Travaux dirigés 1 - Phénomènes de diffusion

L2 CUPGE PHYSIQUE

Semestre 4

1 Isolation thermique des maisons

1.1 Question de cours

On rappelle l'expression de la loi élémentaire de Fourier donnant le vecteur densité de courant de chaleur $\overrightarrow{J_Q}$.

$$\overrightarrow{J_Q} = -\kappa \vec{\nabla} T(M,t) \tag{1}$$

Dans notre situation on peut se ramener à une étude à une dimension, la température ne dépend alors que de x et t : $T(x,t)$. On obtient donc la relation suivante :

$$\overrightarrow{J_Q} = -\kappa \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \overrightarrow{u_x} \tag{2}$$

On réalise ensuite un bilan des échanges de chaleur pendant un intervalle de temps $\mathrm{d}t$ sur un petit volume de section $\mathrm{d}S$ et d'épaisseur $\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} \delta Q &= \delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}} \\ &= J_Q(x+\mathrm{d}x,t)\mathrm{d}S\mathrm{d}t - J_Q(x,t)\mathrm{d}S\mathrm{d}t \\ &= \left[J_Q(x+\mathrm{d}x,t) - J_Q(x,t)\right]\mathrm{d}S\mathrm{d}t \\ \delta Q &= \frac{\partial J_Q(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}S\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3}$$

On cherche alors à monter que la température $T(x,t)$ vérifie l''quation de Fourier $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$. On utilise pour cela la chaleur spécifique par unité de volume C. On peut l'exprimer comme :

$$\begin{aligned} C &= \frac{C_v}{V} \\ &= \frac{1}{V} \cdot \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} \\ C &= \frac{1}{V} \cdot \frac{\delta Q}{\mathrm{d}T} \text{ car dans notre cas } \delta W = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Ainsi on peut exprimer δQ avec cette nouvelle expression. On obtient :

$$\delta Q = C\mathrm{d}T\mathrm{d}x\mathrm{d}S \tag{5}$$

On obtient donc l'égalité suivante :

$$\delta Q = C\mathrm{d}T\mathrm{d}x\mathrm{d}S = \frac{\partial J_Q(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}S\mathrm{d}t \tag{6}$$

Or d'après la relation de Fourier, ici à une dimension, on sait que

$$\overrightarrow{J_Q} = -\kappa\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\overrightarrow{u_x} \tag{7}$$

En réinjectant ce résultat dans l'expression ci-dessus et en le simplifiant on obtient alors :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\kappa}{C}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{8}$$

En posant $D = -\frac{\kappa}{C}$ on obtient le résultat recherché.

Que devient cette équation en régime permanent ? En régime permanent le déséquilibre est créé en continu ainsi on a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \tag{9}$$

1.2 Le mur séprare un milieu à la température T_{int} (pour $x < 0$) d'un autre milieu à l'intérieur à la température T_{ext} (pour $x < e$).

On détermine, en régime permanent, la répartition de température $T(x)$ à l'intérieur du mur. On suppose T_{int} et T_{ext} constant, donc que le système est en déséquilibre de façon permanente. On a alors

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T(x) = Ax + B \tag{10}$$

Sachant $T(0) = T_{\text{int}}$ on a $B = T_{\text{int}}$. Ensuite on a $T(e) = T_{\text{ext}}$ donc on peut calculer A :

$$A = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e} \tag{11}$$

L'expression de $T(x)$ devient alors

$$T(x) = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e}x + T_{\text{int}} \tag{12}$$

On utilise finalement la loi élémentaire de Fourier :

$$J_Q(x) = -\kappa \frac{\partial T(x)}{\partial x} = -\kappa \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e} \tag{13}$$

On peut ensuite calculer la puissance qu'il faut fournir au milieu à la température T la plus élevée afin de compenser les pertes de chaleur à travers le mur. Pour cela on rappelle que la puissance est une énergie par unité de temps :

$$P = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta Q(t)}{\mathrm{d}t} = J_Q(x,t) \cdot S = -\kappa \frac{\frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e} \cdot S\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} \tag{14}$$

L'expression de la puissance est donc simplement

$$P = -\kappa \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e} \cdot S \tag{15}$$

Application numérique : $P = 1875\,\mathrm{W}$.

On peut montrer que les formules obtenues peuvent être comparées à celles que l'on obtiendrait en électricité avec le champ électrique $\vec{E}$, le champ de potentiel $\vec{\nabla} V$ et la conductivité électrique σ et ainsi définir une « résistance thermique » du mur.

En électricité on connait la très célèbre relatio $U = RI$. On définit I comme

$$I = \int_S \vec{J}.\vec{n}\mathrm{d}S = JS \tag{16}$$

avec

$$J = -\sigma \vec{E} = \sigma \vec{\nabla} V \tag{17}$$

On a ici une analogie entre J_Q et J, avec σ la conductivité électrique, κ la conductivité thermique, $\vec{E}$ ou $-\vec{\nabla} V$ le champ de potentiel. Ainsi la loi d'ohm peut être utilisé par analogie pour définir R_{th} la résistance thermique. La différence de potentiel analogue à U dans notre cas peut se noter sous la forme d'une différence de température ΔT. Ainsi on obtient :

$$R_{\text{th}} = \frac{\Delta T}{I_Q} = \frac{\Delta T}{J_Q S} = \frac{\Delta T}{\kappa \frac{\Delta T}{e} S} = \frac{e}{\kappa S} \tag{18}$$

On vérifie la dimension de notre expression. On devrait trouver la dimension

$$[R] = \mathrm{K}[P]^{-1} = \mathrm{K}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^{-2}\mathrm{T}^{3} \tag{19}$$

$$[R] = \frac{[e]}{[\kappa][S]} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}\mathrm{L}^{1}\mathrm{T}^{-3}\mathrm{K}^{-1}\mathrm{L}^{2}} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}\mathrm{L}^{3}\mathrm{T}^{-3}\mathrm{K}^{-1}} = \mathrm{K}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^{-2}\mathrm{T}^{3} \tag{20}$$

Application numérique : $R_{\text{th}} = 8 \times 10^{-3}\,\mathrm{K}\,\mathrm{W}^{-1}$.

1.3 Application au double vitrage

On détermine maintenant la valeur numérique de la résistance thermique pour une plaque de verre de surface $S = 1\,\mathrm{m}^2$ d'épaisseur $e = 4\,\mathrm{mm}$ et de conductivité thermique $\kappa = 0.8\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$.
Application numérique : $R_{\mathrm{th}} = 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{K\,W^{-1}}$.

Si l'air extérieur est porté à la température de $T_{\mathrm{ext}} = 20\,°\mathrm{C}$ et s'il règne une température $T_{\mathrm{int}} = 0\,°\mathrm{C}$ à l'extérieur, on peut évaluer la puissance thermique perdu par cette même vitre. Celle-ci correspond à la chaleur qui traverse la section S de la vitre par unité de temps. On a

$$P = J_Q S = -\kappa \Delta T e \cdot S \tag{21}$$

On remarque alors que l'on peut réécrire cette équation avec le terme de résistance thermique et on obtient alors :

$$P = \frac{\Delta T}{R_{\mathrm{th}}} \tag{22}$$

Application numérique : $P_{\mathrm{perdue}} = 4\,\mathrm{kW}$.

On peut ensuite déterminer la valeur numérique de la résistance thermique d'un double vitrage constitué de deux vitres identiques à celle définie précedemment mais d'épaisseur $e_2 = 2\,\mathrm{mm}$ chacune et d'une épaisseur e_2 d'air sec de conductivité thermique $\kappa_2 = 2.6 \times 10^{-2}\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$. Pour cela, toujours par analogie avec l'électrocinétique on, on additionne les résistances, comme s'il s'agissait de résistances électriques en séries. On obtient alors une résistance équivalentes $R_{\mathrm{éq}}$

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{éq}} &= 2R_{\mathrm{vitre}} + R_{\mathrm{air}} \\ &= 2\left(\frac{e_2}{S\kappa}\right) + \frac{e_2}{S\kappa_2} \\ R_{\mathrm{éq}} &= \frac{2e_2}{S\kappa} + \frac{e_2}{S\kappa_2} \end{aligned} \tag{23}$$