi la relation

$$\begin{aligned}
\delta N &= \delta N_{\text{entrant}} - \delta N_{\text{sortant}} + \delta N_{\text{créé}} \\
&= j_c(x,t)S\mathrm{d}t - j_c(x+\mathrm{d}x,t)S\mathrm{d}t + Kc(x,t)S\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= [j_c(x,t) - j_c(x+\mathrm{d}x,t)]\, S\mathrm{d}t + Kc(x,t)S\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \big([j_c(x,t) - j_c(x+\mathrm{d}x,t)] + Kc(x,t)\mathrm{d}x\big)S\mathrm{d}t \\
\delta N &= \left[\frac{\partial j_c(x,t)}{\partial x} + Kc(x,t)\right]\mathrm{d}xS\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{27}$$

On peut également écrire ce bilan d'échange en fonction du temps, en déterminant le nombre de neutrons à l'instant t puis à l'instant $t+\mathrm{d}t$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
\delta N &= \delta N_{t+\mathrm{dt}} - \delta N_{\mathrm{t}} \\
&= c(x,t+\mathrm{d}t)S\mathrm{d}x - c(x,t)S\mathrm{d}x \\
&= \frac{\partial c(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}tS\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{28}$$

Ayant calculé la même quantité de deux manières différentes on obtient une égalité :

$$\left[\frac{\partial j_c(x,t)}{\partial x} + Kc(x,t)\right]\mathrm{d}xS\mathrm{d}t = \frac{\partial c(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}tS\mathrm{d}x \tag{29}$$

Or d'après la loi de Fick on sait que

$$\vec{\jmath_c}(x,t) = -D\vec{\nabla}c(x,t) \tag{30}$$